

Wir bilden eine Wortkette

M. H.: Gruppen- und Partnerarbeit bieten sich nach den ersten Wörtern an.

Sch: legen an. Erst immer nur zwei Karten zueinander, bis sie selbst die Wortkette finden.

L: Sucht für die Arbeit einen Namen!

Sch: finden den Begriff „Wörter Schlange“ oder „Wortkette“.

L: Spielt noch einmal! Welche Gruppe braucht die kürzeste Zeit? (Das ist notwendig für die Alleinarbeit.)

L: Schreibe nun den Anfang der Kette auf!

Sch: Apfelbaum Baumkuchen

L: Nun darf jeder die Wortkette allein bilden.

Hausaufgabe: Suche selbst eine solche Kette und schreibe sie auf!

Hartmut Spiegel

„Zauberschlangen“: Übung in Arithmetik einmal anders

Einleitung

Nachfolgend wird ein Problemkreis und ein zugehöriger möglicher Unterrichtsablauf dargestellt, der inhaltlich in das Übungsprogramm zum Rechnen im 3. und 4. Schuljahr paßt, darüber hinaus aber dem Schüler die Möglichkeit gibt,

- Vermutungen aufzustellen und zu überprüfen,
 - selbständig Lösungswege zu finden,
 - Entdeckungen zu machen und die damit verbundene Freude zu spüren,
- und insofern zur Förderung der von der Reform des Mathematikunterrichts intendierten allgemeinen Lernziele beitragen kann. Außerdem läßt er Fragestellungen und Lösungswege mit unterschiedlichem Anspruchsniveau zu und kann einen Beitrag zur inneren Differenzierung leisten.

Um den Unterschieden hinsichtlich Interessen und zur Verfügung stehender Zeit der Leser Rechnung zu tragen, ist der Beitrag so in beschreibende und kommentierende bzw. analysierende Abschnitte gegliedert, daß die Lektüre der Abschnitte 2.1, 3.1, 3.3 notfalls ausreicht, wenn man das Thema im Unter-

richt aufgreifen will. Wer Zeit und Freude für eigene Untersuchungen und Entwicklung von unterrichtlichen Ideen zum Thema hat, sollte nach Lektüre des Abschnitts 1.1 zunächst nicht weiterlesen.

Die den Problemkreis tragende Idee hat der Autor auf dem 3. Internationalen Kongreß über Mathematikunterricht 1976 in Karlsruhe auf einem Poster britischer Lehrer unter dem Stichwort „happy numbers“ kennengelernt. Die Erfahrungen bei der Erprobung einer selbst entwickelten Unterrichtsvorlage zu dieser Idee ließen es ihm sinnvoll erscheinen, sie auf diesem Wege einem breiteren Lehrpublikum in der Bundesrepublik zugänglich zu machen.

1. Der sachliche Hintergrund

1.1 Angaben zur Untersuchung der Operation

Auf jede natürliche Zahl (dargestellt in dezimaler Schreibweise) kann folgende Operation angewendet werden: Man bildet die Summe der Quadrate der einzelnen Ziffern. Beispiele:

$$42 \longrightarrow 20 (= 4 \cdot 4 + 2 \cdot 2)$$

$$70 \longrightarrow 49 (= 7 \cdot 7 + 0 \cdot 0)$$

$$88 \longrightarrow 128 (= 8 \cdot 8 + 8 \cdot 8)$$

$$117 \longrightarrow 51 (= 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 7 \cdot 7)$$

$$3 \longrightarrow 9 (= 3 \cdot 3)$$

Diese Operation wurde im Unterricht „Zahlen verzaubern“ genannt. Durch wiederholte Anwendung der Operation können sogenannte „Zauberschlangen“ gebildet werden, z. B.:

$$45 \longrightarrow 41 \longrightarrow 17 \longrightarrow 50 \longrightarrow 25 \longrightarrow 29 \longrightarrow \dots$$

Aufgabe:

Der Leser wähle einige ein- oder zweistellige Zahlen als Anfang und rechne die dazugehörigen Zauberschlangen so weit, bis ihm etwas auffällt.

Fragen:

- Was kann alles passieren?
- Welche Fragen können zu dieser Operation gestellt werden und wie könnte man sie im Unterricht des 3. oder 4. Schuljahres einbringen?

