HARTMUT SPIEGEL

Wie viele Streichhölzer sind in einer Streichholzschachtel?

3–4

0. Einleitung

Die Forderung, daß der Mathematikunterricht einen Beitrag zur Umwelterschließung leisten soll, ist nicht umstritten. Sie war zwar im Zuge der KMK-Empfehlungen von 1968 und deren Realisierung ein wenig in Vergessenheit geraten, wurde aber von H. Winter in dem Vortrag „Die Erschließung der Umwelt im Mathematikunterricht der Grundschule" auf der Bundestagung für Didaktik der Mathematik 1976 in Augsburg (vgl. [3]) erneut ins Bewußtsein der didaktischen Öffentlichkeit gerückt. Eine Reihe von praxisnahen Anregungen für die Erfüllung dieser Forderung findet sich z. B. in [1], [2], [4]. Da zu den mathematisch erfaßbaren Umweltphänomenen auch die zufallsbedingten (die sogenannten stochastischen) gehören, werden insbesondere in dem letztgenannten Artikel Aktivitäten für den Mathematikunterricht der Grundschule vorgeschlagen, bei denen Kinder erste Erfahrungen mit diesem Aspekt der Umwelterschließung machen können und die sich problemlos in den übrigen Unterricht (nicht nur Mathematik-, sondern z. B. auch Sachunterricht) integrieren lassen.
Im folgenden wird ein weiteres einfaches und im 3. Schuljahr mehrfach erprobtes Unterrichtsbeispiel zu diesem Themenkreis beschrieben und kommentiert. Es handelt sich dabei um ein Standardproblem aus dem Bereich der beschreibenden Statistik: Zählungen oder Messungen, die man zwecks Untersuchung solcher Fragen wie:
Wie groß ist ein 9jähriges Mädchen? Wieviel Strom verbraucht ein 4-Personen-Haushalt im Monat? aber auch: Wieviel g Mehl sind in einer 1-kg-Mehlpackung? anstellt, haben unterschiedliche Resultate. (Dies trifft praktisch für jede Messung im naturwissenschaftlichen Bereich zu, sofern die Meßgeräte genügend empfindlich sind.) Wie kann man nun eine solche Situation mathematisch beschreiben? Im Mittelpunkt der beschriebenen Unterrichtseinheit steht – ausgehend vom Auszählen einer Stichprobe von Streichholzschachteln – die Entwicklung der üblichen Histogrammdarstellung, wobei die Streichholzschachteln selbst benutzt werden. Diese Darstellung wird zum Ausgangspunkt weiterer Betrachtungen, so z. B.: Welche Informationen kann man der Darstellung entnehmen? Wie kann man eine „gerechte" Verteilung herstellen?

1. Ein möglicher Stundenverlauf

Der Lehrer zeigt den Kindern eine von den mitgebrachten Streichholzschachteln (etwa 30–40 Stück vom Typ „Welthölzer", Inhalt: ca. 40 Streichhölzer, möglichst noch in Originalverpackung zu je zehn Schachteln) und bittet darum, daß jedes Kind ganz allein schätzt, wie viele Hölzer „in so einer Schachtel – wenn noch keines herausgenommen ist –" sind, und diese Zahl notiert. Seine anschließende Frage, wie man feststellen könne, welche Schätzung richtig ist, führt zu dem Vorschlag, den Inhalt der vorgezeigten Schachtel nachzuzählen. Beim anschließenden Zählen sollten verschiedene Zähltechniken angesprochen werden. Steht das Ergebnis fest, so ist in der Regel für die Kinder die mit der Frage nach der korrekten Schätzung verbundene Ausgangsfrage: Wie viele Streichhölzer sind in einer – bzw.: *so* einer – Streichholzschachtel? eindeutig beantwortet. Der Lehrer kann nun entweder versuchen, in einem durch Rückfragen angeregten Gespräch zu klären, daß das Nachzählen einer einzigen Schachtel nicht ausreicht, oder sofort jedes Kind eine oder zwei Schachteln nachzählen und die Anzahl auf der Rückseite der Schachtel schreiben lassen. Halten die Kinder dies durch die neuerdings auf der Schachtel befindliche Aufschrift:

„40-Sicherheits-Zündhölzer" für überflüssig, so kann er das Zählen als *Kontrolle* dieser Angabe motivieren, sofern nicht ohnedies die erste Zählung eine von 40 verschiedene Zahl ergeben hat, was aufgrund der bisherigen Erfahrungen bei ca. 80% aller Schachteln der Fall sein wird. Wenn die Schachteln wieder eingesammelt sind, hat es sich bei den Kindern schon herumgesprochen, daß sehr verschiedene Zahlen bei der Zählung herausgekommen sind. Das macht sie auch neugierig, wieviel in den anderen Schachteln wohl war und läßt sie mit überlegen, wie man sich über das Ergebnis der Zählung eine Übersicht verschaffen kann, wie man es anschreiben oder darstellen kann.
Als eine von verschiedenen Möglichkeiten kann die gebräuchliche Strichliste an der Tafel gemeinsam erstellt werden. Die spezielle Form der Histogrammdarstellung (deren Entwicklung eines der Ziele dieser Stunde ist) wird in der Regel der Lehrer einbringen müssen. Hierzu bereitet er einen großen Papierbogen vor, auf dem das Schema des Arbeitsblattes in Abb. 1 so eingezeichnet ist, daß die einzelnen Felder der Unterteilung gerade so groß wie eine Streichholzschachtel sind. Jede Streichholzschachtel wird dann – von unten beginnend – in die passende der mit 31 bis 42 (oder 33–44) bezeichneten Spalten gelegt. Sind alle Schachteln untergebracht, so entspricht ihre Anordnung der gebräuchlichen Histogrammdarstellung für solche Verteilungen. Die Schachteln können auch auf einem Tisch zu Säulen aufeinander gestapelt werden. In der noch zur Verfügung stehenden Zeit bis zum Ende der Stunde kann über die in der Darstellung enthaltene Information gesprochen und (oder) die Strichliste und die Histogrammdarstellung von den Kindern in das Arbeitsblatt (Abb. 1) übertragen werden.

