so bekommen wir die Ungleichung

$$3\sum_{i=1}^{6}(\mathfrak{a}_i)^2 \geqq 2\sqrt{3}(\mathfrak{a}_2 T\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_3 T\mathfrak{a}_2 + \ldots + \mathfrak{a}_6 T\mathfrak{a}_5 + \mathfrak{a}_1 T\mathfrak{a}_6).$$

Dabei haben wir die Beziehungen $T\mathfrak{a}T\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}T\mathfrak{b} = -\mathfrak{b}T\mathfrak{a}$ benutzt. Die erhaltene Ungleichung können wir in der Form

$$\boxed{\sqrt{3}\sum_{i=1}^{6}|PA_i|^2 \geqq 4F}$$

schreiben, wobei wir mit F den Flächeninhalt des Sechsecks bezeichnen. Das ist eine modifizierte isoperimetrische Ungleichung der klassischen isoperimetrischen Ungleichung $\sqrt{3}\sum_{i=1}^{6}|A_iA_{i-1}|^2 \geqq 4F$ für Sechsecke.

Während in der klassischen Ungleichung das Gleichheitszeichen genau dann gilt, wenn das Sechseck regelmäßig und konvex ist, gilt in der oben abgeleiteten Ungleichung das Gleichheitszeichen genau dann, wenn

$$\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_3 + \mathfrak{a}_5 = \mathfrak{o}, \quad \mathfrak{a}_2 = \tfrac{1}{3}\sqrt{3}\,T(\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_3), \quad \mathfrak{a}_4 = \tfrac{1}{3}\sqrt{3}\,T(\mathfrak{a}_3 - \mathfrak{a}_5) \quad \text{und}$$
$$\mathfrak{a}_6 = \tfrac{1}{3}\sqrt{3}\,T(\mathfrak{a}_5 - \mathfrak{a}_1)$$

gilt. Das heißt aber, daß der Schwerpunkt des Dreiecks $A_1A_3A_5$ im Punkt P liegt und das Dreieck $A_2A_4A_6$ zum Dreieck $A_1A_3A_5$ dual in dem Sinn ist, wie wir ihn am Anfang erklärt haben.

Anschrift des Verfassers:
Dr. Leo Boček, Mathematisch-physikalische Fakultät der Karls-Universität, 18600 Praha 8, Sokolovská 83 – ČSSR

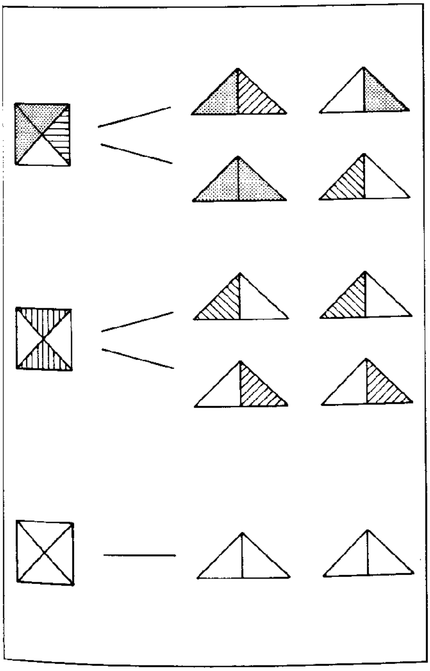
Zwei elementare Abzählungen der Quadrominosteine mit *n* Farben

Von *Hartmut Spiegel* in Paderborn

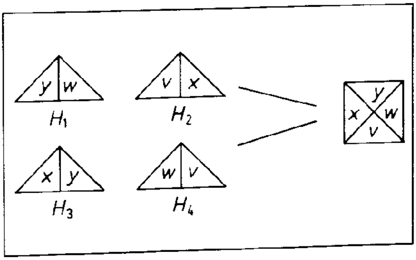
1. Quadrominosteine (im folgenden mit „QS" bezeichnet) sind Teile eines in Analogie zum Dominospiel konstruierten Legespiels: Es handelt sich um quadratische Pappstücke, die auf einer Seite durch Einzeichnen der beiden Diagonalen in vier Teildreiecke zerlegt sind. Jedes dieser Dreiecke ist mit einer von drei Farben (z.B. blau, gelb, rot) gefärbt.

