HARTMUT SPIEGEL, Paderborn

Vom Nutzen des Taschenrechners im Arithmetikunterricht der Grundschule

1. Einleitung

„Ein spezielles neues Material stellt der Elektronische Taschenrechner (TR) dar. Weit mehr, als es je eine Rechenmaschine in der Vergangenheit vermocht hat, prägt der TR (vielfach sogar schon programmierbare Computer oder gar ganze EDV-Anlagen) sogar schon heute das Rechnen in der Lebenspraxis. Der TR kann von der Grundschuldidaktik nicht schlicht ignoriert werden. Erfahrungen im In- und Ausland zeigen, daß der TR sinnvoll in den Mathematikunterricht der Primarstufe integriert werden kann, dies muß der Lehrer aber selbst erst einmal lernen. Das Rechnen wird durch ihn keineswegs überflüssig, allerdings gibt es eine Akzentverschiebung; das Erfassen von Zahlbeziehungen und das überschlägige Rechnen erhalten einen weit höheren Stellenwert als bisher, reines Routinerechnen mit großen Zahlen (Multiplikationen und Divisionen) kann stärker dem TR überlassen werden. Es gibt keinen Hinweis darauf, daß der Einsatz des TR zu einer Verkümmerung der Rechenfertigkeiten führt, man hat vielmehr eine stärkere Sensibilität für Zahlen und Zahlzusammenhänge beobachtet. Allerdings muß der Gebrauch des TR didaktisch überzeugend gestaltet werden; er kann – wie jedes Medium – auch mißbraucht werden.“[1]
Dieser von *Heinrich Winter* verfaßte Text löste unter Vertretern der Lehrerschaft, der Gewerkschaften, der Eltern, der Schulverwaltungen, der Hochschulen etc., die im Frühjahr 1983 auf einem Symposium in Bad Sassendorf den 1. Teilentwurf Mathematik des neuen Grundschullehrplans für NRW diskutierten, eine kontroverse Diskussion aus. Die ablehnenden und skeptischen Stimmen überwogen – eine Reaktion, die auch für die öffentliche Meinung von heute repräsentativ ist. Sie ist bestimmt von der Angst, bei einer Einbeziehung des TR in den Grundschulmathematikunterricht würden die Kinder nicht einmal mehr das allernotwendigste mathematische Rüstzeuge für das tägliche Leben, nämlich das Kopfrechnen und/oder das schriftliche Rechnen erwerben. Berechtigt ist diese Angst, wenn man davon ausgeht, daß der TR unkritisch im Unterricht ebenso eingesetzt wird wie außerhalb der Schule: Aufgaben, die bisher auf andere Weise gerechnet wurden, werden nun mit dem TR gerechnet. Dies meinte *Winter* vermutlich, wenn er zum Schluß des Textes davon sprach, daß der TR – wie jedes Medium – auch mißbraucht werden könne. Die Angst ist aber gegenstandslos, wenn man an die vielen Beispiele für einen didaktisch überzeugend gestalteten Einsatz des TR denkt, bei denen der TR u.a. zwar auch in seiner ursprünglichen Funktion als Rechenwerkzeug genutzt wird, darüber hinaus aber weitere Funktionen im Dienste klassischer Lernziele des Arithmetikunterrichts erfüllt. Im folgenden sollen diese Funktionen näher beschrieben und durch Beispiele, die sich überwiegend für die Klassen 4 bis 6 eignen, illustriert werden.[2]

2. Didaktische Funktionen des Taschenrechners

Wie schon gesagt, kommen die zu kurz greifenden Vorurteile gegenüber der Einbeziehung des TR in den Unterricht hauptsächlich daher, daß nur an *eine* mögliche Funktion des TR gedacht wird: Statt durch Kopfrechnen oder ein schriftliches Verfahren werden die Ergebnisse von Rechenaufgaben nun mit Hilfe des TR ermittelt.[3]

Eine Möglichkeit, diesen Vorurteilen entgegenzuwirken, sehe ich daher in einer differenzierten Beschreibung unterrichtlicher Zwecke des TR-Einsatzes. Hierzu soll das nachfolgend dargestellte Raster „Didaktische Funktionen des TR" dienen. Es ist eine Verfeinerung des bekannten Schemas:

- TR als Unterrichtsgegenstand,
- TR als Rechenwerkzeug,
- TR als pädagogisches Werkzeug,

bei der die dritte Kategorie noch einmal unterteilt wird.

Ursprünglich habe ich dieses Raster aus folgendem Grund entwickelt: Es gibt eine Flut insbesondere amerikanischer Materialien zum TR-Einsatz im Unterricht. Nicht alle wirken überzeugend. Zwar sind in der Regel allgemeine oder inhaltsspezifische Lernziele angegeben, die man akzeptieren kann. Aber folgende Fragen bleiben häufig offen: Welche spezielle Rolle spielt der TR jeweils im Rahmen einer bestimmten Aktivität? Welchen Unterschied würde es machen, wenn man die gleiche Aufgabenstellung ohne TR bearbeiten würde?

Auch wenn die nachfolgend aufgeführte Einteilung keine vollständige Klassifizierung darstellt, weil sie weder überschneidungsfrei ist, noch jede sinnvolle Aktivität mindestens einer Funktion zugeordnet werden kann, hat sie sich im Sinne des ursprünglich gedachten Zwecks und bei der Arbeit mit Lehrern als hilfreich erwiesen. Zunächst werden die didaktischen Funktionen des TR genannt und mit einem knappen Kommentar versehen. Im 3. Abschnitt werden die ersten fünf genauer erläutert und durch Beispiele illustriert. Die unter 6. angesprochenen Fragen sollten nicht separat, sondern bei jeder passenden Gelegenheit im Zusammenhang mit den anderen TR-Aktivitäten angesprochen werden.

