Hartmut SPIEGEL, Tübingen

Quadromino im Mathematikunterricht I[1]

1. Einleitung

Quadrominosteine (im folgenden abgekürzt QS) sind quadratische Pappstücke, die auf einer Seite durch Einzeichnen der beiden Diagonalen in vier Teildreiecke zerlegt sind. Jedes dieser Dreiecke ist mit einer der Farben Blau, Gelb, Rot gefärbt. Ein vollständiger Satz Quadrominosteine besteht aus allen verschiedenen Plättchen, die man auf diese Weise herstellen kann (Abb. 1). Als verschieden sind solche Plättchen zu betrachten, die man nicht so aufeinanderlegen kann (Farbseite nach oben), daß übereinanderliegende Dreiecke dieselbe Farbe besitzen.

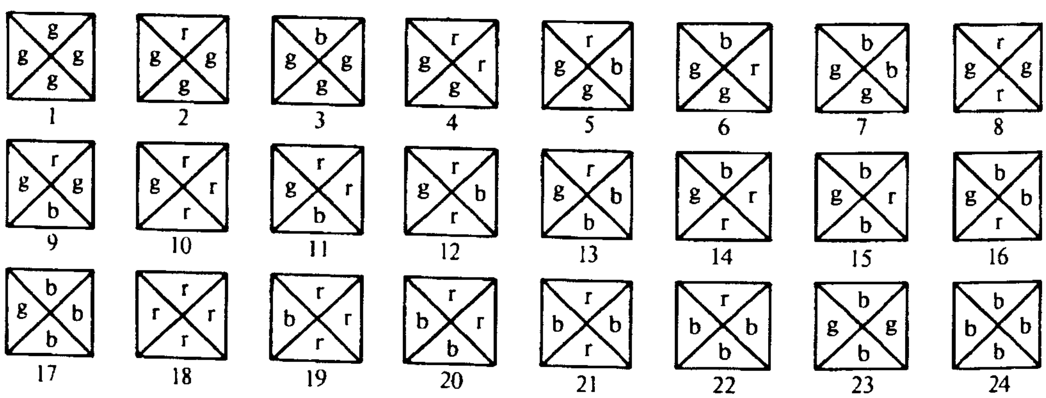

Abb. 1

(Die in Abb. 1 verwendete Numerierung wird im folgenden Text zur Kennzeichnung der QS verwendet.)

Von allen herkömmlichen strukturierten Materialien unterscheidet sich die Menge der QS durch ihre Struktur, insbesondere läßt sie sich nicht als cartesisches Produkt von Mengen, deren Elemente bestimmte Merkmalsausprägungen sind, beschreiben. QS erschließen neue Möglichkeiten zum Erreichen allgemeiner mathematischer Lernziele aus dem affektiven und kognitiven Bereich (vgl. [1], [3]), was durch die im folgenden vorgetragenen Vorschläge zur Arbeit mit QS im Mathematikunterricht (Primarstufe und Sekundarstufe I) gezeigt werden soll.

2. Mathematische Aktivitäten mit Quadrominosteinen

a) *Herstellung aller verschiedenen QS und Diskussion über die Vollständigkeit*

Man sollte Kinder nicht um wichtige Lernerfahrungen bringen, indem man ihnen die QS vorfabriziert vorsetzt. Man braucht nur Pappe und Farbstifte, um sie selbst herzustellen, so daß der materielle Aufwand im Vergleich zu anderen strukturierten Materialien sehr gering ist – ein nicht zu unterschätzender Faktor für die Schule. Zeigt man Kindern ein paar Beispiele für Quadrominosteine, so erkennen sie unschwer das gemeinsame Konstruktionsprinzip. Zwei Aufgaben stellen sich für die Kinder sofort: die Suche nach

1 Auf die Hälfte gekürztes Vortragsmanuskript. Eine ausführliche Fassung ist in DdM 2, 1974 erschienen.

möglichst viel verschiedenen QS und die Suche nach einer Begründung dafür, daß es außer den gefundenen keine weiteren mehr gibt. Diese Aktivitäten führen zu der Erfahrung, daß es nützlich ist, systematisch vorzugehen, wobei systematisches Vorgehen in diesem Fall in durchaus unterschiedlichen mathematischen Tätigkeiten bestehen kann:

I) In einer bestimmten Reihenfolge vorgehen, d. h. ordnen, also z. B. in dieser Reihenfolge: 18, 19, 10, 20, 21, 4 etc.

