den Bänden 7 und 8 die Zuordnung von relativen Häufigkeiten oder Wahrscheinlichkeiten an keiner Stelle erwähnt, in den Abschnitten zu den Winkelgrößen in Band 6 taucht das bereits in Band 5 eingeführte Glücksrad an keiner Stelle auf, in den Abschnitten zur Prozentrechnung in Band 7 ist nirgends von Wahrscheinlichkeiten die Rede.)

Den Möglichkeiten *genetischer Einführung von Begriffen und Methoden* kommt das Lehrwerk auf Grund der Konzentrierung auf Aufgabensequenzen in höherem Maße entgegen als die Mehrzahl der anderen Lehrbücher für die Sekundarstufe I. Zwangsläufig werden damit aber auch die Anforderungen an den Unterrichtenden erhöht, was inbesondere im Bereich der Stochastik zu Problemen führen kann. In diesem Sinn sind die diesbezüglich recht ausführlichen grundsätzlichen Sachinformationen und didaktischen Hinweise in den Lehrerbüchern zu begrüßen. Ob sie allerdings das weitaus bequemere „Vorsetzen von mathematischen Fertigprodukten" immer verhindern können, muß gerade im Bereich der Stochastik bezweifelt werden. Hier bedarf es in der jetzigen Phase eher ausgearbeiteter Unterrichtssequenzen, wie sie auch im Rahmen von ausführlichen Lehrerbänden kaum aufgeführt werden können. Begünstigend für eine genetische Unterrichtsmethode wirken sich sicherlich die vielen, auf die Ausführung von Tätigkeiten gerichteten Aufgabenformulierungen in Verbindung mit den Zufallsgeräten aus.

Für die *Problemorientierung* gelten im Grunde die gleichen Anmerkungen wie für die genetische Methode, auch hier bietet die Beschränkung auf Aufgaben eine (nicht immer leicht wahrnehmbare) Chance. Allerdings sind die Aufgabensequenzen häufig doch schon so durch die Anordnung und die damit verbundene Isolierung von Schwierigkeiten strukturiert, daß eine etwa als Leitlinie über mehrere Stunden tragende Problemorientierung nicht nahegelegt wird. Dies wird z. B. im Bereich Kombinatorik sehr deutlich, wo die hierfür eventuell geeigneten Probleme erst in einem eigenen Abschnitt „Anwendungen" nach vorhergehender Behandlung aller Zählregeln angeboten werden (Band 9, Gymnasium). Insgesamt kann das durchweg ansprechende Aufgabenangebot im Rahmen der Stochastik zumindest als Angebot für die Gestaltung eines problemorientierten Unterrichts genutzt werden.

Das *„operative Prinzip"* wird bei den Aufgabenstellungen durchgängig beachtet. Als ein Beleg können etwa die Abschnitte zur Wahrscheinlichkeit von Ausfällen und Ereignissen in Band 6 dienen. Hier werden z. B. Wahrscheinlichkeiten bei vorgegebenen Glücksrädern bestimmt und umgekehrt auch Glücksräder zu vorgegebenen Wahrscheinlichkeiten konstruiert, ebenso werden bei der Arbeit mit Wahrscheinlichkeitsbäumen zueinander inverse Operationen angeregt. Auch verschiedene graphische Veranschaulichungen werden zueinander in Verbindung gesetzt. Insgesamt werden dadurch lernpsychologisch wertvolle Hilfen für die Begriffsbildung im Rahmen der Stochastik angeboten.

Anders sieht es mit dem Anliegen der *Entwicklung des funktionalen Denkens* aus. Diesbezüglich werden die von der Stochastik gegebenen Möglichkeiten durch Betonung der Aspekte „Wahrscheinlichkeitsfunktion" und „Wahrscheinlichkeitsverteilung" nur wenig genutzt und ausgeformt. Hier vertraut man wohl mehr auf die „klassischen" Funktionen (s. o.).

Zusammenfassung

Ohne Zweifel ist in dem vorliegenden Lehrwerk über die Jahrgänge verstreut ein Lehrgang zur Stochastik ausgewiesen, der dem Schüler einen Einblick in die spezifischen Begriffsbildungen und Denkweisen der Stochastik vermittelt. Die von den gegenwärtigen Lehrplänen zur Sekundarstufe I ausgewiesenen Ziele können damit überwiegend erreicht werden.

Die angedeuteten Unstimmigkeiten und Defizite im Aufbau lassen allerdings deutlich erkennen, daß hier noch keine mit anderen Gebieten vergleichbare ausgereifte Konzeption gefunden ist. Dies betrifft sowohl den Umfang der Darstellungen zur Stochastik als auch vor allem deren Integration in den gesamten Mathematikunterricht der Sekundarstufe I. Insbesondere das Verhältnis Statistik–Wahrscheinlichkeitsrechnung bedarf noch einer klareren und mehr auf Zusammenwirken ausgerichteten Bestimmung. Damit wird allerdings ein Problem beleuchtet, das in der jüngsten didaktischen Diskussion zum Stochastikunterricht zwar immer deutlicher gesehen und auch formuliert wird[1]), dessen Lösungsperspektiven aber auch auf dieser Ebene erst noch klare Konturen gewinnen müssen.

Athen, H.; Griesel, H. (Hrsg.):

Mathematik heute: für Gymnasien

Neubearbeitung, 5.–8. Schuljahr, 1977–1980
alte Ausgabe, 9.–10. Schuljahr, 1975–1976
Hannover: Schroedel, Padernborn: Schöningh,
(Mathematik Sekundarstufe I)

Griesel, H.; Sprockhoff, W. (Hrsg.):

Welt der Mathematik

Neubearbeitung, 5.–7. Schuljahr, 1978–1980
alte Ausgabe, 8.–10. Schuljahr, 1976–1978
Hannover: Schroedel
(Mathematik Sekundarstufe I)

Oehl, W.; Palzkill, L. (Hrsg.):

Die Welt der Zahl: Mathematisches Unterrichtswerk für Grund- und Hauptschule

5.–10. Schuljahr
Hannover: Schroedel, 1973–1980

Hartmut Spiegel, Paderborn

Vorbemerkung

Im folgenden werden die besprochenen Lehrbücher durch folgende naheliegende Abkürzungen bezeichnet: MH, WM, WZ. Bevor auf einzelne Aspekte des Stochastiklehrganges der besprochenen Lehrwerke näher eingegangen wird, sollen einige Punkte angesprochen werden, die allgemeiner Natur sind. Ein Kennzeichen aller drei Lehrgänge ist, daß der Stoff im wesentlichen in separaten Kapiteln – in der Mehrzahl am Schluß der Bücher – angeboten wird. Es handelt sich zumeist um Zusatzstoff, und zwar einerseits im Sinne einer Stoffvermehrung und andererseits als nicht dem Pflichtstoff zugehörig. Eine sinnvolle Integration in Form einer „Durchdringung des Mathematikunterrichts mit stochastischen Aspekten" (Winter) ist nicht zu erkennen. Aus dem Zusatzstoffcharakter resultiert auch die Schwierigkeit eines sinnvollen spiraligen Aufbaus der Lehrgänge. Die Ka-

[1]) Vgl. hierzu etwa den Bericht von M. Borovcnik über das 3. Kärntner Symposium für Didaktik der Mathematik: „Stochastik im Schulunterricht" in ZDM 13 (1981) 3, S. 112–117.

pitel sind weitgehend nach dem Prinzip aufgebaut: „Da die Inhalte aus den vorangegangenen Bänden kaum vorausgesetzt werden können ..." (Lehrerband WM8), wobei dann der begrifflichen Grundlegung in den späteren Schuljahren häufig nicht mehr soviel Zeit und Sorgfalt gewidmet wird. Ohnedies spürt der Rezensent in keinem der Lehrgänge etwas von besonderen Bemühungen, die Diskrepanzen zwischen intuitiven Einschätzungen und der Theorie aufzudekken und überwinden zu helfen. Dies könnte z. B. durch bewußte Präsentation von Beispielen und Fragestellungen geschehen, die Fehleinschätzungen produzieren oder offenlegen und der Bearbeitung zugänglich machen. Hiermit könnte ein Beitrag geleistet werden zu dem im Lehrerband von MH6 (S. 155) formulierten Ziel:

„Der Schüler soll schon frühzeitig erkennen, daß es besondere stochastische Denkweisen gibt, die gleichrangig und selbständig neben anderen möglichen mathematischen Denkweisen (z. B. der geometrischen) stehen und deshalb nicht als Feld reiner Rechenübungen zu betrachten sind. Es kommt wesentlich auf die Intuition an."