1.2 Ergebnisse der Untersuchung

Wer sich der Mühe der Untersuchung unterzogen hat, wird festgestellt haben, daß es im wesentlichen zwei Möglichkeiten gibt:

- die Schlange endet bei 1 (die 1 wird in sich selbst verzaubert)
- die Schlange mündet bei einer der sieben Zahlen in den Zyklus

$$4 \longrightarrow 16 \longrightarrow 37 \longrightarrow 58 \longrightarrow 89 \longrightarrow 145 \longrightarrow 20$$

Diejenigen unter den Zahlen von 1 bis 100 (diese Einschränkung wird aus Praktikabilitätsgründen gemacht), deren Zauberschlangen bei 1 enden, nennen wir in Anlehnung an die englischen Kollegen „glückliche Zahlen“ („happy numbers“).

Frage: Welches sind die glücklichen Zahlen? (es gibt 20)

Diese Frage, deren selbständige Beantwortung dem Leser empfohlen sei, kann — nach entsprechender Vorbereitung — die Ausgangsfrage für die unterrichtliche Behandlung dieses Problemkreises sein. Eine andere fruchtbare Fragestellung, die auch einen wichtigen Bezug zur ersten Frage hat, betrifft die Umkehrung der Operation („rückwärts zaubern“).

In der hier benutzten Sprechweise kann man z. B. fragen: „Welche Zahlen werden in die Zahl 50 verzaubert?“ (Symbolisch: $\square \rightarrow 50$).

Um die Anzahl der Lösungen überschaubar zu halten und weitere sinnvolle Fragen stellen zu können, erscheint es zweckmäßig, folgende generelle Einschränkung zu machen: Wir untersuchen nur Schlangen, in denen nur die Zahlen von 1 bis 100 vorkommen. Anders gesagt: Nicht verzaubert werden können Zahlen größer als 100 sowie solche, bei denen das Ergebnis der Operation eine Zahl größer als 100 ist. Die Folge ist, daß beispielsweise die Zahl 41 gezaubert werden kann aus 45 und 54, nicht aber aus 162. Und auch bei obiger Aufgabe zur Zahl 50 fallen die Zahlen 345, 1236 und viele weitere als Lösungen aus. Außerdem endet die bei 84 beginnende Schlange bei 89, denn die 89 kann nicht weiter verzaubert werden.

(Bei der „Definition“ der glücklichen Zahlen wurde die Einschränkung nur für die Schlangenanfänge gemacht. Macht man — wie im Unterricht geschehen — von Anfang an die obige Einschränkung, so gibt es nur 14 glückliche Zahlen. Die Zahlen: 7, 49, 70, 79, 94, 97 fallen weg, da sie alle über 130 auf 1 führen.)

Unter dieser Einschränkung kann man dann auch mit Erfolg nach solchen Zahlen suchen, die aus keiner Zahl gezaubert werden können. (Ohne die Einschränkung hat jede Zahl einen „Vorgänger“.)

2. Die erste Stunde zum Thema: Einführung und Suche nach „glücklichen Zahlen“

Im folgenden wird Unterricht beschrieben und kommentiert, wie er in etwa im Juli 1978 in zwei vierten Klassen in Worms abgelaufen ist. Der Lehrer hatte vorher in den betreffenden Klassen noch nicht unterrichtet.

2.1 Beschreibung des Verlaufs

Der Lehrer erklärt den Kindern, daß er mit ihnen eine Übungsstunde im Rechnen durchführen wolle und daß er dazu eine „Geschichte“ erfunden habe, um es etwas spannender zu machen. Er erzählt ihnen von einem Zauberer, der die Zahlen (von 1 bis 100) nach einer ganz bestimmten Regel verzaubert habe. Die 5 habe der Zauberer in die 25 verzaubert, die 7 in die 49. Das wird so an die Tafel geschrieben:

$$5 \longrightarrow 25$$

$$7 \longrightarrow 49$$

Den unruhig werdenden Kindern teilt er mit, daß er sich denken könne, welche Regel sie vermuteten, aber sie sollten einmal abwarten, denn der Zauberer könne ja auch zweistellige Zahlen verzaubern.

