

Reduktion integrabler Systeme auf ihre Multisoliton Mannigfaltigkeiten

Dissertation

**zur Erlangung des Doktorgrades der Naturwissenschaften
im Fachbereich Mathematik-Informatik
der Universität-Gesamthochschule Paderborn**

vorgelegt von

**Gudrun Oevel
Paderborn 1990**

Inhaltsverzeichnis

0 Einleitung	1
1 Grundlegende Begriffe	9
2 Rekursionseigenschaften integrabler Systeme	19
2.1 Der nicht-hamiltonische Fall	19
2.2 Der hamiltonische Fall	24
2.3 Beispiele	27
3 Das Tangentialbündel der Multi-Soliton Mannigfaltigkeit	37
3.1 Physikalische Eigenschaften von Multi-Soliton Lösungen	37
3.2 Charakterisierungen der Multi-Soliton Lösungen	40
3.3 Das Tangentialbündel von M_N	46
3.4 Beispiele	59
3.5 Reduktionen auf M_N	62
4 Spektrale Eigenschaften des Rekursionsoperators	66
4.1 Eigenwerte und Eigenvektoren des Rekursionsoperators	66
4.2 Hamiltonische Eigenvektoren des Rekursionsoperators	75
5 Asymptotische Interpretation der Eigenvektoren des Rekursionsoperators	79
5.1 Vorbetrachtungen	79
5.2 Die Ein-Soliton Mannigfaltigkeit	81
5.3 Die N-Soliton Mannigfaltigkeit	84
5.4 Beispiele	87
6 Wirkungs- und Winkelvariablen	94
6.1 Der nicht-hamiltonische Fall	95
6.2 Der hamiltonische Fall	102
6.3 Beispiele	107
7 Literaturvergleich und Ausblick	113
A Soliton-Lösungen der BO	116
B Hamiltonische Formulierung von τ_0	119

0 Einleitung

Ausgehend von den außergewöhnlichen Eigenschaften der Korteweg-deVries Gleichung ([110]) entwickelte sich in den letzten zwei Jahrzehnten ein attraktives Forschungsgebiet der mathematischen Physik, welches heute unter dem Schlagwort "Soliton-Theorie" bekannt ist. Dabei handelt es sich um die Struktur- und Lösungstheorie einer Klasse von partiellen (Integro-) Differentialgleichungen, die als Flüsse auf einer unendlich dimensionalen Mannigfaltigkeit aufgefaßt werden können. Die Analyse dieser dynamischen Systeme weist faszinierende Verbindungen zu verschiedensten Teildisziplinen der Mathematik wie zum Beispiel Differentialgeometrie, Streutheorie, Lie Algebren, algebraische Geometrie oder Funktionentheorie auf. Dementsprechend sind die Charakterisierungen der sogenannten "Soliton-Gleichungen" so unterschiedlich, daß es bislang keine allgemein anerkannte Definition dieser Evolutionsgleichungen gibt. Bei allen Beispielen ist aber eine ihrer spektakulären Eigenschaften die Existenz einer unendlich großen Menge von kommutierenden Symmetrien¹ K_n . Ist also die Evolutionsgleichung auf einer Mannigfaltigkeit M durch das Vektorfeld $K(u)$ gegeben

$$\frac{\partial}{\partial t} u = K(u) , \quad u \in M \quad (0.1)$$

so gibt es eine nichttriviale Folge von Vektorfeldern K_n auf M mit

$$[K, K_n] = 0 \quad \text{und} \quad [K_n, K_m] = 0$$

für alle $n, m \in \mathbf{N}_0$. Hierbei bezeichne $[., .]$ den Kommutator in der Lie Algebra der Vektorfelder auf M . Darüberhinaus findet man bei Soliton-Gleichungen im allgemeinen eine weitere Hierarchie τ_n von Vektorfeldern, die sich stets so normieren lassen, daß sie mit einer Konstanten $\varrho > 0$ für alle $n, m \in \mathbf{N}_0$ die folgenden Kommutatorrelationen erfüllen

$$[\tau_n, K_m] = (m + \varrho) K_{n+m} , \quad [\tau_n, \tau_m] = (m - n) \tau_{n+m} . \quad (0.2)$$

Die durch (0.2) bestimmten Größen werden Mastersymmetrien ([40],[23],[90]) genannt und schon seit geraumer Zeit zur rekursiven Konstruktion der Symmetrien K_n benutzt. Allgemein kann man mit Hilfe der Mastersymmetrien aus unter der Soliton-Gleichung (0.1) invarianten Tensorfeldern wieder invarianten Tensorfelder erzeugen ([84]). Mastersymmetrien sind daher ein wichtiges Werkzeug, um wesentliche Strukturgrößen für die Gleichung (0.1) explizit zu konstruieren. Neben der genannten Bedeutung für die Ausgangsgleichung

¹Das Wort "Symmetrie" wird hier als Kurzform für "Symmetriegruppengenerator" benutzt (vgl. Kapitel 1).

ist neuerdings auch die analytische Struktur der Mastersymmetrien wohl untersucht. Diese Kenntnis macht es möglich, für recht allgemeine Arten von Soliton-Gleichungen die Mastersymmetrien τ_n (und damit auch die gesamten Symmetrien K_n) per Computerprogramm aufzuspüren ([46],[106],[115]). Von einem abstrakteren Gesichtspunkt betrachtet, läßt sich die von K_n und τ_n erzeugte Algebra von Vektorfeldern als semidirektes Produkt einer Kac-Moody- und einer Virasoro-Algebra identifizieren ([104]).

Auch die Ausgangsfragestellung dieser Arbeit ergibt sich aus der Existenz der Größen K_n und τ_n . Als Ergänzung zu den oben zitierten Ansätzen interessieren wir uns für die geometrische Interpretation von Symmetrien und Mastersymmetrien bei Reduktionen auf endlich dimensionale invariante Mannigfaltigkeiten und die sich daraus ergebende Querverbindung zu den klassischen vollständig integrabilen Systemen. Um diese Fragestellung angemessen erläutern zu können, erinnern wir kurz an die wesentlichen Definitionen und Aussagen für integrale Gleichungen im klassischen, endlich dimensionalen Fall.

Auf einer $2N$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit \bar{M} nennt man eine Menge von Skalarfeldern $Q_i : \bar{M} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, N$ ein vollständig integrables System ([2]) bezüglich eines nichtdegenerierten implektischen Operators Θ , wenn

(i) die Skalarfelder in Involution sind, d.h. die Poissonklammern

$$\{Q_i, Q_j\}_\Theta \equiv \langle \text{grad } Q_i, \Theta \text{ grad } Q_j \rangle = 0$$

verschwinden für alle $i, j = 1, \dots, N$,

(ii) die Gradienten von Q_1, \dots, Q_N linear unabhängig sind.

In diesem Fall bilden die Skalarfelder Q_1, \dots, Q_N für eine beliebige Funktion $H = H(Q_1, \dots, Q_N)$ und der ihr zugeordneten hamiltonischen Differentialgleichung

$$u_t = K(u) = \Theta \text{ grad } H \quad (0.3)$$

auf \bar{M} einen maximalen Satz globaler Erhaltungsgrößen in Involution. Unter einer topologischen Bedingung an die Energiefächen der Q_i garantiert das Theorem von Arnold und Liouville ([2],[9]), daß es für die gewöhnliche Differentialgleichung (0.3) linearisierende Koordinaten, sogenannte Wirkungs- und Winkelvariablen, gibt. Hat man diese gefunden, so erhält man die allgemeine Lösung von (0.3) durch einfache Quadratur, das Problem (0.3) ist also "vollständig integrabel". Während die Wirkungsvariablen durch die Erhaltungsgrößen Q_i gegeben sind, ist das Auffinden der Winkelvariablen P_i ein recht schwieriges Problem, welches sich von Gleichung zu Gleichung unterschiedlich darstellt. Die strukturellen Eigenschaften der Winkelvariablen

lassen sich aber analog zu den Wirkungsvariablen durch Poissonklammern ausdrücken. Mit einer beliebigen Funktion $v_{ij}(Q_1, \dots, Q_N)$ gilt

$$\{Q_i, P_j\}_\Theta = v_{ij}(Q_1, Q_2, \dots) .$$

Die wichtigsten Beispiele vollständig integrabler Gleichungen auf einer endlich dimensionalen Mannigfaltigkeit sind das Neumann System ([79],[77]), der geodätische Fluß auf dem Ellipsoid ([59],[105],[78]), die Calogero-Moser Systeme ([76],[19],[86]) und deren relativistische Analoga ([95],[92]).