Im Hinblick auf dieses Ziel scheinen alle Lehrgänge – worauf nachher noch im Detail eingegangen wird – noch weiterentwicklungsfähig zu sein.

Auch ein tragfähiges Differenzierungskonzept wird aus dem Vergleich der für Hauptschule, Realschule und Gymnasium bestimmten Lehrgänge noch nicht sichtbar: Im Hauptschulbuch WZ beispielsweise sind die kombinatorischen Aufgaben hauptsächlich reine Urnenziehungsaufgaben und beim Thema Wahrscheinlichkeit dominieren Abzählaufgaben (günstige Fälle/mögliche Fälle). Der Lehrgang im Gymnasialbuch MH hat den größten Umfang (100 von 1358 Seiten), das höchste Abstraktionsniveau, ausführliche Erklärungen im Schülerbuch sowie mehr Aufgaben als gestellt werden können (also eine Auswahlmöglichkeit für den Lehrer). Die didaktischen Kommentare im Lehrerband zu MH sind die ausführlichsten und ergiebigsten. Das magerste Angebot bietet das Realschulbuch WM mit 24 von 734 Seiten gegenüber 43 von 714 beim Hauptschulbuch WZ.

Das Vorspiel: Wahrscheinlichkeitsvergleiche vor Bekanntgabe der Laplace-Regel

Die Bekanntgabe der Laplace-Regel zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit von Ereignissen in Laplace-Räumen erfolgt in allen drei Lehrgängen erstmalig im Band des 6. Schuljahres. (Warum – zugegebenermaßen etwas abwertend – von „Bekanntgabe" gesprochen wird, erläutern wir später.) Für ihr Verständnis und für die Entwicklung des stochastischen Denkens ist aber nicht unwesentlich, welche intuitiven Vorstellungen schon vorher zum Begriff „Wahrscheinlichkeit" aufgebaut werden. In diesem Punkt weisen die Lehrgänge einige Unterschiede auf. Gemeinsam ist ihnen zunächst, daß im 5. und 6. Schuljahr Gewinnchancen verschiedener Gewinnregeln ein und desselben Glücksspiels mit lauter gleichwahrscheinlichen Ausfällen (z. B. einfacher bzw. Doppelwurf mit Spielwürfeln; ein-, zwei-, dreifacher Münzwurf) miteinander verglichen werden. Der Vergleich geschieht dann mit Hilfe der Anzahl der Ausfälle, die einen Gewinn herbeiführen. Abgesehen von der Einführung der Terminologie (auf die wir später zu sprechen kommen) sowie den verschiedenen Möglichkeiten, die Menge oder gewisse Teilmengen der Ausfälle aufzuschreiben oder darzustellen (z. B. Tabelle oder Baum), ist damit das „Vorspiel" in WM und MH im wesentlichen beschrieben. In diesem Teil dieser Lehrgänge taucht das Wort „wahrscheinlicher" nicht auf, vielmehr wird z. B. gefragt:

„Ist diese Spielregel gerecht?" „Bei welcher Spielregel ist die Gewinnchance am größten?" „Welcher Junge ist im Vorteil?" „Welche Gewinnregel ist am günstigsten?" Entschieden wird nach dem – den Schülern sicherlich vertrauten oder leicht zu akzeptierenden – Rezept: „Bei mehr Gewinnzahlen sind die Gewinnchancen größer" (siehe Musterlösung zu Aufgabe 1 MH5). Daß dieser Satz mehr bedeuten kann als nur die Ersetzung von „mehr Gewinnzahlen" durch „größere Gewinnchancen", erfahren die MH-Schüler im 6. Band: „Bei jeder der 4 Zahlen 2, 3, 5, 7 gewinnt Bernd, bei den anderen 6 Zahlen verliert er. *Bernd muß öfter mit Verlust als mit Gewinn rechnen*" (Hervorhebung vom Rezensenten).

Von der vorauszusetzenden Gleichwahrscheinlichkeit der Ausfälle wird unterstellt, daß die Schüler sie „intuitiv erfassen" (Lehrerheft zu MH6). Schön wär's – insbesondere beim drei- oder vierfachen Münzwurf; möglicherweise wird dem Schüler aber die Notwendigkeit dieser Voraussetzung nicht bewußt oder die Art der Vorgabe der Darstellung der Menge der Ausfälle verhindert, daß sie auf den Gedanken kommen, bestimmte Ausfälle könnten nicht gleichberechtigt sein. Einen Hinweis liefert lediglich Aufgabe 5 in WM5, S. 5 – doch leider ist sie nicht für alle Schüler gedacht! Die Schülerbücher von WM5,6 und MH5,6 enthalten in diesem Teil keinerlei Anregung zu eigenen Versuchen; das Lehrerheft von WM5 erwähnt solche eher nebenbei, während im Lehrerheft von MH6 (warum nicht in 5?) Schüleraktivitäten wiederholt gefordert werden.

Der Lehrgang in WZ setzt – nach einem Einstieg über die umgangssprachliche Kennzeichnung von Ereignissen mit den Prädikaten „unmöglich", „unwahrscheinlich", „wahrscheinlich", „sicher", auf dessen Problematik hier nicht eingegangen werden soll – mit einem Schülerexperiment ein: Jeder Schüler soll 30× würfeln und eine Strichliste über die Häufigkeit des Vorkommens der einzelnen Zahlen anfertigen. Der Vergleich der Strichlisten verschiedener Schüler soll zeigen, daß die Würfelergebnisse zufällig sind. Es schließen sich zwei Fragen an: „Was ist wahrscheinlicher, du wirfst eine 2, du wirfst keine 2? Warum?" „Andreas würfelt einmal. Was ist wahrscheinlicher, er würfelt eine 5 oder eine gerade Zahl?" Im Lehrerheft wird vorgeschlagen, eventuell (bzw. im Zusammenhang mit der 2. Frage: den schwächeren Schüler) eine Strichliste zwecks Hilfe bei der Beantwortung der Frage anlegen zu lassen. Angesichts der im Schülerbuch abgedruckten Liste (die „3" ist 5× geworfen, die „5" 7×) ist man natürlich sofort geneigt, die Frage zu stellen: „Was ist wahrscheinlicher, du wirfst eine 3, du wirfst eine 5?" Der Lehrgang benutzt also von Anfang an die Bezeichnung „ist wahrscheinlicher", und zwar zur Kennzeichnung eines Vergleichs zwischen „Stärken" der Erwartung des Eintreffens verschiedener möglicher Ergebnisse eines Einzelexperiments, siedelt aber die *Begründung* dieser Urteile nicht immer konsequent genug auf der Modellebene an. (Auf die Thematisierung der Beziehung zwischen Modell und Realität in allen drei Lehrgängen werden wir noch gesondert eingehen.) Als Beispiel für eine andere nicht unproblematische Verwendung der Bezeichnung „wahrscheinlicher" soll folgende Aufgabe angeführt werden (WZ5, S. 19, Aufg. 7): „In einer Klasse sind 10 Mädchen und 25 Jungen. Ein Kind wird zum Klassensprecher gewählt. Was ist wahrscheinlicher, Junge oder Mädchen?" Nachdem die (Haupt-)Schüler gelernt haben, daß die in diesem Abschnitt behandelten Aufgaben so formuliert sind, daß man statt des Wortes „mehr" das Wort „wahrscheinlicher" benutzen muß, werden sie sicherlich – ohne die Problematik der Aufgabe wahrzunehmen – so vorgehen, wie es auch das Lehrerheft vorsieht: „Die günstigen Fälle für die einzelnen Ereignisse (ob Junge oder Mädchen) sind bereits in der Aufgabe angegeben und nur noch zu vergleichen."