II) Zerlegen in überschaubare Teilmengen, die aber alle Möglichkeiten umfassen, d. h. klassifizieren, also z. B.:
   - i) einfarbige, zweifarbige, dreifarbige, oder:
   - ii) ohne Rot, ein Viertel Rot, die Hälfte Rot, mehr als die Hälfte Rot oder:
   - iii) Klassifizierung nach Größe und Anzahl der „Zusammenhangskomponenten" (Vertreter der entstehenden Klassen sind 1, 19, 7, 14, 15)

III) Zu gefundenen Steinen neue finden, indem man sie durch die Permutation der drei Farben „verwandelt". Beispiel: Durch die Permutation, die Blau auf Rot, Gelb auf Blau und Rot auf Gelb abbildet, wird 22 in 10, 15 in 12 und 11 in 5 „verwandelt".

Aus methodischen Gründen empfiehlt es sich, im Unterricht die Aufgabe, alle verschiedenen QS herzustellen, jeweils an Gruppen von 3–6 Kindern zu vergeben. Im übrigen sollte dem Herstellungsprozeß in Form von Ausmalen der Quadrate noch eine Phase vorausgehen, während der die QS aus farbigen Pappdreiecken zusammengesetzt werden (enaktive Repräsentationsebene).

b) *Phase des Kennenlernens*

Bevor man die Kinder zur Untersuchung spezieller Probleme anregt, sollte man ihnen Gelegenheit geben, sich mit dem Material vertraut zu machen. Dazu eignen sich freies Spiel bzw. Einzel- oder Gruppenspiel nach vorgeschlagenen oder von den Kindern selbst festzusetzenden Regeln. Des weiteren lassen sich mit Hilfe des „Nummernblattes" (Abb. 1) Identifizierungsübungen durchführen, bei denen die Nummern von QS genannt werden müssen, die in einer anderen Lage präsentiert werden, als sie auf dem Nummernblatt abgebildet sind. Eine Umkehrung dieser Aufgabenstellung ist die folgende Aufgabe:

Unter jedem Quadrat steht die Nummer des Steins, den Du malen sollst. Die Dreiecke mit dem Punkt sollen blau werden.

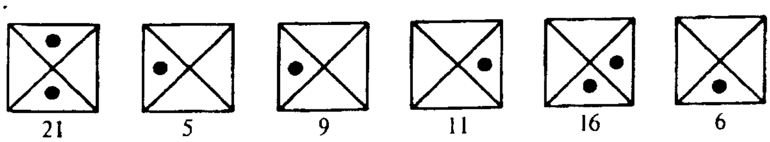

Abb. 2

Auf weitere Vorschläge kann an dieser Stelle leider nicht eingegangen werden.

c) *Eigenschaften von Quadrominosteinen und Klassifizierungen*

Das Lernziel: „Der Schüler kann klassifizieren" umfaßt zunächst die spezielle Komponente: „Eine gegebene Menge nach vorgegebenen oder selbst erfundenen Kriterien klassifizieren können". Daß die QS hierzu reichhaltige Möglichkeiten bieten, ist offensichtlich, z. B.: Farbanteil bestimmter Farben, Farbverhältnis, Symmetrieeigenschaften, geometrische oder topologische Eigenschaften, Anzahl der vorkommenden Farben etc . . . Eine ebenso wichtige Komponente scheint mir die Umkehrung zu sein: „Der Schüler kann zu einem vorgegebenen Teilmengensystem entscheiden, ob es sich um eine Klassifizierung handelt und diese Entscheidung begründen".