Die vollständig integrablen gewöhnlichen Differentialgleichungen bilden in der vorliegenden Arbeit ein Modell für die uns interessierenden Soliton-Gleichungen, welche meist durch partielle Differentialgleichungen gegeben sind.

Im klassischen Fall sind die Wirkungsvariablen Q_i gemäß ihrer Definition globale Erhaltungsgrößen für den durch (0.3) bestimmten Fluß. Mit dem Noether-Theorem korrespondieren daher die Q_i zu Symmetriegruppen von (0.3). Mit dem Lie Algebra Homomorphismus $\Theta \circ \text{grad}$ findet man also N jeweils paarweise kommutierende Symmetrien $K_i = \Theta \circ \text{grad } Q_i$. Da die in (0.1) eingeführten Systeme über eine unendlich dimensionale abelsche Lie Algebra von Symmetrien verfügen, werden diese Evolutionsgleichungen auch häufig als unendlich dimensionale integrable Systeme bezeichnet, obwohl die Übertragung der Begriffe auf unendlich dimensionale Mannigfaltigkeiten nicht ganz problemlos ist.

Unabhängig von der Dimension der zugrunde liegenden Mannigfaltigkeit nennen wir einen Satz von Skalarfeldern $Q_i, P_i : M \rightarrow \mathbb{R}$ *nicht-kanonische* Wirkungs- und Winkelvariablen bezüglich eines implektischen Operators Θ , wenn die Poissonklammern $\{ \cdot, \cdot \}_\Theta$ zwischen Q_i und P_i für alle $i, j \in \mathbb{N}_0$ die folgende Form haben

$$\begin{aligned} \{Q_i, Q_j\}_\Theta &= 0 , \quad \{P_i, P_j\}_\Theta = w_{ij}(Q_0, Q_1, \dots, P_0, P_1, \dots) , \\ \{Q_i, P_j\}_\Theta &= v_{ij}(Q_0, Q_1, \dots) . \end{aligned} \quad (0.4)$$

Hierbei seien $v_{ij}(Q_0, Q_1, \dots)$ und $w_{ij}(Q_0, Q_1, \dots, P_0, P_1, \dots)$ beliebige Funktionen der Q_i und P_i . Die Wirkungsvariablen Q_i werden als globale Größen vorausgesetzt, während die P_i nur lokal definiert sein müssen. Falls die obigen Poissonklammern die einfache Form

$$\begin{aligned} \{Q_i, Q_j\}_\Theta &= 0 = \{P_i, P_j\}_\Theta , \\ \{Q_i, P_j\}_\Theta &= \delta_{ij} \end{aligned} \quad (0.5)$$

haben, heißen Q_i und P_i *kanonische* Wirkungs- und Winkelvariablen. Hierbei ist δ_{ij} das Kroneckersymbol. Die Eigenschaften der Wirkungs- und Winkelvariablen richten sich nach den Randbedingungen, die an die Ausgangsgleichung gestellt werden.

Für hamiltonische Soliton-Gleichungen auf einer unendlich dimensionalen Mannigfaltigkeit

$$u_t = K(u) = \Theta \operatorname{grad} H \quad (0.6)$$

stellt sich heraus, daß alle Symmetrien K_n hamiltonische Vektorfelder bzgl. des Operators Θ sind. Setzen wir die zugrunde liegende Mannigfaltigkeit M als einfach zusammenhängend voraus, so korrespondieren zu den K_n Erhaltungsgrößen Q_n mit $K_n = \Theta \operatorname{grad} Q_n$ und

$$\{Q_n, Q_m\}_\Theta = 0, \quad \forall n, m \in \mathbf{N}_0.$$

Die den K_n zugeordneten Erhaltungsgrößen entsprechen also den Wirkungsvariablen. Um die Analogie zu den endlich dimensionalen Systemen zu vervollständigen, fehlt der zweite Satz von Skalarfeldern P_i , nämlich die Winkelvariablen. Deren Auffinden ist einfach, wenn auch die Mastersymmetrien τ_n hamiltonische Vektorfelder bzgl. Θ sind. In diesem Fall folgen mit $\tau_n = \Theta \operatorname{grad} P_n$ aus den Relationen (0.2) durch Zurückziehen mit $\Theta \operatorname{grad}$ schon die Relationen:

$$\begin{aligned} \{Q_i, P_j\}_\Theta &= -(i + \varrho) Q_{i+j} + \text{const} , \\ \{P_i, P_j\}_\Theta &= (j - i) P_{i+j} + \text{const} . \end{aligned}$$

Hier bilden also die Skalarfelder Q_i und P_i einen Satz nicht-kanonischer Wirkungs- und Winkelvariablen auf M . Dementsprechend können in diesem Fall die Mastersymmetrien τ_n geometrisch als zu Winkelvariablen gehörige hamiltonische Vektorfelder interpretiert werden.

Leider tritt dieser einfache Fall eher selten auf, in vielen Beispielen von Soliton-Gleichungen sind die Mastersymmetrien nicht hamiltonisch. Somit kann in diesen Fällen die obige geometrische Interpretation der Mastersymmetrien nicht aufrecht erhalten werden. Auf Grund der Kommutatorrelationen (0.2) liegt allerdings auch in diesen Fällen die Vermutung nahe, daß es einen Zusammenhang zwischen Mastersymmetrien und Winkelvariablen gibt. Diese Beziehung zu finden ist das Ausgangsproblem der vorliegenden Arbeit, wobei wir uns auf Evolutionsgleichungen mit einer unabhängigen "Raum"-Variablen beschränken.

Die fundamentale Idee besteht darin, den gesuchten Zusammenhang nicht auf der gesamten Mannigfaltigkeit zu klären, sondern sich auf eine unter dem Fluß (0.6) invariante, endlich dimensionale Untermannigfaltigkeit zurückzuziehen. Solche Mannigfaltigkeiten sind zum Beispiel durch spezielle Lösungen, die sogenannten Multi-Soliton Lösungen, gegeben. Für $N \in \mathbf{N}$ wählen wir die Gesamtheit aller N -Soliton Lösungen von (0.6) als Untermannigfaltigkeit M_N . M_N ist dann $2N$ -dimensional, und die Ausgangsgleichung auf der gesamten Mannigfaltigkeit induziert auf M_N ein endlich dimensionales, vollständig integrables System. Für dieses System können wir die Wirkungs- und Win-

kelvariablen explizit konstruieren. Die dazugehörigen hamiltonischen Vektorfelder sind als Linearkombinationen der ursprünglichen Symmetrien K_n und Mastersymmetrien τ_n darstellbar. Damit haben wir auf der N -Soliton Mannigfaltigkeit M_N sowohl eine hamiltonische Kombination der Mastersymmetrien gefunden, als auch deren Zusammenhang mit den Winkelvariablen geklärt. Unsere Ausgangsfragestellung ist also beantwortet. Die mit diesem Endresultat verbundenen Teilergebnisse werden in der folgenden Kurzbeschreibung der einzelnen Kapitel geschildert.

