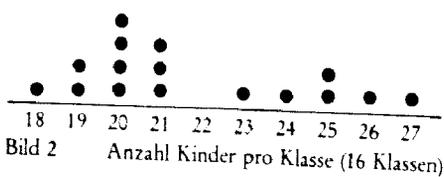
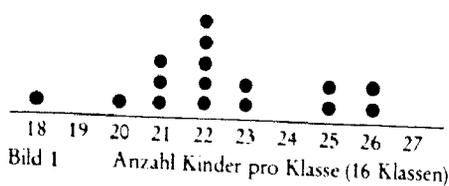


Der Mittelwertabakus

von Hartmut Spiegel

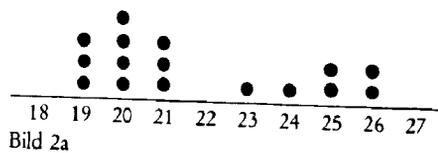
1 Wie funktioniert der Mittelwertabakus und was leistet er?

Die 16 Klassen der Paderschule haben folgende Schülerzahlen: 22, 20, 23, 18, 21, 26, 23, 25, 21, 22, 22, 25, 22, 21, 26, 22. Diese Situation ist graphisch durch das in Bild 1 wiedergegebene Häufigkeitsdiagramm (Histogramm) dargestellt, aus dem man mit einem Blick schnell eine Reihe von Informationen entnehmen kann. Bild 2 zeigt die Schülerzahlverteilung einer weiteren Schule mit 16 Klassen. Das Nebeneinander beider Darstellungen regt zu Vergleichen an. Eine der möglichen Fragestellungen lautet: Welche Schule hat die kleineren Klassen? Die Frage kann sicherlich verschieden interpretiert werden, aber in der Regel läuft sie auf einen Vergleich der mittleren Klassenfrequenzen hinaus, also auf den Vergleich der beiden Zahlen, die man erhält, wenn man jeweils alle Schülerzahlen addiert und das Ergebnis durch 16 teilt. Das Resultat, das arithmetische Mittel der einzelnen Klassenstärken, ist eine *fiktive* Zahl aus zwei Gründen: Erstens handelt es sich um die Angabe, wieviel Schüler in jeder Klasse *wären*, wenn die Schüler gleichmäßig auf alle Klassen verteilt wären (was ja nicht der Fall ist), und zweitens gibt es keine Bruchteile von Schülern (Die betreffenden Mittelwerte lauten hier: $22 \frac{7}{16}$ und $21 \frac{13}{16}$).

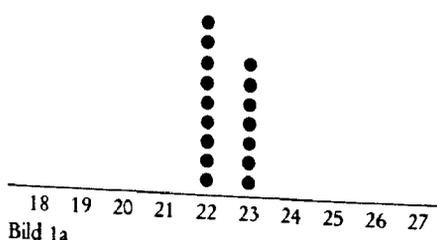
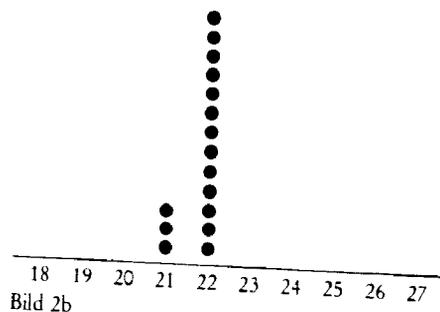


Die Deutung des Mittelwerts als Antwort auf die Frage: Wie viele Schüler wären bei möglichst gleichmäßiger Verteilung in jeder Klasse? liefert die Grundidee für ein Verfahren, das ich Mittelwertabakus nenne. Mit seiner Hilfe können Grundschulkinder (3./4. Schuljahr) ohne zu rechnen durch Umlegen von Plättchen oder Ändern des Histogramms mit dem Zeichensystem einen handlungsorientierten, anschaulichen Zugang zu solch einem Mittelwertver-