Der Taschenrechner kann

1\. ... *Ergebnisse, die ohne TR ermittelt werden, kontrollieren.* (Dabei kann es sich um Ergebnisse einer Berechnung oder einer Überschlagsrechnung handeln. Kontrollen einer Berechnung können für unmittelbares feed-back im differenzierenden Unterricht Bedeutung haben. Die Möglichkeit, Überschlagsrechnungen zu kontrollieren, kann zur Konstruktion geeigneter Übungsformen zum Thema „Überschlagsrechnen" genutzt werden.)

2\. ... *mit geringem Aufwand Beispielmaterial produzieren, das zum Entdecken von Gesetzmäßigkeiten Anlaß geben und/oder zu deren vorläufigen Bestätigung oder Widerlegung benutzt werden kann.* (Viele Beispiele – die häufig mit vertretbarem Zeitaufwand nur mit Hilfe des TR produziert werden können – beweisen zwar nichts, aber sie erleichtern das Entdecken einer Regel bzw. lassen sie in einem solchen Ausmaß bestätigt erscheinen, daß sich eine Suche nach Gründen lohnt.)

3. ... *Anlaß für neuartige Problemstellungen sein, die sich aus dem Umgang mit ihm sowie seinen Eigenschaften und Möglichkeiten ergeben.* (Hierzu gehören Aufgaben, für deren Lösungen besondere Bedingungen – „Tastenbeschränkungen" – gelten, oder Aufgaben, die umstrukturiert werden müssen, da der TR nicht alles so kann, wie man es braucht. Zweckmäßig sind solche Aufgaben dadurch, daß sie ganz allgemein mathematisches Denken stimulieren oder die Aufmerksamkeit auf wichtige mathematische Fakten lenken können.)
4. ... *sinnvoller Bestandteil mathematischer Spiele sein.* (Solche Spiele können sowohl dazu dienen, Grundfertigkeiten zu trainieren, als auch dazu, im Sinne allgemeiner Ziele [kognitive Strategien] wirksam zu werden.)
5. ... *beim Ermitteln des Ergebnisses von Rechenaufgaben helfen.* (Diese Funktion ist bedeutsam im Hinblick auf Aufgaben, die im Rahmen von für Schüler interessanten Anwendungen der Mathematik beim Sachrechnen auftreten können und schwierige und/oder umfangreiche Rechnungen erfordern. Weiterhin kann sie beim regelmäßigen Training der Rechenfähigkeit hilfreich sein. Bei Anwendungen der Mathematik und auch bei innermathematischen Problemen ist die Benutzung des TR immer dann sinnvoll, wenn es stärker auf andere Dinge als auf das Rechnen ankommt.)
6. ... *Anlaß zur Auseinandersetzung mit folgenden Fragen sein:*
a) *Was rechnet man zweckmäßigerweise nicht mit dem TR und warum?*
b) *Wie kann ich mich schützen vor fehlerhaften Ergebnissen, und was muß ich hierzu gut können?*

3. Beispiele und Kommentare zu den didaktischen Funktionen des TR

3.1 Kontrolle von Ergebnissen, die ohne TR ermittelt werden

a) Direkte und indirekte Kontrolle beim Üben

Eine häufig vorgeschlagene Möglichkeit zum Einsatz des TR besteht darin, ihn von den Kindern zur unmittelbaren Kontrolle von Ergebnissen benutzen zu lassen, die sie auf andere Weise ermittelt haben. Einwände, die von Lehrern gegen diesen Vorschlag vorgebracht werden, lauten dahingehend, daß
- ein Lösungsblatt dieselbe Funktion erfülle,
- dadurch ein nicht wünschenswerter Glaube an die Maschine erzeugt werde,
- Kinder der Versuchung zum Mogeln erliegen könnten.

Diese Einwände übersehen m.E.
- die Motivation, die von der Benutzung des TR ausgeht,
- die Tatsache, daß es bei einer umfassenden Einbeziehung des TR viele Gelegenheiten gibt, festzustellen, daß man nicht blind den Ergebnissen trauen darf, die man mit dem TR erzielt,
- die Lehrperson auch etwas falsch gemacht haben muß, wenn dies für eine große Zahl ihrer Kinder wirklich eine Versuchung darstellt.

Nicht außer acht lassen sollte man auch, was Kinder darüber denken: „I like the calculator because ... it does not get angry, when you do something wrong" (s. The Open University 1982:17). *Lörcher/Rümmele* (1986:38) fassen die diesbezüglichen Erfahrungen so zusammen: „Falsche Ergebnisse werden nur vom Rechner festgestellt, sie werden weder durch Schülerwort noch durch Schülernotiz dokumentiert. Fehler können daher vom Schüler riskiert werden. Sie machen ihn nicht hilflos, sondern helfen ihm, durch ihre sofortige Entdeckung sich an ihnen zu orientieren, sich mit ihnen der Lösung zu nähern, aus ihnen zu lernen. Weil er Nutzen aus seinen eigenen Fehlern ziehen kann, motivieren sie ihn zu neuen Rechenversuchen. Die Angst vor Fehlern wird ihm damit genommen, die Angst vor Schulversagen abgebaut."
Ich selbst habe gute Erfahrungen mit Übungsformen gemacht, bei denen der TR eine *indirekte* Kontrolle liefert. Dabei können die Kinder ggf. feststellen, daß sie etwas falsch gemacht haben, bekommen aber nicht das richtige Ergebnis geliefert. Zwei Beispiele sollen genügen:

Ergänzen zur nächsten Stufenzahl (10, 100, 1000, ...)
Eingabe einer Zahl; Berechnung des auf die nächste Stufenzahl führenden Summanden im Kopf; Eingabe dieses Summanden und Überprüfung (d.h. Lösung der Gleichung 43+x=100 im Kopf und Überprüfung durch den TR).