In Kapitel 1 stellen wir die für die Arbeit notwendigen Definitionen und Begriffe zusammen. Insbesondere wird bereits in diesem Eingangskapitel unterschieden, ob alle Mastersymmetrien hamiltonisch bzgl. eines implektischen Operators sind oder nicht. Tritt die erste Alternative ein, so wird die Evolutionsgleichung dem "hamiltonischen Fall" zugerechnet; die zweite Möglichkeit nennen wir kurz den "nicht-hamiltonischen Fall". Im zweiten Fall existiert ein Operator Φ , der rekursiv die Symmetrien $K_n = \Phi^n K_0$ und Mastersymmetrien $\tau_n = \Phi^n \tau_0$ erzeugt. Die Eigenschaften dieses von Olver ([87]) eingeführten Operators werden in Kapitel 1 betrachtet. Wichtige Strukturgrößen von integrabilen Gleichungen lassen sich mit Hilfe von Lie Ableitungen charakterisieren. Dieser fundamentale Begriff wird ebenfalls in Kapitel 1 rekapituliert und seine Bedeutung für die uns interessierenden Gleichungen angegeben.

In Kapitel 2 werden die bekannten Rekursionseigenschaften der Soliton-Gleichungen dargelegt. Mit Hilfe der Mastersymmetrien lassen sich aus wenigen Startfeldern Hierarchien von Erhaltungsgrößen und von implektischen Operatoren erzeugen. Für diese Konstruktionen werden wesentlich die Eigenschaften der Lie Ableitung benötigt ([82],[101]). Die Beispiele am Schluß des zweiten Kapitels erläutern die in den ersten beiden Kapiteln eingeführten Begriffe. Somit sind die Kapitel 1 und 2 als einleitende Vorbetrachtungen anzusehen, die die in der Literatur wohlbekannten Ergebnisse übersichtsmäßig zusammenfassen.

Mit den Überblickskapiteln 3.1 und 3.2 beginnen wir das Kapitel 3, in dem ab Kapitel 3.3 die Resultate dieser Arbeit entwickelt werden.

In Kapitel 3.1 beschäftigen wir uns ausführlich mit den Multi-Soliton Lösungen der betrachteten Evolutionsgleichungen. Neben den physikalischen Eigenschaften dieser Lösungsklasse interessieren uns deren mathematische Charakterisierung. Der Zusammenhang von Multi-Soliton Lösungen zu der Inversen Streumethode wird dabei noch in Kapitel 3.1 dargestellt, während wir in Kapitel 3.2 eine gruppentheoretische Definition der Multi-Soliton Lösungen vorbereiten. Diese Definition liefert uns eine strukturell einfache mathematische Beschreibung der Untermannigfaltigkeit M_N aller N -Soliton Lösungen. Da wir Größen auf M_N mit den auf der gesamten Mannigfaltigkeit M exi-

stierenden Symmetrien und Mastersymmetrien vergleichen wollen, benötigen wir die explizite Einbettung von M_N in M . Diese Einbettung ist unabhängig von der geometrischen Interpretation der Mastersymmetrien und für sich eine interessante Fragestellung. Aus diesem Grund wird sie sowohl für den Fall hamiltonischer als auch nicht-hamiltonischer Mastersymmetrien beantwortet. Wir konstruieren daher in Kapitel 3.3 allgemein das Tangentialbündel von M_N . Es stellt sich heraus, daß alle Symmetrien K_n und alle Mastersymmetrien τ_n tangential an die Untermannigfaltigkeit M_N sind. Da M_N endlich dimensional ist, finden wir eine Basis \mathcal{B} des Tangentialraumes $T_s M_N$ von M_N an der Stelle $s \in M_N$, die aus

$$K_0(s), \dots, K_{N-1}(s), \tau_0(s), \dots, \tau_{N-1}(s)$$

besteht. Die Abhängigkeit der höheren Symmetrien und Mastersymmetrien auf M_N wird in der Basis \mathcal{B} angegeben. Um die Aussagen in Kapitel 3.3 zu zeigen, benötigen wir eine Voraussetzung über alle in dieser Arbeit betrachteten Beispiele. Die Gültigkeit dieser Voraussetzung wird dann in Kapitel 3.4 nachgewiesen. In Kapitel 3.5 fragen wir nach weiteren geometrischen Eigenschaften der Untermannigfaltigkeit M_N . Dabei stellt sich heraus, daß sich sämtliche Strukturen wie implektische und symplektische Operatoren und der Rekursionsoperator Φ der Ausgangsgleichung durch Einschränken auf die Untermannigfaltigkeit M_N reduzieren lassen. Für beliebige Untermannigfaltigkeiten ist diese Reduktionsmöglichkeit keineswegs selbstverständlich. Sie ergibt sich für die N -Soliton Mannigfaltigkeit aus der Kenntnis des Tangentialbündels.

In den Kapiteln 4 und 5 betrachten wir ausschließlich den Fall nicht-hamiltonischer Mastersymmetrien. Das Ziel von Kapitel 4 ist es, auf M_N hamiltonische Linearkombinationen der Mastersymmetrien zu erzeugen. Ein wesentliches Mittel dafür sind die spektralen Eigenschaften des Operators Φ . Für eine N -Soliton Lösung $s \in M_N$ bilden die zum diskreten Spektrum gehörigen Eigenvektoren von $\Phi(s)$ eine Basis des Tangentialraums $T_s M_N$. Die Eigenvektoren lassen sich also in der Basis \mathcal{B} darstellen. Mit Hilfe eines integrierenden Faktors finden wir so $2N$ hamiltonische Eigenvektoren von $\Phi(s)$, die gleichzeitig eine Linearkombination der Symmetrien bzw. der Mastersymmetrien sind. Diese Eigenvektoren lassen sich nach Konstruktion als zu Wirkungs- und Winkelvariablen gehörige Vektorfelder interpretieren. Damit ist auf der einen Seite das Ziel von Kapitel 4 gezeigt, auf der anderen Seite allerdings auch die Struktur des diskreten Spektrums von $\Phi(s)$ vollständig geklärt.

In Kapitel 5 behandeln wir die Ergebnisse aus Kapitel 4 unter einem anderen Gesichtspunkt. Da sich die Mannigfaltigkeit M_N durch die asymptotischen Daten der N -Soliton Lösungen parametrisieren läßt, erhalten wir eine einfache analytische Darstellung der Eigenvektoren von $\Phi(s)$ als partielle Ableitung der

N -Soliton Lösung s nach den asymptotischen Daten. Für 2-Soliton Lösungen ausgewählter Beispiele haben wir die entsprechenden Eigenvektoren in Kapitel 5.4 geplottet.

Kapitel 6 liefert die gesuchten Wirkungs- und Winkelvariablen auf M_N . Dabei wird in Kapitel 6.1 der Fall nicht-hamiltonischer Mastersymmetrien betrachtet. Neben den Ergebnissen der Kapitel 4 und 5 benötigen wir als entscheidenes Hilfsmittel, daß die Skalierungsmastersymmetrie τ_0 eine eindeutige hamiltonische Formulierung auf der gesamten Mannigfaltigkeit M besitzt. Der dazugehörige impliktische Operator und die entsprechende Hamiltonfunktion bestimmen die kanonischen Wirkungs- und Winkelvariablen. Dabei sind wir in der Lage diese speziellen Größen sowohl in den asymptotischen Daten als auch explizit in der Feldvariablen anzugeben. Die erste Darstellung stimmt mit den Ergebnissen der Inversen Streumethode überein, die Darstellung in der physikalischen Variablen ist dagegen neu².

Sind die Mastersymmetrien hamiltonisch, so sind auf der gesamten Mannigfaltigkeit bereits nicht-kanonische Wirkungs- und Winkelvariablen bekannt. Diese Skalarfelder lassen sich auf die Untermannigfaltigkeit M_N reduzieren, und mit ihrer Hilfe können wir in Kapitel 6.2 auch kanonische Wirkungs- und Winkelvariablen auf M_N konstruieren. Als Ergebnis erhalten wir vollständig analog zum nicht-hamiltonischen Fall wiederum zwei Darstellungen dieser Größen, deren mathematische Interpretation als Wirkungs- und Winkelvariablen bislang unbekannt waren.