Die Laplace-Regel

Erst wenn man Gewinnchancen bei zwei Glücksspielen, zu denen verschieden große Anzahlen jeweils gleichwahrscheinlicher Ausfälle gehören, vergleichen will, versagt das Rezept: „Je größer die Anzahl der günstigen Fälle, desto größer die Gewinnchance" und dann erst stellt sich die Frage: Gibt es auch in diesem Fall eine Möglichkeit, mit Hilfe einer Quantifizierung die Gewinnchancen zu vergleichen? (Im Zusammenhang mit der Frage nach einer Quantifizierung findet sich in MH6, S. 211, die ausgesprochen problematische Formulierung: Wie kann man die Gewinnwahrscheinlichkeiten der beiden Becher *messen?* [Hervorhebung vom Rezensenten].) Eine – wenn auch nicht die einzige – Möglichkeit besteht darin, die Gewinnchance durch den Laplace-Quotienten zu quantifizieren. Die erstmalige Einführung dieser Zahl geschieht in den drei Lehrgängen auf unterschiedliche und insgesamt unbefriedigende Weise. In WZ6 ist Ausgangspunkt der Vergleich zweier Gewinnregeln beim einmaligen Würfeln: „Werfen einer Zahl größer oder gleich 3" und „Werfen einer Zahl kleiner oder gleich drei", also eine Situation, die die Verwendung des Quotienten weder nahelegt noch erfordert. Nachdem mitgeteilt wird, daß man die entsprechenden Bruchteile vergleichen soll, kommt die Merkregel im Kasten:

$$\boxed{\text{Wahrscheinlichkeit} = \frac{\text{Anzahl der günstigen Ausgänge}}{\text{Anzahl der möglichen Ausgänge}}}$$

Anschließend werden im wesentlichen nach dieser Regel Wahrscheinlichkeiten ausgerechnet und verglichen, und zwar ausnahmslos für Ereignisse ein- und desselben Stichprobenraums. Der allgemeine Kommentar im Lehrerheft zu diesem wesentlichen Schritt im Lehrgang ist dürftig, unpräzise und schwer in Zusammenhang mit den im Schülerbuch angegebenen Aufgaben zu bringen (was ist mit „erfahren" gemeint?). Er lautet:

Didaktisches Ziel
Die Schüler sollen auf Grund eigener Versuche erfahren, wie man verschiedene Grade der Wahrscheinlichkeit zahlenmäßig bestimmen kann.
Didaktische Hinweise

1. In den vorangegangenen Übungen haben die Schüler selbst festgestellt, welche unter den möglichen Fällen einer Versuchsreihe (Würfeln) je nach Spielregel als günstig zu bezeichnen sind. Dabei haben sie erfahren: Je größer die Anzahl der günstigen Fälle, je größer die Gewinnchance (je größer die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen).
2. Dieser bereits bekannte Zusammenhang zwischen dem Grad der Wahrscheinlichkeit und der Anzahl der günstigen Fälle wird jetzt genau präzisiert.

$$\text{Wahrscheinlichkeit} = \frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}}$$

Im Einführungsbeispiel in WM6 sind zwar Gewinnchancen bei zwei Losbehältern mit verschiedenen Losanzahlen zu vergleichen, aber wenn die Schüler verstanden haben, was sie verstanden haben sollten, *bevor* der Laplace-Quotient eingeführt wird, wissen sie auch so, daß sie bei 5 Gewinnlosen unter 15 Losen bessere Gewinnchancen besitzen, als bei 4 Gewinnlosen unter 20 Losen. Es wird ihnen kaum verständlich zu machen sein, wieso man ausgerechnet bei diesem Problem Bruchoperatoren berechnen soll, um Bruchteile zu vergleichen. Immerhin wird im Zusammenhang mit einem Gegenbeispiel wenigstens auf die Voraussetzung, daß alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sein müssen, eigens hingewiesen – im Lehrgang WZ wird das erst im 9. Schuljahr erwähnt.

Nur der Text in MH6 enthält Ansätze von Überlegungen zur Begründung für die Wahl des Quotienten als Maß für die Gewinnwahrscheinlichkeit: Zur Auswahl stehen ein Becher mit 12 Kugeln, davon 5 Gewinnkugeln sowie einer mit 18 Kugeln, davon 7 Gewinnkugeln. Um den Vergleich anstellen zu können, wird jeder Becher durch einen „Großbecher" mit 36 Kugeln ersetzt, wobei der eine 15 und der andere 14 Gewinnkugeln hat. Nun ist der Vergleich auf die bekannte Art möglich. (Das Verfahren setzt natürlich voraus, daß man anerkennt, daß sich durch diese Operationen die jeweiligen Gewinnchancen nicht ändern. Diese Einsicht kann aber sicherlich und sollte auch *vor* Einführung des Laplace-Quotienten vermittelt werden. An dieser Überlegung läßt sich sehr schön eine Begründung für die Wahl des Laplace-Quotienten als Maß für die Gewinnchance aufhängen. Aber der Text im Buch überzeugt an dieser Stelle nicht. Darüber hinaus finden sich nirgendwo – auch nicht in den Lehrerbänden (die Kommentare zu MH sind übrigens die ergiebigsten) – Hinweise, wie man andere – adäquate und inadäquate – Quantifizierungen für Gewinnchancen mit in die Diskussion einbeziehen kann. Denkbar ist doch, daß auch Schüler Vorschläge machen wie: Verhältnis zwischen Anzahl der Gewinnkugeln und Anzahl der anderen Kugeln oder die Differenz zwischen diesen beiden Zahlen. Der letztgenannte Vorschlag könnte eine Konsequenz sein aus der vielfach anzutreffenden intuitiven Einschätzung, daß sich die Wahrscheinlichkeit, aus einer beliebig aus zwei Sorten Kugeln zusammengesetzten Kollektion eine Kugel einer bestimmten Sorte zu ziehen, nicht ändert, wenn man von jeder Sorte eine Kugel hinzufügt.

Gemessen an dem mit dem Unterricht in Stochastik auf der SI verbundenen Ziel, stochastische Denkweisen zu entwickeln, ist es verwunderlich, wie wenig Fragestellungen in den Lehrgängen angeboten werden, aus denen Einsichten erwachsen können, auf deren Grundlage ein besseres Verständnis der Laplace-Quantifizierung möglich ist. Hier ist eine enorme Diskrepanz z. B. zu dem heute üblichen fein abgestuften Vorgehen bei der Hinführung zur Längen- oder Flächeninhaltsmessung bzw. -berechnung zu beobachten. Wir plädieren dafür, vor Einführung des Laplace-Quotienten z. B. für Ziehungen aus einer Urne bzw. den Vergleich von zwei Urnen Fragen der Art zu untersuchen: Wie ändert sich die Wahrscheinlichkeit, wenn ich bestimmte Daten der Situation ändere bzw. bei welchen Änderungen ändert sie sich nicht? Auf Einzelheiten kann an dieser Stelle leider nicht eingegangen werden.

Wahrscheinlichkeit und relative Häufigkeit – Die Beziehung zwischen Modell und Realität

Die besondere Beziehung zwischen Modell und Realität ist eine spezifische Eigenart stochastischen Denkens, und ein Unterricht in der Sekundarstufe I, der einen Beitrag zur Entwicklung dieses Denkens leisten will, sollte dieser Beziehung besondere Aufmerksamkeit schenken.

Der Lehrgang in WZ setzt schon in Klasse 5 mit Hinweisen darauf ein, daß Wahrscheinlichkeit ein Maß für erwartete Ergebnisse ist und daß die tatsächlichen Ergebnisse in der Regel davon abweichen. Der entsprechende Abschnitt heißt in der früheren Ausgabe: „Gedankenexperiment und Versuchsergebnis" (Lehrerband: „Der Schüler muß unterscheiden lernen zwischen *erwarteten* und *tatsächlichen* Ergebnissen. Er soll erkennen, daß jeder Ausfall in einem Gedankenexperiment gleich oft zu erwarten ist, während bei einem Versuch dagegen die Ausfälle verschieden häufig auftreten können") und in der Neubearbeitung: „Erwartete und tatsächliche Ergebnisse". Hier ist der für eine 5. Hauptschulklasse vielleicht doch etwas problematische Begriff des „Gedankenexperiments" fallen gelassen worden. Was soll ein solcher Schüler mit der Aufforderung anfangen: „Mache ein Gedankenexperiment mit einer 10 Pf-Münze für 20 Doppelwürfe."