Üben der Multiplikation mit 7
Der Taschenrechner wird programmiert durch die Tastenfolge „0÷7=". Nun wird im Kopf immer mit 7 multipliziert, z.B. $7 \cdot 8$. In den Taschenrechner wird das Ergebnis gefolgt von einem Gleichheitszeichen eingegeben: „56=". Im Display erscheint die 8 als Kontrolle.

b) Kontrolle der Ergebnisse von Überschlagsrechnungen
Es ist unbestritten, daß durch die verbreitete Nutzung des TR „das überschlägige Rechnen ... einen weit höheren Stellenwert als bisher" erhält (vgl. das Zitat von *Winter* in der Einleitung). Der Einsatz des TR ermöglicht vielfältige neue Formen für das Üben des Überschlagsrechnens, bei denen die Kinder mit dem TR selbst die Ergebnisse ihrer Überschlagsrechnungen mit dem exakten Ergebnis vergleichen oder Vermutungen, die sich als Konsequenzen von Überschlagsrechnungen ergeben, überprüfen können – Übungsformen, bei denen die Rolle des TR schwer durch etwas anderes ersetzt werden kann. Folgende Beispiele sollen diese Aussage verdeutlichen.

1. Beispiel: Variante des Spieles Tic-Tac-Toe (vgl. *Miller* 1979:80)

1640	3125	2221		(22)	(53)	(68)
1300	2105	4010		[31]	[42]	[59]
925	2860	685				

Der Spieler, der am Zug ist, wählt eine rund und eine eckig eingeklammerte Zahl. Mit dem TR ermittelt er das Produkt und kennzeichnet mit seiner Farbe in dem 3x3-Feld die Zahl, die dem Produkt am nächsten liegt – sofern sie noch nicht gekennzeichnet ist. Der Spieler, der drei Zahlen in einer Reihe (waagerecht, senkrecht oder diagonal) eingefärbt hat, hat gewonnen.

2. Beispiel: Spiel „Hochwertige Produkte" (vgl. *Ockenga/Duea* 1978)
Gegeben sind die Zahlen: 58, 21, 57, 46, 71, 19, 61, 11, 68, 47, 18, 51, 24, 39, 42, 23, 52, 17, 55, 38; und 5 unterschiedlich bewertete „Kisten":

Kiste 1	Kiste 2	Kiste 3	Kiste 4	Kiste 5
0–999	1000–1999	2000–2999	3000–3999	4000-4999
(1 Punkt)	(2 Punkte)	(3 Punkte)	(3 Punkte)	(1 Punkt)

Der Spieler, der am Zug ist, wählt zwei Zahlen, streicht sie durch und multipliziert sie mit dem TR. Er stellt fest, in welche Kiste das Ergebnis paßt und schreibt sich die entsprechende Punktzahl auf. Wer am Ende die meisten Punkte hat, hat gewonnen.

3. Beispiel: Schätze das Produkt in zwei Versuchen! (vgl. *Coburn* 1987)
Gegeben sind eine Zielzahl, ein Multiplikator und fünf Ziffern. (Beispiel: Zielzahl 5000, Multiplikator 7, Ziffern 2, 3, 5, 7, 8.) Es werden drei der fünf Ziffern gewählt und daraus eine dreistellige Zahl gebildet, deren Produkt mit dem Multiplikator möglichst nahe bei der Zielzahl liegen soll. Nach Bildung der Zahl wird dieses Produkt mit dem TR berechnet. Glaubt man, ein noch besseres Ergebnis erzielen zu können, darf in einem zweiten Versuch eine Ziffer ausgewechselt und eine neue dreistellige Zahl gebildet werden.

3.2 Entdeckung und Überprüfung von Gesetzmäßigkeiten

Es ist eine der erfreulichsten Tatsachen der jüngsten Reform der Reform in Nordrhein-Westfalen, daß wesentliche, von *Winter* erstmals formulierte und ausführlich dargelegte Lernziele für den Mathematikunterricht (vgl. *Winter* 1972) die Zustimmung aller am neuen Lehrplan Mitarbeitenden gefunden haben und daher unverändert erhalten blieben. Hierzu gehört, zu lernen

- „kreativ zu sein", was u.a. einschließt: „nach Gesetzmäßigkeiten und Mustern Ausschau halten, Vermutungen äußern, einen Gedanken oder eine Aufgabe variieren, Beispiele zu einer Gesetzmäßigkeit finden, einen Gedanken auf etwas anderes, Verwandtes übertragen" und
- „zu argumentieren", was u.a. umfaßt: „Aussagen begründen, Behauptungen überprüfen, Begründungen verlangen, zwischen Vermutungen und begründeten Aussagen unterscheiden".[4]

Im Hinblick auf diese Ziele kann der TR wertvolle Dienste im Unterricht leisten. Mit seiner Hilfe läßt sich mühelos das für das erstgenannte Lernziel benötigte Beispielmaterial produzieren, in dem man nach „Gesetzmäßigkeiten und Mustern Ausschau halten" kann. Die Entlastung vom Rechnen erleichtert auch die Konzentration darauf. Das verständige Rechnen muß aber spätestens dann einsetzen, wenn es im Sinne des zweiten Lernziels darum geht, Begründungen für gefundene Gesetzmäßigkeiten anzugeben.
Das bekannteste Beispiel für einen solchen Einsatz des TR ist vermutlich das folgende: Gib eine Zahl der Form xyzxyz (also z.B. 836836) in den Taschenrechner ein, und dividiere nacheinander erst durch 7, dann durch 11 und schließlich durch 13. Fällt dir etwas auf? Nimm andere Zahlen dieser „Bauart" und mache es mit ihnen ebenso. Klappt das mit jeder solchen Zahl? Warum?

