

QUASI REALE BOOLESCHE FUNKTIONEN : EIN VERSUCH, ZEITLICHE EFFEKTE PHYSIKALISCH REALISIRTER BAUTEILE ZU ALGEBRAISIEREN

F.J. Rammig

Abteilung Informatik I, Universität Dortmund, Dortmund, Bundesrepublik Deutschland.

(Eingegangen am 24. Juni 1975)

Zusammenfassung

Der Argumentbereich Boolescher Funktionen wird auf das n -fache Kreuzprodukt des Argumentbereichs erweitert (n endlich). Damit wird es möglich, ein "Störparametersystem" zur Darstellung dreier zeitbedingter Effekte physikalisch realisierter Boolescher Funktionen einzuführen : (i) variable vom Werteverlauf der Argumente wie auch des Ergebnisses abhängige Verzögerung; (ii) variable Trägheit (Absorptionsfähigkeit); und (iii) Transitionsempfindlichkeit (Flankenempfindlichkeit).

Eine derart erhaltene erweiterte Boolesche Funktion wird "Quasi Reale Boolesche Funktion" (QRBf) genannt werden. Es wird ein Automatenmodell für Quasi Reale Boolesche Funktionen angegeben werden.

Keywords

Switching theory, model, asynchronism, delay, inertia, Boolean function, simulation, gate level.

Verzeichnis benutzter Symbole und Abkürzungen

$\{, \}$	Mengenklammern
\in, \ni	Elementsymbole
\subseteq	Inklusion von Mengen
\wedge, \vee	logisches und, logisches oder
\bigwedge, \bigvee	Allquantor, Existenzquantor
\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen
\mathbb{Z}	Menge der ganzen Zahlen
$[a, b]$	abgeschlossenes Intervall von a bis b
(a, b)	offenes Intervall von a bis b
$\#(A)$	Mächtigkeit der Menge A
A^B	Menge aller Abbildung der Menge B in die Menge A
pr_t	t -te Projektion
$\langle a_t \rangle_{t \in \mathbb{Z}}$	abzählbare Folge mit Indizes aus \mathbb{Z}
σ_T	Signalmenge mit Parametermenge T

θ_T	realer digitaler Rechenraum mit Parametermenge T
$\kappa_{T'}$	kanonisch diskret zeitparametrisierter digitaler Rechenraum mit Parametermenge T'
χ	Element aus $(\sigma_{T'})^n$
Ψ	Element aus $(\sigma_{T'})^m$
α	grundlegende Bedingung für die Trägheitskorrektur

Einleitung

Während in der Entwurfspraxis zeitliche Effekte der benutzten digitalen Bauteile insbesondere bei asynchronen Realisierungen berücksichtigt werden, wird im theoretischen Ansatz versucht, Realisationsverfahren zu entwickeln, die es erlauben, auf die Kenntnis der quantitativen Werte dieser Effekte verzichten zu können. Neben dem technischen Trick der Taktung sind hier verschiedene Codierungsverfahren asynchron zu realisierender Automaten (Tracey [16], Hlavicka [6], Asmuss [1], Unger [17]) und insbesondere die "Speed Independent Theory" wie sie bei Muller und Bartky [10], Noguchi [11], Miller [9] und von Wachter [18] beschrieben wird, zu nennen.

Als Beschreibungsmittel werden mehrwertige Logiken (Breuer [3], Daniels [5]) und auch modifizierte Petri-Netze (Mies [8]) verwandt.

Zum Zwecke der Simulation werden in der Literatur verschiedene Modelle zeitlichen Verhaltens genannt (Chappel und Yau [4], Szygenda [13-15]).

Hier soll nun der Versuch unternommen werden, für die theoretische Behandlung zeitabhängiger Effekte eine algebraische Formulierung zu finden. Dabei gilt es, wie bei jeder Modellbildung, zwischen Aufwand und Nutzen abzuwägen. Es soll hier ein Modell erstellt werden, das hinreichend genau ist, um Aussagen über Trägheit, Verzögerung und Flankenempfindlichkeit von digitalen Bauelementen machen zu können. Andererseits soll aus Gründen der Modellvereinfachung von einem Raster äquidistanter diskreter Zeitpunkte und der Vorstellung einer zweiwertigen Logik ausgegangen werden.

Definition der Quasi Realen Booleschen Funktionen

Definition 1 : Eine Abbildung $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^m$ heisst n -nach- m -stellige Boolesche Funktion.

Definition 2 : Sei T eine Menge; $\sigma_T := [0, 1]^T$ heisst Signalmenge; $\sigma_T \ni a = \langle a_t \rangle_{t \in T}$ heisst Signal : \Leftrightarrow .

$$(1) \quad \forall a_t \in \{0, 1\} \\ t \in T$$

(2) entweder $T = \mathbb{R}$ (dann heisst das Signal stetig zeitparametrisiert) oder $T \subseteq \mathbb{R}$. T abzählbar unendlich (dann heisst das Signal diskret zeitparametrisiert).

Ist σ_T diskret zeitparametrisiert, so schreibt man $T = \{t_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ und setzt voraus, dass sowohl die Ordnung wie auch die Metrik von \mathbb{R} auf T übertragen wird. Insbesondere soll gelten : $(i > j \Rightarrow t_i > t_j)$ für alle $i, j \in \mathbb{Z}$.

Bei dieser Definition geht man davon aus, dass ein physikalisches Signal, das als Argument eines realen Schaltelements benutzt wird oder von dem Schaltelement berechnet wird (z. B. eine elektrische Spannung) wenn man es zu beliebigen Zeitpunkten betrachtet innerhalb eines Intervalls beliebige, d.h. im allgemeinen $\#(\mathbb{R})$ -viele verschiedene, Werte annehmen kann. Bei aller philosophischer Problematik einer solchen Betrachtungsweise geht man nun davon aus, dass durch n -Tupel solcher zeitvarianter Signale parallele Zeitschnitte gelegt werden. 0 und 1 sind hier willkürlich gewählte Intervallgrenzen. Da jede Technologie gewisse Teilintervalle als logische 1 bzw. als logische 0 interpretiert, kann man sich ohne weiteres die 1 als Bild aller als logisch 1 interpretierter Werte, die 0 als Bild aller als logisch 0 interpretierter Werte und das offene Intervall $(0, 1)$ als bijektives Bild aller weiteren Werte vorstellen (Siehe Abb. 1-3).

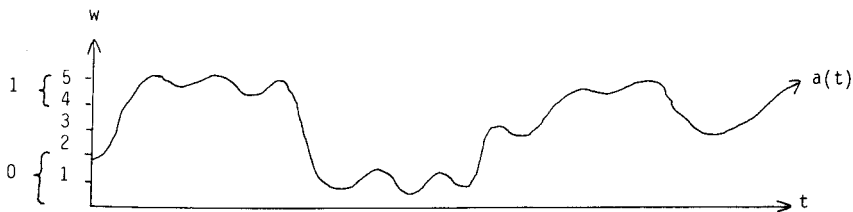


Bild 1. Beispiel eines stetig zeitparametrisierten Signals.