Die Einschätzung der Beziehung zwischen Modell und Realität, die sich hinter Schüler- und Lehrerbandtexten in WZ verbirgt, stellt sich dem Rezensenten so dar: Bei manchen Vorgängen in der Wirklichkeit spielt der Zufall eine Rolle. Bei diesen kann man das Ergebnis im Einzelfall bzw. für häufige Wiederholungen die Verteilung der Ergebnisse nicht exakt vorhersagen. Also machen wir Gedankenexperimente und würfeln dabei z. B. 30× mit einem „idealen" (laut Lehrerband: „gleichmäßig gearbeiteten") Würfel. Dort herrscht zwar auch noch der Zufall, aber nicht uneingeschränkt: Jede Zahl ist gleich oft zu erwarten. In der Wirklichkeit (oder vielleicht doch auch schon im Gedankenexperiment?) macht uns der Zufall einen Strich durch die Rechnung (oder hat man „schlecht gewürfelt"? So eine Formulierung in WZ6. Oder ist der Würfel nicht ideal?). Aber da sich bei großen Versuchsreihen die relative Häufigkeit der aus einem gedachten Versuch berechneten Wahrscheinlichkeit nähert, erwarten wir für reale Experimente das gleiche wie für Gedankenexperimente. (Wenn der Rezensent die Autoren mißverstanden hat, ist das möglicherweise darauf zurückzuführen, daß sie ihre diesbezüglichen Auffassungen nicht explizit und ausführlich – so wie z. B. im Lehrerband von MH – darlegen, was für die Lehrer sicherlich sehr hilfreich wäre.)

Wir wollen auf eine Schwierigkeit, die mit dieser Beschreibung des „Modell-Zufalls" verbunden ist, noch eingehen: Hat ein Schüler gemäß den Absichten der Autoren erkannt, daß jeder Ausfall in einem Gedankenexperiment gleich oft zu erwarten ist, wird er konsequenterweise bei zweimaligem Werfen einer Münze 1× W und 1× Z eher erwarten als z. B. 2× Z und somit bestätigen, was im Lehrerband von WZ5 geschildert wird: „Viele Kinder neigen dazu, der Möglichkeit (ZW) bzw. (WZ) größere Wahrscheinlichkeit zuzuordnen, als der Möglichkeit (ZZ) bzw. (WW). Diese Meinung ist falsch."

Wie der Lehrer aber mit dieser „Antinomie zwischen Gleichverteilung und Unabhängigkeit" (wie dieses Phänomen bezeichnet werden könnte) im Unterricht umgehen kann, erfährt er nicht. Daß die Zahlen, die Wahrscheinlichkeiten heißen, als erwartete relative Häufigkeiten interpretiert werden können, kommt im Lehrgang WM bis einschließlich Klasse 7 nicht so deutlich zum Ausdruck. (Sie erscheinen dort eher als abstrakte Anteile zur Angabe von Gewinnchancen. Den einzigen Hinweis findet man beim Thema „gleich wahrscheinliche Ergebnisse": „Gibt es Ergebnisse, die häufiger zu erwarten sind als die anderen Ergebnisse? Oder sind alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich?" Erst in Band 8 wird die o. a. Interpretation explizit angegeben: „Berechne die zu erwartende Häufigkeit (*Wahrscheinlichkeit*), mit der du einen Pasch wirfst." Die notwendige Unterscheidung zwischen Modell und Realität wird aber verwischt, wenn in Band 10 als Merksatz im Kasten formuliert wird: „Bei einer einwandfreien Münze sind die Ausfälle W und Z *gleichwahrscheinlich*. Bei einem einwandfreien Würfel sind die Ausfälle aller Augenzahlen gleichwahrscheinlich." Soll das als ein mathematischer oder ein empirischer Satz oder eine Definition von „gleichwahrscheinlich" oder von „einwandfrei" verstanden werden? Es liegt nicht in der Absicht des Rezensenten, den Begriff des „idealen Würfels" oder des „Laplace-Würfels" aus dem Unterricht zu verbannen, aber man sollte vorsichtiger bei den Formulierungen sein.

Auch im Lehrgang MH (Schülerband 6) überzeugt die Behandlung des Themas „gleichwahrscheinliche Ergebnisse" bei „guten" Würfeln bzw. Münzen nicht. Der Lehrerband zu MH6 hingegen geht sehr ausführlich auf die das Verhältnis zwischen Modell und Realität betreffenden Aspekte des Wahrscheinlichkeitsbegriffs ein. Der dort eingenommene Standpunkt kann durch folgende Zitate (S. 156) zusammenfassend gekennzeichnet werden: „Die Wahrscheinlichkeit offenbart sich also als eine dem betr. Ereignis *prinzipiell* zugeordnete Maßzahl, die angenähert mit der aus einer passenden Stichprobe *empirisch* gewonnenen Häufigkeit übereinstimmt." „Damit wird schließlich ihre Rolle als Instrument klar, über die mutmaßliche Zusammensetzung einer Stichprobe *Voraussagen* zu machen." Diese Auffassung – die im Schülerbuch nicht deutlich genug zum Tragen kommt – legt sich nicht auf ein bestimmtes Verfahren der Zuordnung von Maßzahlen zu Ereignissen fest, so daß das im Anschluß an die Thematisierung vom sogenannten „empirischen Gesetz der großen Zahlen" angesprochene Verfahren der Schätzung von Wahrscheinlichkeiten (vgl. S. 219, Schülerbuch MH6) in sie einbezogen werden kann: „Für ein Zufallsexperiment, dessen Ergebnisse nicht gleichwahrscheinlich sind und das man auch nicht auf ein solches mit gleichwahrscheinlichen Ergebnissen zurückführen kann, lassen sich mit Hilfe einer Stichprobe von genügend großem Umfang Näherungswerte oder *Schätzwerte* der Wahrscheinlichkeiten ermitteln."

Im Lehrgang WM ist diese Art der Schätzung von Wahrscheinlichkeiten (was gleichzeitig eine Erweiterung des Begriffs „Wahrscheinlichkeit" bedeutet), überhaupt nicht angesprochen, während sie in WZ7 anhand von Aufgaben (Übungsaufgaben?) im Anschluß an eine Formulierung des sogenannten empirischen Gesetzes der großen Zahlen eher nebenbei eingeführt wird (S. 112).

Dieses „Gesetz" wird im Lehrgang WZ jeweils in Band 6, 7, 9, 10 explizit angesprochen: „Führt man einen Versuch sehr oft durch, so nähert sich die relative Häufigkeit eines Ereignisses der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses." Als „didaktisches Ziel" dazu ist im Lehrerband von WZ6 angegeben: „Sie sollen den Begriff der *relativen Häufigkeit* kennenlernen *und den Zusammenhang mit der Wahrscheinlichkeit verstehen*" (Hervorhebung hier vom Rezensenten). Der Rezensent gesteht, daß ihm unklar ist, worin dieses „Verstehen" bestehen soll und ob und wie man ggf. feststellen kann, ob das Ziel erreicht ist. Er würde eher z. B. folgende Formulierung akzeptieren: „... und Erfahrungen zur Beziehung zwischen relativer Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit machen". Ebenso würde er das o. a. „Gesetz" wenn überhaupt dann vorsichtiger formulieren. Es sollte jedenfalls nicht der Eindruck entstehen, es handele sich um ein Gesetz von der Art der physikalischen Gesetze, ein Eindruck, der durch folgende Formulierung im Lehrerband zu WZ7 auf S. 143 durchaus entstehen kann: „Es läßt sich experimentell nachweisen, daß mit Ausdehnung der Versuchsreihe (10 Würfe, 100 Würfe, usw.) die relative Häufigkeit sich immer stärker der (theoretischen) Wahrscheinlichkeit annähert."

Die Erfahrungen zur Stabilisierung der relativen Häufigkeiten werden im Lehrgang dem Schüler durch eigene Versuchsreihen sowie durch vorgegebene Tabellen vermittelt. Dabei ist bei der Tabelle in WZ6, S. 76, zu befürchten, daß die Kinder nicht die gesuchte, sondern eher eine andere in der Tabelle enthaltene (und nicht unbedingt zu erwartende) Gesetzmäßigkeit entdecken: Die Differenz zwischen tatsächlicher und erwarteter Häufigkeit ist nie negativ und fällt monoton von 4 auf 0.