Es folgt:

$$53 \longrightarrow 34$$

$$16 \longrightarrow 37$$

$$29 \longrightarrow 85$$

$$80 \longrightarrow 64$$

Ratlosigkeit bei den Kindern. Das Tafelbild wird ergänzt:

$$53 \longrightarrow 34 \quad (25 + 9)$$

$$16 \longrightarrow 37 \quad (1 + 36)$$

$$29 \longrightarrow 85 \quad (4 + 81)$$

$$80 \longrightarrow 64 \quad (64 + 0)$$

Aber erst die Ergänzung des Tafelbildes um jeweils einen weiteren Klammernausdruck: $(5 \cdot 5 + 3 \cdot 3)$, $(1 \cdot 1 + 6 \cdot 6)$ etc. und der Hinweis, diesen mit der Ausgangszahl zu vergleichen, bringt für die meisten Kinder die Erleuchtung. Der Lehrer schreibt zwei weitere Zahlen an die Tafel (z. B. 46, 38), die die Kinder selbst verzaubern sollen. Nach dem Vergleich der Lösungen werden die Kinder aufgefordert, die Zauberregel zu erklären.

Anschließend teilt der Lehrer den Kindern mit, daß der Zauberer gewisse Zahlen nicht verzaubern könne, da er „nicht über 100 rechnen kann“. Zwei solche Zahlen (z. B. 78, 59) nennt er den Kindern, oder er läßt sie gleich selbst solche suchen und den Sachverhalt begründen.

Nun können die Zauberschlangen angesprochen werden: Nachdem der Zauberer eine Zahl verzaubert hat, verzaubert er das Ergebnis gleich wieder und macht immer so weiter. Gemeinsam wird eine Zauberschlange aufgebaut:

$53 \rightarrow 34 \rightarrow 25 \rightarrow 29 \rightarrow 85 \rightarrow 89$

Da die 89 nicht verzaubert werden kann, hört die Schlange hier auf.

Die Kinder bekommen den Auftrag, nun selbst auf einem Blatt die Schlange, die mit 32 beginnt, aufzuschreiben. Es dauert nicht lange, bis an den Reaktionen der Kinder zu merken ist, daß sie den für sie äußerst amüsanten Tatbestand festgestellt haben, daß die Schlange ab einer bestimmten Stelle nur aus Einsen besteht:

$32 \rightarrow 13 \rightarrow 10 \rightarrow 1 \rightarrow 1 \rightarrow 1 \dots$

Es wird vereinbart, die Schlange bei der ersten Eins abubrechen und die besonderen Zahlen, deren Schlange bei Eins aufhören, „glückliche Zahlen“ zu nennen. (Natürlich kann die Klasse auch eine eigene Namensgebung vornehmen.) Im Anschluß daran werden die Kinder aufgefordert, bis zum Ende der Stunde und möglicherweise zuhause weitere glückliche Zahlen — von denen es 14 gibt — zu suchen.

2.2 Kommentar

2.2.1 Methodische Anmerkungen

- Der beschriebene Verlauf ist gekennzeichnet durch eine mittlere Steuerung des Unterrichtsgeschehens: Einerseits wurde eine Reihe von Vorgaben gemacht und eine festgelegte Folge von Schritten eingehalten, andererseits gab es einige Spielräume: Entdecken der Regel; keine Angabe, welche Methode beim Suchen von „glücklichen Zahlen“ anzuwenden sei. Es ist klar, daß je nach Voraussetzungen bei der Klasse und beim Lehrer mehr oder weniger Steuerung und entsprechend mehr oder weniger Zeitaufwand möglich ist.
- Die Einkleidung „verzaubern“ ist eine unter vielen Möglichkeiten und möglicherweise nicht besonders originell. Sie hängt u. a. damit zusammen, daß der Autor die Art, wie in Schulbüchern und im Unterricht das für die Repräsentation von Operatoren gebräuchliche „Maschinenmodell“ gehandhabt wird, nicht sonderlich schätzt. Das Maschinenmodell hat prinzipiell auch nicht mehr echten Realitätsbezug als die „Zauberei“, auch wenn es — vordergründig betrachtet — so scheint.
- Kaum ein Kind oder auch ein Erwachsener wird in der Lage sein, die Regel allein aus vorgelegten Beispielen ohne jede Art von Hilfestellung zu erkennen. Andererseits sollte sie auch nicht einfach mitgeteilt werden. Eine günstige Schreibweise (statt der Klammern hinter der zweiten Zahl) für die Operation ist auch folgende:

$$\begin{array}{ccc} & 6 \cdot 6 + 5 \cdot 5 & \\ 65 & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & 61, \\ & 36 + 25 & \end{array}$$

wobei man sich ggf. auch auf den Ausdruck über dem Pfeil oder unter dem Pfeil beschränken kann.