Das Abschlußkapitel 7 gibt auf der einen Seite eine Übersicht über in der Literatur vergleichbare Ansätze und Ergebnisse. Auf der anderen Seite wird die Verallgemeinerung der vorgestellten Methoden und Resultate diskutiert.

Im Anhang A wird die gruppentheoretische Definition der Multi-Soliton Lösungen aus Kapitel 3.2 für den Fall hamiltonischer Mastersymmetrien bewiesen.

Anhang B erläutert die Existenz und Eindeutigkeit der hamiltonischen Formulierung der Skalierungsmastersymmetrie τ_0 .

In der gesamten Arbeit werden Kapitel, Unterkapitel, Sätze, Bemerkungen, Gleichungen und ähnliches laufend durchnumeriert. Ein Verweis auf (3.4) meint die mit der Nummer (3.4) versehende vierte Gleichung im Kapitel 3. Die Angabe Lemma (2.5) führt zum mit (2.5) gekennzeichneten fünften Lemma des Kapitels 2. Verwendet werden darüberhinaus eine Reihe feststehender Symbole, die am Ende der Arbeit in einer Tabelle zusammengefaßt sind.

Die Bilder in dieser Arbeit wurden mit dem von Dr. Walter Oevel entwickelten Graphik-Programm 3D_GRAPH geplottet. Dabei kamen sowohl die

²Die in dieser Arbeit hergeleiteten Resultate über den nicht-hamiltonischen Fall werden in [48] und [81] publiziert.

originale Pascal-Version als auch die von Dieter Gieske geschriebene C-Version zum Einsatz. Die für die Benjamin-Ono Gleichung benötigten Input-Files stellte mir freundlicherweise Thorsten Schulze ([100]) zur Verfügung.

Sowohl für die Anregung des Themas als auch für die stets aufmerksame Betreuung der vorliegenden Arbeit bedanke ich mich sehr herzlich bei Herrn Prof. Dr. B. Fuchssteiner.

1 Grundlegende Begriffe

Die in dieser Arbeit behandelten dynamischen Systeme lassen sich als Evolutionsgleichungen auf einer unendlich dimensionalen Mannigfaltigkeit M interpretieren. Dabei sei im folgenden $u = u(\vec{x}) \in M$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, die Feldvariable. $T_u M$ und $T_u^* M$ bezeichnen den Tangential- bzw. Kotangentialraum von M an der Stelle u ; TM und T^*M seien das Tangential- bzw. Kotangentialbündel (vgl. [2],[25],[71]). Die Elemente aus dem Tangentialraum nennen wir Vektoren, die aus dem Kotangentialraum entsprechend Kovektoren. Die Klammer $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichne die Anwendung eines Kovektors auf einen Vektor.

Als generelle Voraussetzung nehmen wir in dieser Arbeit an, daß die Mannigfaltigkeit M ein linearer topologischer Raum sei, den wir mit seiner typischen Faser $T_u M$ identifizieren können, d.h. für alle $u \in M$ gilt

$$T_u M = M.$$

Alle Tensorfelder A auf M werden als beliebig oft differenzierbar bezüglich der **Hadamard Ableitung** vorausgesetzt. Die Hadamard Ableitung wird durch die **Richtungsableitung** von A in Richtung eines Vektors $X \in T_u M$

$$A'(u)[X] = \frac{\partial}{\partial \varepsilon}_{|_{\varepsilon=0}} A(u + \varepsilon X(u)) \quad (1.1)$$

gegeben. Neben der Gültigkeit der Kettenregel sichert dieser Differenzierbarkeitsbegriff, daß die Ableitung $A'(u)$ eine lineare Abbildung ist ([107],[108]). Wir betrachten in dieser Arbeit Tensorfelder A aus den folgenden Räumen:

Definition (1.1):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(M) &:= \{f : M \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ glatt}\}, \\ X(M) &:= \{K : M \rightarrow TM \mid K(u) \in T_u M; K \text{ glatt}\}, \\ X^*(M) &:= \{\gamma : M \rightarrow T^*M \mid \gamma(u) \in T_u^* M; \gamma \text{ glatt}\}, \\ T^{(2,0)}(M) &:= \{J : M \rightarrow L(T_{(\cdot)} M, T_{(\cdot)}^* M) \mid J(u) : T_u M \rightarrow T_u^* M; J \text{ glatt}\}, \\ T^{(0,2)}(M) &:= \{\Theta : M \rightarrow L(T_{(\cdot)}^* M, T_{(\cdot)} M) \mid \Theta(u) : T_u^* M \rightarrow T_u M; \Theta \text{ glatt}\}, \\ T^{(1,1)}(M) &:= \{\Phi : M \rightarrow L(T_{(\cdot)} M, T_{(\cdot)} M) \mid \Phi(u) : T_u M \rightarrow T_u M; \Phi \text{ glatt}\}, \\ T^{*(1,1)}(M) &:= \{\Psi : M \rightarrow L(T_{(\cdot)}^* M, T_{(\cdot)}^* M) \mid \Psi(u) : T_u^* M \rightarrow T_u^* M; \Psi \text{ glatt}\}. \end{aligned}$$

Hierbei sei $L(\cdot, \cdot)$ der Raum der linearen Abbildungen zwischen den Fasern der entsprechenden Bündel. Mit "A glatt" sei stets gemeint, daß das Feld A eine C^∞ -Abbildung ist.

Jedem Skalarfeld $f \in \mathcal{F}(M)$ wird durch die Richtungsableitung (1.1) das Kovektorfeld $\text{grad } f \in X^*(M)$, der **Gradient** von f , zugeordnet. Dieser Gradient ist gegeben durch

$$\langle \text{grad } f(u), X \rangle := f'(u)[X] \quad \forall X \in T_u M . \quad (1.2)$$

Für alle Beispiele dieser Arbeit ist die zugrunde liegende Mannigfaltigkeit M im wesentlichen der Schwartz-Raum $S(\mathbb{R})$ der schnell fallenden C^∞ -Funktionen $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Die oben gemachte Voraussetzung an M ist daher lediglich technischer Art und bedeutet keine Einschränkung für die Anwendbarkeit der zu entwickelnden Begriffe.

Auf einer so bestimmten Mannigfaltigkeit M betrachten wir die Evolutionsgleichung

$$u_t = K(u) . \quad (1.3)$$

Subskripte stehen für die partiellen Ableitungen nach den jeweiligen Variablen. Das **Vektorfeld** $K \in X(M)$ sei nicht explizit zeitabhängig und wir nehmen an, daß das Anfangswertproblem von (1.3) sehr gut gestellt sei. Mit dem **Kommutator**

$$[G_1, G_2] := G'_2[G_1] - G'_1[G_2] \quad (1.4)$$

zwischen zwei Vektorfeldern $G_1, G_2 \in X(M)$ als Lie Klammer wird $X(M)$ zu einer Lie Algebra. Von besonderer Bedeutung für das gegebene Vektorfeld K in (1.3) sind Vektorfelder G , die mit K vertauschen, d.h. für die $[K, G] = 0$ gilt. Unter geeigneten Voraussetzungen an die Lösbarkeit des Anfangswertproblems für

$$u_\tau = G(u)$$

ist nämlich $[K, G] = 0$ die infinitesimale Version für die Vertauschbarkeit der von G und K erzeugten Resolventengruppen R_G und R_K . In diesem Fall wird die von G erzeugte einparametrische Resolventengruppe R_G auch Symmetriegruppe zu R_K genannt. G heißt dann der (infinitesimale) Symmetriegruppengenerator von R_G . Wie üblich schließen wir uns der Terminologie an, nach der Symmetriegruppengeneratoren kurz **Symmetrien** genannt werden. Mit Hilfe von Symmetriegruppen kann man aus einer gegebenen Lösung der Gleichung (1.3) neue Lösungen derselben Gleichung konstruieren. Darüberhinaus dienen vorhandene Symmetriegruppen sowohl zum Klassifizieren von Evolutionsgleichungen als auch zu deren struktureller Untersuchung.