Im Unterricht entdeckten die Kinder bei der Diskussion über zweckmäßige Schubladensortierungen selbst die wesentlichen Eigenschaften einer Klassifizierung:

1) Vollständigkeit („für jeden Stein muß eine Schublade da sein“)

2) Eindeutigkeit („kein Stein darf in zwei Schubladen passen“)

und untersuchten dann (mit unterschiedlich anspruchsvollen Strategien) vorgegebene Schubladensortierungen auf diese Eigenschaften. Es gibt vier Variationen, je nachdem, ob beide Eigenschaften erfüllt, nicht erfüllt bzw. nur eine nicht erfüllt ist. Beispiele dafür sind:

I) Schubl. 1: „Es gibt mindestens zwei gegenüberliegende Dreiecke mit der gleichen Farbe“; Schubl. 2: „Jedes Dreieck hat eine andere Farbe als das gegenüberliegende“.

II) S 1: „ohne Blau“; S 2: „ohne Rot“; S 3: „ohne Gelb“.

III) S 1: „höchstens ein blaues Dreieck“; S 2: „höchstens ein gelbes Dreieck“; S 3: „höchstens ein rotes Dreieck“.

IV) S 1: „genau ein rotes und genau ein blaues Dreieck“
S 2: „genau ein blaues und genau ein gelbes Dreieck“
S 3: „genau ein gelbes und genau ein rotes Dreieck“.

Um Schwierigkeiten aufgrund von Mißverständnissen der sprachlichen Beschreibung zu vermeiden (solche traten z. B. bei den Begriffen „mindestens“, „höchstens“ auf), wurden im Unterricht Arbeitsblätter der bekannten Form verwendet (Abb. 3). Zunächst

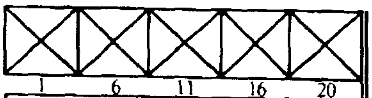 1 6 11 16 20	?	?	?	?	?
mindestens zwei Dreiecke sind rot	X	—	X	—	—
Hat genau ein rotes und genau ein blaues Dreieck	—	X	—	—	—
höchstens zwei Dreiecke sind blau	X	X	X	X	X
jedes Dreieck hat eine andere Farbe als das gegenüberliegende	X	X	X	X	—
höchstens drei Dreiecke sind gelb	X	X	X	X	—
mindestens ein Dreieck ist rot	X	X	X	X	—
Es gibt mindestens zwei gegenüberliegende Dreiecke mit der gleichen Farbe	—	—	—	—	X
jedes Dreieck hat mindestens ein Nachbardreieck mit der gleichen Farbe	—	—	X	—	X
mindestens ein Dreieck ist rot und höchstens zwei blau	X	X	X	X	—

Abb. 3

sollten Eigenschaften vorgegebener Steine angekreuzt werden. (Hierbei kommt auch die Problematik der Verneinung von All- bzw. Existenzaussagen ins Spiel.) Abb. 3 zeigt eine Umkehrung der Aufgabenstellung.

d) *Ordnungsrelationen*

QS kann man auch ordnen, z. B. um Skat mit ihnen zu spielen. Die Ordnung der Farben: „Blau vor Gelb vor Rot" induziert eine Ordnung der QS: Welcher Stein mehr wert ist, darüber entscheidet zunächst die Zahl der blauen Dreiecke, bei Gleichheit die der gelben etc. Der Anfang der Reihe in dieser Ordnung (vom größten abwärts) lautet: 24, 17, 22. Vorgänger von 22 sind 7 und 23, deren Vorgänger wiederum 13, 15, 16 sind. Jede der sechs Ordnungen der Farben induziert eine nichtlineare Ordnung der QS, denn es gibt verschiedene Steine mit gleichem Farbanteil von jeder Farbe. Weiterhin ist anzumerken, daß die zu dem genannten Beispiel inverse Ordnung nicht etwa die ist, die von der Ordnung „Rot vor Gelb vor Blau" erzeugt wird.