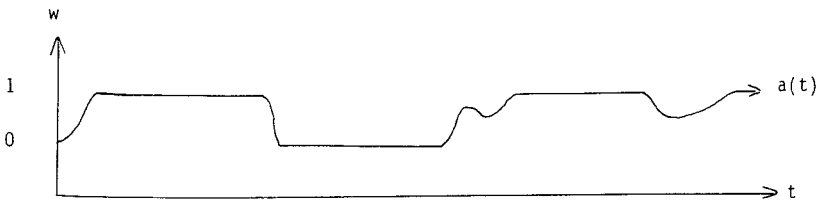


Bild 2. Das Signal aus Bild 1 unter der Annahme, dass Schwellwerte existieren, mit deren Hilfe Wertebereiche den logischen Werten "1" und "0" zugeordnet werden.

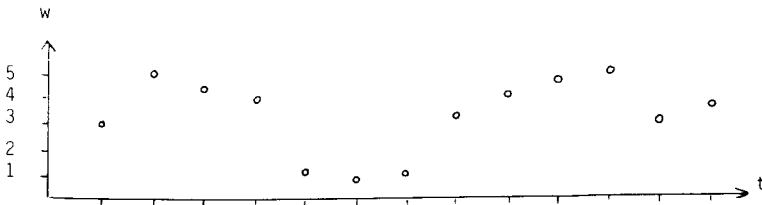


Bild 3. Beispiel eines diskret zeitparametrisierten Signals.

Definition 3 : Sei $(\sigma_T)^n$ das n -fache Kreuzprodukt von σ_T ; $f : (\sigma_T)^n \rightarrow (\sigma_T)^m$ heisst n -nach- m -stellige Schaltfunktion.

Eine n -nach- m -stellige Schaltfunktion bildet also ein n -Tupel von Signalen in ein m -Tupel von Signalen ab. Man beachte, dass nicht ausgeschlossen wird, dass Argumente während *Zeitintervallen* für Ereignisse während *Zeitintervallen* von Bedeutung sind. Diese Eigenschaft wird auch benötigt, insbesondere zur Beschreibung variabler situationsbedingter Verzögerung und der Absorption zu kurz anliegender Signale (Trägheit). Im Folgenden werden die Schaltfunktionen allerdings noch erheblich eingeschränkt werden. Insbesondere wird ausgeschlossen werden, dass auf die Berechnung eines Zeitpunktes t_0 Argumentwerte zu Zeitpunkten $t > t_0$ einen Einfluss haben.

Definition 4 : Sei $\Phi = \{f : (\sigma_T)^n \rightarrow (\sigma_T)^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$ die Menge aller Schaltfunktionen. $\theta_T : = \langle \sigma_T; \Phi \rangle$ heisst realer digitaler Rechenraum.

θ_T stellt ein Modell dar, das sich den üblichen Methoden der Schaltwerkanalyse völlig verschliesst. Insbesondere ist man gezwungen, in $\#(\mathbb{R})$ -wertiger Logik zu rechnen.

Es gibt verschiedene Ansätze, den Wertebereich von Schaltfunktionen auf eine endliche Menge der Mächtigkeit grösser als zwei zu beschränken. Es ist insbesondere das achtwertige Modell von Daniels [5] zu nennen.

Hier soll nun besonders restriktiv vorgegangen werden, indem auf ein Modell mit zweiwertigem Wertebereich idealisiert wird. Weiterhin soll aus Gründen der Modellvereinfachung ein Modell mit diskret zeitparametrisierten Signalen und äquidistanten Zeitpunkten zugrunde gelegt werden.

Wenn man von θ_T auf ein Modell mit Zweiwertigkeit und äquidistantem diskreten Zeitraster übergeht, so ist man gezwungen, ein "Verbiegen" von Signalverläufen durch die Abbildung auf ein solches Modell zu akzeptieren. Weiterhin schliesst man Wertänderungen eines Signals von 0 auf 1 bzw. von 1 auf 0 aus, die mehr Zeit als die zwischen zwei Rasterzeitpunkten liegende benötigen. Und schliesslich verliert man jegliche Information über Wertänderungen, die weder den Wert 0 noch den Wert 1 erreichen. Es wird hier davon ausgegangen, dass all diese Einschränkungen akzeptabel sind.

Definition 5 : Sei θ_T ein realer digitaler Rechenraum und $T' \subseteq T$, T' abzählbar unendlich und $|t_{i+1} - t_i| = |t_i - t_{i-1}|$ (Äquidistanz), für alle $i \in \mathbb{Z}$. $\kappa_{T'} : = \langle \sigma_{T'}; \Phi' \rangle$ wird definiert durch (1) $\sigma_{T'} : = p(\sigma_T)$ mit $\bigwedge_{t_i \in T'} p(a_{t_i}) = a_{t_k}$ mit

$t_k = \max \{t_e \mid |t_e - t_i| = \min \{ |t_s - t_i| \mid a_{t_s} \in \{0, 1\} \}\}$; (2) Φ' ist definiert durch $\bigwedge_{f' \in \Phi'} \bigvee_{f \in \Phi} f'(p(a)) = p(f(a))$; $\kappa_{T'}$ heisst kanonisch diskret zeitparametrisierter digitaler Rechenraum. $f' \in \Phi'$ heisst kanonisch diskret zeitparametrisierte Schaltfunktion.

Will man ein θ_T auf ein $\kappa_{T'}$ abbilden mit $T' \not\subseteq T$, so bilde man erst θ_T in $\theta_{\mathbb{R}}$ auf naheliegende Weise ab, und nehme dann erst die Abbildung $p : \theta_{\mathbb{R}} \rightarrow \kappa_{T'}$ vor (Siehe Bild. 4 und 5).

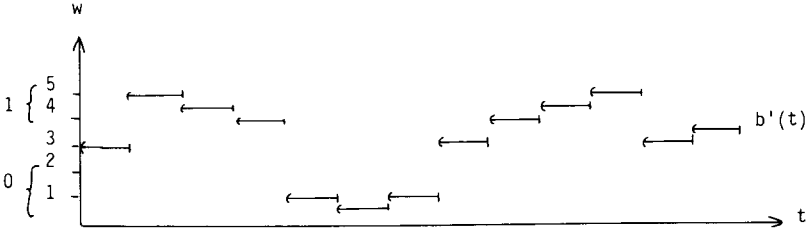


Bild 4. Beispiel eines stetig zeitparametrisierten Signals, das durch eine naheliegende Abbildung aus einem diskret zeitparametrisiertem Signal erhalten wurde.

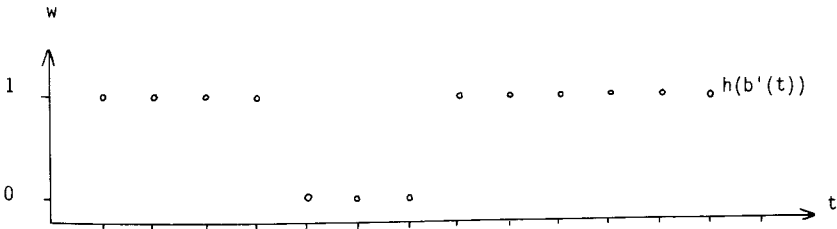


Bild 5. Beispiel eines kanonisch diskret zeitparametrisierten Signals.

Schreibweise

Sei $f: (\sigma_T)^n \rightarrow (\sigma_T)^m$, $f(\chi) = \psi = (y_1, y_2, \dots, y_m)$. Statt $(\text{pr}_t(y_1), \dots, \text{pr}_t(y_m))$ wird geschrieben: $\psi(t)$ bzw. $f(t, \chi)$.