Der TR ermöglicht überhaupt erst eine derartige Problemstellung in der Grundschule, da das Rechnen auch nur einiger weniger Beispiele mit Hilfe des üblichen schriftlichen Divisionsverfahrens unangemessen viel Zeit erfordern würde, ganz abgesehen davon, daß schriftliche Division durch zweistellige Zahlen nicht mehr zum Pflichtprogramm des Lehrplans gehört. Schon deswegen ist bei Problemen, bei denen zwei- oder mehrstellige Divisoren auftauchen und auf deren Bearbeitung man in der Grundschule Wert legt,[5] der Einsatz des TR unverzichtbar.
Das oben genannte Beispiel sollte im differenzierenden Unterricht nur leistungsstarken Schülern angeboten werden, da ein sinnvoller Umgang mit ihm mindestens zweierlei voraussetzt, was meiner Erfahrung nach nicht allgemein vorausgesetzt werden kann:
(1) Wissen, daß die sukzessive Division durch mehrere Zahlen ersetzt werden kann durch die Division durch das Produkt dieser Zahlen (und nicht etwa der Summe!).[6]
(2) Einsehen, daß man erst dann behaupten kann, „daß das immer so geht", wenn man einen Grund dafür angeben kann.
Zur Erreichung beider Voraussetzungen bieten sich wiederum TR-Aktivitäten an, die dem in diesem Abschnitt behandelten Typ zugerechnet werden können. Hinsichtlich der ersten Voraussetzung kann der TR Beispielmaterial für die Überprüfung einer Gesetzmäßigkeit wie z.B. $z:a:b:c=z:(a \cdot b \cdot c)$ liefern, bevor man sich mit einer Begründung dafür beschäftigt. Für die Förderung der in der zweiten Voraussetzung angesprochenen Einsicht eignen sich Beispiele, die ebenso wie das obige nach einer problemlosen Gesetzmäßigkeit „riechen", bei denen man aber im Gegensatz dazu schließlich auf die Nase fällt. Diese sind durchaus für einen breiteren Schülerkreis geeignet.

- Multipliziere die folgenden zweistelligen Zahlen mit 111:
  53, 26, 43, 71, 18, 32, 14, 63. Was beobachtest du? Ist das immer so? Bei welchen Zahlen ist es immer so?
- Multipliziere die folgenden vierstelligen Zahlen mit 101:
  2211, 1234, 6222, 7423, 2535, 3663, 4537. Was beobachtest du? Ist das immer so? Bei welchen Zahlen ist es immer so?

Die obigen Beispiele bieten sich auch an für die Suche nach Verallgemeinerungen und Übertragungen im Sinne des Lernziels „kreativ sein" und bieten so seinen Spielraum für entdeckendes Lernen: Was passiert im ersten Beispiel, wenn ich statt mit 111 mit 11, 1111, 11111 usw. multipliziere? Was passiert, wenn ich statt zweistelliger Multiplikanden welche mit anderen Stellenanzahlen nehme? Welche Veränderungen bieten sich beim zweiten Beispiel an? Untersuche jeweils die Multiplikation zwei- , drei- und vierstelliger Zahlen mit 101, 1001, 10001.
Zum Schluß noch ein Hinweis auf etwas anspruchsvollere Variationen des erstgenannten Problems (:7:11:13), die zum Gegenstand eines kleinen Projekts für geeignete und interessierte Schüler werden können: Ausgangspunkt waren ja zunächst Zahlen der Bauart xyzxyz. Nun betrachten wir Zahlen der Form xxx, xxxx etc., also „Schnapszahlen" mit drei oder mehr Stellen. Bei dreistelligen klappt es mit :3:37. Was ist mit vier-, fünf-, sechs-, sieben- und achtstelligen? Dieses Problem läuft auf eine Suche nach den Primfaktoren von „Schnapszahlen" aus lauter Einsen hinaus, welche wiederum sinnvoll nur mit dem TR unternommen werden

kann. Gibt es auch Zahlen der Bauart xyxy oder xyxyxy etc., mit denen etwas Ähnliches funktioniert?

3.3 Neuartige Problemstellungen

Hier möchte ich Beispiele für zwei Arten von Problemstellungen vorstellen: Erstens solche, bei denen der Umgang mit dem TR sowie seine besonderen Eigenschaften der Problemanlaß sind, und zweitens solche, bei denen man mit dem TR nicht direkt, sondern erst durch geschicktes Ausnutzen mathematischer Zusammenhänge zum Ergebnis kommt. In beiden Fällen wird der TR zwar als Rechenwerkzeug für die Überprüfung von Vermutungen und Kontrolle von Lösungen benutzt, aber diese Funktion ist zweitrangig. Das wichtigste Werkzeug – wie übrigens bei allen anderen hier vorgestellten Aktivitäten – ist der Kopf, in dem mathematisches Denken aktiviert werden soll. Die nachfolgend angegebenen Beispiele sprechen für sich, wenn man sie selbst ausprobiert, und werden daher – auch aus Platzgründen – nur in sehr knapper Form wiedergegeben.

a) Rechnen mit Tastenbeschränkungen
Das Prinzip ist immer das gleiche: Man nimmt an, daß eine oder mehrere Tasten nicht funktionieren. Und trotzdem sollen bestimmte Zahlen im Anzeigefeld erzeugt oder bestimmte Operationen ausgeführt werden. Dies zeitigt ein interessantes Spektrum von Aufgabenstellungen, bei denen viel grundschulrelevantes mathematisches Wissen thematisiert wird.