- Der Grund für die Einschränkung: „der Zauberer kann nicht über 100 rechnen“, wurde unter 1.2 erläutert. Sie ist an dieser Stelle noch nicht nötig, wurde aber gemacht, um die „Spielregeln“ nicht nachträglich ändern zu müssen. Denkbar ist ein Unterricht, in dem die Kinder von sich aus beim Umkehrproblem den Sinn einer solchen Einschränkung erkennen. Etwas schmerzlich war dieses Vorgehen für den Autor schon wegen der Ähnlichkeit zu der künstlichen Einschränkung auf die Zahlenräume 1–10, 1–20, 1–100 im Unterricht des 1. und 2. Schuljahres.

2.22 Anmerkungen zu Reaktionen der Kinder

- Am auffälligsten war die Hilflosigkeit vieler Kinder nach der Aufforderung: Findet noch weitere glückliche Zahlen! Viele saßen vor ihrem leeren Blatt und starrten in die Luft oder an die Tafel und schienen auf einen Einfall zu warten. Ihre Schwierigkeit bestand offensichtlich darin, daß sie keine präzise Angabe bekommen hatten, was zu tun sei, um das Problem zu lösen. Ihre Vorstellung von mathematisch zulässigen und sinnvollen Methoden schloß das Probieren als Möglichkeit aus. Es fehlte ihnen das Kriterium (oder ein Algorithmus), eine Schlangenanfangszahl zu finden, von der aus man dann aber auch mit Sicherheit bei der 1 landete. Sie hatten kein Arbeitsblatt (Formular) vor sich, das sie nur auszufüllen brauchten, um eine richtige Lösung zu bekommen, sondern ein leeres Blatt (über das sie sich beim Austeilen sehr verwundert hatten), und niemand sagte ihnen, wie und was sie aufschreiben sollten.

Dies alles zeigt die Notwendigkeit, den Unterricht mit Problemen dieser Art anzureichern.

- Es wurden aber auch unmittelbar Vermutungen produziert, mit denen sich die Kinder oft zufrieden gaben, ohne selbst ihre Allgemeingültigkeit nachzuprüfen. Die Primzahlen oder die ungeraden Zahlen waren Kandidaten für die glücklichen Zahlen. Ketten wie $6 \rightarrow 36 \rightarrow 45$ oder $15 \rightarrow 26 \rightarrow 40$ wurden abgebrochen und nicht weitergerechnet, da die Kinder annahmen, die Zahlen würden weiter immer größer werden und daher könne man nicht zur Eins kommen.
- Daß aufgrund des Zusammenhangs $32 \rightarrow 13 \rightarrow 10 \rightarrow 1$ auch 13 und 10 (sowie die 1 als Extremfall) glückliche Zahlen sind, war einigen Kindern sofort klar. Andere sahen dies nicht unmittelbar ein.

3. Fortsetzung: Rückwärts zaubern

3.1 Die zweite Stunde in Klasse A

In einem Unterrichtsgespräch werden die Schlüsselbegriffe der vorausgegangenen Stunde in Erinnerung gerufen: Welches ist die Zauberregel? Wie bekommt man die Zauberschlangen? Was sind glückliche Zahlen? Die Schlange

$$32 \xrightarrow{3 \cdot 3 + 2 \cdot 2} 13 \xrightarrow{1 \cdot 1 + 3 \cdot 3} 10 \xrightarrow{1 \cdot 1 + 0 \cdot 0} 1$$

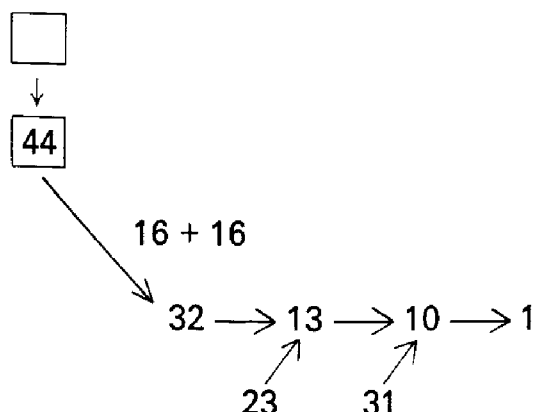
wird in diesem Zusammenhang an die Tafel geschrieben. Frage: Wie können wir weitere glückliche Zahlen finden? Vorschlag der Kinder (und auf Nachfrage auch Begründung): Bei den glücklichen Zahlen, die wir schon kennen, die Ziffern vertauschen. Das Tafelbild wird ergänzt:

$$32 \xrightarrow{3 \cdot 3 + 2 \cdot 2} 13 \xrightarrow{1 \cdot 1 + 3 \cdot 3} 10 \xrightarrow{1 \cdot 1 + 0 \cdot 0} 1$$