Definition 6: Eine kanonisch diskret zeitparametrisierte Schaltfunktion $h: (\sigma_T)^n \rightarrow (\sigma_T)^m$ heisst ideale Boolesche Funktion: \Leftrightarrow

$$h': \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^m \quad \bigwedge_{(\sigma_T)^n} \bigwedge_{t \in T} \psi(t) := h(t, \chi) = h'(\chi(t)).$$
 Eine kanonisch diskret zeitparametrisierte Schaltfunktion heisst real sonst. H_m^n sei die Menge aller n -nach- m -stelligen idealen Booleschen Funktionen, H die Menge aller idealen Booleschen Funktionen.

Definition 7: $(\sigma_T)^n \in \chi$ heisst vollständiges Signaltupel: \Leftrightarrow

$$x \in \bigwedge_{\{0, 1\}^n} \bigvee_{t \in T} x = \chi(t).$$

Eine ideale Boolesche Funktion wird mit Hilfe einer Booleschen Funktion (im üblichen Sinne) h' definiert. Die Frage ist nun, ob die Definition 6 eindeutig ist, d. h. einerseits, ob es für eine Funktion $h \in H_m^n$ auch nur eine definierende Funktion $h' \in \{f \mid f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^m\}$ gibt und andererseits, ob mit einer solchen Funktion h' auch die Funktion h eindeutig bestimmt ist.

Diese Frage wird durch die beiden folgenden Lemmata beantwortet :

Lemma 1 : Seien h_1, h_2 ideale Boolesche Funktionen. Dann gilt : $h_1 = h_2$
 $\Rightarrow h'_1 = h'_2$.

Beweis : Es wird gezeigt : $(h_1(X) = h_2(X) \Rightarrow h'_1 = h'_2) \Leftrightarrow (\sigma_{T'})^n \chi$ ist vollständiges Signaltupel.

“ \Leftarrow ”

Sei $h_1(X) = h_2(X) \wedge h'_1 \neq h'_2$

$$(1) h'_1 \neq h'_2 \Leftrightarrow \bigvee_{X \in \{0,1\}^n} h'_1(X) \neq h'_2(X)$$

$$(2) h_1(X) = h_2(X) \Leftrightarrow \bigwedge_{t \in T'} h_1(t, X) = h_2(t, X)$$

$$\Leftrightarrow \bigwedge_{t \in T'} \bigwedge_{X(t) \in \{0,1\}^n} h'_1(X(t)) = h'_2(X(t))$$

$$(1) \vee (2) \Rightarrow \bigvee_{X \in \{0,1\}^n} \bigwedge_{t \in T'} X \neq X(t).$$

“ \Rightarrow ”

$(\sigma_{T'})^n \ni \chi$ nicht vollständiges Signaltupel

$$\Leftrightarrow \bigvee_{X \in \{0,1\}^n} \bigwedge_{t \in T'} X \neq X(t).$$

Zu vorgegebenem h'_1 sei h'_2 definiert durch :

$$h'_1(X) = h'_2(X) \text{ für } X \in \{X(t) \mid t \in T'\}$$

$$h'_1(X) \neq h'_2(X) \text{ sonst.}$$

Damit gilt : $h'_1 \neq h'_2 \wedge h_1(X) = h_2(X)$.

Q.E.D.

Lemma 2 : $h_1 \neq h_2 \Rightarrow h'_1 \neq h'_2$.

$$\text{Beweis : } h'_1 = h'_2 \Leftrightarrow \bigwedge_{X \in \{0,1\}^n} h'_1(X) = h'_2(X)$$

$$\Rightarrow \bigwedge_{X \in \{X \in \{0,1\}^n \mid \bigvee_{t \in T'} X = X(t)\}}$$

$$h'_1(X) = h'_2(X)$$

$$\Rightarrow \bigwedge_{(\sigma_T)^n} \bigwedge_{t \in T} h_1(t, X) = h_2(t, X).$$

Q.E.D.

Sei H_m^n die Menge der n -nach- m -stelligen idealen Booleschen Funktionen, N_m^n die Menge der Booleschen Funktionen $a : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}^m$. Bei vorgegebenem Signaltupel $\chi \in (\sigma_{T'})^n$ indiziert H_m^n auf N_m^n eine Klasseneinteilung. Ist $(\sigma_{T'}) \ni \chi$ vollständiges Signaltupel, so werden die Klassen von N_m^n einelementig. Es existiert eine bijektive Abbildung $\text{def}_1 : H_m^n \rightarrow N_m^n$. Statt N_m^n bzw. $N = \{N_m^n \mid n, m \in \mathbb{N}\}$ wird im folgenden auch $\text{def}_1(H_m^n)$ bzw. $\text{def}_1(H)$ geschrieben.

Man sieht damit unmittelbar ein, dass die idealen Booleschen Funktionen genau den üblichen Booleschen Funktionen entsprechen. Aus der Sicht eines Rechenraummodells sind es die Funktionen, bei denen zur Berechnung eines Ergebnisses zum Zeitpunkt t_0 nur die Argumentwerte zum selben Zeitpunkt t_0 und keine weiteren, früher oder später liegende, von Bedeutung sind.

Es soll nun eine Funktionenklasse definiert werden, die durch die Vereinigung der idealen Booleschen Funktionen und einer Teilmenge der realen Booleschen Funktionen gebildet wird. Diese Teilmenge ist mächtig genug, um die Phänomene Flankenempfindlichkeit, Trägheit und Verzögerung beschreiben zu können.

Definition 8 : Die Menge $FE := \{\text{pos, neg, no}\}$ heisst Flankenempfindlichkeitsmenge.

Definition 9 : Sei H_m^n die Menge der n -nach- m -stelligen idealen Booleschen Funktionen. Dann ist des Operator $FS: \text{def}_1 (H_m^n) \times FE^n \rightarrow HG_m^n$ wie folgt definiert :

$$FS(f'; fl_1, fl_2, \dots, fl_n) = g'$$

$$\text{mit } g': \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^m$$

wobei

$$\begin{aligned} &g'(a_{1_{t_0-1}}, \dots, a_{n_{t_0-1}}, \dots, a_{1_{t_0}}, \dots, a_{n_{t_0}}) \\ &= f'(a'_{1_{t_0}}, \dots, a'_{n_{t_0}}) \end{aligned}$$

mit

$$\bigwedge_{0 < i \leq n} \begin{cases} a'_{i_{t_0}} = a_{i_{t_0}} & \text{für } fl_i = \text{no} \\ a'_{i_{t_0}} = 1 & \text{für } \begin{cases} fl_i = \text{pos} \wedge a_{i_{t_0}} = 1 \wedge a_{i_{t_0-1}} = 0 \\ fl_i = \text{neg} \wedge a_{i_{t_0}} = 0 \wedge a_{i_{t_0-1}} = 1 \end{cases} \\ a'_{i_{t_0}} = 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$g: (\sigma_{T'})^n \rightarrow (\sigma_T)^m$ heisst n -nach- m -stellige flankenkorrigierte Boolesche Funktion :
 \Leftrightarrow