Es gibt übrigens drei unterscheidbare Möglichkeiten „einen Versuch sehr oft durchzuführen", um daraus z. B. eine Tabelle für die Häufigkeiten bei 10, 20, ..., 100 „Wiederholungen" eines Würfelexperimentes zu erstellen:

1. Man würfelt 10×, dann 20× etc.
2. Man würfelt 10×, dann noch 10× etc.
3. 10 Schüler haben je einen Würfel und würfeln jeder 10×. Die Ergebnisse werden schrittweise „zusammengelegt".

Diese werden in der Regel stillschweigend identifiziert (z. B. WM6 S. 126), obwohl die Erfahrung der Stabilisierung von relativen Häufigkeiten in einem dieser Fälle nicht die für einen anderen Fall impliziert.

Im Lehrgang WM wird der Zusammenhang zwischen relativer Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit eher am Rande angesprochen: In insgesamt 6 Aufgaben in den Bänden 6, 8, 10 wird zur Durchführung von Versuchsreihen aufgefordert und zum anschließenden Vergleich zwischen relativer Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit. In den Lehrerheften finden sich u. a. folgende verbesserungsbedürftige Formulierungen: „Die so errechnete Wahrscheinlichkeit ermöglicht es, vorherzusagen, wieviel Gewinne beider Arten unter 100 [200, 300] Tips vorkommen werden" (8, S. 96) und unter Lernzielen: „Wissen, daß die relative Häufigkeit eines Ereignisses E ungefähr gleich der Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen von E ist" (10, S. 55).

In MH (Lehrerband 6, S. 167) wird das betreffende Ziel exakter beschrieben: „Wissen, daß die Häufigkeiten sich bei wachsendem Umfang merklich stabilisieren und daß die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses durch die Häufigkeit aus einer genügend großen Stichprobe angenähert werden kann." Im Schülerband findet sich auch eine Vielzahl von Aufgaben und Beispielen dazu – nur: darin erschöpft sich die Behandlung des Themas für den gesamten Lehrgang –, abgesehen von einer kleinen Bemerkung im Band 10.

Mehrstufige Experimente – Unabhängigkeit

Der mathematische Hintergrund der Beschreibung des Stichprobenraums mehrstufiger Experimente ist in den besprochenen Lehrgängen – wie allgemein üblich– durch ein passendes kartesisches Produkt (oder eine Teilmenge davon bei Ziehungen ohne Zurücklegen) gegeben, wobei sämtliche Ausfälle als gleichwahrscheinlich betrachtet werden. Sicherlich akzeptieren Schüler diese Art der Modellierung, insbesondere wenn sie in Form von Baumdiagrammen oder Tabellen anschaulich dargeboten wird. Doch dieses Modell impliziert auf der Theorieebene für bestimmte Typen von Ereignissen Unabhängigkeit, welche das Pendant zur Vorstellung physikalischer Unabhängigkeit der Versuche ist. Nun ist ja hinreichend bekannt, daß gerade in diesem Punkt Kinder und Erwachsene große Schwierigkeiten haben, intuitive Vorstellungen und mathematisches Modell in Einklang zu bringen bzw. ihr stochastisches Denken entsprechend weiterzuentwickeln (man denke z. B. an den Lotto-Tip: 1, 2, 3, 4, 5, 6).

Angesichts dieser Einschätzung findet nach Ansicht des Rezensenten bei der in den Schülerbänden aller drei Lehrgänge vorfindlichen Behandlung mehrstufiger Versuche schlicht Indoktrination statt. Dem Schüler wird der für das Verstehen wichtige Prozeß eigener Modellbildung und möglicherweise -modifizierung dadurch abgenommen, daß ihm gleich das passende Modell serviert wird. (Nun braucht der Lehrer im Unterricht nicht in dieser Weise vorzugehen, doch ist zu befürchten, daß die Aufgabensequenz des Schulbuchs in vielen Fällen eine entsprechende Strukturierung des Unterrichts nach sich zieht.) Darüber hinaus werden mögliche Schwierigkeiten und Fehlerquellen, die Ausgangspunkt von Lernprozessen sein könnten, von vornherein aus dem Wege geräumt: z. B. werden zwei verschiedenfarbige Würfel gewählt oder zwei Münzen verschiedener Werte, oder es wird stillschweigend unterstellt, daß das n-malige Bedienen ein und desselben Zufallsgenerators vom Bedienen n gleichartiger Zufallsgeneratoren nicht unterschieden zu werden braucht.

Es wird von vornherein vorwiegend auf der theoretischen Ebene gearbeitet, ohne die entsprechenden Modellvorstellungen in ausreichendem Maße mit Erfahrungen bei konkreten Experimenten zu konfrontieren. Ob durch die vorfindlichen Aufgabensequenzen ein tieferes Verständnis sowie eine Entwicklung des stochastischen Denkens in diesem Punkt (mit der Folge, daß Fehleinschätzungen in bezug auf Unabhängigkeit abnehmen) gefördert werden kann, muß bezweifelt werden. In diesem Zusammenhang bieten sich neben vielen in der Dissertation von Heitele enthaltenen Vorschlägen auch Problemstellungen folgender Art an: Da wir keine Würfel haben, schreiben wir auf zwei Zettel eine „1", auf zwei eine „2" usw. bis „6". Nun ziehen wir zufällig zwei Zettel (ohne Zurücklegen). Ist das ein zum Doppelwurf „gleichwertiges" Experiment? Welche anderen Möglichkeiten sind denkbar?

Terminologie

Der Lehrgang WZ ist ein Beispiel dafür, daß man ganz gut ohne aufwendige Explizierung solcher Begriffe wie „Zufallsexperiment", „Ereignis", „Ereignisraum", etc. auskommen kann. „Zufallsversuch" kommt ohnedies nur in einer Überschrift in Band 10 vor und auch auf den „Ereignisraum" wird verzichtet. Das Wort „Ereignis" wird zwar benutzt, aber ganz nebenbei in einer Aufgabe zur relativen Häufigkeit in Band 7 „eingeführt". Dieses Vorgehen ist sicherlich praktikabel und vermeidet Schwierigkeiten, die entstehen können, wenn man wie z. B. beim Begriff „Ereignis" in den anderen Lehrgängen einen Mittelweg zwischen formaler Definition und Verzicht auf eine Erklärung gehen will. Ob es nötig und sinnvoll ist, in Band 5 von „Ausfällen", in 6, 7, 8 von „Ausgängen" und in 9 von „Ergebnissen" zu sprechen, mag dahingestellt bleiben. Die Neubearbeitung von Band 5 läßt erkennen, daß es in Zukunft wohl immer „Ergebnisse" heißen wird. Vielleicht werden dann auch die „Urnen" abgeschafft und „Behälter", „Gefäße" oder „Becher" genannt wie in MH und WM.

Der Begriff „Zufallsexperiment" wird in WM6,7,10 anhand der üblichen Beispiele: Würfeln, Münzwurf, Drehen eines Glücksrades, Ziehen einer Kugel aus einem Gefäß eingeführt: „Die Ergebnisse aller dieser Experimente sind vom Zufall abhängig. Solche Experimente heißen daher *Zufallsexperimente.*"

Zum Ereignis heißt es in WM7: „Das *Ereignis* (der Gewinnfall) ‚Zahl größer als 3' tritt ein, wenn eine der Zahlen 4, 5 oder 6 fällt. Zum Ereignis ‚Zahl größer als 3' gehört die *Ergebnismenge* $E = \{4,5,6\}$. Sie ist eine Teilmenge der Menge aller Ergebnisse." Ganz analog ist das Vorgehen im Lehrgang MH, bloß wird dort der Begriff „Ereignis" schon im 6. Schuljahr expliziert. Hinzu kommt der „Ergebnisraum" als Menge aller Ergebnisse, sowie das unmögliche und das sichere Ereignis. Der „Ergebnisraum" heißt in WM10 „Ereignisraum" (!) und was in WM7 „Ergebnismenge" heißt, ist dort die „Ereignismenge". Aber auch hier ist zu hoffen, daß die Neubearbeitung eine gewisse Vereinheitlichung bringt.