$\nearrow$ 23 $\nearrow$ 31

Nun hilft vertauschen nicht mehr weiter. Insofern kommt der Vorschlag eines Kindes sehr gelegen, das erklärt, 32 sei ja $16 + 16$ und daher werde die 44 in

die 32 verzaubert und sei auch eine glückliche Zahl. Das Tafelbild wird um diesen Sachverhalt und die sich natürlich anschließende Fragestellung ergänzt:



Können wir eine Zahl finden, die in die Zahl 44 verzaubert wird? Die Zerlegung $22 + 22$ kommt ins Gespräch, wird aber ebenso wie andere nicht brauchbare nach entsprechender Klärung verworfen. Die ergebnislose Suche wird abgebrochen nicht ohne den Hinweis, daß die Tatsache, daß keine solche Zahl von uns gefunden wird, allein nicht ausreicht, zu behaupten, es gebe keine solche. Aber das Problem — mit Unterstützung des Lehrers — ist klar geworden: Wir müssen versuchen, eine Zahl in zwei Quadratzahlen zu zerlegen. Da das Unterrichtsgespräch schon übermäßig lang geworden war, werden entsprechende Aufgaben zur Stillarbeit angeschrieben:

$$40 = \square + \square$$

und ebenso: 97, 53, 85, 52, 74, 68. Die Lösungen werden am Ende der Stunde angeschrieben und verglichen:

$$40 = \boxed{6 \cdot 6} + \boxed{2 \cdot 2}$$

$$\begin{array}{l} 62 \\ 26 \end{array} \rightarrow 40 = \boxed{6 \cdot 6} + \boxed{2 \cdot 2}$$

3.2 Anmerkungen

- Auch in dieser Stunde konnte man beobachten, daß die Kinder zufällige Beziehungen, die in diesem Zusammenhang ohne Bedeutung sind, zu Verallgemeinerungen benutzen: Die Beziehung $32 = 16 + 16$ führt zur Vermutung, beim Rückwärtszaubern müsse man immer halbieren. Ein anderes Kind entdeckt bei der Schlange $23 \rightarrow 13 \rightarrow 10 \rightarrow 1$ die Beziehung: $23 = 13 + 10$ und will sie ausnutzen, weiß aber nicht recht wie.
- Die Aufgaben des Typs $85 = \square + \square$, wobei in die Leerstellen nur Quadratzahlen eingetragen werden dürfen, sind deswegen fruchtbar, weil sie verschieden anspruchsvolle Lösungsstrategien zulassen und es Aufgaben mit keiner, genau einer (bis auf Vertauschung) und mehreren Lösungen gibt. Beispiele:

$$39 = \square + \square \text{ unlösbar}$$

$$74 = 49 + 25$$

$$85 = 36 + 49; 85 = 81 + 4$$

Verschiedene Lösungsstrategien werden an anderer Stelle erwähnt.

3.3 Die dritte Stunde in Klasse A

Der Lehrer schreibt an die Tafel:

$$\square \longrightarrow 61$$

Die dazugehörige Fragestellung im Zusammenhang mit dem Zaubern ist den Kindern klar, nicht jedoch — jedenfalls nicht allen — die Lösungsmethode der vorausgegangenen Stunde, wie man am Vorschlag „Teilen“ erkennen kann. Die Methode der Zerlegung in Quadratzahlen wird gemeinsam wiederholt und an Aufgaben zu den Zahlen 98, 54, 45 gemeinsam erprobt. Dabei legt die Aufgabe ohne Lösung ein systematisches Vorgehen nahe, das von einem Kind vorgeschlagen wird: Man nehme die nächst kleinere Quadratzahl, bilde die Differenz zur gegebenen Zahl und schaue, ob diese eine Quadratzahl ist. Falls ja, hat man eine Lösung, anderenfalls fahre man fort. Der Schüler Reinhardt merkt an (sinngemäß wiedergegeben), daß man das nur für die Quadratzahlen tun müsse, die größer oder gleich der Hälfte der gegebenen Zahl sind. Im zweiten Teil der Stunde arbeiten die Schüler an der Aufgabe, von der Zahl 52 soweit vorwärts und rückwärts zu zaubern, wie es geht. Die