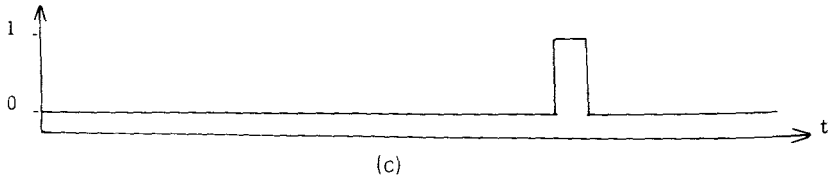
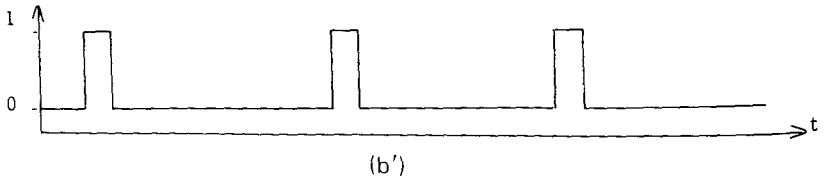
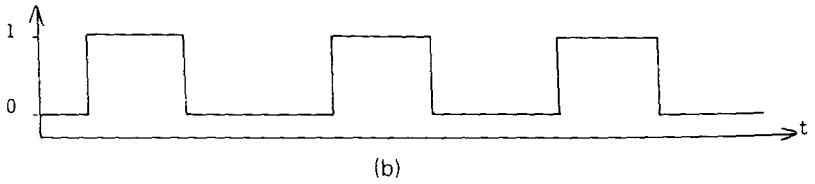
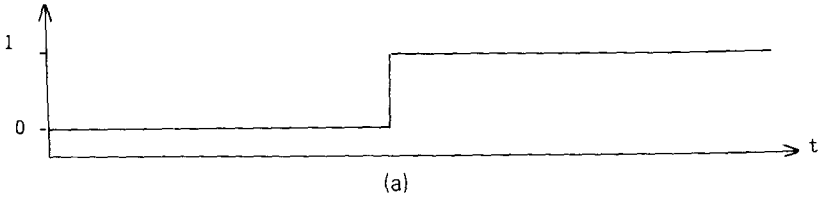
$$\bigwedge_{g' \in HG_m^n} \bigwedge_{x \in (\sigma_{T'})^n} \bigwedge_{t_0 \in T'} \psi(t_0): g(t_0, x) = g'[\chi(t_0-1), \chi(t_0)].$$

G_m^n sei die Menge der n -nach- m -stelliger flankenkorrigierter Boolescher Funktionen, G die Menge aller flankenkorrigierter Boolescher Funktionen.

Dieser Definition liegt folgende Betrachtungsweise zugrunde : alle Argumentkomponenten, für die eine Reaktion auf eine Flanke implementiert wird, werden in Argumentkomponenten transformiert, die in positiver Logik auf Belegungen "0" oder "1" reagieren.

Sei beispielsweise a_i eine Argumentkomponente mit $fl_i = \text{pos}$, dann wird a_i in die Argumentkomponente a'_i transformiert. Dieses a'_i wird genau dann mit einem Wert "1" belegt, wenn a_i mit einer positiven Flanke belegt wird.

Es kann in dem zugrundegelegten Modell keine Anstiegszeit länger als ein Rasterintervall sein. Flanken können daher einfach durch den Vergleich der Werte an zwei



Im Gegensatz dazu die selbe Funktion aber mit $FE^2 = (\text{no}, \text{no})$

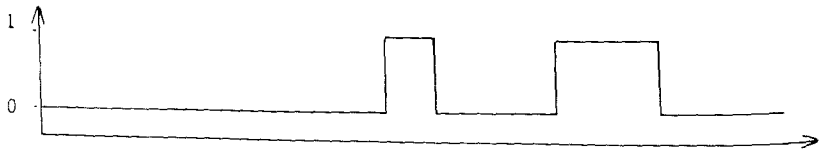


Bild 6. Flankenkorrektur.

$$c = f(a, b) = 1 : \Leftrightarrow a = 1 \wedge b = 1$$

$$\text{d.h. } f' = a' \wedge b', FE^2 = (\text{no}, \text{pos}),$$

$$a'_{t_0} = a_{t_0}, b'_{t_0} = 1 \Leftrightarrow b_{t_0} = 1 \wedge b_{t_0-1} = 0$$

aufeinanderfolgenden Rasterzeitpunkten erkannt werden. Bild 6 illustriert die oben beschriebene Transformation einer Argumentkomponente.

Entsprechend Lemma 1 und Lemma 2 gelten :

Lemma 3 : Seien g_1, g_2 flankenkorigierte Boolesche Funktionen. Dann gilt :
 $(g_1 = g_2 \Rightarrow g'_1 = g'_2)$.

Lemma 4 : Seien g_1, g_2 flankenkorigierte Boolesche Funktionen. Dann gilt :
 $(g_1 \neq g_2 \Rightarrow g'_1 \neq g'_2)$.

Es existiert wieder eine bijektive Abbildung

$$\text{def}_2 : G_m^n \rightarrow HG_m^n$$

$$\text{def}_2(g) = g'.$$

Statt HG_m^n bzw. HG schreibt man $\text{def}_2(G_m^n)$ bzw. $\text{def}_2(G)$.

Wir wollen G_m^n nun so erweitern, dass auch die Trägheit digitaler Bauelemente beschrieben werden kann.

Definition 10 : $\text{TR} := (\text{tr}^0, \text{tr}^1)$ heisst Trägheitsangabe : \Leftrightarrow

$$\bigwedge_{s \in \{0, 1\}} \text{tr}^s \in \mathbb{N}_0.$$

tr^0 (tr^1) wird interpretiert als die minimale Anzahl an Zeiteinheiten während derer ein Signal "0" ("1") konstant bleiben muss, um als Argumentwert erkannt zu werden.

Auf der Grundlage der Trägheitsangabe soll nun die Möglichkeit geschaffen werden, die Absorption zu kurz anliegender Signale darzustellen. Dabei soll es möglich sein, für jede Argumentkomponente eine eigene Trägheitsangabe anzugeben.

Ist ein Wert als zu kurz anliegend erkannt worden, so soll er einfach komplementiert werden.

Liegt zum Zeitpunkt t_0 ein Wert vor, so muss im allgemeinen in die Vergangenheit und die Zukunft geschaut werden, um festzustellen, seit welchem Zeitpunkt t_a und bis zu welchem Zeitpunkt t_e dieser Wert anliegt. Liegen t_a und t_e weniger weit voneinander entfernt als in der Trägheitsangabe für diesen Wert angegeben, so muss ein "Verschlucken" (Komplementieren) vorgenommen werden.

Man beachte, dass nach dem so angegebenen Verfahren die Information über das Werteverhalten der Argumentkomponenten während einer im allgemeinen Fall sowohl unendlichen Vergangenheit wie auch unendlichen Zukunft benötigt wird. Dieses unendliche Zeitintervall lässt sich aber offensichtlich auf ein Zeitintervall beschränken, das nur so viele Zeiteinheiten je in die Vergangenheit und in die Zukunft reicht, wie die aktuelle Trägheitsangabe angibt.

Wir erhalten damit die grundlegende Bedingung (α) für die Trägheitskorrektur :
 $\alpha(mt, t_0)$ wahr : \Leftrightarrow

Es gibt in den beiden durch die aktuelle Trägheitsangabe definierten Zeitintervallen (eines in die Zukunft, eines in die Vergangenheit) jeweils einen Zeitpunkt zu dem der Wert der betrachteten Argumentkomponente vom derzeitigen Wert verschieden ist, und diese beiden Zeitpunkte liegen weniger weit voneinander entfernt als in der aktuellen Trägheitsangabe gefordert.