(i) Zahlen zusammenbauen [7]
Es funktionieren nur die Tasten ON/C, 1, 0, +, –, =. Man versuche, durch eine möglichst geschickte Folge von Tastendrücken folgende Zahlen im Anzeigefeld erscheinen zu lassen: 99, 109, 890, 121, 71, 679, 1909, 2199, 8008, 5555. Das Werkzeug und Material im Baukasten kann nach Belieben variiert werden, beispielsweise so: Erzeuge 100 mit den Tasten 3, 7, +, – , =. Oder: Erzeuge 1000 mit den Tasten 2, 7, x, –, =. Man kann sich dann mit irgendeiner Lösung zufrieden geben, zur Suche von möglichst viel verschiedenen animieren oder natürlich diejenige prämieren, die die geringste Zahl von Tastendrücken erfordert. Das gilt auch für das nächste Beispiel.

(ii) Nur eine Zifferntaste funktioniert, aber alle Operationstasten
Man erzeuge die 24 mit der 4! Die kürzeste Lösung ohne raffinierte Verwendung der „Automatik“ und anderer Eigenschaften des TR ist wohl: 4x4=+4=+4= (10 Tastendrücke). Sie kann verkürzt werden zu: 4x4+4== (7 Tastendrücke). (52 mit der 2, 17 mit der 4.) Hier noch eine hübsche Spielidee dazu. Es wird eine „zufällige“ dreistellige Zahl erzeugt, indem zwei Personen unabhängig voneinander jeweils eine Zahl wählen: eine Person wählt eine der Zahlen von 4 bis 9, die andere eine von 26 bis 99. Die Zahlen werden miteinander multipliziert. Dann versuchen alle Teilnehmer, die durch die letzten beiden Stellen gegebene zweistellige Zahl nur mit Hilfe der Hunderterziffer und der Operationstasten zu erzeugen. Der kürzeste Weg bekommt die höchste Punktzahl.

(iii) Eine Zifferntaste ist ausgefallen
Es fängt einfach an: Man erzeuge, ohne die 4 zu benutzen: 4, 34, 45, 342, 444, 1401 etc. (Stellenwertprinzip!). Interessanter wird es beim Rechnen, insbesondere Multiplikation und Division: Man multipliziere 256 mit 14, ohne die 4 zu benutzen.[8] Man dividiere 4081 durch 7, ohne die 7 zu benutzen. Hier sind Rechentechniken gefragt, die auch beim Kopfrechnen nützlich sind: Ersetzen eines Schrittes durch eine Kombination mehrerer Schritte.

(iv) Eine Operationstaste ist ausgefallen
Dieser Fall ist für die Grundschule nicht besonders ergiebig, abgesehen von der Möglichkeit, den Kindern auf eine weitere Art bewußt zu machen, daß Multiplikation auf fortgesetzte Addition zurückgeführt werden kann und analog die Division auf fortgesetzte Subtraktion. Aber hier eine kleine Knobelei für den Leser: Addieren Sie ohne Plustaste (und natürlich ohne Speicher) mit dem TR die Zahlen 90244 und 11746.

(v) Tasten verschiedener Sorten sind ausgefallen
Nur ein paar Beispiele aus der Literatur, ansonsten: gehen Sie auf eigene Entdeckungsreise!

Fehlende Tasten:	+, 8	+, –, 6	+, 7, 8	–, x, 0
Zahl, die erzeugt werden soll:	788	36	73	50

Fehlende Tasten: 7, 8, 9   Berechne: 736+428, 724–539.

b) Korrektur falscher Eingaben

Hierbei handelt es sich um ein Routineproblem, das beim Arbeiten mit dem TR zwangsläufig auftritt und dessen mathematisch eleganteste Lösung im einen Fall mit den Kenntnissen über den Aufbau des Dezimalsystems und im anderen mit nicht ganz so geläufigen Kenntnissen über Differenzen zweistelliger „Spiegelzahlen" erfolgen kann.
1. Fall: Man korrigiere eine eingegebene Zahl, bei der man sich in einer Stelle vertippt hat (z.B. 75963 statt 72963), durch eine geschickte Addition oder Subtraktion einer Zehnerpotenz.
2. Fall: Man korrigiere eine eingegebene Zahl, in die sich ein „Dreher" eingeschlichen hat (z.B. 135238 statt 153238), durch eine geschickte Addition oder Subtraktion. Hier wird das Produkt eines für den Kenner leicht zu ermittelnden Vielfachen von 9 mit einer Zehnerpotenz benötigt.

c) Ausfüllen von Leerstellen

Dieser Aufgabentyp ist als solcher nicht neu, doch der Einsatz des TR ermöglicht Varianten, die ein weites Spektrum von Lösungsstrategien vom einfachen Probieren über den Einsatz überschlägigen Rechnens bis zum geschickten Ausnutzen von Grundbeziehungen der Arithmetik und Algebra der natürlichen Zahlen zulassen. Für besonders einfallsreich und fruchtbar, aber auch recht anspruchsvoll halte ich die Aufgabenserien „Equation Puzzlers" und „Operation Search" (*Miller* 1979:42f), von denen ich nachfolgend einige wiedergebe:

Equation Puzzlers
(„Each empty box in the equation below represents a missing digit. Use your mathematical skills and the calculator to find the missing digits.")