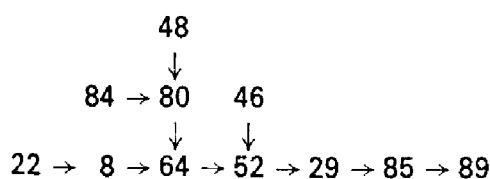
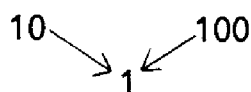


Abb. 1

Lösung wird notiert (vgl. Abb. 1) und am Ende der Stunde verglichen. Die Schüler, die vorzeitig fertig sind, bekommen den Auftrag, durch „rückwärts Zaubern“ von der Zahl 1 aus alle glücklichen Zahlen zu finden. Der Anfang wird so vorgegeben:



3.4 Anmerkungen

Die von den Kindern vorgeschlagenen Lösungsmethoden zeigen, in welchem Maße Aufgabenstellungen zu diesem Problemkreis bei Kindern mit entsprechenden Voraussetzungen mathematisches Denken mobilisieren können. Reinhardts Vorschlag kam möglicherweise aufgrund einer Analogiebildung zu dem Verfahren zustande, mit dem in dieser Klasse alle Teiler einer Zahl bestimmt worden waren. Dennoch ist es eine erstaunliche Leistung.

3.5 Die zweite Stunde in Klasse B

In Klasse B konnten aufgrund der zur Verfügung stehenden Zeit nur 2 Stunden gehalten werden. Wegen des etwas anderen Verlaufs und Einsatzes eines anderen Hilfsmittels (Tabelle) soll auch diese Stunde kurz beschrieben werden.

Einführendes Unterrichtsgespräch zur Wiederholung der Zauberregel. Tafelbild:

$$\begin{array}{ccc}
 6 \cdot 6 + 3 \cdot 3 & & \\
 63 \xrightarrow{\quad \quad} & 45 & \\
 36 + 9 & & \\
 \\
 2 \cdot 2 + 7 \cdot 7 & & \\
 27 \xrightarrow{\quad \quad} & 53 & \\
 4 + 49 & &
 \end{array}$$

Anschließend das Stichwort „Rückwärts zaubern“ und Frage, welche Zahl in die Zahl 52 verzaubert wird.

$\square \longrightarrow 52$

Vorschläge der Schüler:

- 1) 26 (wegen $27 \longrightarrow 53$)
- 2) Teilen: $5 : 5$ und $2 : 2$; „aber da kommt ja immer 1 raus“
- 3) Teilen: $52 : 5$ und $52 : 2$
- 4) „Minus-Nehmen, aber was?“

Der Hinweis des Lehrers auf $36 + 9$ beim 1. Beispiel führt dann auf die Methode des Zerlegens in zwei Quadratzahlen.

Aufgaben zum rückwärts Zaubern zu den Zahlen 74, 85, 65, 78, 98 werden in der üblichen Form an die Tafel geschrieben. Die Schüler ermitteln die Ergebnisse in Stillarbeit. Die Ergebnisse werden durch gemeinsame Vervollständigung des Tafelbildes verglichen. Dabei erhebt sich die Frage, wie begründet werden kann, daß es bei 78 keine Lösung gibt. Ein Schüler schlägt vor, alle Quadratzahlen nacheinander von 78 abzuziehen: „Wenn dann keine Quadratzahl rauskommt, geht’s nicht“.

Der Lehrer führt in diesem Zusammenhang die Additionstabelle für die Quadratzahlen (Abb. 2) als Hilfsmittel ein. Am Overhead-Projektor zeigt er durch Eintragungen in ein leeres Schema, wie diese Tabelle entsteht, und präsentiert anschließend die fertige Tabelle:

		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	+	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
		0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
0	0	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
1	1	1	2	5	10	17	26	37	50	65	82
2	4	4	5	8	13	20	29	40	53	68	85
3	9	9	10	13	18	25	34	45	58	73	90
4	16	16	17	20	25	32	41	52	65	80	97
5	25	25	26	29	34	41	50	61	74	89	106
6	36	36	37	40	45	52	61	72	85	100	117
7	49	49	50	53	58	65	74	85	98	113	130
8	64	64	65	68	73	80	89	100	113	128	145
9	81	81	82	85	90	97	106	117	130	145	162

Abb. 2

Die Schüler stellen fest, daß 78 nicht in der Tabelle vorkommt. Am Beispiel der Zahl 50 wird erarbeitet, wie man mit der Tabelle rückwärts zaubern kann. Anschließend werden die Tabelle und ein Arbeitsblatt mit folgenden drei Aufgaben ausgeteilt, das die Schüler während der restlichen Zeit der Stunde bearbeiten.