Uns interessieren die speziellen dynamischen Systeme (1.3), die eine Hierarchie $K_0, K_1, K_2, K_3, \dots \in X(M)$ untereinander kommutierender Symmetrien besitzen, d.h. für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt

$$[K, K_n] = 0 \quad \text{und} \quad [K_m, K_n] = 0 .$$

Als Generator der Zeittranslation kann das Vektorfeld K mit in die Hierarchie der Symmetrien K_n eingereiht werden; in der Regel werden wir $K = K_1$ setzen. Evolutionsgleichungen dieser Art wollen wir **vollständig integrale Systeme** (von unendlicher Dimension) nennen. Diese Definition ist angelehnt an den Begriff der vollständigen Integrabilität auf einer endlich dimensionalen Mannigfaltigkeit (vgl. Einleitung). Es ist anzumerken, daß diese Definition als "Arbeitsdefinition" weit verbreitet ist. Wie wir aber noch sehen werden, besitzen die genannten Evolutionsgleichungen eine Fülle von weiteren außerordentlichen Merkmalen. Welche Eigenschaft letztlich die grundlegende ist, ist in der Forschung noch umstritten. Aus diesem Grund gibt es noch keine endgültige, allgemein anerkannte Definition von vollständig integrierten Gleichungen auf unendlich dimensionalen Mannigfaltigkeiten.

Als empirische Tatsache stellen wir fest, daß man für alle Beispiele vollständig integrierbarer Systeme (unendlicher Dimension) neben der Hierarchie der Symmetrien eine weitere Hierarchie von Vektorfeldern $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots$ konstruieren kann. Diese sogenannten **Mastersymmetrien** ([40],[23],[82],[90],[48]) lassen sich stets so normieren, daß sie für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$ die folgenden Kommutatorrelationen erfüllen

$$[\tau_n, K_m] = (m + \varrho) K_{n+m} , \quad [\tau_n, \tau_m] = (m - n) \tau_{n+m} . \quad (1.5)$$

Hierbei ist $\varrho \geq 0$ eine reelle Zahl. Die Struktur der Mastersymmetrien ist wohl untersucht, einige wichtige Eigenschaften werden wir später erwähnen.

Es stellt sich weiterhin heraus, daß sich grundlegende Begriffe dieser Arbeit durch **Lie Ableitungen** charakterisieren lassen. Generell wird die Lie Ableitung $L_G A$ eines Feldes A in Richtung eines Vektorfeldes $G \in X(M)$ mit Hilfe der Ableitung (1.1) definiert ([2],[101]). Dabei ist zu bemerken, daß die Richtungsableitung (1.1) von der gewählten Karte auf M abhängt, während Lie Ableitungen invariant unter Kartenwechseln sind ([88]).

Definition (1.2): Es sei $G \in X(M)$ und E einer der Räume aus Definition (1.1). Als Lie Ableitung $L_G : E \rightarrow E$ erhalten wir

- (a) für $f \in \mathcal{F}(M) : \quad L_G f = f'[G] = < \text{grad} f, G >$
- (b) für $K \in X(M) : \quad L_G K = [G, K]$
- (c) für $\gamma \in X^*(M) : \quad \begin{aligned} L_G \gamma &= \gamma'[G] + G^* \gamma \\ &\equiv \text{grad} < \gamma, G > + (\gamma' - \gamma^*) G , \end{aligned}$
- (d) für $J \in T^{(2,0)}(M) : \quad L_G J = J'[G] + G^* J + J G'$,
- (e) für $\Theta \in T^{(0,2)}(M) : \quad L_G \Theta = \Theta'[G] - \Theta G^* - G' \Theta$,
- (f) für $\Phi \in T^{(1,1)}(M) : \quad L_G \Phi = \Phi'[G] + \Phi G' - G' \Phi$,
- (g) für $\Psi \in T^{*(1,1)}(M) : \quad L_G \Psi = \Psi'[G] - \Psi G^* + G^* \Psi$.

Hierbei bedeutet $*$ die Transposition bzgl. der Dualitätsklammer $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Für ein gegebenes Vektorfeld G sind die unter G invarianten Felder A , d.h. Felder, für die $L_G A = 0$ gilt, von besonderer Bedeutung. Wie schon erwähnt, nennt man die unter G invarianten Vektorfelder Symmetrien (zu G). Für die in Definition (1.1) und (1.2) eingeführten Größen haben sich die folgenden Bezeichnungen eingebürgert. Ein unter G invarianter Tensorfeld heißt

- (a) für $f \in \mathcal{F}(M)$: Erhaltungsgröße zu G ,
- (b) für $K \in X(M)$: Symmetrie zu G ,
- (c) für $\gamma \in X^*(M)$: konservierte Kovariante zu G ,
- (d) für $J \in T^{(2,0)}(M)$: inverser Noetheroperator zu G ,
- (e) für $\Theta \in T^{(0,2)}(M)$: Noetheroperator zu G ,
- (f) für $\Phi \in T^{(1,1)}(M)$: Rekursionsoperator zu G ,
- (g) für $\Psi \in T^{*(1,1)}(M)$: adjungierter Rekursionsoperator zu G .

Diese Namensgebung wollen wir an zwei Beispielen kurz erläutern:

Ist f ein unter G invarianter, nicht explizit zeitabhängiges Skalarfeld, so besagt

$$0 = L_G f = f'(u) [G(u)] = \frac{d}{dt} f(u)$$

für das von $G(u)$ erzeugte dynamische System $u_t = G(u)$ gerade, daß f auf den Lösungsbahnen von $u_t = G(u)$ konstant, also erhalten bleibt. Ein unter G invarianter Operator $\Phi \in T^{(1,1)}(M)$ erzeugt durch rekursives Anwenden von Φ auf G eine Folge von Symmetrien zu G ([87]), die allerdings nicht untereinander kommutieren müssen.

Als weitere Einschränkung an die Ausgangsgleichung (1.3) wollen wir nun noch annehmen, daß das Vektorfeld K hamiltonisch (bzgl. Θ) ist, d.h. es gibt einen implektischen Operator³ (*Poisson Operator*) ([39],[52])

$$\Theta : M \rightarrow L(T_{(\cdot)}^* M, T_{(\cdot)} M)$$

und ein Skalarfeld $f \in \mathcal{F}(M)$, so daß für jedes $u \in M$

$$K(u) = \Theta(u) \operatorname{grad} f(u)$$

gilt. Dabei ist der Operator Θ folgendermaßen definiert:

Definition (1.3): Ein antisymmetrisches $\Theta : M \rightarrow L(T_{(\cdot)}^* M, T_{(\cdot)} M)$ heißt implektisch, wenn die Klammer

$$\| \gamma_1, \gamma_2 \|_\Theta := \operatorname{grad} \langle \gamma_2, \Theta \gamma_1 \rangle - (\gamma'_1 - \gamma'^*_1) \Theta \gamma_2 + (\gamma'_2 - \gamma'^*_2) \Theta \gamma_1 \quad (1.6)$$

³Natürlich ist nur $\Theta(u)$ eine lineare Abbildung. Als Kurzform werden wir die nicht ganz korrekte Sprechweise auch weiterhin benutzen.

für alle $\gamma_1, \gamma_2 \in X^*(M)$ eine Lie Klammer (*Poisson Klammer*) auf dem Raum der Kovektorfelder $X^*(M)$ ist.

Darüberhinaus induziert Θ auch auf $\mathcal{F}(M)$ eine Lie Klammer (*Poisson Klammer*)

$$\{f_1, f_2\}_\Theta := \langle \text{grad } f_2, \Theta \text{ grad } f_1 \rangle, \quad f_1, f_2 \in \mathcal{F}(M). \quad (1.7)$$

Bemerkung (1.1): Mit der Definition (1.2) der Lie Ableitung eines Skalarfeldes $g \in \mathcal{F}(M)$ ist g genau dann eine Erhaltungsgröße für $K(u) = \Theta(u) \text{ grad } f(u)$, falls $\{f, g\}_\Theta = 0$ gilt.