Für die relative Häufigkeit tauchen in WM auch noch die Bezeichnungen „Häufigkeit" sowie „prozentuale Häufigkeit" auf. In WZ9 läßt eine Aufgabenformulierung (Aufg. 3, S. 48) noch eine terminologische Besonderheit erkennen: „Ein Industriewerk beschäftigt Arbeiter in verschiedenen

Lohngruppen. Hier die Prozentanteile. Bestimme die relative Häufigkeit der Lohngruppen" (unter der Aufgabe befindet sich eine entsprechende Tabelle). Man sollte doch die Schwierigkeiten, die dadurch entstehen, daß Schüler Prozentangaben nicht als eine besondere Schreibweise von Brüchen verstehen und dementsprechend mit ihnen umzugehen lernen, nicht dadurch verstärken, daß man die Bezeichnung „relative Häufigkeit" nur für die Schreibweise als Bruch zuläßt. Damit ist einer adäquaten Begriffsbildung sicherlich nicht gedient.

Wahrscheinlichkeits*rechnung*

Die bisher besprochenen Aspekte der Lehrgänge bezogen sich vorwiegend auf begriffliche Grundlagen – und die Schaffung einer ausreichenden Erfahrungs- und Verständnisbasis in diesem Bereich sollte auch vorrangiges Ziel für diese Schulstufe sein. Hierunter kann sicher auch das Thema „Simulation" eingeordnet werden, auf das später noch eingegangen wird. Wir wollen nun auf den Teil der Lehrgänge eingehen, in denen es um die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten aus gegebenen Wahrscheinlichkeiten geht. Hierzu zählt die Einführung und Anwendung sowohl von Summen- und Produktregel als auch kombinatorischer Rezepte zur Berechnung bestimmter Laplace-Quotienten. Im Lehrgang WM ist nichts davon zu finden mit Ausnahme dreier Aufgaben, bei denen für zunächst direkt berechnete Wahrscheinlichkeiten gewissermaßen empirisch festgestellt wird, daß sie sich als Summe bzw. Produkt anderer Wahrscheinlichkeiten darstellen lassen.

Summen- und Produktregel sind im Lehrgang WZ überhaupt nicht zu finden. Kombinatorischen Methoden sind in den Bänden 8, 9, 10 insgesamt 6 von 25 Seiten zur Stochastik gewidmet. Das vorwiegend benutzte Modell sind dabei Ziehungen aus Urnen, wobei in WZ8 zunächst stillschweigend unterstellt wird, daß die Reihenfolge berücksichtigt wird. Das Verständnis für die betreffenden Formeln, die dann auch notiert werden, soll an Hand von Beispielen mit Hilfe von Baumdiagrammen entwickelt werden. Unter dem Titel: „Ziehungen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge" werden in WZ9 der Galton-Versuch und das Pascal-Dreieck abgehandelt, mit Hilfe dessen dann für den speziellen Fall des Ziehens mit Zurücklegen aus Urnen mit zwei Sorten Kugeln die Wahrscheinlichkeit bestimmter Ereignisse ermittelt wird. Dort, wo man das Pascal-Dreieck eigentlich erwartet hätte: bei der Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge, hier: Zahlenlotto, taucht es als Hilfe nicht auf. Vor dem Hintergrund der Quotientenregel wird an Beispielen die betreffende Formel entwickelt, die innerhalb des Abschnitts „Grundwissen" dann auch explizit aufgeführt wird. Auf diverse kritische Anmerkungen zu Details muß hier leider verzichtet werden.

Der Lehrgang MH beschäftigt sich am eingehendsten mit den betreffenden Inhalten. In MH6 und MH7 wird zunächst „hergeleitet", daß die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, das kein Elementarereignis ist (es wird „Oder-Ereignis" genannt) Summe der Wahrscheinlichkeiten der zu diesem Ereignis gehörenden Ausfälle ist. In MH7 und MH10 wird der Additionssatz dann noch auf Zerlegungen von Ereignissen in Teilereignisse ausgedehnt: „Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist die Summe der zugehörigen Pfadwahrscheinlichkeiten." Diese Formulierung knüpft an die Darstellung im Baumdiagramm an, von dem ausgehend in MH7 die Pfadregel zur Multiplikation von Pfadwahrscheinlichkeiten abgeleitet wird, indem sie als zu erwartende relative Häufigkeiten interpretiert werden. Obwohl es sich bei mehrstufigen Experimenten ab der 2. Stufe um bedingte Wahrscheinlichkeiten handelt, findet sich in MH10, S. 222 ohne einen besonderen Hinweis die Gleichung $p(E) = p(E_1)\ p(E_2)$. Damit soll aber nicht gesagt werden, daß an dieser Stelle die Einführung dieses Begriffs unbedingt erforderlich wäre.

Das gesamte Kapitel zur Stochastik in MH9 (14 Seiten) dient der Erarbeitung kombinatorischer Regeln und ihrer Anwendung zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten. Im Mittelpunkt steht dabei die Produktregel zum Abzählen der Möglichkeiten bei mehrstufigen Entscheidungen. Weitere Themen sind: Anzahl der Anordnungen der Elemente einer Menge und die Anzahl der gleichmächtigen Untermengen einer Menge und deren Anordnungen. In diesem Zusammenhang wird auch der Binomialkoeffizient – auf rein syntaktischer Ebene – eingeführt. Die Erläuterungen im Text sind sehr ausführlich (welcher Schüler wird sie lesen?), die „Übungs"aufgaben teilweise recht anspruchsvoll. In MH10 gibt es einen Abschnitt (6 Seiten) über die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten bei Bernoulli-Experimenten (dem höchsten Differenzierungsniveau vorbehalten), der bis zur Angabe der Bernoulli-Formel und Anwendungen auf „konkrete Situationen" führt. Dabei wird aber der Verteilungsbegriff nicht thematisiert.

Simulation

Einen wesentlichen Beitrag zur Entwicklung des stochastischen Denkens kann die Beschäftigung mit Simulationen von Zufallsexperimenten unter Benutzung von Zufallsziffern leisten. Dies trifft sicher auf Schüler aller Differenzierungsstufen zu. Insofern ist es verwunderlich und bedauerlich, daß nur im Lehrgang MH (Gymnasium) 10 Seiten im Schülerband 7 und im Lehrgang WZ 1 Seite im Schülerband 10 diesem Thema gewidmet sind. Dort findet sich ein einziges außermathematisches Anwendungsbeispiel. Im Lehrgang MH gibt es mehr von dieser Art. Besonders instruktiv und sicherlich auch motivierend für Schüler ist die Simulation des Verkehrsaufkommens an einer Straßenkreuzung mit Ampelregelung zwecks Untersuchung von Fragen hinsichtlich der entstehenden Warteschlangen.

Statistik

Hinsichtlich Aufbau, Inhalt und Umfang weisen die die Statistik betreffenden Teile der drei Lehrgänge deutliche Unterschiede auf. Das Tripel: (Anzahl der Seiten mit Statistik, Anzahl der Seiten des gesamten Stochastiklehrgangs, Anzahl aller Lehrbuchseiten von Band 5 – Band 10) nimmt für die einzelnen Lehrgänge folgende Werte an: WZ: (20, 43, 714), WM: (7, 24, 734), MH: (29, 100, 1358). Aber auch die Verteilung auf die einzelnen Kapitel bzw. Schuljahre ist sehr unterschiedlich: In WZ befinden sich in den Bänden 6–10 im Mittel etwa je 4 Seiten zur Statistik, in WM in den Bänden 8–10 im Mittel etwa je drei Seiten. In MH ist in Band 8 das gesamte Kapitel zur Stochastik (22 Seiten) der Statistik gewidmet; ansonsten taucht sie nur noch in Band 10 auf 7 Seiten im Anschluß an die Behandlung des Bernoulli-Experimentes auf. Dort geht es im wesentlichen darum, Konzepte der deskriptiven Statistik und der elementaren Wahrscheinlichkeitsrechnung in Beziehung zu setzen und zwar einerseits den praktischen Stichprobenmittelwert mit dem Erwartungswert eines Zufallsexperimentes und andererseits beim Streumaß Standardabweichung. In Band 8 werden im Rahmen der beschreibenden Statistik die üblichen Techniken der Darstellung und des Umgangs mit Häufigkeitsverteilungen sowie Mittelwert, Spannweite und mittlere Abweichung als Kennwerte von Stichproben und das Klassieren von Stichproben behandelt. Darüber hinaus gibt es aus dem Bereich der induktiven Statistik 5 Seiten zum Thema: Schätzung relativer Häufigkeiten von Merkmalen in Grundgesamtheiten durch relative Häufigkeiten in einer Stichprobe.