Das Problem des in die Zukunft schauens wird bei der Einführung der Verzögerung

gelöst werden. Trägheit und Verzögerung hängen ursächlich zusammen, werden aus Gründen der Übersichtlichkeit hier aber getrennt definiert.

Da trägheitskorrigierte Boolesche Funktionen auf der Basis der flankenkorrigierten Booleschen Funktionen definiert werden sollen, muss auch der jeweilige Wert zum Zeitpunkt t_{0-1} trägheitskorrigiert werden und zwar genau dann, wenn zu diesem Zeitpunkt die Bedingung α wahr ist.

Um die Schreibweise zu vereinfachen, definiert man mt als Maximum aller in Verbindung mit der betrachteten Funktion vorliegenden Trägheitsangaben.

Dann erhält man folgende formale Definition für die Bedingung α :

Definition 11 : $\alpha(mt, t_0) : \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} & \bigvee_{t_0 + mt > t_k > t_0} a_{t_k} \neq a_{t_0} \wedge \bigvee_{t_0 > t_e > t_0 - mt} a_{t_e} \neq a_{t_0} \wedge (a_{t_0} = \\ & = 1 \wedge t_e - t_k | < tr^1 \vee a_{t_0} = 0 \wedge | t_e - t_k | < tr^0). \end{aligned}$$

Damit lassen sich nun trägheitskorrigierte Boolesche Funktionen recht einfach formal definieren :

Definition 12 : Sei G_m^n die Menge der flankenkorrigierten n -nach- m -stelligen Booleschen Funktionen. Der Operator $Ts : \text{def}_2(G_m^n) \times TR^n \rightarrow HT_m^n$ ist wie folgt definiert :

$$TS[g' \cdot (tr_1^0, tr_1^1), \dots, (tr_n^0, tr_n^1)] = k'$$

mit $k' : \{0, 1\}^{n \cdot 2mt+1} \rightarrow \{0, 1\}^m$ ($mt := \max \{tr_1^0, tr_1^1, \dots, tr_n^0, tr_n^1\}$)

$$\begin{aligned} & k'(a_{1_{t_0 - mt - 1}}, \dots, a_{n_{t_0 - mt - 1}}, \dots, a_{n_{t_0 + mt}}) = \\ & = g'(a'_{1_{t_0 - 1}}, \dots, a'_{n_{t_0 - 1}}, a'_{1_{t_0}}, \dots, a'_{n_{t_0}}) \end{aligned}$$

mit $\bigwedge_{j \in \{0, 0-1\}} \bigwedge_{0 < i < n+1} a'_{it_j} \neq a_{it_j} \Leftrightarrow \alpha(mt, t_j)$.

$k : (\sigma_T)^n \rightarrow (\sigma_T)^m$ heisst n -nach- m -stellige trägheitskorrigierte Boolesche Funktion : \Leftrightarrow

$$\begin{aligned} & \bigvee_{k \in HT_m^n} \bigwedge_{\chi \in (\sigma_T)^n} \bigwedge_{t_0 \in T'} \psi(t_0) : = k(t_0, \chi) \\ & = k'[\chi(t_0 - mt - 1), \dots, \chi(t_0 + mt)]. \end{aligned}$$

T_m^n sei die Menge aller n -nach- m -stelligen trägheitskorrigierten Booleschen Funktionen.
 T die Menge aller trägheitskorrigierten Booleschen Funktionen.

Entsprechend Lemma 1 und Lemma 2 gilt wieder :

Lemma 5 : Seien k_1, k_2 trägheitskorrigierte Boolesche Funktionen. Dann gilt :
 $k_1 = k_2 \Rightarrow k'_1 = k'_2$.

Lemma 6 : Seien k_1, k_2 trägheitskorrigierte Boolesche Funktionen. Dann gilt :
 $k_1 \neq k'_1 \neq k'_2$.

Wir haben wieder eine bijektive Abbildung :

$$\text{def}_3 : T_m^n \rightarrow HT_m^n$$

$$\text{def}_3(k) = k',$$

und können statt HT_m^n bzw. $HT(\text{def}_3(T_m^n))$ bzw. $\text{def}_3(T)$ schreiben.

Bei der Betrachtung der Trägheit von Schaltfunktionen stellt die Behandlung schnell oszillierender Signale, bei denen kein Signalwert genügend lange anliegt, ein Problem dar. Es sind in Abhängigkeit von der Technologie, die beschrieben werden soll, verschiedene Modelle denkbar. Das eben definierte Modell ist ohne eine bestimmte Technologie zu betrachten entwickelt worden. Vom mathematischen Standpunkt aus zeichnet es sich dadurch aus, dass nur sehr begrenzte Information über das zukünftige und vergangene Zeitverhalten in die Definition eingeht.

Vom praktischen Standpunkt aus betrachtet liefert das Modell für kurze Oszillationsfolgen ein naheliegendes, für längere Folgen ein zumindest einsichtiges Verhalten das sich als eine Art Ableitungsverhalten charakterisieren lässt :

Folgen n Transitionen in zu kurzem Abstand aufeinander, so werden die erste und die letzte Transition ignoriert und alle weiteren in Gegenrichtung ausgeführt. Für $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ ist das Verhalten in der Abbildung 7 skizziert.

Als letztes Phänomen physikalisch realisierter Boolescher Funktionen soll nun die Verzögerung betrachtet werden. Da hier ein Modell mit binärem Werteverhalten betrachtet wird, kann nur eine Durchlaufverzögerung (propagation delay) beschrieben werden, nicht aber eine Schaltverzögerung (transient delay). Es dürfte aber in vielen Fällen möglich sein, eine Schaltverzögerung hinreichend genau als Durchlaufverzögerung zu beschreiben.

Ein sehr einfaches Modell für die Verzögerung stellt das Totzeitmodell dar, wie es von McGhee [7] und Beister [2] beschrieben wird. Bei diesem Modell geht man davon aus, dass jeder Wert einer jeden Argumentkomponente erst um eine feste Anzahl von Zeiteinheiten d verzögert wird, bis er tatsächlich als Argumentwert der zu beschreibenden Funktion interpretiert wird. Als Argumentwert zur Berechnung des Funktionswertes zum Zeitpunkt t_0 dient also nicht der zum Zeitpunkt t_0 anliegende Wert, sondern der, der zum Zeitpunkt $t_0 - d$ anlag.

Fordert man nun, dass dieser Verzögerungsbetrag d mindestens so gross ist, wie die maximale für die zu beschreibende Funktion genannte Trägheit mt und stellt man sich vor, dass die Trägheitskorrektur erst unmittelbar vor der Interpretation der Argumente vorgenommen wird, so ist das Problem, dass zur Trägheitskorrektur zukünftige Argumentwerte benötigt werden, gelöst. Denn benötigt man mt zukünftige Werte für einen Wert, der zum Zeitpunkt $t_0 - d$ anlag und ist $mt \leq d$, so gelangt man höchstens zum Zeitpunkt t_0 , also nicht in die Zukunft.