Die Abbildung $\Theta \circ \text{grad} : \mathcal{F}(M) \rightarrow X(M)$ bildet einen Lie Algebra Homomorphismus, d.h. für alle $f_1, f_2 \in \mathcal{F}(M)$ gilt

$$\Theta \text{ grad } \{f_1, f_2\}_\Theta = [\Theta \text{ grad } f_1, \Theta \text{ grad } f_2]. \quad (1.8)$$

Damit erhält man

Bemerkung (1.2) [Noether's Theorem]: Durch die Abbildung $\Theta \circ \text{grad}$ lässt sich jeder Erhaltungsgröße zu $K(u) = \Theta(u) \text{ grad } f(u)$ eine Symmetrie zuordnen. Umgekehrt existiert zu jeder hamiltonischen Symmetrie für K eine zugehörige Erhaltungsgröße, da wir die Mannigfaltigkeit als sternförmig vorausgesetzt haben.

Mit Hilfe der Lie Ableitung $L_G \Theta$ eines Operators $\Theta \in T^{(0,2)}(M)$ in Richtung eines Vektorfeldes $G \in X(M)$ erhält man die Charakterisierung:

Bemerkung (1.3): Ein antisymmetrisches $\Theta : M \rightarrow L(T_{(\cdot)}^* M, T_{(\cdot)} M)$ ist implektisch genau dann, wenn für jedes Kovektorfeld $\gamma \in X^*(M)$ gilt

$$L_{\Theta \gamma} \Theta = -\Theta(\gamma' - \gamma'') \Theta. \quad (1.9)$$

Äquivalent dazu ist, daß die in (1.6) definierte Klammer $[\gamma_1, \gamma_2]_\Theta$ für alle $\gamma_1, \gamma_2 \in X^*(M)$ die Jacobi-Identität erfüllt.

Für ein hamiltonisches Vektorfeld $G = \Theta \text{ grad } f$ besagt (1.9) offensichtlich, daß das Vektorfeld G die implektische Struktur Θ invariant lässt, d.h. Θ ist ein Noetheroperator zu G . Ist Θ invertierbar, so gilt auch die Umkehrung, d.h. wir erhalten:

Bemerkung (1.4): Ein Vektorfeld $G \in X(M)$ ist hamiltonisch bzgl. Θ genau dann, wenn $L_G \Theta = 0$ ist.

Diese Äquivalenz werden wir neben den strukturellen Eigenschaften (1.6)-(1.8) eines implektischen Operators oft benutzen.

Der Begriff implektisch ist eine Kurzform für "invers-symplektisch", verweist also auf symplektische Operatoren und damit auf die symplektische Geometrie. In deren klassischer Notation ([2],[9]) wird eine Mannigfaltigkeit M zusammen mit einer 2-Form ω symplektisch genannt, wenn ω eine nichtdegenerierte, geschlossene 2-Form ist. Für $u \in M$ lässt sich $\omega(u)$ darstellen durch

$$\omega(u)(X_1, X_2) = \langle J(u)X_1, X_2 \rangle \quad \forall X_1, X_2 \in T_u M ,$$

wobei $J(u) : T_u M \rightarrow T_u^* M$ ein linearer Operator ist. Statt mit Differentialformen auf symplektischen Mannigfaltigkeiten zu arbeiten, kann man die Eigenschaften von ω auf $J(u)$ übertragen. Lässt man die Nichtdegeneriertheit 2-Form ω :

Definition (1.4): Ein antisymmetrisches $J \in T^{(2,0)}(M)$ heißt symplektisch, wenn die Klammer

$$[X_1, X_2, X_3] := \langle J'(u)[X_1]X_2, X_3 \rangle$$

für alle $u \in M$ und $X_1, X_2, X_3 \in T_u M$ die Jacobi-Identität erfüllt.

Analog der Vorgehensweise bei implektischen Operatoren erhält man mit Hilfe der Lie Ableitung $L_G J$ eines Operators⁴ $J \in T^{(2,0)}(M)$ in Richtung des Vektorfeldes $G \in X(M)$:

Bemerkung (1.5): Ein antisymmetrisches $J \in T^{(2,0)}(M)$ ist symplektisch genau dann, wenn für alle Vektorfelder $G \in X(M)$ gilt

$$L_G J = (JG)' - (JG)^* . \quad (1.10)$$

Für ein invers-hamiltonisches Vektorfeld G (bzgl. J), d.h. es existiert ein $f \in \mathcal{F}(M)$ mit $JG = \text{grad}f$, gilt dann

⁴Es gelte die gleiche Kurschreibweise wie für implektische Operatoren Θ .

Bemerkung (1.6): Ein Vektorfeld G ist invers-hamiltonisch bzgl. eines symplektischen $J \in T^{(2,0)}(M)$ genau dann, wenn J invariant unter G ist, d.h. wenn $L_G J = 0$ gilt.

Mit Hilfe des Lemmas von Poincaré ([30],[88]) erhält man aus (1.10):

Bemerkung (1.7): Die Lie Ableitung eines symplektischen Operators in Richtung eines beliebigen Vektorfeldes liefert stets einen symplektischen Operator.

Nach diesem kurzen Abriß über symplektische und implektische Operatoren erklärt sich der Name invers-symplektisch in natürlicher Weise:
Ist der symplektische Operator $J(u)$ invertierbar, so ist J^{-1} implektisch. Ist der implektische Operator $\Theta(u)$ invertierbar, so ist Θ^{-1} symplektisch.

Die generelle Voraussetzung für die vorliegende Arbeit lässt sich nun folgendermaßen formulieren:

Auf einer Mannigfaltigkeit M sei die Evolutionsgleichung

$$u_t = K_1(u) \quad (1.11)$$

gegeben, wobei K_1 ein invers-hamiltonisches Vektorfeld bzgl. des symplektischen Operators J sei. Zu dem Vektorfeld K_1 existiere eine Hierarchie von Symmetrien K_n , $n \in \mathbf{N}_0$, und eine Hierarchie von Mastersymmetrien τ_n , $n \in \mathbf{N}_0$. Diese Vektorfelder erfüllen für alle $n, m \in \mathbf{N}_0$ die folgenden Kommutatorrelationen

$$\begin{aligned} [K_n, K_m] &= 0 \quad , \quad [\tau_n, K_m] = (m + \varrho) K_{n+m} \quad , \\ [\tau_n, \tau_m] &= (m - n) \tau_{n+m} \quad , \end{aligned} \quad (1.12)$$

wobei $\varrho \in \mathbf{R}^+$ eine geeignete Konstante ist.

Zur expliziten Konstruktion der Hierarchien K_n und τ_n , d.h. zum Nachweis ihrer Existenz, gibt es mehrere Verfahren. Zwei dieser Verfahren wollen wir hier vorstellen. Als Startpunkt für das erste Verfahren müssen die Vektorfelder K_0, τ_0, τ_1 und τ_2 gegeben sein und die geforderten Kommutatorrelationen (1.12) erfüllen. Wir definieren

$$\begin{aligned} \tau_{n+1} &:= \frac{1}{n-1} [\tau_1, \tau_n] \quad \text{für} \quad n \geq 2 \quad , \\ K_{n+1} &:= \frac{1}{n+\varrho} [\tau_1, K_n] \quad \text{für} \quad n \in \mathbf{N}_0 \quad . \end{aligned}$$

Gilt dann zusätzlich

$$[\tau_2, \tau_3] = \tau_5, \quad [\tau_2, \tau_5] = 3\tau_7, \\ [\tau_2, K_1] = (1+\varrho) K_3, \quad [\tau_2, K_2] = (2+\varrho) K_4,$$

so folgt mit der Jacobi-Identität für den Kommutator $[\cdot, \cdot]$, daß die Relationen (1.12) erfüllt sind ([82]). Die Hierarchien K_n und τ_n werden also im wesentlichen durch die Mastersymmetrie τ_1 erzeugt. Dieser Rekursionsmechanismus funktioniert bei allen bekannten Beispielen.