1. Schreibe in den Kasten über jede Zahl alle Zahlen, die in diese Zahl verzaubert werden! (Abb. 3)
2. Schreibe fünf Zahlen auf, die aus keiner Zahl gezaubert werden können!

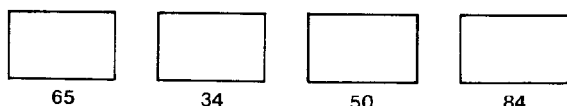


Abb. 3

3. Schreibe eine möglichst lange Schlange auf, in der die Zahl 17 vorkommt! (Sie hat zehn Zahlen.)

3.6 Anmerkungen

- Die Schülervorschläge zeigen, welche Schwierigkeiten hinsichtlich der Umkehrung dieser zusammengesetzten Operation bestehen. Die Kinder versuchen, das Problem mit Hilfe von ihnen bekannten Operationen bzw. Zusammenhängen zu lösen (gewissermaßen ein Versuch der Assimilation im Sinne *Piagets*). Sie machen auch nicht immer durch „vorwärts Zaubern“ von sich aus die Probe, ob ihr Ergebnis des rückwärts Zauberns stimmt.
- Nach dem Stellen der anderen Aufgaben begann ein Schüler spontan, alle Quadratzahlen von 1 bis 100 auf ein Blatt zu schreiben. Diese Lösungsstrategie wird durch den Einsatz der Tabelle aufgegriffen, die bei einer umfangreicheren Untersuchung der Operation eine erhebliche Hilfe darstellt. Sie war auch nützlich bei der Erstellung der Abb. 4, die dem Lehrer für Unterrichtszwecke eine schnelle Übersicht verschafft. Ein Schüler, der den Zusammenhang zwischen Suche nach glücklichen Zahlen und rückwärts Zaubern erfaßt hatte, reagierte richtiggehend dankbar für die Tabelle: „Jetzt kann ich das selbst!“
- Im Hinblick auf den Stoffumfang dieser Stunde ist zu bemerken: Sie dauerte etwas länger als 45 Minuten und fand in einer besonders leistungsstarken Klasse statt.

4. Andere Fragestellungen; Variation der Situation

Ausgangspunkt der Untersuchungen im Unterricht war die Frage nach den „glücklichen Zahlen“. Dieses Problem kann durch systematisches Probieren oder durch „rückwärts Zaubern“ gelöst werden. Dabei ergibt sich eine Reihe neuer Fragen, die, unabhängig vom Ausgangsproblem für sich allein genommen, Gegenstand einer Untersuchung sein können, z. B.:

- Welche Zahlen können nicht verzaubert werden?
- Welche Zahlen können aus keiner Zahl gezaubert werden?
- Welche Zahlen können aus genau einer (zwei, mehr als zwei) Zahlen gezaubert werden?
- Welches sind die längsten Schlangen?
- Welches sind die kürzesten Schlangen?

(Schnittmenge der Zahlenmenge zu den ersten beiden Fragen!)

Läßt man die Einschränkung (nur bis 100 rechnen) fallen, so kann man auch die Schlange suchen lassen, die sich in den Schwanz beißt.

Die obigen Fragen wecken dann vielleicht auch das Bedürfnis, sich eine Übersicht über den gesamten Zusammenhang zu verschaffen und ihn so darzustellen, wie es in Abb. 4 gemacht wurde. Damit diese Darstellung auch für denjenigen nützlich ist, der ohne Einschränkung arbeitet, wurde sie in dieser Form erstellt. Mit Einschränkung entfallen die eingerahmten dreistelligen Zahlen.

Es drängt sich natürlich auch die Frage nach möglichen Variationen auf. Abgesehen davon, daß die zugrundeliegende Zahlenmenge erweitert werden kann, können auch andere Operationen betrachtet werden. In dem Buch von