1) 93 x 8[ ] = 7 [ ][ ]8	2) 83[ ] x [ ]9 = 41013
3) [ ][ ]6 x 84[ ] = 232668	4) 3[ ][ ] x [ ]7 = 14171
5) 3[ ][ ]4 : 8[ ] = 48	6) 2688 : 8[ ] = [ ]2
7) 23 x 3[ ] x [ ]7 = 13294	8) [ ]3 x [ ] x 7 x 34 = 38318

Bei den Aufgaben zu „Operation Search" besteht vielleicht eher die Versuchung zum blinden Probieren, bei den meisten kann man aber durch Beachtung von Endstellenregeln und überschlägiges Rechnen schon vor der Kontrolle mit dem TR sicher wissen, welche Operationen eingesetzt werden müssen.

Operation Search
(„Use a calculator and your mathematical skills in trying to find the operations that belong in the circles.")[9]

1) (37 [ ] 21) [ ] 223 = 1000	2) (756 [ ] 18) [ ] 29 = 1218
3) 27 [ ] (36 [ ] 18) = 675	4) 31 [ ] (87 [ ] 19) = 2108
5) 476 [ ] (2040 [ ] 24) = 391	6) (3461 [ ] 276) [ ] 101 = 37

Sofern das von den Kindern nicht selbst bemerkt wird, sollte man bei der Arbeit an den Aufgaben des letzten Beispiels nicht versäumen, darauf einzugehen, daß der TR sich nicht an die Regel „Punktrechnung geht vor Strichrechnung" hält (z.B. bei 27+36·18). Damit ist eine mögliche Fehlerquelle beim Rechnen mit dem TR angesprochen (vgl. die 6. didaktische Funktion des TR) und außerdem die Anregung gegeben herauszufinden, wie man sich in solchen Fällen helfen kann.

3.4 Spiele

Angesichts der Bedeutung guter Spiele für das Mathematiklernen in der Grundschule, der auch in dem von *Winter* wesentlich mitgestalteten Lehrplan von NRW z.B. im Abschnitt 1.4 „Einstellungen" oder 4.2 „Üben" Rechnung getragen wird, ist es erfreulich, daß durch den TR neue arithmetische Spiele für den Grundschulmathematikunterricht zur Verfügung stehen. Der von *Winter* (1974) konstatierte Bedarf an solchen Spielen besteht nach wie vor. Zwei Beispiele für solche Spiele wurden schon im Abschnitt 3.2b) vorgestellt. Nachfolgend werden aus der vorhandenen Vielfalt drei weitere, recht unterschiedliche angegeben, bei denen sowohl Zufall als auch Strategie eine Rolle spielen – eine für den Unterricht gut geeignete Mischung. Wer die Spiele mit einem Partner ausprobiert, wird schnell erkennen, welche Möglichkeiten sie im Hinblick auf Lernziele der Grundschulmathematik bieten. Der TR kann bei solchen Spielen verschiedene Funktionen erfüllen: „Zufallsgenerator" (bequem, aber im Prinzip ersetzbar durch andere Möglichkeiten);

Instrument zur Überprüfung von Vermutungen oder ohne TR ermittelten Ergebnissen; Instrument zur Berechnung von Zwischenergebnissen.

1. Null gewinnt[10]
2 Spieler, 2 TR, Papier und Bleistift
Jeder Spieler schreibt die Zahlen 1 bis 9 auf ein Blatt Papier und gibt eine selbstgewählte dreistellige Zahl mit lauter verschiedenen Ziffern in seinen TR ein. Nun beginnt Spieler A, indem er eine der vier Rechenoperationen +, –, ·, : ansagt. Diese geben beide Spieler in ihren TR ein. Dann wählt jeder selbst eine der neun Zahlen, streicht sie auf seinem Blatt, gibt sie in den TR ein und drückt auf „=". Nun ist die Reihe an Spieler B, eine von ihm gewählte Rechenoperation anzusagen. ...
Jede Zahl darf nur einmal verwendet werden. Es müssen nicht alle Zahlen benutzt werden. Wer zuerst die Null erreicht, erhält einen Punkt. Sieger („Zero-Hero") ist, wer nach einer vereinbarten Zahl von Durchgängen die meisten Punkte hat. Erzeugt ein Spieler eine nicht-ganze oder eine negative Zahl, wird das Spiel beendet. Der Gegenspieler erhält einen Punkt.[11] Erzielt kein Spieler nach Verwendung aller Zahlen die 0, gewinnt derjenige, der am nächsten bei 0 ist.

2. Fünferkonzert (in Anlehnung an das Spiel „Fiddlers Five" aus *Thiagarajan/Stolovitch* 1978)
2 bis 5 Spieler, 1 TR, ggf. Papier und Bleistift
Die Spieler erzeugen auf folgende Weise eine „zufällige" fünfstellige Zahl: Der erste Spieler gibt verdeckt eine dreistellige Zahl in den TR ein, die größer als 400 ist, und drückt anschließend die Maltaste. Er gibt den TR mit verdecktem Anzeigefeld an einen anderen Spieler, der eine zweistellige Zahl eingibt, die größer als 25 ist, und dann die Gleichtaste drückt. Im Anzeigefeld erscheint dann eine fünfstellige Zahl.
Aufgabe jedes Spielers ist nun zu überlegen, wie er mit Hilfe von vier Operationen, bei denen er jede der fünf sichtbaren Ziffern genau einmal benutzt, die zweistellige Zahl am Anfang erzeugen kann oder ihr sehr nahe kommt. Die Reihenfolge, in der die Ziffern benutzt werden, darf frei gewählt werden. Wer innerhalb einer vereinbarten Zeit als erster die zweistellige Zahl genau getroffen hat, ist Sieger der Runde, andernfalls derjenige, der am Ende dieser Zeit die Rechnung vorführt, die dieser Zahl am nächsten kommt.