Im zweiten Verfahren ergeben sich die beiden Hierarchien durch rekursives Anwenden eines Operators⁵ $\Phi \in T^{(1,1)}(M)$ auf die Startfelder K_0 und τ_0 , d.h. für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$ definieren wir

$$K_n(u) := \Phi^n(u) K_0(u), \quad \tau_n(u) := \Phi^n(u) \tau_0(u).$$

Folgende Bedingungen ([82]) sind in diesem Fall hinreichend für die Gültigkeit der Relationen (1.12):

- (i) Der Operator Φ ist ein Rekursionsoperator zu K_0 , d.h. $L_{K_0} \Phi = 0$.
- (ii) Es gelten die Skalierungseigenschaften:

$$L_{\tau_0} K_0 = [\tau_0, K_0] = \varrho K_0, \quad (1.13)$$

$$L_{\tau_0} \Phi = \Phi'[\tau_0] - \tau'_0 \Phi + \Phi \tau'_0 = \Phi. \quad (1.14)$$

- (iii) Der Operator $\Phi(u)$ ist hereditär ([38],[70]), d.h. für alle $G_1, G_2 \in X(M)$ gilt

$$\Phi^2 [G_1, G_2] + [\Phi G_1, \Phi G_2] = \Phi [\Phi G_1, G_2] + \Phi [G_1, \Phi G_2].$$

Die Heredität von Φ kann auch mit Hilfe der Lie Ableitung ausgedrückt werden. Dann muß für alle Vektorfelder $G \in X(M)$

$$L_{\Phi G} \Phi = \Phi L_G \Phi \quad (1.15)$$

erfüllt sein.

Wie schon erwähnt, garantiert (i), daß die Vektorfelder K_n mit K_0 vertauschen. Die Heredität von Φ in (iii) stellt sicher, daß alle K_n untereinander kommutieren, während (ii) die Normierung der Vektorfelder K_n und τ_n festlegt.

⁵Es gelte die analoge Sprechweise wie für implektische und symplektische Operatoren.

In dieser Formulierung ist das zweite Verfahren anwendbar auf fast alle Gleichungen in einer Raumdimension, ausgenommen sind lediglich die Benjamin-Ono Gleichung (BO) und die Intermediate Long Wave Gleichung (ILW). Für alle Gleichungen in mehr als einer Raumdimension wie z.B. die Kadomtsev-Petviashvili Gleichung (KP) oder die Davey-Stewartson Gleichung (DS) kann es keinen Operator mit den obigen Eigenschaften geben ([62]). Erweitert man aber die zugrunde liegende (physikalische) Mannigfaltigkeit um künstliche Variablen, so lassen sich alle Begriffe auf die erweiterte Mannigfaltigkeit übertragen. In diesem Sinne war es Fokas und Santini ([33],[97],[98]) möglich, einen hereditären Rekursionsoperator für die genannten Gleichungen zu konstruieren. Die Symmetrien, Mastersymmetrien und den symplektischen Operator auf der ursprünglichen Mannigfaltigkeit findet man dann durch Reduktion der analogen erweiterten Größen wieder, der Rekursionsoperator ist allerdings nicht reduzierbar. Erweiterte Felder wollen wir in dieser Arbeit nicht betrachten, uns interessieren hier die hereditären Operatoren $\Phi : M \rightarrow L(T_{(\cdot)} M, T_{(\cdot)} M)$. Die Existenz solcher Operatoren lässt sich im Zusammenhang mit der symplektischen Struktur J und den Mastersymmetrien τ_n interpretieren. Dabei sind die beiden folgenden Fälle zu unterscheiden :

1. Fall : Der nicht-hamiltonische Fall

In diesem Fall sind nicht alle Mastersymmetrien invers-hamiltonisch bzgl. J , d.h. es gibt ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $L_{\tau_n} J \neq 0$. In der Regel gilt schon $L_{\tau_1} J \neq 0$ oder $L_{\tau_2} J \neq 0$. Darüberhinaus liefert die Lie Ableitung von J in Richtung der Mastersymmetrie τ_1 bzw. τ_2 in allen bekannten Beispielen einen neuen, nicht-trivialen implektischen Operator Θ_1 , der zusätzlich mit J kompatibel ist (was bisher allerdings nur eine empirische Tatsache ist). Speziell für $L_{\tau_1} J$ gilt dabei folgende Faktorisierung ([82])

$$L_{\tau_1} J = \alpha J \Theta_1 J \quad \text{mit } \alpha \in \mathbb{R} .$$

Als Konsequenz der Kompatibilität von J und Θ_1 ergibt sich, daß der Operator

$$\Phi : M \rightarrow L(T_{(\cdot)} M, T_{(\cdot)} M) , \quad \Phi := \Theta_1 J$$

automatisch hereditär ist ([47],[53],[69]). Wir normieren in diesem Fall

$$L_{\tau_0} \Phi = \Phi , \quad L_{\tau_0} J = \lambda J , \quad \lambda \in \mathbb{R} . \quad (1.16)$$

2. Fall: Der hamiltonische Fall

Alle Mastersymmetrien sind invers-hamiltonisch bzgl. J , d.h. für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $L_{\tau_n} J = 0$. Mit Hilfe der Jacobi-Identität folgt die Aussage schon, wenn

$$0 = L_{\tau_0} J = L_{\tau_1} J = L_{\tau_2} J$$

gezeigt ist. Es stellt sich weiterhin heraus, daß bei allen bekannten Beispielen im hamiltonischen Fall der Operator J invertierbar ist. Als zusätzliche Voraussetzung fordern wir daher hier die Invertierbarkeit von J , d.h. das Vektorfeld K und alle Mastersymmetrien τ_n sind hamiltonisch bzgl. $\Theta_0 := J^{-1}$. Um später eine symmetrische Darstellung aller Ergebnisse zu erhalten, wollen wir im hamiltonischen Fall eine andere Normierung der Symmetrien K_n wählen. Ersetzt man in (1.12) K_n durch $(\varrho + n)^{-1}K_n$, so ergeben sich die folgenden Relationen

$$[K_n, K_m] = 0 \quad , \quad [\tau_n, K_m] = (m + n + \varrho) K_{n+m} \quad ,$$

$$[\tau_n, \tau_m] = (m - n) \tau_{n+m} \quad , \quad (1.17)$$

Mit dieser Normierung werden wir im hamiltonischen Fall arbeiten.

2 Rekursionseigenschaften integrabler Systeme

Nachdem wir im vorherigen Kapitel die Notation bereitgestellt haben, wollen wir nun die grundlegenden Eigenschaften integrabler Systeme angeben. Die wesentlichen Ergebnisse findet man beispielsweise in [82] oder auch in [101]. Da die Darstellungen aber unterschiedlich sind, werden die hier benötigten Relationen explizit bewiesen.

2.1 Der nicht-hamiltonische Fall

Wie in Kapitel 1 festgelegt, betrachten wir die invers-hamiltonische Evolutionsgleichung

$$u_t = K_1(u) \quad (2.1)$$

mit $J(u) K_1(u) = \text{grad } f(u)$, wobei $f \in \mathcal{F}(M)$ ist. Es sei $\Phi := \Theta_1 J$, der hereditäre Rekursionsoperator (zu K_0), der die Vektorfelder $K_n := \Phi^n K_0$ und $\tau_n := \Phi^n \tau_0$ mit den geforderten Kommutatorrelationen (1.12) erzeugt.