Sie enthalten breit gestreutes Beispielmaterial sowie auch die Thematisierung der Problematik der adäquaten Stichprobenentnahme. Der Statistikteil des Lehrgangs WZ setzt im 6. Schuljahr mit diesem Thema ein und greift es auch im 7. Schuljahr noch einmal auf. Obwohl im Lehrerheft auf das Problem der Güte der Schätzung sowie der Charakterisierung sinnvoller Verfahren zur Erhebung von Stichproben hingewiesen wird, wird später als Ziel ganz allgemein formuliert: „Die Stichprobe soll als repräsentative Teilmenge für eine bestimmte Grundmenge erkannt werden." Besser wäre vielleicht: „Die Schüler sollen lernen, daß bei geeigneten Vorsichtsmaßnahmen Aussagen über eine Grundmenge, die aufgrund einer Stichprobe gewonnen wurden, für praktische Zwecke ausreichen." Einige Aufgaben im Buch können durchaus zur Förderung dieses Ziels beitragen. Das Lehrerheft drückt sich in diesem Zusammenhang übrigens so aus: „Wenn man von einer Stichprobe auf die Grundmenge schließt, kann es sich niemals um eine genaue Rechnung handeln."

Die Inhalte zur beschreibenden Statistik sind gleichmäßig auf die Jahrgangsbände 6–10 verteilt und umfassen die Themen: Darstellung von Stichproben; Stichprobenkennzahlen: Mittelwert, Zentralwert, Spannweite, mittlere Abweichung; Klassierung von Stichproben; Häufigkeitsverteilungen. Wahrscheinlichkeit und beschreibende Statistik werden dabei relativ unverbunden nebeneinander behandelt. Eine in Einzelheiten gehende Kritik – für die sich reichlich Ansatzpunkte finden – würde den Rahmen dieser Rezension sprengen. Der Lehrgang WM bietet im Bereich der Statistik sehr wenig an. Er setzt in Band 8 mit der Bewertung qualitativer Merkmale durch Punktzahlen und Berechnung von Mittelwerten daraus ein. Das gleiche Thema bildet den Kern des Stochastik-Abschnittes in Band 9 (2 Seiten), der ausschließlich der Statistik gewidmet ist: „Fernsehgewohnheiten – Eine Umfrage". Hier werden graphische Darstellungen und Mittelwertvergleiche von Häufigkeitsverteilungen behandelt sowie die Durchführung eigener Versuche angeregt. Weitere Anwendungsbereiche, die in den Bänden 8 und 10 vorkommen, sind: Auswertung von Wetterbeobachtungen, Bewertung sportlicher Leistungen (Spannweite, mittlere Abweichung). Letztere wird in der Realität wohl kaum so gehandhabt wie im Buch dargestellt.

Bezüge zu anderen mathematischen Stoffen und zu fachübergreifenden Gebieten

Der Aufbau der Schulbücher läßt befürchten, daß der Stochastiklehrgang nicht ausreichend in das übrige Mathematik-Curriculum integriert und eher eine randständige Rolle spielen wird. Im Lehrerband zu WM8 findet sich zur Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung folgende Einschätzung: „Andererseits tragen diese Themen nur wenig bei, um die Voraussetzung für elementare Anwendungen von Mathematik (Sachrechenfähigkeit) und für die Weiterarbeit in anderen zentralen Bereichen zu schaffen." Das ist der Grund, warum als „Kompromiß" „lediglich einige Seiten als Zusatzstoff" angeboten werden. Auch in MH ist der Stochastiklehrgang durchweg als Zusatzstoff markiert. Von der Möglichkeit der Integration bestimmter Themen aus der Stochastik in klassische Themen wie z. B. Proportionen oder Prozentrechnung wird noch kein Gebrauch gemacht.

Besser sieht es hinsichtlich der Bezüge zu anderen Schulfächern bzw. zu Lebensbereichen der Schüler aus. Hier sind durchweg viele positive Ansätze zu erkennen. Auf die Aufzählung der einzelnen Themen verzichten wir. Natürlich gibt es auch Merkwürdigkeiten: „Familie Schmidt gibt in 7 Tagen 432,80 DM aus, Familie Schulz in 9 Tagen 541,30 DM. Wer geht mit dem Geld freizügiger um? Vergleiche die mittleren Ausgaben pro Tag" (WZ6, S. 72).

Wer eine Tageszeitung liest, ist ohnedies nicht auf künstliche oder veraltete Beispiele aus Schulbüchern angewiesen, sondern kann ständig reichhaltiges und aktuelles Material aus dieser Quelle in den Unterricht einbringen. Schulbücher können hier Hilfestellung leisten, indem sie schwer zugängliches und über den Tag hinaus interessantes Material zur Verfügung stellen.

ANDELFINGER, B., NESTLE, F. (Hrsg.):

Mathematik M

Sekundarstufe I, 5.–10. Schuljahr
Freiburg: Herder, 1976–1980

Dieter WICKMANN, Aachen

Stochastische Gegenstände sind in diesem Unterrichtswerk an verschiedenen Stellen zu finden, im Zusammenhang mit jeweils erworbenen und dann verwendbaren mathematischen Begriffen und Techniken. Daher zunächst einige Informationen über das Gesamtwerk.

In den Lehrerbegleitheften wird auf die Zielgruppen hingewiesen: „Die Bände M-5 und M-6 bilden ein Gesamtangebot für den Mathematikunterricht in den Klassenstufen 5/6 aller weiterführenden Schulen." Dann: „Die Bände M-7 bis M-10 bilden ein Gesamtangebot für den Mathematikunterricht der Klassen 7–10 in der Sekundarstufe I." Während in einem Verlagsprospekt aus dem Jahre 1978 ausdrücklich erwähnt wird, daß das M-Werk besonders für Realschulen geeignet sei, wird auf eine solche Hervorhebung in dem neuesten Prospekt von 1981 verzichtet.

Jeder Band ist in 3 bis 5 thematisch bestimmte Hauptabschnitte und in etwa 20 Lernabschnitte (LA) eingeteilt. Die LA sind gegliedert in: Hinführung (Hi) zum Lerngegenstand durch Vorstellung eines Problems (aus der Umwelt); Verallgemeinerung bzw. Abstraktion zur Vermittlung des „Grundwissens" (G); Ergänzungen, Differenzierung (E) und: Anregungen (A) als „freie Angebote". Zu jedem LA sind im Lehrerheft Ausführungen zu finden, die durchgehend in die vier Punkte „fachdidaktischer Hintergrund", „wichtige Ziele", „Beispiel eines Unterrichtsplans" (Buchteile, Unterrichtsform, Zeitaufwand, Hausaufgaben, ...) und „methodisch-didaktische Hinweise" gegliedert sind.

Insgesamt ist das Werk klar gegliedert, und die Lerninhalte werden durch eine Vielzahl von schönen, suggestiv wirkenden Grafiken und Illustrationen begleitet. Es wird in den Lehrerheften auf das einheitliche Konzept und den engen Zusammenhang der einzelnen Bände hingewiesen.

Nun zum engeren Anliegen.

In *M-5*, Hauptabschnitt A „Figuren, Zahlen, Mengen", LA 4 „Versuche und Ergebnisse" wird ein Versuch vorgestellt, den die Natur macht: das Sich-Teilen eines Bazillus. Ein Stabdiagramm zeigt die Generationen als Versuchsergebnisse auf der Abszisse aufgetragen, und auf der Ordinate die Anzahlen der Individuen (1, 2, 4, ...) je Generation. „Was bei einem Versuch aus der Welt der Natur geht, müßte ja auch bei einem anderen Versuch klappen, z. B. bei einem Würfelversuch." Die Ergebnisse von 100 Würfen werden in eine Häufigkeitsliste und ein Häufigkeitsschaubild eingetragen. Frage: „Ist der Würfel in Ordnung?"

Nach dieser Einführung (Hi) wird locker formuliert (G): „Unternimmt man einen Versuch, so erhält man eines von mehreren Ergebnissen." Die möglichen Ergebnisse eines Versuches werden als Baum dargestellt. Auch gewöhnliche Messungen – so wird weiter ausgeführt – etwa die Messung der Höhe eines Berges, sind Versuche.

Als Ergänzung (E) wird gefragt: „Wie kann man Ergebnisse noch übersichtlicher darstellen?" – Durch Zusammenfassen: Klassenbildung. Beispiele, insgesamt zahlreiche Übungen.