Dieses Modell soll nun verfeinert werden. Zunächst soll es möglich sein, für verschiedene Argumentkomponenten auch verschiedene Verzögerungen anzugeben. Analog möchte man auch für unterschiedliche Bildkomponenten unterschiedliche Verzögerungen beschreiben können. Und schliesslich soll es möglich sein, für Werte "1" und

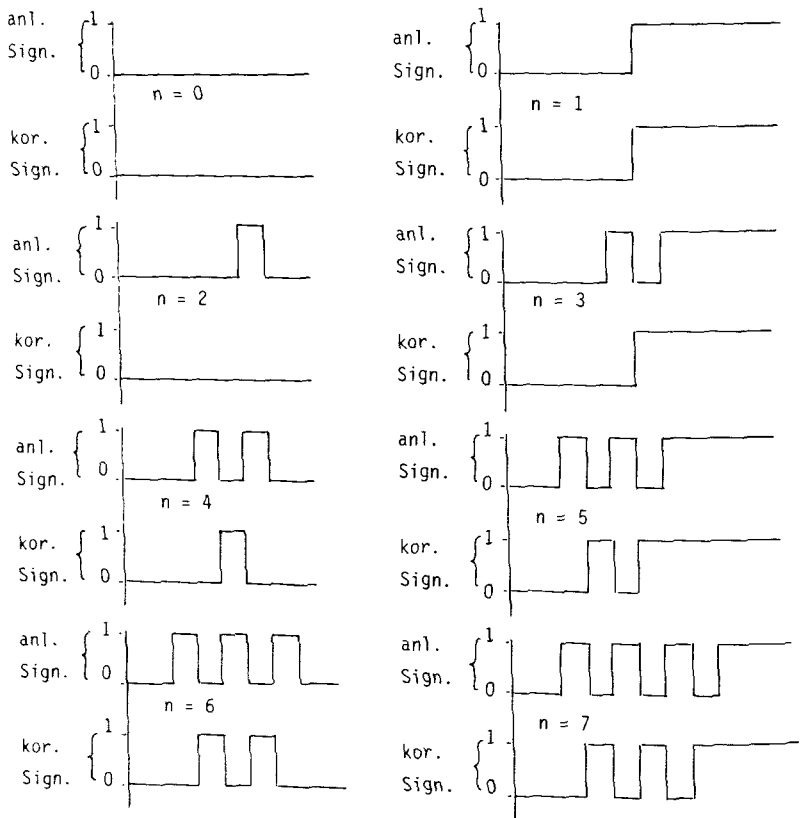


Bild 7. Beispiel für Trägheitskorrekturen.

„0“ unterschiedliche Verzögerungen anzugeben. (Bei dem Totzeitmodell werden nicht Transitionen sondern Werte verzögert. Man macht sich aber leicht klar, dass dies bzgl. des Beschreibungsergebnisses äquivalent ist.)

Man geht nun davon aus, dass für jedes Paar (Argumentkomponente, Bildkomponente) vier Verzögerungsangaben vorliegen, für jede der möglichen Wertekombinationen eine. Dieses Quadrupel wird elementare Verzögerungsangabe genannt.

Die minimale für die zu beschreibende Funktion genannte solche Angabe wird mit ud bezeichnet. Aus Gründen einer einfacheren Schreibweise fordern wir, dass bereits dieses ud mindestens so gross ist wie die grösste genannte Trägheit mt .

Es werden zum Zeitpunkt t_0 also Argumentwerte für die zugrundegelegte ideale Boolesche Funktion betrachtet, die vor ud Zeiteinheiten anlagen und Trägheits- und

Flanken-Korrektur unterzogen sind. Aus diesen Argumenten berechnet die ideale Boolesche Funktion verzögerungsfrei die Werte der Bildkomponenten. Für jede Bildkomponente kann nun ihre individuelle Verzögerung bestimmt werden. In diese Berechnung gehen die Werte aller Argumentkomponenten und der gerade betrachteten Bildkomponente ein. Im Konfliktfall wird das Maximum gebildet.

Um das soeben gesagte zusammenzufassen :

Um den Wert einer Bildkomponente zum Zeitpunkt t_0 zu bestimmen, muss man erst den Wert der Bildkomponente aufgrund der flanken- und trägheitskorrigierten Argumentkomponenten zum Zeitpunkt $t_0 - ud$ feststellen. Damit lässt sich der Wert ad der aktuellen Verzögerung feststellen. Der zu berechnende Wert ist dann der, wie er aus den flanken- und trägheitskorrigierten Argumenten zum Zeitpunkt $t_0 - ad$ berechnet wird.

Auf der Grundlage dieser Überlegungen soll nun die Verzögerung formal definiert werden.

Definition 13 : Das Quadrupel $Ed = (d_{00}, d_{01}, d_{10}, d_{11})$ heisst elementare Verzögerungsangabe : \Leftrightarrow .

$$(1) \quad \bigwedge_{0 \leq i \leq 1} \bigwedge_{0 \leq j \leq 1} d_{ij} \in \mathbb{N}_0$$

$$(2) \quad \max_{0 \leq i, j \leq 1} \{ (d_{ij} - \min_{0 \leq k, l \leq 1} \{d_{kl}\}) \} \leq \min_{0 \leq i, j \leq 1} \{d_{ij}\}.$$

ED sei die Menge aller elementaren Verzögerungsangaben.

Dabei gibt bei einer Komponente d_{ij} eines solchen Quadrupels i den Wert der Argumentkomponente, j den Wert der Bildkomponente an.

Schreibweise

Sei $Ed = (d_{00}, d_{01}, d_{10}, d_{11})$ eine elementare Verzögerungsangabe. led heisst minimale Elementarverzögerung : \Leftrightarrow

$$led : = \min_{0 \leq i, j \leq 1} \{d_{ij}\}.$$

hed heisst maximale Elementarverzögerung : \Leftrightarrow

$$hed : = \max_{0 \leq i, j \leq 1} \{d_{ij}\}.$$

Definition 14 : Sei H_m^n die Menge der trägheitskorrigierten n -nach- m -stelligen Booleschen Funktionen. Der Operator $VZ : \text{def}_3(H_m^n) \times ED^{nm} \rightarrow HK_m^n$ ist wie folgt definiert :

$$VZ(k', ED_{11}, \dots, ED_{nm}) = l'$$

$$l' : \{ \{0, 1\}^n \}^{md+mt+2} \rightarrow \{0, 1\}^m \quad (md : = \max_{1 \leq r \leq n} \{ \max_{1 \leq s \leq m} \{hed_{rs}\} \}).$$

$$l'(a_{1_{t_0-md-mt-1}}, \dots, a_{n_{t_0-md-mt-1}}, \dots, a_{n_{t_0}}) \text{ ist komponentenweise definiert}$$

durch :

$$l'(a) := \begin{pmatrix} p_1(a) \\ \vdots \\ p_m(a) \end{pmatrix}$$

wobei für alle $l \leq i \leq m$ gilt :

$$\begin{aligned} p_i : \{ \{0, 1\}^n \}^{md+mt+2} &\rightarrow \{0, 1\} \\ p_i(a_{1t_0-md-mt-1}, \dots, a_{nt_0-md-mt-1}, \dots, a_{nt_0}) &:= \\ \text{pr}_i [k'(a_{1t_0-ad-mt-1}, \dots, a_{nt_0-ad-1}, \dots, a_{nt_0-ad+mt})] &. \end{aligned}$$

Dabei wird ad bestimmt durch $ad := \max_{1 \leq q \leq n} \{(d_{rs})_{qi}\}$ mit s ist der Wert der i -ten

Bildkomponente der Trägheitskorrigierten Booleschen Funktion zum Zeitpunkt t_0-ud und r ist der Wert der q -ten trägheits- und flankenkorrigierten Argumentkomponente von k' zum Zeitpunkt t_0-ud . $l : (\sigma_{T'})^n \rightarrow (\sigma_{T'})^m$ heisst n -nach- m -stellige Quasi Reale Boolesche Funktion : \Leftrightarrow

$$\begin{aligned} \bigvee_{l' \in HK_m^n} \bigwedge_{(\sigma_{T'})^n} \bigwedge_{t_0 \in T'} \psi(t) &:= l(t_0, \chi) \\ &= l'[\chi(t_0-md-mt-1), \dots, \chi(t_0)]. \end{aligned}$$

K_m^n sei die Menge aller n -nach- m -stelligen Quasi Realen Booleschen Funktionen, K die Menge der Quasi Realen Booleschen Funktionen.