2. Kommentar

Im folgenden werden Aspekte der oben skizzierten Unterrichtsstunde und mit ihr verbundene Absichten erläutert.

2.1

Die Schätzung am Anfang der Stunde hat eine doppelte Funktion:
Zum einen dürfte die Formulierung einer eigenen Vermutung das Interesse der Kinder an einer Antwort auf die Frage verstärken bzw. erst hervorrufen, zum anderen ist auch die Fähigkeit zum Schätzen ein Unterrichtsziel. Denn alles Rechnen mit Größen bleibt inhaltsleer, wenn die Kinder nicht adäquate Vorstellungen von diesen Größen haben; diese aber werden auch durch Schätzübungen gefördert. Die Schätzungen des Inhalts der Streichholzschachteln durch die Teilnehmer einer Lehrerfortbildungsveranstaltung schwankten zwischen 20 und 150, die der Kinder zwischen 10 und 100.

2.2

In dem Moment, in dem alle Streichholzschachteln ausgezählt sind und es sich herumgesprochen hat, daß unterschiedliche Ergebnisse vorliegen, ist ein weiteres Lernziel erreicht: „Wir haben gelernt, daß nicht in jeder Streichholzschachtel gleich viele Streichhölzer sind" antwortete ein Kind auf die am Anfang der 2. Stunde des Unterrichtsversuches gestellte Frage: „Was habt ihr gestern eigentlich gelernt?"
Es traf damit den Nagel auf den Kopf, auch wenn es nicht angemessen wäre, eine solche auf den speziellen Fall der Streichholzschachteln bezogene Formulierung als operationalisiertes Lernziel z. B. in einen Unterrichtsentwurf aufzunehmen. Die Kinder sollten ein Beispiel für eine Situation kennenlernen, bei der sie – was sich bestätigt hat – nicht erwarten, daß auf eine „Wieviel?"-Frage in der obigen Form die Angabe einer wohlbestimmten Zahl als Antwort nicht möglich ist. (In der Fachterminologie ausgedrückt bedeutet das, daß die Anzahl der Streichhölzer in einer Schachtel bei der mathematischen Beschreibung eine

zufällige Variable ist, deren empirische Verteilung für mehr als einen Wert von Null verschieden ist.) Bei anderen Situationen werden die Kinder dagegen schon vor einer Zählung wissen, daß es sich so verhält, z. B. bei der Frage: „Wieviel Autos fahren in einer Stunde (oder sogar: vormittags von 11–12) durch die Hauptstraße?“

2.3

Daß es wichtig ist, daß Kinder lernen, anschauliche Darstellungen von Verteilungen in Form von Histogrammen anzufertigen und zu lesen, bedarf keiner weiteren Begründung. Die hier gewählte Form, bei der die Schachteln selbst zum Aufbau des Schaubildes benutzt werden, resultiert unmittelbar aus den im Grundschulmathematikunterricht auch sonst benutzten Grundtechniken „klassifizieren“ (also: Sortenbildung, 38er Sorte etc.) und „ordnen“ (Hier: Anordnung der Sorten nach Anzahl). Nachdem die Kinder das Histogramm so entstehen sahen bzw. handgreiflich an der Entstehung mitgewirkt hatten, konnten sie auch ohne Schwierigkeiten die darin enthaltenen Informationen ablesen. Wer sich die Zeit nehmen kann, sollte auf das Arbeitsblatt (Abb. 1) verzichten und die Kinder das Histogramm frei von dem Vorbild abzeichnen lassen.

Untersuchungsprotokoll der Klasse am

Wir haben die Frage untersucht:

Wie viele Streichhölzer sind in einer Streichholzschachtel?

Dazu haben wir bei Streichholzschachteln die Zahl der Streichhölzer gezählt und folgendes Ergebnis erhalten:

STRICHLISTE

32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43

SCHAUBILD

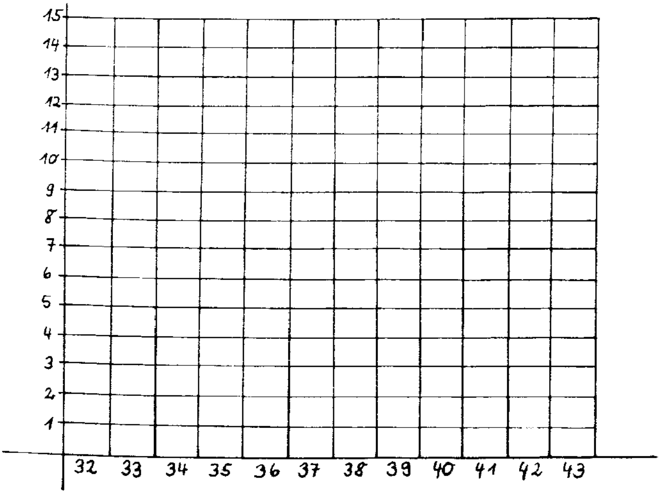


Abb. 1

3. Bausteine zur Weiterarbeit

3.1

Die Auswertung der in der Darstellung enthaltenen Information kann damit beginnen, daß man gemeinsam überlegt, welche Antwort man angesichts des Resultates der Auszählung auf die Frage: „Wieviel Streichhölzer sind in einer Streichholzschachtel?“ geben sollte. Da sich die Kinder dabei erfahrungsgemäß recht schwer tun, sollte man sie ermuntern, möglichst viele verschiedene Formulierungen zu finden, die man dann vergleichen und präzisieren kann. Möglichkeiten sind:

- „Ungefähr 40“
- „In den von uns gezählten zwischen 31 und 42“ – „Meistens 40“
- „Nicht immer 40“
- Oft weniger als 40“
- „Sehr selten über 40“
- „Sehr oft nicht 40“
- „Ungefähr 39“

Die „40“ im ersten Satz orientiert sich am Packungsaufdruck, aber sofern der Gipfel der Verteilung weiter links liegt, kann es sein, daß sich die Kinder eher an diesem orientieren und sich daher intuitiv an eine der drei möglichen Kennzahlen: Zentralwert, häufigster Wert, arithmetisches Mittel anlehnen. Die Frage: Soll man „ungefähr 40“ oder „ungefähr 39“ antworten?, kann Argumentationen zur Folge haben, die auf einen dieser Begriffe hinführen. Einen ähnlichen Effekt kann man auch mit der Frage erreichen: Wer von euch hat am besten geschätzt?

3.2

Das Schaubild der Verteilung ermöglicht über die oben besprochene globale Beschreibung hinaus das einfache Ablesen von Detailinformationen, die Antworten auf folgende Fragen sind:

- In wieviel Schachteln waren 40 Streichhölzer?
- In wieviel Schachteln waren weniger als 40 Streichhölzer?
- Welche Streichholzzahl kam am häufigsten vor?
  (oder: Von welcher Schachtelsorte gab es die meisten Schachteln?)
- Wieviel Streichhölzer waren in den Schachteln mit den wenigsten (meisten) Streichhölzern?
- Wieviel Schachteln mit den wenigsten Streichhölzern gab es?

Nicht jedes Kind wird auf Anhieb den Inhalt jeder dieser Fragen verstehen, insbesondere, wenn solche Dinge im Unterricht bisher noch nicht thematisiert worden sind. Andererseits reicht als Impuls ein Beispielsatz des Lehrers häufig aus, um weitere Aussagen der Kinder zu provozieren. Ein Gespräch über Inhalt und Korrektheit der Aussagen kann dann die Voraussetzungen für das Verständnis und die aktive Verwendung angemessener Formulierungen verbessern. Wie wichtig dies ist, zeigen zwei der Presse entnommene Formulierungen:

1. „Die meisten Wormser sind zwischen 61 und 65 Jahre alt.“
2. „Die meisten Schüler sind Türken!“ (FR 13. 9. 1979)

(Auch wenn der 2. Satz präzisiert wird zu: „Die meisten der ausländischen Schüler sind Türken“, ist er falsch, denn weiter unten im Artikel liest man, daß die türkischen Schüler mit 41.3% den größten Anteil der ausländischen Schüler stellen.)
Ähnliche Probleme gibt es bei der Beschreibung relativer bzw. absoluter Mehrheiten bei

Wahlen: Ein mit relativer aber nicht absoluter Mehrheit gewählter Kandidat „hat die meisten Wählerstimmen auf sich vereinigt", obwohl die meisten Wähler andere gewählt haben. Als Gesprächsanlaß oder als Möglichkeit zur Überprüfung des Verständnisses kann das abgebildete Arbeitsblatt (Abb. 2) dienen. Es können natürlich Zählergebnisse vorkommen, bei denen die Sätze 4, 6, 7 nicht vervollständigt werden können. Diese müßten dann sinngemäß abgewandelt werden.

Abb. 2

Schreibe die richtigen Zahlen in die leeren Kästchen. Benutze dazu das Schaubild.

1. In ☐ Schachteln waren 38 Streichhölzer.
2. In der Schachtel mit den wenigsten Streichhölzern waren ☐ Streichhölzer.
3. Von den Schachteln mit ☐ Streichhölzern gab es die meisten.
4. In der Schachtel mit den meisten Streichhölzern waren ☐ Streichhölzer mehr als in der Schachtel mit den wenigsten Streichhölzern.
5. In ☐ Schachteln waren weniger als 40 Streichhölzer.
6. Es gab genauso viele Schachteln mit ☐ Streichhölzern wie mit ☐ Streichhölzern.
7. Es gab ☐ Schachteln mehr mit 40 Streichhölzern als Schachteln mit 41 Streichhölzern.
8. In mehr als der Hälfte der Schachteln waren mehr als ☐ Streichhölzer.

Satz 8 ist nicht für alle Kinder gedacht. Bei einigen löste er angestrengtes Nachdenken und heftige Diskussionen aus und auch richtige Ergebnisse wurden präsentiert. Typische Fehler bei den Sätzen 2, 3, 4 waren:

Satz 2: – Anzahl der Schachteln mit den wenigsten Streichhölzern
– Die Streichholzanzahl mit der geringsten Häufigkeit

Satz 3: – Die absolute Häufigkeit der am häufigsten vorkommenden Streichholzanzahl
– Die größte vorkommende Streichholzanzahl

Satz 4: – wie Satz 3 (nicht zu Ende gelesen!)

Ein Unterrichtsversuch ergab aber, daß die Kinder nach dieser Aktivität sofort in der Lage waren, einen Transfer zu leisten, da sie das Schaubild der Fehlerzahlverteilung, das der Lehrer nach Durchsicht dieses Arbeitsblattes an die Tafel zeichnete, mühelos lesen konnten.