3. Drei Neunen (vgl. *Thiagarajan/Stolovitch* 1978)
2 Spieler, 1 TR
Spieler A gibt eine dreistellige Geheimzahl in den TR. Spieler B sagt ihm nacheinander Zahlen, die er addieren soll. Nach jeder Addition gibt Spieler A zu dem Ergebnis folgende Information: Anzahl der vorkommenden Neunen sowie irgendeine der anderen vorkommenden Ziffern (ohne Platzangabe). Wenn bei einem Zug 999 überschritten wird, wird die soeben addierte Zahl wieder subtrahiert und damit der alte Zustand wieder hergestellt. Über die Ziffern der zu großen Zahl wird nichts mitgeteilt. Der Vorgang zählt aber als ein Zug. Ziel von Spieler B ist, mit möglichst wenigen Zügen auf 999 zu kommen.

3.5 Ermitteln des Ergebnisses von Sachaufgaben

Ein wichtiger Bereich der Verwendung des TR als Rechenwerkzeug ist sein Einsatz bei der Lösung von Sachaufgaben im 4. Schuljahr.[12] Die von *Bender* (1980) auf Anregung von *Winter* durchgeführte Untersuchung zeigt, in welchem Umfang im Bereich der Rechen*fähigkeit*, also der Fähigkeit, arithmetische Operationen angemessen in Sachsituationen anzuwenden, nach wie vor Defizite bei Grundschulkindern vorhanden sind. Die Gründe, warum der Einsatz von TR hier zu einer Verbesserung von Fähigkeiten beitragen kann, sind folgende:

- TR-Rechnen spart Zeit und ermöglicht dadurch die Bearbeitung einer größeren Anzahl von Aufgaben in derselben Zeit.
- Infolge der Entlastung vom reinen Rechnen kann der Schüler sich besser auf alle anderen wichtigen Aspekte des Problemlöseprozesses konzentrieren.
- Der TR ermöglicht die Bearbeitung von Aufgaben mit realistischeren und/oder größeren Zahlen.

Ohne daß man das Ziel aufzugeben braucht, daß die Schüler die Operationen, die sie in diesem Rahmen mit dem TR ausführen, prinzipiell (wenn auch nicht unbedingt mit denselben Zahlen) auch ohne TR ausführen können, kann man durch den Einsatz des TR erreichen, daß die Kinder im Rahmen eines täglichen Trainings in weit höherem Ausmaß Sachaufgaben lösen, die sie interessieren und motivieren. Wenn man ihnen einen TR in die Hand gibt, kann man sogar beobachten, daß sie von alleine Aufgaben rechnen, deren Ergebnis sie interessiert, z.B. wie viele Minuten oder Sekunden ein Tag oder ein Jahr hat. Eine Fülle von motivierenden Rechenanlässen, mit denen man sich je nach der zur Verfügung stehenden Zeit nur kurz (10-Minuten-Rechnen) oder auch länger beschäftigen kann, liefert die Tagespresse – von ausgefallenen Rekorden bis zu seriösen Statistiken. Eine kleine Auswahl:

„Rund 1500 Personen haben das bisher größte Käsefondue der Welt verspeist. Es bestand aus 396 Kilogramm Emmenthalkäse."

„Clemens Müter will demnächst in 55 Tagen die 4800 km lange Strecke von Moskau nach Paris zu Pferd zurücklegen. Alle 20 km will er Roß und Sattel wechseln. Kürzlich putzte er in knapp acht Stunden 1622 Paar Schuhe."

„Ein 75jähriger pensionierter Hamburger Lehrer wanderte in 20 Jahren rund 120000 Kilometer."

„Der Chinese Yan lief als erster Mensch die chinesische Mauer in ihrer gesamten Länge von 3400 km entlang. Er benötigte hierzu 80 Tage. Sein Lauf begann am 18. April. 1983 legte er 3150 km in 59 Tagen zurück. Im letzten Winter überquerte er China von Nord nach Süd auf einer Strecke von 6200 km in 110 Tagen."

„Der 28fache deutsche Meister im Schwimmen ist im Training und beim Wettkampf etwa 22000 bis 23000 km geschwommen."

„Jeder Bundesbürger ißt pro Jahr im Durchschnitt 40 kg Äpfel, das ist etwa ein Apfel täglich."

„Im Laufe seines Berufslebens erteilt der Lehrer weit über 25000 Unterrichtsstunden."

„Eine Frau aus Schleswig-Holstein gewann 7,2 Millionen im Lotto."

„In jeder Sekunde wächst die Erdbevölkerung um 3 Menschen."