Die QS ermöglichen eine Fülle von interessanten Problemstellungen für den Mathematikunterricht aller Stufen (vgl. [1], [2], [3]). Dazu gehört auch die Frage:
Wieviel verschiedene QS gibt es, wenn zur Färbung der Teildreiecke nicht drei, sondern vier, fünf oder ganz allgemein: *n* Farben zugelassen sind? – (Als verschieden sind solche QS zu betrachten, die man nicht so aufeinanderlegen kann – Farbseite nach oben –, daß übereinanderliegende Dreiecke dieselbe Farbe haben.)

Dieses Problem ist Spezialfall eines allgemeinen Problems, das sich mit Hilfe von *Pólyas* Abzähl-Theorie lösen läßt (vgl. [3]). Doch sowohl vom didaktischen als auch vom mathematischen Standpunkt aus erscheint es sinnvoll, für Spezialfälle nach elementaren, durchsichtigen Lösungen zu suchen. Im folgenden werden zwei Herleitungen einer Formel für die



◀ Fig. 1



▲ Fig. 2

Anzahl der QS mit n Farben angegeben, die mit – bzw. bei geeigneter Anleitung von – Schülern der Sekundarstufe (etwa ab 10. Schuljahr) erarbeitet werden kann.

2. Ausgangspunkt der ersten Überlegung ist folgender Sachverhalt: Zerschneidet man einen QS längs einer Diagonale, so erhält man ein „Hälftenpaar". In der Regel erhält man dabei für die beiden Diagonalen zwei verschiedene Hälftenpaare. Fig. 1 zeigt, welche Fälle auftreten können. Aus ihr ist auch ersichtlich, daß durch den umgekehrten Vorgang, das Zusammensetzen zweier Hälften, eine Abbildung von der Menge H der Hälftenpaare in die Menge der QS definiert ist, die surjektiv (Zerschneiden liefert ein Urbild), aber nicht injektiv (Zerschneiden auf zwei verschiedene Arten) ist. Allerdings kann ein QS höchstens zwei Hälftenpaare als Urbild besitzen. Daraus ergibt sich eine einfache Beziehung zwischen der Anzahl h_n der Elemente von H und der gesuchten Anzahl q_n der QS mit n Farben: Ist nämlich e_n die Anzahl der QS mit genau einem Urbild, so haben $q_n - e_n$ Quadrominosteine genau zwei Urbilder, und es gilt:

(1) $$h_n = 2(q_n - e_n) + e_n$$

Um einzusehen, daß es nur die einfarbigen QS sind, die genau ein Hälftenpaar als Urbild haben, d.h. daß $e_n = n$ ist, betrachte man Fig. 2. Dort sind die beiden Hälftenpaare abgebildet, aus denen ein QS zusammengesetzt werden kann, dessen Dreiecke wie angegeben mit den Farben x, y, v, w gefärbt sind. Sind diese Hälftenpaare identisch, so gilt entweder $H_1 = H_3$ und $H_2 = H_4$ oder $H_1 = H_4$ und $H_2 = H_3$. In beiden Fällen ergibt sich:

$$x = y = v = w.$$

Die Berechnung von h_n ist eine Routineangelegenheit. Man muß nur berücksichtigen, daß es sich um ungeordnete Paare handelt, die auch aus zwei gleichen Hälften bestehen können. Da es n^2 verschiedene Hälften gibt, liefert die entsprechende kombinatorische Formel (Kombinationen zu zwei Elementen mit Wiederholung):