3.3

Damit deutlich wird, daß das Beispiel „Streichholzschachteln" eine ganze Klasse ähnlicher Situationen repräsentiert, sollte die Sprache auch auf andere Beispiele kommen. Dazu kann man z. B. die Kinder für vorgegebene oder selbst genannte Verpackungsarten angeben lassen, ob es genauso bzw. anders ist (d. h. Beispiele und Gegenbeispiele zum betrachteten Situationstyp).
Beispiele: Büroklammern, Reißnägel, Joghurt, Zucker, Marmelade, . . .
Gegenbeispiele: Bierkasten, Zigarettenschachtel, Kaugummipackung, . . .

Zwar hat die allgemein gestellte Frage: Wieviel Flaschen sind in einem Kasten Bier? oder die entsprechende Frage bei den Zigaretten auch nicht eine eindeutige Zahl als Antwort, aber das hat einen anderen Grund, nämlich die verschiedenen vorhandenen Packungsgrößen.
Ebenso sollte man der Frage nachgehen, woran es liegt, daß nicht in jeder Schachtel gleich viele Streichhölzer sind. Taucht die Vermutung auf, daß das Gewicht beim Verpackungsprozeß eine Rolle spielt, so kann diese – sofern eine empfindliche Waage vorhanden ist – experimentell überprüft werden. Auf einen Brief mit der Bitte um Aufklärung, den die Klasse 3a der Horstringschule in Landau zusammen mit ihrem Lehrer Herrn Lehmann an die Geschäftsleitung der Deutschen Zündwaren-Monopolgesellschaft (DZMG) in Frankfurt schrieb, kam ein Päckchen mit Warenproben, ein freundliches Schreiben und ein hektographiertes Manuskript: „Herstellung von Zündhölzern".

Weitere Informationen erhielt der Autor bei einem Besuch des Werkes Mannheim – Rheinau der Deutschen Zündholzfabriken Gmbh. Für den interessierten Lehrer sei das Wichtigste kurz zusammengefaßt:

- Vor dem Verpacken befinden sich die Holzdrähte (das sind Zündhölzer ohne Zündköpfe) in der Komplettmaschine. Dort stecken sie in Bohrungen (4 mm tief; gerade groß genug, um den Holzdraht zu fassen) der Kettenstäbe (Flachstahlstäbe, die mittels einer Kette transportiert werden). Die Kettenstäbe bilden ein endloses Band, das über Walzen läuft und die Holzdrähte von einer Bearbeitungsstation zur anderen befördert: Erst werden sie in flüssiges Paraffin und anschließend in die Kopfmasse getaucht. Nach dem Trocknen der Köpfe stößt ein Mechanismus die in 42 Bohrungen befindlichen Streichhölzer aus den Kettenstäben in die Innenschachteln. Es kann aber sein, daß einige der Bohrungen leer sind, weil – bedingt durch unterschiedliche Holzbeschaffenheit (Naturprodukt Pappelholz) – zu dünne Holzdrähte während der vorhergegangenen Bearbeitungsvorgänge herausgefallen sind.
- Hinsichtlich der Kennzeichnung und Füllung von Streichholzschachteln (und vieler anderer Waren) gibt es gesetzliche Bestimmungen: Das Eichgesetz in der Fassung vom 20. 1. 1976 sowie die Verordnung über Fertigpackungen vom 20. 12. 1976. Danach handelt es sich bei der auf der Packung aufgedruckten Zahl „40" um die Nennfüllmenge, die bis zu 10% unterschritten werden darf. Andererseits darf 40 als mittlere Füllmenge nicht unterschritten werden, was bedeutet, daß bei Stichproben das arithmetische Mittel, vermehrt um eine Fehlerschranke, 40 nicht unterschreiten darf.
- In dem Schreiben der DZMG wird festgestellt, daß Unterfüllungen (also weniger als 36 Hölzer) die Ausnahme seien (immerhin waren in 8% von 210 seit 1976 ausgezählten Schachteln weniger als 36 Streichhölzer; in 60% weniger als 40; arithmetisches Mittel: 38,6). Will man Abhilfe schaffen, so gibt es zwei Möglichkeiten: 1. Die Zahl der Löcher, aus denen der Inhalt für eine Schachtel ausgestoßen wird, wird erhöht. Das scheitert an der Größe der Packung – wenn zufällig alle Löcher voll sind. 2. Die Nennfüllmenge wird auf 39 oder 38 herabgesetzt.

4. Schritte auf dem Weg zum Mittelwert – oder: Der „Mittelwertabakus"

4.1

Man kann dem Schaubild der Verteilung zwar entnehmen, daß die Streichholzanzahlen in einem gewissen Bereich streuen, daß in einer kleinen Zahl Schachteln genau 40, in den meisten (und zwar wirklich in den meisten!) weniger als 40 und in manchen mehr als 40 sind, aber für eine genaue quantitative Beurteilung der Stichprobe (vgl. die Ausführungen

in 3.3) reichen diese Daten nicht aus. Dazu wäre es – z. B. zum Vergleich zweier Stichproben – wichtig, zu wissen
- wie viele Streichhölzer insgesamt fehlen gegenüber der erwarteten Gesamtzahl aufgrund des Packungsaufdruckes
- wie viele Streichhölzer in jeder Schachtel wären, wenn man alle Streichhölzer der Stichprobe gleichmäßig auf alle Schachteln verteilte.