Zur Anregung (A) wird ein Würfelspiel empfohlen, das die Warteschlangenbildung an einer Straßenkreuzung mit Verkehrsampeln simuliert.

Der natürlichsprachliche Begriff des Versuches ist ein Schlüssel zur realitätsbezogenen Analyse des Ungewissen; man macht einen Versuch, um etwas zu erfahren, wobei schon impliziert ist, daß mehrere Ergebnisse als Ausgänge denkbar sind. Der in diesem LA zu vollziehende Abstraktionsschritt besteht darin, zu erkennen, daß der auf einen handelnden Menschen bezogene Begriff des Versuchs verallgemeinerbar ist auf den des Vorgangs, gleichgültig, wer oder was ihn hervorruft (der Vorgang geschieht), und der beobachtende Mensch registriert eines der möglichen Ergebnisse. Dann ist der Vorgang der Teilung eines (konkreten) Bazillus ebenso ein Versuch wie die Wette zwischen Otto und Karl, die verschiedene Ergebnisse haben kann. In den Übungen finden sich dazu zahlreiche Beispiele, etwa dies: „Ingrid wird von Ihrer Mutter mit 5 DM zum Einkaufen geschickt. Dieser Versuch kann 2 Ergebnisse haben: ‚das Geld reicht aus', ‚das Geld reicht nicht aus'. Es gibt noch weitere Möglichkeiten für Ergebnisse!"

Ich halte es für richtig, daß an dieser Stelle noch nicht von Zufall die Rede ist, der als Gegenstand erst dann erscheint, wenn Versuche wiederholt werden, wenn zu unterscheiden ist zwischen Versuchen, die immer dieselben Ergebnisse bringen und solchen, in denen das nicht der Fall ist. Trotzdem wird schon hier gewürfelt; Versuche *werden* also wiederholt. Es stiftet Verwirrung, wenn eine Vielzahl von Versuchsergebnissen in einer Häufigkeitsverteilung ebenso als Stabdiagramm dargestellt wird wie das Meßergebnis von bestimmten Bergeshöhen oder die Anzahl der Individuen je Generation einer ganz konkreten (einmalig beobachteten) Bazillenteilung. Es wird nicht deutlich, daß dem Messen einer Bergeshöhe genau ein Würfelwurf entspricht. Das Wort Zufallsversuch wird erst im LA 14 „Zufallsversuch und Wahrscheinlichkeit" in M-6 verwendet. Wegen des direkten Bezugs greife ich vor; man liest dort: „Aus Band I (LA 4) kennst du zwei Arten von Versuchen. Oft kennst du das Ergebnis im voraus: Du öffnest den Wasserhahn – Wasser strömt aus. Du schaltest das Radio ein – das Programm ertönt. Du schiebst eine Münze über den Tischrand – die Münze fällt zu Boden. Jedes dieser Ergebnisse erwartest du, wenn alles stimmt, mit Sicherheit. Es ist dagegen nicht sicher ... ob die Münze mit Zahl oder mit Wappen nach oben liegt ..." In dieser Gegenüberstellung wird der erwähnte und zentrale Wiederholungsaspekt nicht herausgestellt.

Bei einem Versuch das Ergebnis im voraus wissen, heißt natürlich, daß der Vorgang determiniert ist. Bei einem einzelnen Versuch ist jedoch nicht feststellbar, ob es sich um einen determinierten oder indeterminierten Vorgang handelt. Die Beobachtung, daß sich ein Bazillus in einer Stunde teilt, läßt noch völlig offen, ob „das Ergebnis mit Sicherheit zu erwarten ist" oder ob es ein Zufallsergebnis war. Auch hinter dem Öffnen eines Wasserhahns steht die Erfahrung von unzählige Male wiederholten Versuchen, die eben immer in der gleichen Weise ausgefallen sind. Dadurch erst wird die Sicherheit *erreicht*.

In *M-6*, Hauptabschnitt B „Rechnen mit Maßzahlen in Dezimalschreibweise", LA 8 „Von der Multiplikation zur Division der Maßzahlen" wird als Ergänzung (E) das arithmetische Mittel definiert. Dieser zentrale Begriff wird zu wenig beleuchtet. Es wird nicht deutlich, wozu diese Maßzahl dient. Es genügt nicht, zur Übung etliche Mittelwerte, etwa die mittlere Klassenstärke eines Jahrgangs, ausrechnen zu lassen.

Hauptabschnitt D „Eine Anwendung der Brüche: Wahrscheinlichkeitsrechnung" besteht aus den beiden Lernabschnitten LA 13 „Eine Vorarbeit: Kombinieren" und LA 14 „Zufallsversuch und Wahrscheinlichkeit". Zur Einführung (Hi) in LA 13 wird eine Lichtrufanlage untersucht, die aus drei verschiedenfarbigen Lampen besteht, die jeweils in drei verschiedenen Zuständen leuchten können. Es wird gezeigt, daß die Zeichenkodierung auf Lochstreifen in gleicher Weise behandelt werden kann. Weitere Beispiele als Ergänzung oder Übung zeigen die verschiedenen Grundprobleme des Kombinierens. „Die kombinatorischen Grundprobleme sind, einem Vorschlag von Kirsch folgend, in die Form von Wortproblemen gekleidet worden" (Zitat aus dem Lehrerbegleitheft, LA 13). Dieser Vorschlag ist empfehlenswert. Der so verallgemeinerte Wortbegriff läßt die teilweise etwas spröden Kombinatorikprobleme anschaulicher fassen. Dann ist z. B. ein Turm aus zwei roten und drei blauen Bausteinen in einer bestimmten Anordnung ein fünfstelliges Wort, zusammengesetzt aus einem Alphabet mit zwei Buchstaben. Bei der Frage nach der Anzahl der verschiedenen so gebildeten Wörter wird der Schüler zum Pascalschen Dreieck geführt.

LA 14, der schon im Zusammenhang mit LA 4 aus M-5 erwähnt wurde, wird durch „ein unfaires Spiel mit sonderbaren Würfeln", ein schönes und lehrreiches Spiel, eingeleitet, dessen sonderbare Ergebnisse durch die im selben Abschnitt behandelte Pfadregel der Multiplikation von Wahrscheinlichkeiten später verständlich wird. (Es gibt vier Würfel A, B, C, D, die so geartet sind, daß die Gewinnchance mit B größer ist als mit A, mit C größer als mit B, mit D größer als mit C und, zyklisch geschlossen: mit D größer als mit A.)

Die Wahrscheinlichkeit wird dann (G) als der Laplacesche Quotient „theoretisch festgesetzt" (so wörtlich), in dem die Gleichwahrscheinlichkeit ein Grundbegriff ist. Das empirische Gegenstück wird mit Häufigkeit des Ergebnisses bezeichnet, wobei das Wort relativ vermutlich aus sprachlichen Gründen weggelassen ist. „Bei hinreichend vielen Versuchen ist die Häufigkeit ein Näherungswert für die Wahrscheinlichkeit." Mit dieser lapidaren Feststellung, die auch später nicht näher beleuchtet wird, werden all die Schwierigkeiten zugedeckt, die mit der Begriffsbildung wesentlich verbunden sind.

In *M-7*, Hauptabschnitt C „Probleme aus der Umwelt – mathematisch betrachtet", LA 19 „Rechnen mit Daten – Weitere Sachaufgaben" wird der Schüler mit verschiedenen Darstellungsformen von Erhebungen vertraut gemacht. (Ich würde anstelle von „Rechnen mit Daten" eher schreiben „Rechnen mit großen Datenmengen".) Häufigkeitstabellen, Block-, Streifen-, Kreisdiagramme und Illustrationen sind größtenteils der Presse entnommen und behandeln Gegenstände des öffentlichen Lebens. Zur globalen Beschreibung der Sachverhalte werden Begriffe wie Spannweite, mittlere Abweichung und Zentralwert eingeführt. Nach dieser etwa 10 Seiten umfassenden, ziemlich eingehenden Betrachtung zahlreicher Probleme, wie etwa die Verwendung des Einkommens verschiedener Haushaltstypen, Arbeitslose und offene Stellen, Erdöl liefernde Länder, Arbeitslöhne, Benzinverbrauch, Stromkosten – alles Beispiele, die dem Schüler ein Gefühl für die summarische Behandlung