Auch hier erhält man unmittelbar die beiden folgenden Lemmata :

Lemma 7 : Seien l_1, l_2 Quasi Reale Boolesche Funktionen. Dann gilt :
 $l_1 = l_2 \Rightarrow l'_1 = l'_2$.

Lemma 8 : Seien l_1, l_2 Quasi Reale Boolesche Funktionen. Dann gilt :
 $l_1 \neq l_2 \Rightarrow l'_1 \neq l'_2$.

Man erhält eine bijektive Abbildung $\text{def}_4 : K_m^n \rightarrow HK_m^n$, $\text{def}_4(k) = k'$ und kann statt HK_m^n bzw. HK schreiben $\text{def}_4(K_m^n)$ bzw. $\text{def}_4(K)$.

Aufgrund der bijektiven Abbildung def_4 lassen sich Eigenschaften einer Funktion $f(K_m^n)$ unmittelbar aus den Eigenschaften der Funktion $f' := \text{def}_4(f)$ erhalten.

Wir betrachten daher nun Funktionen $f : \{ \{0, 1\}^n \}^k \rightarrow \{0, 1\}^m$ wobei k durch die zugrundegelegten Angaben über Trägheit und Verzögerung bestimmt ist. (k = maximale Trägheit + maximale Verzögerung + 2.) Schreibt man $f(t_0, a_{t_0})$ für $f(a_{1t_0-md-mt-1}, \dots, a_{nt_0})$ so lässt sich f in natürlicher Weise als Wortfunktion auffassen, die ein Eingabewort $a_{t_i} a_{t_{i+1}} \dots \in X^*$, $X = \{0, 1\}^n$, überführt in ein Ausgabe-
 wort $f(t_i, a_{t_i}) f(t_{i+1}, a_{t_{i+1}}) f(t_{i+2}, a_{t_{i+2}}) \dots \in Y^*$, $Y = \{0, 1\}^m$ wobei der Einfachheit

halber vorausgesetzt wird, dass es für jedes t_i ein Wort $a_{t_i-k} \dots a_{t_i}$ gibt, d.h. dass keine undefinierten Vorgängerwerte existieren.

Ohne diese Annahme muss man von einer Familie von Wortfunktionen f_1, \dots, f_s sprechen. Diese Familie ist dadurch gekennzeichnet, dass gilt :

$$\bigvee_{t_v} \bigwedge_{x \in X^*} \bigwedge_{f_i \in \{f_1, \dots, f_s\}} \bigwedge_{t_g \geq t_v} f_i(t_g, a_{t_g}) = f_1(t_g, a_{t_g}).$$

Es handelt sich dabei um Einschwingvorgänge beim "Einschalten" derer man sich meist nicht bewusst ist.

Da alle Mitglieder dieser Funktionenfamilie fast überall, d.h. überall ausserhalb der Einschwingzeit, identisch sind, ist es in den meisten Fällen vertretbar, sich auf einen Vertreter dieser Familie zu beschränken.

Satz

Für jede Quasi Reale Boolesche Funktion $f \in K_m^n$ gibt es einen endlichen Automaten A_f mit höchstens 2^{n^k} Zuständen, so dass gilt : f aufgefasst als Familie von Wortfunktionen $f_i : X^* \rightarrow Y^*$ ist gleich der Familie von Automatentransformationen $T_i(A_f)$. (k = maximale Trägheit + maximale Verzögerung + 2.)

Beweis : (Durch Angabe des Automaten A_f);

$$A_f : = (X, Y, \delta : X \times S \rightarrow S, \lambda : S \rightarrow Y)$$

mit $X = \{0, 1\}^n$ und $Y = \{0, 1\}^m$.

Die maximale für f angegebene Trägheit sei mt , die maximale für f angegebene Verzögerung sei md . Aus der Definition 14 geht hervor, dass dann neben der aktuellen Eingabe X_{t_0} auch die Werte $X_{t_0-1}, \dots, X_{t_0-mt-md-1}$ mit in die Berechnung der Ausgabe eingehen.

Damit ergibt sich die Zustandemenge

$$S : = \{\{0, 1\}^n\}^{mt+md+2} \quad (\text{Um einen Moore-Automaten zu erhalten, wird auch die aktuelle Eingabe } X_{t_0} \text{ mit abgespeichert})$$

$$s_{t_0} : = s_{1_{t_0}}, \dots, s_{n_{t_0}}, s_{1_{t_0-1}}, \dots, s_{n_{t_0-1}}, \dots, s_{n_{t_0-md-mt-1}}.$$

Dann gilt :

$$\delta(X_{t_0}, s_{t_0}) = s_{t_0+1}$$

$$= x_{1_{t_0}}, \dots, x_{n_{t_0}}, s_{1_{t_0}}, \dots, s_{n_{t_0}}, s_{1_{t_0-1}}, \dots, s_{n_{t_0-md-mt-1}},$$

und

$$\lambda(s_{t_0}) = f'(s_{t_0}) = Y_{t_0}$$

wobei f' die in Definition 14 definierte Funktion aus HK_m^n ist.

Man beachte, dass jeder Zustand aus S als Anfangszustand zugelassen ist. Damit

erhält man eine Familie von Automatentransformationen, die nach spätestens $md + mt + 2$ Takten alle identisch sind.

Es ist offensichtlich, dass der so konstruierte Automat f realisiert.

Q.E.D.

Mit Hilfe eines derart konstruierten Automaten kann man sich nun die Wirkungsweise einer Quasi Realen Booleschen Funktion leicht veranschaulichen. Dazu stellt man sich die Information über die Argumentwerte in Schieberegistern gespeichert vor. Ein Element $a \in \{0, 1\}^k$ wird dabei in n Schieberegistern der Länge k gespeichert. Jede Zelle der Schieberegister hält für die Länge eines Rasterzeitintervalls einen konstanten Wert. Am Ende eines jeden Intervalls wird nach rechts um eine Zelle weitergeschoben und links nachgeladen. Das linke Ende der Schieberegister entspricht jeweils dem Zeitpunkt t_{0-1}, t_{0-2}, \dots , entsprechen.