Solche Vergleiche sind auch möglich, ohne daß man Brüche zu Hilfe nehmen muß, wie das bei einem Teil der vollständigkeitshalber unten angegebenen Rechenwege der Fall ist. Will man nämlich die beiden genannten Fragen für die in untenstehender Tabelle angegebene Verteilung beantworten,

35	36	37	38	39	40	41	42
1	5	6	8	6	8	5	1

so rechnet man üblicherweise: (Der Vergleich der Tabelle mit den unterstrichenen Zahlen erleichtert dem ungeübten Leser das Finden der Begründung für die Rechnung in (1), (4), (6))

(1) Gesamtzahl der Streichhölzer $= \underline{1} \cdot 35 + \underline{5} \cdot 36 + \underline{6} \cdot 37 + \underline{8} \cdot 38 + \underline{6} \cdot 39 + \underline{8} \cdot 40 + \underline{5} \cdot 41 + \underline{1} \cdot 42 = 1542$

(2) Fehlbetrag $= 1600 - 1542 = 58$

(3) Mittelwert $= \frac{1542}{40} = 38\frac{22}{40}$

Ein wenig einfacher können die Gesamtzahl der Streichhölzer sowie der Mittelwert (ohne explizite Berechnung der Gesamtzahl) so berechnet werden:

64) Gesamtzahl der Streichhölzer $= 40 \cdot 35 + \underline{5} \cdot 1 + \underline{6} \cdot 2 + \underline{8} \cdot 3 + \underline{6} \cdot 4 + \underline{8} \cdot 5 + \underline{5} \cdot 6 + \underline{1} \cdot 7 = 1400 + 142 = 1542$

(5) Mittelwert $= 35 + \frac{142}{40} = 38\frac{22}{40}$

Rechnerisch am einfachsten findet man den Fehlbetrag und den Mittelwert so:

(6) Fehlbetrag $= 1 \cdot 5 + \underline{5} \cdot 4 + \underline{6} \cdot 3 + \underline{8} \cdot 2 + \underline{6} \cdot 1 - (\underline{5} \cdot 1 + \underline{1} \cdot 2) = 58$

(7) Mittelwert $= 40 - \frac{58}{40} = 38\frac{22}{40}$

Von diesen Rechnungen sind – gemessen am üblichen Schulbuchniveau – (1), (2), (3), (4) erst im 4. Schuljahr durchführbar ((3) in einer anderen Notation), (7) scheint begrifflich zu anspruchsvoll zu sein, mit (5), (6) dagegen kann man schon im 3. Schuljahr arbeiten, wobei bei (5) keine Bruchschreibweise benutzt wird. Wie man aber durch einfache Operationen am Diagramm zu einer Darstellung gelangen kann, aus der der Mittelwert direkt ablesbar ist, soll im folgenden gezeigt werden.

4.2

Ausgangspunkt ist die am Ende von Abschnitt 1 erwähnte Histogrammdarstellung mit den Schachteln. Fragt man die Kinder, was man machen könne, um aus der ungleichen Verteilung eine „gerechte" zu machen, so kommen meistens zwei Vorschläge:
- Alle Streichhölzer auskippen und zusammenlegen, dann gleichmäßig auf die Schachteln verteilen (dies ist das „enaktive Pendant" zu (3)).
- Aus jeder Schachtel so viele Streichhölzer entfernen, daß in allen Schachteln gleich viele sind (d. h. soviel wie in der Schachtel mit den wenigsten Streichhölzern); den Rest gleichmäßig verteilen (dies entspricht (5)).

Das letztgenannte Verfahren ist nicht mehr weit vom „Ausgleichsverfahren", das der Autor im Gespräch mit den Kindern erarbeitete. Dieses besteht in der wiederholten Ausführung folgender Elementaroperation: Aus einer Schachtel mit den meisten Hölzern wird eins entnommen und in eine der Schachteln mit den wenigsten Hölzern getan. Dies bedeutet auf dem Diagramm, daß eine Schachtel der am weitesten rechts befindlichen Spalte um eine Spalte nach links rückt (sie hat ja ein Streichholz weniger) und dafür eine Schachtel aus der äußersten linken Spalte um eine Spalte nach rechts. Beginnt man z. B. mit der Verteilung der obigen Tabelle, so verändert diese sich zu

35	36	37	38	39	40	41	42
–	6	6	8	6	8	6	–

Durch diese Operation ändert sich die Verteilung, Gesamtzahl der Hölzer und der Schachteln bleiben jedoch gleich.
So weiter fortfahrend kann man das Histogramm nach folgender (verallgemeinerter) Spielregel verändern: Für jede Schachtel, die um x Spalten nach links rückt (Herausnehmen von x Streichhölzern), muß eine andere um x Spalten oder müssen x andere um eine Spalte nach rechts rücken (Hineinlegen von x Streichhölzern). Solange man noch nicht so viel Übung hat, sollte man bei der Elementaroperation ($x = 1$) bleiben und den „Spielzug" gleichzeitig mit beiden Händen ausführen. Will man eine möglichst gleichmäßige („gerechte") Verteilung der Hölzer auf die Schachteln erreichen, so endet das Verfahren, wenn die Schachteln in zwei Spalten nebeneinander oder – sofern die Anzahl aller Streichhölzer ein Vielfaches der Anzahl der Schachteln ist – alle in einer Spalte liegen. Für das obige Beispiel sieht die Endverteilung so aus:

35	36	37	38	39	40	41	42
–	–	–	18	22	–	–	–

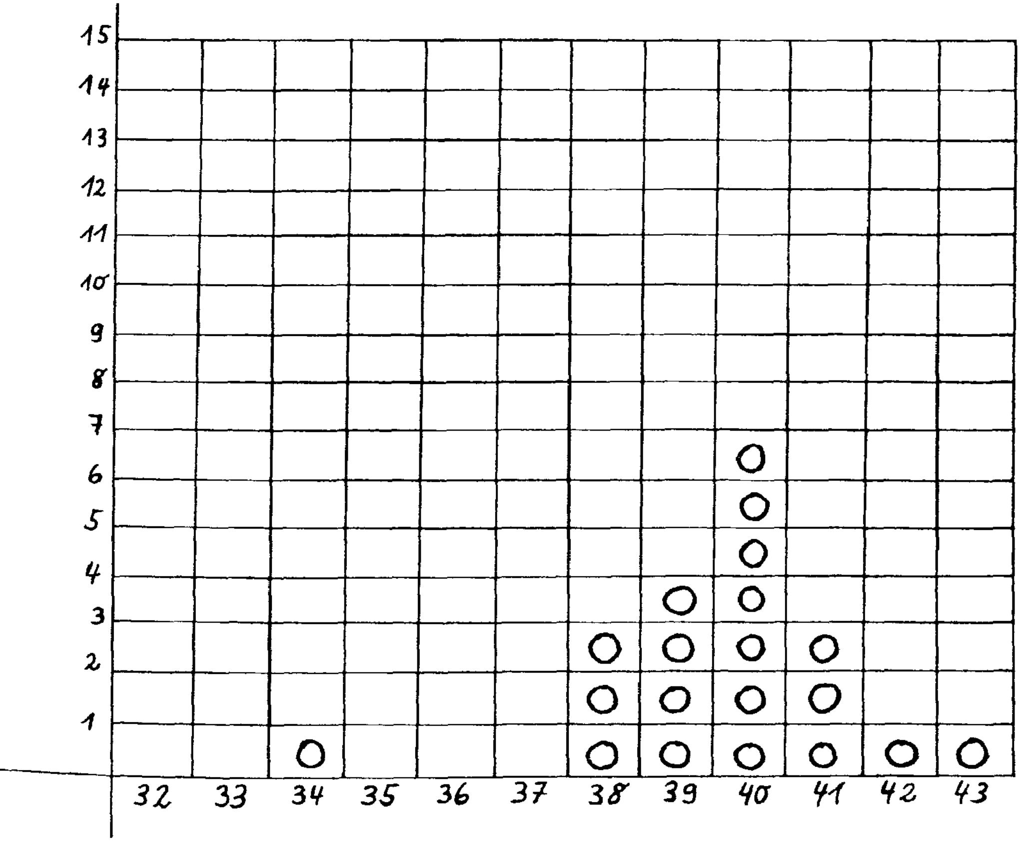
Aus dem zugehörigen Schaubild können die Kinder unmittelbar die Information entnehmen, daß bei einer möglichst gleichmäßigen Verteilung in jeder Schachtel 38 Streichhölzer sind und darüber hinaus in 22 Schachteln eines mehr. Weiterhin können sie ablesen, daß $2 \cdot 18 + 22$ Streichhölzer gegenüber dem Packungsaufdruck fehlen. Weiter sollte man in der Grundschule nicht gehen.
Aber wer bis hierher nicht nur gelesen sondern auch mitgedacht hat, sieht auch, daß man an dieser Darstellung den Mittelwert der Verteilung direkt ablesen kann, denn daß $(40 \cdot 38 + 22) : 40 = 38\frac{22}{40}$ ist, kann man ohne weitere Rechnung sehen. Daher auch der Name „Mittelwertabakus": Durch Hantieren mit „calculi" (in diesem Fall Streichholzschachteln) nach einer einfachen Regel kann eine vorgegebene Verteilung so verändert werden, daß der Mittelwert direkt ablesbar ist. Ein Schüler, der seinen Zensurendurchschnitt ermitteln will, kann das mit diesem Verfahren, ohne auch nur eine einzige Rechenoperation durchführen zu müssen.

Beispiel:	1	2	3	4	5	6
Zensurenverteilung		II	II	IIII	I	
1. Schritt		I	III	IIIII		
2. Schritt			IIIII	IIII		

Zensurendurchschnitt: $3\frac{4}{9}$

Wird das Verfahren auf der Handlungsebene sicher gehandhabt, kann man die zeichnerische Durchführung anregen: Die Schachteln werden durch Kringel dargestellt, die entsprechend der Regel ausgestrichen und in anderen Spalten eingezeichnet werden. Dies stellt jedoch hohe Anforderungen an die Konzentrationsfähigkeit, da sichergestellt sein muß, daß genausoviel Verlegungen von rechts nach links wie von links nach rechts durchgeführt werden. Insofern dürften die Arbeitsblätter der Abb. 3, 4 nur für obere Differenzierungsstufen im differenzierenden Unterricht geeignet sein.

Abb. 3



1. Stelle eine gerechte Verteilung her!

2. Wenn du die gerechte Verteilung hergestellt hast, fülle die Leerstellen aus!

Es sind ☐ Schachteln mit 39 Streichhölzern.

Es sind ☐ Schachteln mit 40 Streichhölzern.