gleich gewinnen. Das Verfahren besteht in schrittweiser Veränderung des Histogramms, wobei die einzelnen Schritte Änderungen der Ausgangsverteilung in Richtung der angestrebten Gleichverteilung entsprechen. Dies² sei am Beispiel erläutert: Will man die ungleiche Verteilung der Schüler auf die Klassen korrigieren, so läßt man die (bzw. eine) Klasse mit den meisten Schülern einen Schüler an die (bzw. eine) Klasse mit den wenigsten Schülern abgeben. Für das Histogramm vom Bild 2 bedeutet das: Ein Kringel aus der Säule ganz rechts (sie besteht in diesem Fall nur aus diesem Kringel) rutscht eins weiter nach links und einer aus der Säule ganz links rutscht um eins weiter nach rechts. Es ergibt sich dann die in Bild 2a dargestellte Verteilung.



Die eben beschriebene Operation wiederholt man so oft, bis der Endzustand erreicht ist, der in Bild 2b wiedergegeben ist. Wendet man das gleiche Verfahren auf die Darstellung in Bild 1 an, so ergibt sich Bild 1a. Aus dem Vergleich mit Bild 2b kann man dann direkt ablesen, welche Schule kleinere Klassen besitzt. (Man kann auch die Mittelwerte aus beiden Darstellungen präzise ablesen: Sie übersteigen jeweils die unter der linken Säule stehende Zahl um soviel Sechzehntel, wie die Höhe der rechten Säule angibt.)



2 Warum kann der Mittelwertabakus im Grundschulmathematik- unterricht nützlich sein?

Wie gesagt ist das arithmetische Mittel eine fiktive Zahl innerhalb eines mathematischen Modells, eine Zahl, die keine direkte Entsprechung in der Realität besitzt. Mit ihrer Hilfe werden Mengen von Zahlen oder Größenangaben auf einen einzigen „Kennwert“ reduziert, in vielen Fällen zum Zwecke des Vergleichs zwischen verschiedenen solchen Datenmengen. Mittelwerte haben eine große Bedeutung bei der mathematischen Beschreibung unserer Umwelt. Sie begegnen uns als Durchschnittseinkommen, Durchschnittspreise (z. B. Mietpiegel, Immobilienpreise, Marktpreisumfragen von Testinstituten), mittlere Körpergewichte und -größen, Lebenserwartungen, pro-Kopf-Verbrauch von Lebens- und Genussmitteln, mittlere Sonnenscheindauer, mittlere Niederschlagsmenge, mittlere Temperatur, Zensurdurchschnitte usw. Die Bedeutung dieses mathematischen Begriffs als Instrument zur Erfassung unserer Umwelt sollte als Rechtfertigung dafür genügen, Fragestellungen in den MU der Grundschule einzubringen, bei denen das arithmetische Mittel eine Rolle spielt. Weil es sich dabei aber, wie oben ausgeführt, um einen vergleichsweise abstrakten Begriff handelt, sollte er sorgfältig und breit fundiert werden.

Wissen, wie man einen Mittelwert berechnet, heißt noch nicht: Wissen, was er bedeutet, was er aussagt. Für den Unterricht folgt daraus, daß mit den Kindern vor der Mitteilung oder Erarbeitung der Berechnungsvorschrift Sachverhalte bearbeitet werden, die in ihrem Horizont liegen und zu Fragestellungen anregen, die auf den Mittelwert hinauslaufen. Der Vorteil des Mittelwertabakus besteht darin, daß man mit seiner Hilfe solche Fragestellungen auch ohne Rückgriff auf die formale Definition untersuchen kann. Darüberhinaus ermöglicht er die Behandlung von Situationen, in denen der Mittelwert keine natürliche Zahl ist. Weiterhin kann (durch Umkehrung der Schritte) mit seiner Hilfe in Umkehrung zu den üblichen Aufgabenstellungen zu einer vorgegebenen Zahl eine Datenmenge und eine Häufigkeitsverteilung konstruiert werden, die diese Zahl als Mittelwert besitzen. Die Vielfalt möglicher Lösungen macht dann auch deutlich, wo die Grenzen der Information liegen, die man aus einem Mittelwert entnehmen kann.