$$h_n = \binom{n^2 + 2 - 1}{2} = \frac{(n^2 + 1)\, n^2}{2}.$$

(Man kann diese Formel auch umgehen, wenn man sich überlegt, daß die Menge aller Hälftenpaare aus allen zweielementigen Teilmengen der Menge aller Hälften sowie allen Paaren mit zwei gleichen Hälften besteht, also

$$\binom{n^2}{2}+n^2=\frac{n^2(n^2-1)}{2}+n^2 \text{ Elemente besitzt.)}$$

Setzt man die Werte für h_n und e_n in (1) ein, so erhält man:

$$q_n=\tfrac{1}{4}(n^4+n^2+2n).$$

Daraus ergibt sich für $n=3$ und $n=4$: $q_3=24$, $q_4=70$.

3. Die zweite Abzählmethode beruht auf einem ähnlichen Vorgehen. Der Ausgangspunkt ist eine Zuordnung zwischen der Menge der QS und dem vierfachen cartesischen Produkt $K=C\times C\times C\times C$ (C ist eine Menge von n Farben), dessen Elemente als Namen von QS gedeutet werden können. Jedem QS kann man ein solches Quadrupel als Name zuordnen, indem man bei einem Feld beginnend und im Uhrzeigersinn fortschreitend die Bezeichnungen der Farben, die die Felder tragen, notiert. Wie man leicht sieht, kann ein QS mehrere Namen (und zwar höchstens vier) besitzen. Umgekehrt gehört zu jedem Namen genau ein QS, so daß dadurch eine Abbildung von K in die Menge der QS definiert ist, die surjektiv, aber nicht injektiv ist. Analog zu (1) gilt daher: Ist t_i die Anzahl der QS, die genau i Urbilder besitzen, so ist

(2) $$|K|=t_1+2t_2+3t_3+4t_4.$$

Da $|K|=n^4$ ist und t_1, t_2 und t_3 leicht bestimmt werden können, läßt sich aus dieser Gleichung t_4 und damit auch

$$q_n=t_1+t_2+t_3+t_4 \quad \text{bestimmen.}$$

Hat nämlich ein QS mit dem Namen (x, y, v, w) weniger als vier Namen (Urbilder), so müssen mindestens zwei der vier Quadrupel: $k_1=(x, y, v, w)$, $k_2=(y, v, w, x)$, $k_3=(v, w, x, y)$, $k_4=(w, x, y, v)$ gleich sein. Das ist dann und nur dann der Fall, wenn

a) $x=y=v=w$ also $k_1=k_2=k_3=k_4$ oder

b) $x\neq y$ und $x=v$ und $y=w$ also $k_1=k_3$ und $k_2=k_4$ ist.

Daraus folgt, daß nur die einfarbigen QS genau einen Namen besitzen, also $t_1=n$. Weiterhin folgt, daß die QS mit genau zwei Namen diejenigen zweifarbigen sind, bei denen gegenüberliegende Dreiecke dieselben Farben besitzen, also $t_2=\binom{n}{2}$. Da es keinen QS mit drei Namen gibt, ist $t_3=0$. Mit diesen Werten folgt aus (2): $t_4=\frac{1}{4}(n^4-n-n(n-1))$ und damit

$$q_n=n+\tfrac{1}{2}n(n-1)+\tfrac{1}{4}(n^4-n^2)=\tfrac{1}{4}(n^4+n^2+2n).$$

Literatur

[1] *Spiegel, H.*: Quadromino im Mathematikunterricht I. **DdM 2** (1974) S. 139–148.
[2] *Spiegel, H.*: „Viererpuzzle" – Eine Lernsequenz für das vierte Schuljahr zu einem Legespiel. Sachunterricht und Mathematik in der Grundschule **5** (1977), Heft 9, S. 458–463.
[3] *Ziegenbalg, J.*: Das Quadrominospiel als Beispiel für lokales Ordnen. **DdM 2** (1974) S. 222–242.

Anschrift des Verfassers:
Prof. Dr. Hartmut Spiegel, Hochstiftstr. 16, 4790 Paderborn