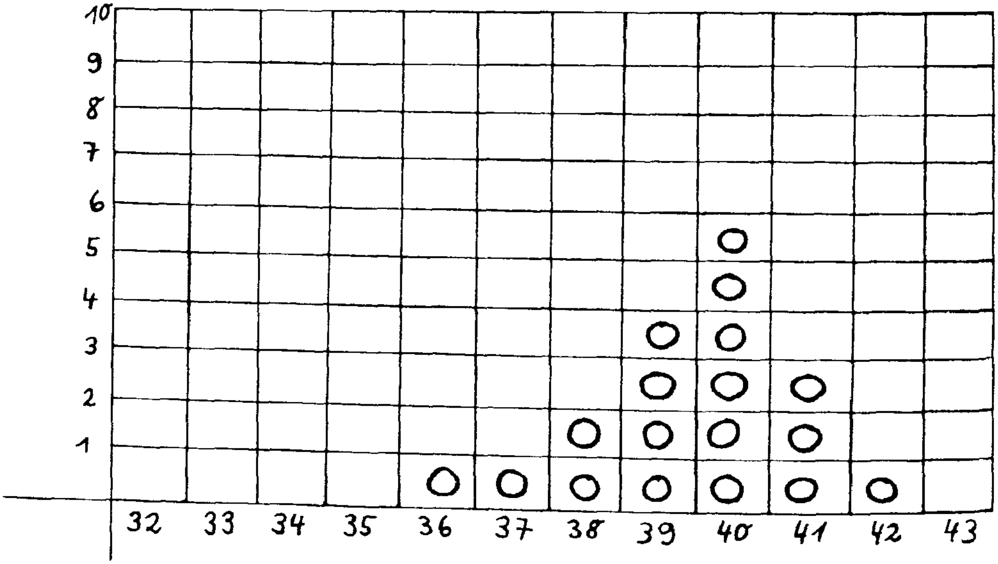
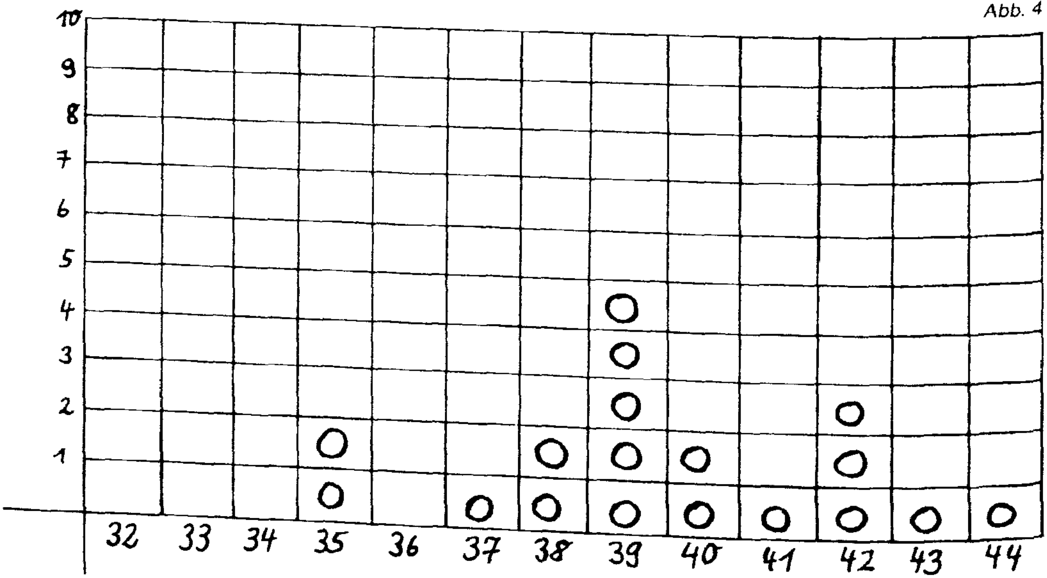


Abb. 4



Bei welcher Verteilung sind es insgesamt mehr Streichhölzer?

Stelle gerechte Verteilungen her und vergleiche!

5. Schlußbemerkungen

5.1

Ein großer Teil der Anwendungen der Mathematik im Alltag und in den Wissenschaften betrifft Zahlen und Größen, die auch vom Zufall abhängen. Ein Mathematikunterricht in der Grundschule, der diesen Aspekt ausklammert, schafft bei den Kindern von vornherein ein verengtes Bild von Mathematik und ein verfälschtes Bild der Wirklichkeit bzw. unterstützt – sofern sie erkennen, daß ihre „Sachaufgaben" mit den tatsächlichen Verhältnissen wenig gemein haben („Die Heizung der Familie Maier verbraucht pro Tag 30 l Öl") – ihr häufig berechtigtes Gefühl, daß Unterricht und Lebenswirklichkeit wenig gemein haben.
Darum erscheint es sinnvoll, verstärkt solche Probleme und Aufgaben in das übliche Sachrechnen zu integrieren (das ist möglich ohne Stoffvermehrung), die Begriffsbildungen aus dem Bereich der Statistik vorbereiten und auf den rationalen Umgang mit schwankenden Zahlen abzielen. Der vorstehende Unterrichtsvorschlag möchte einen Beitrag zu solchen Bemühungen leisten. Er bietet darüber hinaus Ansatzpunkte zu einer Integration von Sachunterricht (hier: Soziale Studien) und Mathematikunterricht.

5.2

Bei dem gesamten Prozeß der Herstellung gefüllter Streichholzschachteln spielt eine Fülle geometrischer Sachverhalte eine Rolle, die für einen Sekundarstufengeometrieunterricht mit besonderer Berücksichtigung der Umwelterschließung ein interessantes Potential darstellt. Ein Bezug zu geometrischen Themen der Grundschule ergibt sich durch die Frage, aus welcher Form wohl die Innenschachteln gefaltet werden. Hierüber kann man Vermutungen anstellen, die dann durch eine Untersuchung der Schachteln überprüft werden können. Die Form, aus der eine Schachtel der größeren Schachteltypen (etwa 11 cm × 6 cm × 3 cm) maschinell gefaltet wird, sieht z. B. nicht wie ein um eine Fläche vermindertes Quadernetz (oder Quaderabwicklung) aus, sondern so wie Abb. 5 zeigt. Darüber hinaus können die Schachteln nach der Unterrichtseinheit für die sehr empfehlenswerte von H. Besuden angeregte und in [1] detailliert beschriebene Unterrichtseinheit „Kippbewegungen von Streichholzschachteln" benutzt werden, sowie die Streichhölzer zu Aktivitäten zum Thema: Umfang und Inhalt von Rechtecken oder geradlinig begrenzten Figuren bzw. zu Aktivitäten, die aus der Literatur zur Unterhaltungsmathematik bekannt sind.