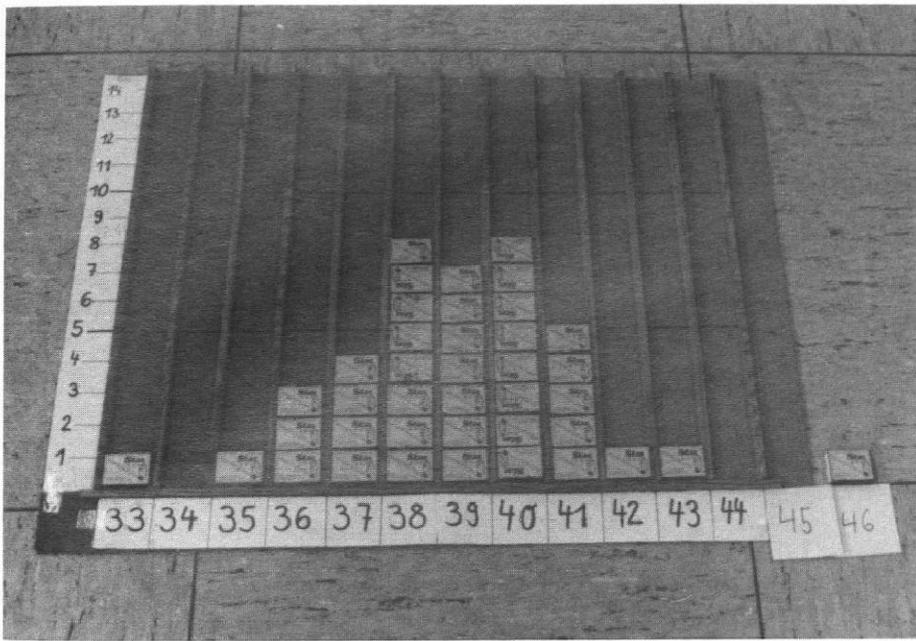


Bild 3

Sein Nachteil ist, daß sein Einsatz nur in einem kleinen Bereich von Situationen sinnvoll ist, nämlich solchen mit wenigen vorkommenden verschiedenen Zahlen (bis zu etwa 20) und nicht allzu großem Umfang der Datenmenge (bis zu etwa 40). Am geeignetsten für eine Einführung scheint mir die Untersuchung der Anzahlverteilung der Streichhölzer in einer Kollektion von ca. 20–30 Streichholzschachteln zu sein (z. B. soviel, wie Kinder in der Klasse sind).

3

Wie viele Streichhölzer sind in einer Streichholzschachtel?

Das ist die Ausgangsfrage für eine von uns mehrfach durchgeführte Unterrichtsreihe für das 3. oder 4. Schuljahr, bei deren Planung die Idee des Mittelwertabakus entstand. Man läßt die Kinder Schätzungen abgeben – manchmal kennen Sie die auf der Packung aufgedruckte Zahl – läßt anschließend die Anzahl der Streichhölzer in ca. 20–30 Schachteln nachzählen und sie auf die Schachtel schreiben. Die Ergebnisse werden gesammelt, und mit den Kindern werden Möglichkeiten erörtert, wie sie übersichtlich dargestellt werden können. In diesem Zusammenhang kann der Lehrer eine der in Bild 3 oder Bild 4 wiedergegebenen Anordnungen der Streichholzschachteln – auf einem „Spielplan“ (Bild 3) oder zu Säulen aufgestapelt (Bild 4) – vorschlagen und herstellen lassen. Ordnetes Sortieren führt direkt zu dieser Anordnung, deren zeichnerische Wiedergabe (vgl. Bild 5) eine Form der gebräuchlichen Histogrammdarstellung (Säulendiagramm) ist. Grundschulkinder sollten lernen, diese anschauliche und weit verbreitete Darstellungsform zu lesen, d. h. aus ihr möglichst viel der darin enthaltenen Information zu ent-

nehmen und sprachlich wiederzugeben. Der handelnde Zugang über das ordnende Sortieren erwies sich in unseren Unterrichtsversuchen als wirksam beim Aufbau des Verständnisses dieser Darstellungen. Dies zeigte sich darin, daß ein großer Teil der Kinder die meisten der nachstehend genannten Lückensätze, die sie als Hausaufgaben bzw. Stillarbeit nach dem Unterrichtsgespräch über das im Diagramm dargestellte Ergebnis (vgl. Bild 5) bearbeiteten, korrekt ergänzen könnte:

1. In \square Schachteln waren 38 Streichhölzer.
2. In der Schachtel mit den wenigsten Streichhölzern waren \square Streichhölzer.
3. Von den Schachteln mit \square Streichhölzern gab es die meisten.
4. In der Schachtel mit den meisten Streichhölzern waren \square Streichhölzer mehr als in der Schachtel mit den wenigsten Streichhölzern.
5. In \square Schachteln waren weniger als 40 Streichhölzer.
6. Es gab genauso viele Schachteln mit \square Streichhölzern wie mit \square Streichhölzern.
7. Es gab \square Schachteln mehr mit 40 Streichhölzern als Schachteln mit 41 Streichhölzern.

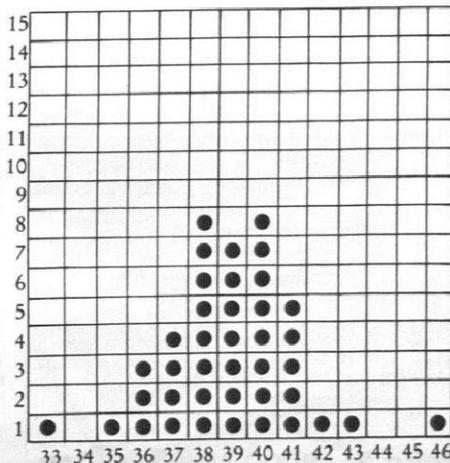


Bild 5 Anzahl Streichhölzer pro Schachtel (40 Schachteln)

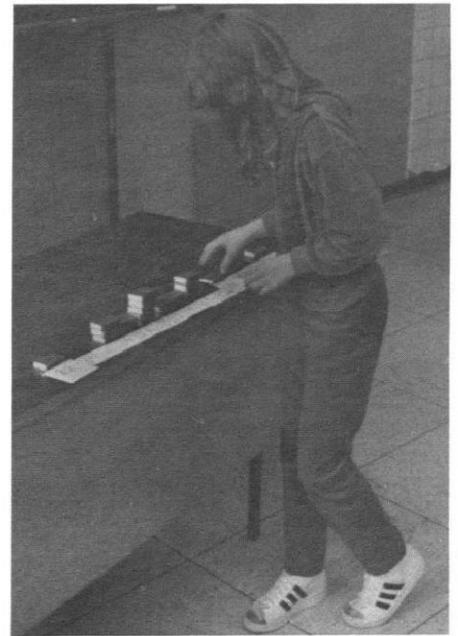


Bild 4

Der Vergleich der Verteilung mit der auf der Packung aufgedruckten Zahl (früher einheitlich 40, heute nach Aufhebung des Zündwarenmonopols unterschiedlich) oder die Frage, welcher von den Schätzwerten der Kinder der beste ist, führt auf die Frage, wie viele Streichhölzer in jeder Schachtel wären, wenn die Streichhölzer gleichmäßig verteilt wären. Dazu haben die Kinder folgende Vorschläge gemacht:

- Alle Streichhölzer auskippen und zusammenlegen, dann gleichmäßig auf die Schachteln verteilen.
- Aus jeder Schachtel so viele Streichhölzer entfernen, daß in allen Schachteln gleich viele sind (d. h. soviel wie in der Schachtel mit den wenigsten Streichhölzern; den Rest gleichmäßig verteilen).



Hartmut Spiegel, Arnold-Schlüter-Weg 33, 4790 Paderborn ist Professor für Didaktik der Mathematik an der Universität Paderborn.