Im Falle einer flankenkorrigierten Booleschen Funktion mit n Argumenten benötigt man demnach n Schieberegister der Länge 2:

t_0	t_{0-1}
-------	-----------

Liegt eine trägheitskorrigierte Boolesche Funktion vor, so müssen die Schieberegister nach rechts wie auch nach links, d.h. in die Vergangenheit wie in die Zukunft, um mt Zellen verlängert werden (mt = maximale Trägheit):

t_{0+mt}	\dots	t_{0+1}	t_0	t_{0-1}	t_{0-2}	\dots	t_{0-mt-1}
------------	---------	-----------	-------	-----------	-----------	---------	--------------

← Zukunft

Geht man nun zu Quasi Realen Booleschen Funktionen über, betrachtet man als auch noch die Verzögerung, so verschiebt sich die Zelle t_0 wieder an den linken Rand des Schieberegisters. Der alten Zelle t_0 entspricht nun die Zelle t_{0-ud} (ud = minimale Verzögerung, $ud \leq mt$):

(t_{0+mt})				(t_0)			
t_0	\dots		\dots	t_{0-ud}	\dots	$t_{0-ud-mt-1}$	\dots
							$t_{0-mt-md-1}$

Der Automat $A = (X, Y, S, \delta, \lambda)$ ist nun, grob gesehen:

$$X = \{0, 1\}^n$$

$$Y = \{0, 1\}^m;$$

S ist der Inhalt der Schieberegister; δ ist die Funktion, die die Schieberegister um eine Zelle nach rechts schiebt und links nachlädt. λ arbeitet wie folgt: Zunächst werden die trägheitskorrigierten Argumentkomponenten zum Zeitpunkt t_{0-ud} und die daraus resultierenden Bildkomponenten der flanken- und trägheits-korrigierten Booleschen Funktion bestimmt. Damit lässt sich die aktuell gültige Verzögerung ad_i für jede Bildkomponente i bestimmen. Durch Anwendung der flanken- und trägheits-korrigierten Booleschen Funktion zum Zeitpunkt t_{0-ad_i} wird der Wert der i -ten Bildkomponente für alle $0 \leq i \leq m$ berechnet.



Der so beschriebene Automat arbeitet natürlich sehr ineffektiv. Insbesondere muss sehr oft eine trägheitskorrigierte Boolesche Funktion berechnet werden, um einmal die Ausgabe zu bestimmen. Da jeder Wert, der aufgrund von Argumenten zu einem Zeitpunkt t_{0-ad} berechnet wird, bereits mindestens einmal aufgrund von Argumenten zu einem Zeitpunkt $t_{0'-ud}$ berechnet wurde, wird das soeben beschriebene Automatenmodell nun so geändert, dass die Ergebniswerte, die zu den jeweiligen Zeitpunkten t_{0-ud} berechnet werden, in den Bildkomponenten nachgeschalteten Schieberegistern gespeichert werden.

Diese Schieberegister haben jeweils die Länge der Differenz zwischen der für das Gatter angegebenen Minimalverzögerung ud und der für den jeweiligen Ausgang i angegebenen Maximalverzögerung md_i . Die Zellen seien mit $(0 - ud - 1)_i$, $(0 - ud - 2)_i, \dots, (0 - md_i)_i$ bezeichnet. Der Test zum Zeitpunkt t_{0-ud} bestimmt nun nur noch, ob als i -te Ergebniskomponente der Inhalt der Speicherzelle $(0 - md_i)_i$ oder der einer weiter links von ihr stehenden Speicherzelle genommen werden muss.

Selbstverständlich können die Schieberegister an den Eingängen gleichzeitig auf eine Länge von $ud + mt + 1$ verkürzt werden. (Die Bild 8 veranschaulicht diese Konstruktion.)

Literatur

- [1] Assmuss, W., Eine asynchrone Schaltwerkrealisierung unter Berücksichtigung wesentlicher Hazards. *Seminarberichte des Instituts für Theorie der Automaten und Schaltwerke der Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung mbH St. Augustin*, Nr. 35, 1971.
- [2] Beister, J., A unified approach to combinational hazards, *IEEE Trans. Comput.*, C-23 (1974), 566-575.
- [3] Breuer, M.A., A note on three-valued logic simulation, *IEEE Trans. Comput.*, C-21 (1972), 399-402.
- [4] Chappel, S.S. und Yau, S.S., Simulation of large asynchronous logic circuits using an ambiguous gate model. *Proc. AFIPS FCJJ*, 39 (1971), 651-661.
- [5] Daniels, S.F., A technique for the analysis of digital systems dynamics, *University Microfilms*, Nr. 71 1674.
- [6] Hlavicka, J., Essential hazards correction without the use of delay elements, *IEEE Trans. Comput.*, C-19 (1970), 232-238.
- [7] McGhee, R.B., Some aids to the detection of hazards in combinational switching circuits, *IEEE Trans. Comput.*, C-18 (1969), 561-565.
- [8] Mies, P., Darstellung asynchroner Schaltwerke als Modulnetze, *Diplomarbeit*, Universität Bonn, 1973.
- [9] Miller, R.E., "Switching Theory", Vol. II, (J. Wiley & Sons, New York, 1965).
- [10] Muller, D.E. und Bartky, W.S., A theory of asynchronous circuits, *Proc. Int. Symp. Theory of Switching*, 29 Ann. Computation Lab. Harvard Univ., (Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1959), 204-243.
- [11] Noguchi, A., et al., "Mathematical Theory of Asynchronous Circuits I-III", (Waseda University Press, Tokyo 1963-1966).
- [12] Gécseg, F. and Péák, I., "Algebraic Theory of Automata" (Akademia Kiado, Budapest, 1971).
- [13] Szygenda, S.A., et al., A model and implementation of a universal time delay simulator for large digital nets, *Proc. AFIPS SJCC*, 36 (1970), 207-216.
- [14] Szygenda, S.A., et al., Timing analysis for digital fault simulation using assignable delays, *IEEE-ACM 11th Design Automation Workshop*, (1974).
- [15] Szygenda, S.A., Implemented techniques for handling spikes in an assignable delay simulator, *Winter Simulation Conference*, (1974).

- [16] Tracey, J.H., Internal state assignment for asynchronous sequential machines, *IEEE Trans. Electron. Comput.*, **EC-15** (1966), 551-560
- [17] Unger, S.H., "Asynchronous Sequential Switching Circuits" (Wiley-Interscience, New York, 1969).
- [18] von Wachter, C., Über die Analyse asynchroner Netzwerke, *Mitteilungen der Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung mbH, St. Augustin, Nr. 5*, (1970).

Abstract

The domain of Boolean functions is expanded to the n th Cartesian product of the domain (n finite). Through this procedure it is possible to introduce a "parameter system" for the description of time-dependent phenomena of physically realized Boolean functions. These phenomena include dynamic variable delay, which is dependent on the current values at the inputs as well as at the outputs, value-dependent inertial delay (high-frequency absorption) and transition sensitivity. Such an expanded Boolean function is called a "Quasi Real Boolean Function" (QRBF). An automata model for Quasi Real Boolean Functions is given.

Résumé

Le domaine des fonctions booléennes est étendu au produit cartésien d'ordre n du domaine (n fini). Grâce à ce procédé, on introduit un "système paramétrique" permettant de décrire les phénomènes temporaires dans la réalisation physique des fonctions booléennes. Ces phénomènes comprennent les retards dynamiques variables, qui dépendent des valeurs des entrées et des sorties, les retards inertiels dépendant de ces valeurs (absorption des hautes fréquences), et la sensibilité aux flancs de transition. Une telle fonction booléenne étendue est appelée "fonction booléenne quasi réelle" (QRBF). On donne un modèle des fonctions booléennes quasi réelles sous la forme d'un automate.