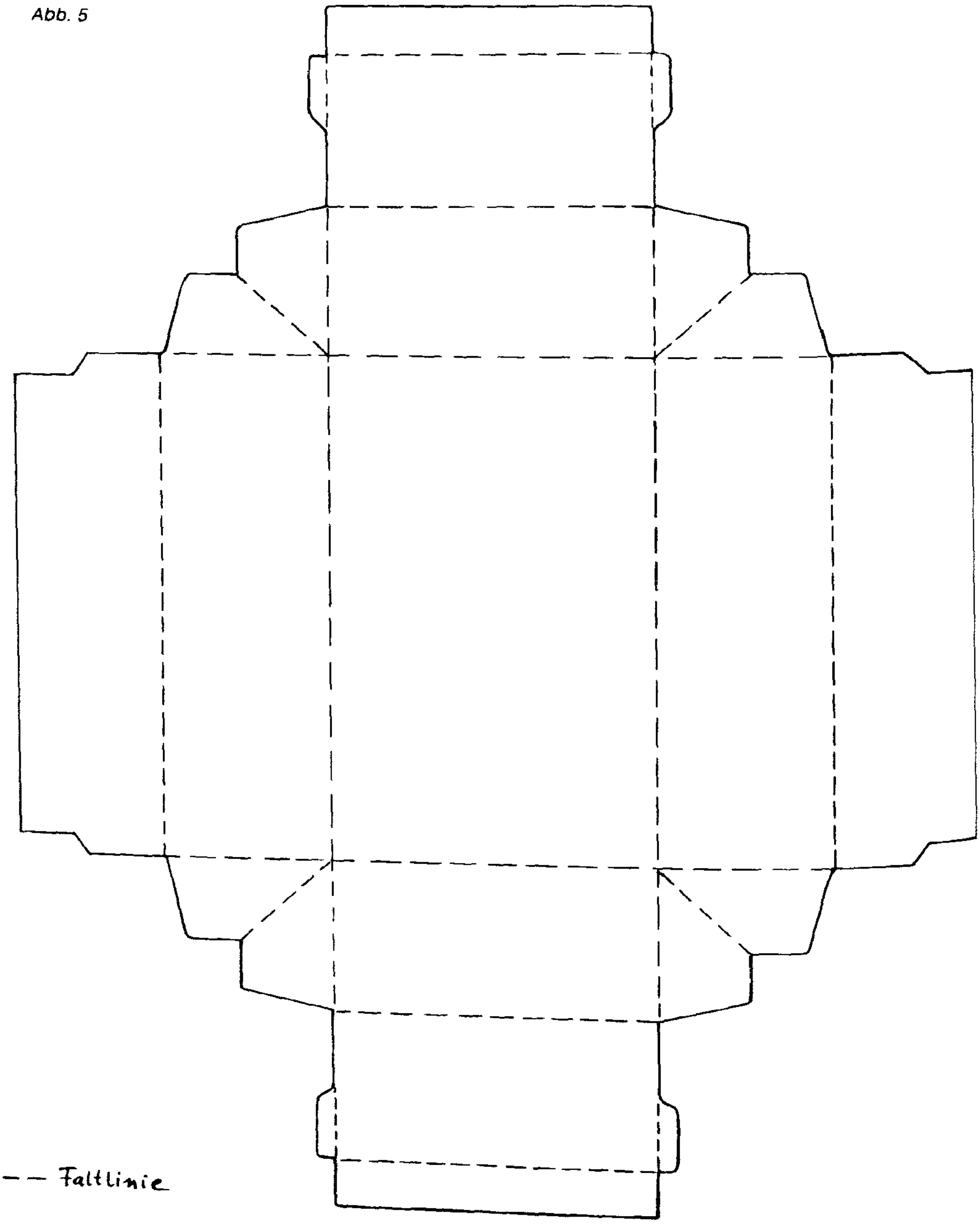
5.3

Den Herren R. Powarzynski und H. Winter danke ich für wertvolle Anregungen und Hinweise sowie den bei den Unterrichtsversuchen beteiligten Lehrern und Kindern für ihre hilfreiche und lebhafte Mitarbeit.

Literatur

[1] Müller, G. u. Wittmann, E.: Der Mathematikunterricht in der Primarstufe – Ziele, Inhalte, Prinzipien, Beispiele. Wiesbaden 1977
[2] Winter, H.: Der Beitrag des modernen Mathematikunterrichts der Grundschule zur Welterschließung. In: Epping, J. (Hrsg.) Praxis des Mathematikunterrichts II. Braunschweig 1978 S. 70–86
[3] Winter, H.: Die Erschließung der Umwelt im Mathematikunterricht der Grundschule. In: Sachunterricht und Mathematik in der Grundschule 4 (1976) Heft 7, S. 337–353
[4] Winter, H.: Erfahrungen zur Stochastik in der Grundschule. In: Didaktik der Mathematik 4 (1976) Heft 1 S. 22–37

Abb. 5



--- Faltlinie

Anschrift des Verfassers:

Dr. Hartmut Spiegel, Arnold-Schlüter-Weg 33, 4790 Paderborn