In diesem Zusammenhang kann – da nicht zu erwarten ist, daß die Kinder selbst darauf kommen – der Lehrer den Vorschlag machen, der auf den Mittelwertabakus hinausläuft, nämlich planmäßig auszugleichen: Aus der (bzw. einer) Schachtel mit den meisten Streichhölzern wird eins entnommen und in die (bzw. eine) Schachtel mit den wenigsten Streichhölzern gelegt. Die Position der Schachteln auf dem Spielplan wird entsprechend verändert. Das wird solange fortgeführt, bis sich keine Änderung mehr ergibt, d. h. sich nur noch in einer Spalte oder zwei benachbarten Spalten des Spielplans Schachteln befinden. Das entspre-

chende Ergebnis zu der Ausgangssituation von Bild 5 lautet dann: Es sind 8 Schachteln mit 39 Streichhölzern und 12 Schachteln mit 40 Streichhölzern. Gemessen an dem Packungsdruck „40 Zündhölzer“ fehlen also in dieser Kollektion insgesamt 8 Streichhölzer.

Ist das Verfahren auf dieser Ebene gründlich erarbeitet, wobei man bald dazu übergehen kann, das tatsächliche Umpacken der Streichhölzer wegzulassen, kann es auf der zeichnerischen Ebene durchgeführt werden: Ausstreichen und Neueinzeichnen der Kringle, die die Streichholzschachteln darstellen. Mittels dieses Verfahrens können später auch zwei gleichlange Stichproben miteinander verglichen werden.

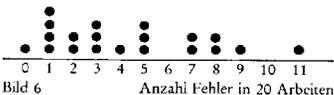
Aus der Tatsache, daß die korrekte zeichnerische Durchführung des Verfahrens eine hohe Konzentrationsfähigkeit erfordert, kann eine Konsequenz gezogen werden: mit den Kindern erörtern, auf welchen Rechenwegen man zum Ergebnis kommen kann.

4

Weitere Beispiele

Die Erarbeitung des Mittelwertabakus am Beispiel der Anzahlverteilung bei Streichholzschachteln kann die Funktion eines Paradigmas haben, d. h. für sich allein genommen schon in

der Lage sein, übertragbare Einsichten hervorzubringen. Andererseits bieten sich auch für die Grundschule viele weitere Situationen an, die man mit seiner Hilfe bearbeiten kann: So lassen sich z. B. Fehlerzahlverteilungen von Klassenarbeiten in dieser Form darstellen und auswerten. Ein Beispiel zeigt Bild 6.



Von den „Merkmalen“ der Kinder der Klasse dürften am unproblematischsten das Alter (in Monaten) und die Körpergröße (in cm) zu erheben und so zu verarbeiten sein. Ob man ebenso mit den sensibleren Datenmengen: Höhe des Taschengeldes oder Körpergewicht verfahren sollte, hängt von dem sozialen Klima in der Klasse ab. Schließlich eignet sich das Verfahren auch sehr gut zur Ermittlung bestimmter empirischer Mittelwerte von Zufallsgrößen. Diese Mittelwerte liefern einen Anhaltspunkt dafür (und zwar umso genauer, je größer die Zahl der Versuche ist), was man auf Dauer in den Situationen erwarten kann, für die diese Zufallsversuche ein Modell sind. Ein schwierigeres Beispiel: Man würfelt mit einem Würfel und stellt die Augenzahl fest. Wie lange (d. h.

wieviel Würfe) braucht man im Durchschnitt, bis jede Augenzahl mindestens einmal vorgekommen ist? (Schätzen Sie selbst einmal!) Das Ergebnis von 50 Versuchen zeigt Bild 7. Unter sucht werden hier Versuche (Würferien) im Hinblick auf das Merkmal „Anzahl der Würfe, bis jede Würfelzahl wenigstens einmal aufgetreten ist“.

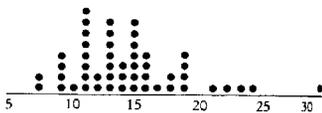


Bild 7 Anzahl Würfe mit einem Spielwürfel, bis alle Augenzahlen wenigstens einmal gefallen sind in 50 Versuchen

Der dazugehörige Mittelwert ist 14,5. Der theoretische Wert beträgt: 14,7. Dieses Experiment modelliert eine den meisten Kindern bekannte Situation: In Süßigkeiten sind Sammelbilder (z. B. 6 verschiedene Sportlerportraits) verpackt. Wieviele Packungen muß man durchschnittlich kaufen, bis man alle verschiedene Bilder hat (vom Tauschen wird hierbei abgesehen)? Ein weiteres Beispiel ist die mittlere Wartezeit bis zum Würfeln einer bestimmten Zahl z. B. der 6 oder der 1. Auch hier lassen sich die Versuchsergebnisse in der hier vorgestellten Form gut darstellen und auswerten.