„Nach einer Bauzeit von drei Jahren war der längste Eisenbahntunnel der Bundesrepublik Deutschland, der 10780 Meter lange Landrückentunnel, fertiggestellt. 340 Tage im Jahr, 24 Stunden am Tag wurde an ihm gearbeitet. Pro laufenden Meter des Bauwerkes tranken die Arbeiter 23 Liter Gerstensaft."[13]
Die Arbeit mit solchen Aufgaben führt auf Probleme, die im bisherigen Mathematikunterricht der Grundschule nicht auftauchten und daher zusätzliche Überlegungen erfordern. Wer sich aber darauf einläßt, wird interessante Erfahrungen machen können, wenn er z.B. erkundet, wie Kinder Dezimalzahlen mit ihrem vorhandenen Wissen in Verbindung zu bringen versuchen. Die Probleme sind im einzelnen: Das Rechnen mit realistischen Zahlen

- führt bei Division in den meisten Fällen in einen neuen Zahlbereich (rationale Zahlen in dezimaler Darstellung),
- führt auf Zahlen, die für den TR zu groß sind und daher Überlegungen erfordern, wie ich möglicherweise trotzdem mit dem TR rechnen kann,
- führt auch im Bereich der Kapazität des TR auf unvorstellbar große Zahlen, für die die Kinder erst Zahlvorstellungen entwickeln müssen.

Hinsichtlich des letzten Punktes ist folgendes zu bemerken: Der Ausbau von Zahlvorstellungen – auch für größere Zahlen – ist ein wichtiges Ziel, für das den Kindern viele Wege angeboten werden sollten. Ein solcher Weg ist das In-Beziehung-Setzen großer Zahlen zu kleineren, und hierbei kann der TR bei manchen der obigen und ähnlichen anderen Beispielen eine Hilfe sein, weil die benötigten Divisionen mit ihm schnell ausgeführt werden können. Man sollte natürlich auch keine Gelegenheit zu überschlagenden Rechnungen vorweg auslassen.

Anmerkungen

1) In: Überarbeitungen der Richtlinien und Lehrpläne für die Grundschule. 1. Teilentwurf Mathematik. Januar 1983 (Landesinstitut für Curriculumentwicklung, Lehrerfortbildung und Weiterbildung NRW)

2) Meiner Mitarbeiterin, Frau König-Wienand, danke ich für fruchtbare Anregungen und Diskussionsbeiträge.

3) Besteht der Unterricht ausschließlich oder überwiegend darin, diese Verfahren einzuüben, dann muß er sich durch eine solche Einbeziehung des TR zwangsläufig selbst sabotieren. (Ein Kind sagte mir neulich in der Schule: „Wenn man mit dem TR rechnen darf, wird ja das ganze Mathe überflüssig.")

4) Vgl. Richtlinien und Lehrpläne für die Grundschule in NRW, Mathematik. Düsseldorf 1985, 21.

5) Dies trifft auch für viele interessante Sachaufgaben zu. Siehe hierzu Abschnitt 3.5.

6) Ich habe mehrfach erlebt, daß auch Kinder höherer Schuljahre der Überzeugung waren, daß man z.B. statt zweimal nacheinander durch 3 ebensogut durch 6 dividieren könne.

7) Diese und die folgenden Beispiele setzen die Benutzung eines einfachen Taschenrechners mit den vier Grundrechenarten und automatischen Konstanten voraus. Diese Tasten-Anzeigefolge muß z.B. existieren: 2+3=5=8=11 etc. Bei wissenschaftlichen TR funktioniert das i.a. nicht.

8) Nicht wenige Kinder schlagen auch hier spontan x7 und nochmal x7 vor.

9) Aus drucktechnischen Gründen verwende ich auch hier eckige Klammern.

10) Von Anette *König-Wienand* konzipierte Variante des Spiels „The Zero-Hero" aus (*Schlossberg/Brockmann* 1977:52f).

11) Diese Regel kann ggf. „entschärft" werden.
12) Im Rahmen dieses Beitrages möchte ich mich auf Bemerkungen zu diesem Bereich beschränken und den Einsatz bei innermathematischen Problemen ausklammern.
13) Ein Bericht über eine Unterrichtseinheit zu einer ähnlich lautenden Zeitungsmeldung findet sich in (*Spiegel* 1988).

Literatur

Bender, Peter (1980): Analyse der Ergebnisse eines Sachrechentests am Ende des 4. Schuljahres. In: Sachunterricht und Mathematik in der Primarstufe 8, 150–155, 191–198, 226–233

Coburn, Terrence G. (1987): Ideas. In: The Arithmetic Teacher 34, Heft 6, 31–36

Lörcher, Gustav Adolf und Horst Rümmele (1986): Mit Taschenrechnern rechnen, üben und spielen. In: Die Grundschule 18, Heft 4, 36–39

Miller, Don (1979): Calculator Explorations and Problems. New Rochelle: Cuisenaire Company of America

Ockenga, Earl und Joan Duea (1978): Ideas. In: The Arithmetic Teacher 25, Heft 8, 28–32

Schlossberg, Edwin und John Brockman (1977): The Kid's Pocket Calculator Game Book. New York: Morrow

Spiegel, Hartmut (1988): ‚Intercity-Tempo' beim Tunnelbau – Sachmathematik mit dem Taschenrechner in Klasse 4. Erscheint in: mathematiklehren

The Open University (1982): Calculators in the Primary School. Milton Keynes: The Open University Press

Thiagarajan, Sivasailam und Harold D. Stolovitch (1978): Games With the Pocket Calculator. Portland, Oregon: Dilithium Press

Winter, Heinrich (1972): Vorstellungen zur Entwicklung von Curricula für den Mathematikunterricht in der Gesamtschule. In: Der Kultusminister des Landes Nordrhein-Westfalen (Hrsg.): Beiträge zum Lernzielproblem. Ratingen: Henn, 67–95

Winter, Heinrich (1974): Steigerung arithmetischer Fähigkeiten im neuen Mathematikunterricht. In: Die Grundschule 6, 416–427, 470–477