Eine andere Möglichkeit, die QS zu ordnen, ist, den Teildreiecken verschiedener Farbe verschiedene Punktwerte zuzuordnen. Der Wert eines QS ist dann die Summe der Punktwerte seiner Teildreiecke und geordnet wird nach dem Wert. Zu diesen Ordnungsrelationen gibt es interessante Problemstellungen arithmetischer Natur. Beispiele dafür sind die folgenden Aufgaben:

1) Stein Nr. 17 ist 10 Punkte wert. Welche Punktwerte kann dann Gelb haben?
2) Stein Nr. 9 ist 10 Punkte wert. Welche Punktwerte können dann Rot, Blau, Gelb haben? (Es gibt viele Möglichkeiten!)
3) Stein Nr. 11 und Stein Nr. 2 sind gleichviel wert. Gelb ist 3 Punkte wert und Blau 4 Punkte. Wieviel Punkte ist Rot wert?
4) Stein Nr. 23 ist 8 Punkte wert und Stein Nr. 4 ist 12 Punkte wert. Wieviel Punkte ist dann Gelb wert?
5) Stein Nr. 24 ist genausoviel wert wie Stein Nr. 6. Gelb ist 4 Punkte wert. Wieviel Punkte haben dann Blau und Rot?

Die Fülle der möglichen Problemstellungen, die es zum Thema Ordnungsrelationen im Unterricht gibt, braucht hier nicht im einzelnen dargestellt zu werden. Ein für die QS interessanter Problemkreis ergibt sich aus folgender Aufgabe: Man ermittele aus einer oder mehreren Aussagen „q_1 ist mehr wert als q_2" für bestimmte QS die zugrundeliegende Ordnung der Farben!

e) *Farbänderungsoperatoren*

Die sechs Permutationen der drei Farben lassen sich (vgl. a) III)) in natürlicher Weise als Gruppe von Operatoren auf der Menge der QS auffassen, die in mathematischer und didaktischer Hinsicht wegen folgender Eigenschaften interessant sind:

1) Es gibt keinen QS, aus dem man durch (ggf. wiederholte) Anwendung aller Operatoren alle QS erzeugen kann.
2) Es gibt nichttriviale Operatoren, die Fixpunkte besitzen.
3) Durch Angabe von Ausgangszustand und Endzustand ist der zugehörige Operator nicht immer eindeutig bestimmt.

(Eine ausführliche Darstellung dieses Problemkreises wird vom Autor an anderer Stelle gegeben. Vgl. hierzu auch den folgenden Aufsatz von J. Ziegenbalg.)

3. Schlußbemerkung

Im Vorangehenden konnte die Vielfalt der didaktischen Einsatzmöglichkeiten der QS (bzw. von entsprechend verallgemeinertem Material: In n ($n>2$) kongruente Teildreiecke zerlegte n-Ecke mit m verwendeten Farben; z. B. Trimino, vgl. [2]) nur angedeutet werden. Folgende Punkte scheinen mir besonders wichtig zu sein:

a) Mit QS lassen sich alle bekannten Problemstellungen behandeln, die sich an herkömmliches strukturiertes Material anschließen, z. B. Probleme zu Unterschiedsrelationen, Ordnungsrelationen, mengenalgebraischen Operationen, Permutationen.

b) QS bieten darüberhinaus wegen ihrer reichen Struktur den Vorteil, auch anspruchsvollere Probleme schon auf der enaktiven Ebene zugänglich zu machen, z. B. Abzählprobleme, Klassifikationsprobleme, Probleme zum logischen Zusammenhang von Eigenschaften, Probleme zur Wirkung einer Gruppe von Operatoren auf einer Menge.

c) QS erscheinen besonders geeignet – und erste Unterrichtsversuche scheinen das zu bestätigen – Schüler anzuregen, selbst tätig zu werden, nach weiteren Problemstellungen zu suchen und Lösungsstrategien des unterschiedlichsten Anspruchsniveaus zu entwickeln.

Literatur

[1] Görner, A./Röhrl, E., Mathematikunterricht auf der Primarstufe, Stuttgart 1971
[2] Haber, H., Das mathematische Kabinett, Folge 1, München 1973
[3] Winter, H., Vorstellungen zur Entwicklung von Curricula in der Gesamtschule, in: Beiträge zum Lernzielproblem, Ratingen 1972