Mit MENTOR können Ihre Schüler selbständig und mit Erfolg arbeiten und versäumten Stoff nachholen. Beispiele werden in kleinen Schritten vorge-rechnet, im beiliegenden Lösungsheft können die Schüler die Aufgaben Schritt für Schritt überprüfen. Bitte fordern Sie unseren ausführlichen Prospekt an. Fachlehrer können je Titel 1 Prüfexemplar mit 50% Rabatt anfordern.

Für Ihre Schüler der 7./8. Klassen empfehlen wir:

Algebra für die 7./8. Klasse

Teil 1: Brüche, Zinsen und Prozente, negative Zahlen und Potenzen

Der Aufbau des Zahlensystems als Grundlage für die weitere Algebra wird anschaulich am Zahlenstrahl erklärt. Zur eigenen Handhabung sind Zahlenstrahl und verschiedene Verschiebepfeile aus Pappe beigelegt. Weiter werden die Negativzahlen eingeführt, das Potenzrechnen geübt sowie die Grundbegriffe der Aussagenlogik verständlich gemacht.

112 S. + 30 S. Lösungsheft + Übungsmaterial DM 14,80

Mentor-Lernhilfe 35, Best.-Nr. 64 350

Teil 2: Termumformungen – Gleichungen – Ungleichungen – Funktionen

Die allgemeinen Regeln dieser zum Teil recht abstrakten Algebra können an Zahlenbeispielen selbstständig erarbeitet und durch Aufgaben eingeübt werden. Selbst so schwierige Begriffe wie »Funktion« und »Relation«

werden aus der Erfahrungswelt der Schüler abgeleitet und verständlich gemacht.

136 S. + 35 S. Lösungsheft DM 16,80
Mentor-Lernhilfe 36, Best.-Nr. 64 360

Geometrie für die 7./8. Klasse

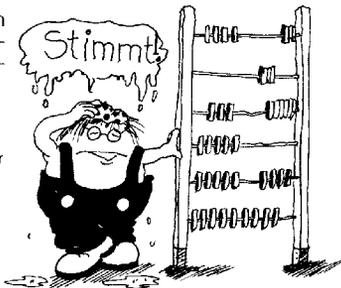
Teil 1: Achsenspiegelung, Punktspiegelung, Drehung, Verschiebung, Vektorrechnung

Die Abbildungsgeometrie ist leicht fälschlich dargestellt und wird an vielen Beispielen und Aufgaben eingeübt. Mit Hilfe von farbig bedruckten Transparentfolien werden auch die Abbildungsgesetze für die wichtigsten Kongruenzabbildungen anschaulich erklärt. Mit über 300 Abbildungen und den farbigen Folien wird hier eine »Geometrie zum Anfassen« geboten.

104 S. + 32 S. Lösungsheft + Übungsmaterial DM 16,80

Mentor-Lernhilfe 37, Best.-Nr. 64 370

Mit Mentor leichter lernen



Teil 2: Konstruktionen, Flächenberechnungen, Einführung in die Raumgeometrie

Schwerpunktmäßig beschäftigt sich dieser Band mit dem Winkel im Dreieck und an Parallelen, den Ortslinien, Ortsbereichen, Dreiecken, Vierecken, dem Kreis und der Geraden. Genaue Anleitungen helfen, die über 270 Figuren durch eigene Konstruktionen zu ergänzen. Beweisschritte werden durch kleine Einzelschritte durchschaubar gemacht.

111 S. + 40 S. Lösungsheft DM 16,80
Mentor-Lernhilfe 38, Best.-Nr. 64 380

Mentor-Verlag Neusser Straße 3 8000 München 60