Lemma (2.1): Für alle $n, m, r, l \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(i) \quad \Phi^* = J \Theta_1, \quad J \Phi^n = (\Phi^*)^n J, \quad (2.2)$$

$$(ii) \quad \langle JK_n, \tau_m \rangle = \langle JK_r, \tau_l \rangle \quad \text{für } n+m = r+l, \quad (2.3)$$

$$(iii) \quad \langle JK_n, K_m \rangle = 0 = \langle J\tau_n, \tau_m \rangle, \quad (2.4)$$

$$(iv) \quad L_{\tau_n} \Phi = \Phi^{n+1}. \quad (2.5)$$

Beweis: (i): Die Antisymmetrie implektischer und symplektischer Operatoren liefert

$$\Phi^* = (\Theta_1 J)^* = J^* \Theta_1^* = J \Theta_1.$$

Damit folgt die Behauptung per Induktion.

(ii): Wegen (i) folgt für alle $n, m, r, l \in \mathbb{N}_0$ mit $n+m = r+l$

$$\begin{aligned} \langle JK_n, \tau_m \rangle &= \langle J\Phi^n K_0, \tau_m \rangle = \langle (\Phi^*)^n JK_0, \tau_m \rangle = \\ &= \langle JK_0, \Phi^n \tau_m \rangle = \langle JK_0, \Phi^{n+m} \tau_0 \rangle = \\ &= \langle JK_0, \Phi^{r+l} \tau_0 \rangle = \langle JK_0, \Phi^r \tau_l \rangle = \\ &= \langle (\Phi^*)^r JK_0, \tau_l \rangle = \langle J\Phi^r K_0, \tau_l \rangle = \\ &= \langle JK_r, \tau_l \rangle \end{aligned}$$

(iii): Wegen der Antisymmetrie von J gilt offensichtlich für alle $p \in \mathbb{N}_0$

$$\langle JK_p, K_p \rangle = 0 = \langle J\tau_p, \tau_p \rangle.$$

Mit (i) und der Definition von K_n bzw. τ_n folgt daher

$$0 = \langle JK_p, K_p \rangle = \langle JK_p, \Phi^p K_0 \rangle = \langle (\Phi^p)^* JK_p, K_0 \rangle = \langle (J\Phi^p) K_p, K_0 \rangle = \langle JK_{2p}, K_0 \rangle$$

und analog $\langle J\tau_{2p}, \tau_0 \rangle = 0$. Auf der anderen Seite gilt mit der gleichen Argumentation und der Antisymmetrie von J

$$\begin{aligned} \langle JK_{2p+1}, K_0 \rangle &= \langle JK_{p+1}, K_p \rangle = \langle J\Phi K_p, K_p \rangle = \\ &= \langle JK_p, K_{p+1} \rangle = -\langle JK_{p+1}, K_p \rangle = \\ &= -\langle JK_{2p+1}, K_0 \rangle, \end{aligned}$$

also $\langle JK_{2p+1}, K_0 \rangle = 0$ und analog $\langle J\tau_{2p+1}, \tau_0 \rangle = 0$. Insbesondere folgt also für alle $r \in \mathbb{N}_0$

$$\langle JK_r, K_0 \rangle = 0 = \langle J\tau_r, \tau_0 \rangle.$$

Mit Hilfe von (i) ergibt sich analog zu (ii) daraus die Behauptung (iii).

(iv): Aus der Definition von τ_n , der Heredität (vgl. (1.15)) von Φ und der Normierung (1.16) erhält man für jedes $n \in \mathbb{N}_0$

$$L_{\tau_n} \Phi = L_{\Phi^n \tau_0} \Phi = \Phi^n L_{\tau_0} \Phi = \Phi^{n+1}.$$

□

Folgerung (2.1):

(i) Ist K_n invers-hamiltonisch bzgl. J für ein $n \in \mathbb{N}_0$, so ist K_{n+1} hamiltonisch bzgl. Θ_1 .

(ii) Ist K_0 invers-hamiltonisch bzgl. J , so sind alle Vektorfelder K_n invers-hamiltonisch bzgl. J , d.h. für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $L_{K_n} J = 0$.

Beweis: (i): Falls $JK_n = \text{grad } g$, so gilt mit der Definition von Φ :

$$K_{n+1} = \Phi K_n = \Theta_1 J K_n = \Theta_1 \text{grad } g,$$

d.h. K_{n+1} ist hamiltonisch bzgl. Θ_1 .

(ii): Nach Voraussetzung ist $L_{K_0} J = 0$. Dann folgt die Behauptung mit vollständiger Induktion, da

$$\begin{aligned} L_{K_{n+1}} J &= \frac{1}{(n+1)} L_{[\tau_1, K_n]} J = \\ &= \frac{1}{(n+1)} (L_{\tau_1} L_{K_n} J - L_{K_n} L_{\tau_1} J) = 0. \end{aligned}$$

Das letzte Gleichheitszeichen folgt aus (i), der Produktregel für Lie Ableitungen und der Tatsache, daß laut Voraussetzung $L_{\tau_1} J = \alpha J \Theta_1 J$ gilt. Insbesondere gilt damit gemäß (i) auch $L_{K_n} \Theta_1 = 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. \square

Mit Hilfe der Vektorfelder K_n und τ_n lassen sich auf folgende Weise Skalarfelder H_n auf M definieren:

Definition (2.1): Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ sei

$$H_n := \langle J K_n, \tau_0 \rangle . \quad (2.6)$$

Die Eigenschaften der H_n werden im folgenden Lemma beschrieben:

Lemma (2.2): Ist K_0 invers-hamiltonisch bzgl. J , so gilt für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$:

$$(i) \quad H_{n+m} = \langle J K_n, \tau_m \rangle , \quad (2.7)$$

$$(ii) \quad (n + \varrho + \lambda) J K_n = \text{grad } H_n , \quad (2.8)$$

$$(iii) \quad (L_{\tau_m} J) K_n = (\lambda + m) J K_{n+m} , \quad (2.9)$$

$$(iv) \quad L_{K_n} H_n = 0 . \quad (2.10)$$

Beweis: (i): Die Relation (2.7) folgt aus der Definition von H_{n+m} gemäß (2.6) und der Eigenschaft (2.3).

(ii): Für den Beweis von (2.8) benötigen wir die Lie Ableitung eines Kovektorfelds γ in Richtung eines Vektorfelds G , die durch

$$L_G \gamma = \gamma' [G] + G'^* \gamma \equiv \text{grad } \langle \gamma, G \rangle + (\gamma' - \gamma'^*) G$$

gegeben ist (vgl. Definition (1.2)). Da J symplektisch ist (vgl. (1.10)), folgt für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} L_{K_n} (J \tau_m) &= \text{grad } \langle J \tau_m, K_n \rangle + ((J \tau_m)' - (J \tau_m)^{*}) K_n = \\ &= - \text{grad } \langle J K_n, \tau_m \rangle + (L_{\tau_m} J) K_n = \\ &= - \text{grad } H_{m+n} + (L_{\tau_m} J) K_n . \end{aligned} \quad (2.11)$$

Auf der anderen Seite gilt mit Hilfe der Produktregel für Lie Ableitungen

$$\begin{aligned} L_{K_n} (J \tau_m) &= (L_{K_n} J) \tau_m + J (L_{K_n} \tau_m) = \\ &= J (L_{K_n} \tau_m) = - (n + \varrho) J K_{n+m} . \end{aligned} \quad (2.12)$$

(2.11) und (2.12) zusammengefaßt ergibt für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$

$$\text{grad } H_{m+n} = (L_{\tau_m} J) K_n + (n + \varrho) J K_{n+m} . \quad (2.13)$$

Für $m = 0$ erhalten wir aus (1.16)

$$(L_{\tau_0} J) K_n = \lambda J K_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 .$$

Die letzte Gleichung eingesetzt in (2.13) liefert die Behauptung

$$\text{grad } H_n = (n + \varrho + \lambda) J K_n .$$

(iii): Mit den Gleichungen (2.8) und (2.13) gilt für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$

$$(L_{\tau_m} J) K_n = (\lambda + m) J K_{n+m} .$$

(iv): Mit der Definition der Lie Ableitung eines Skalarfeldes, (2.8) und (2.4) folgt für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$

$$L_{K_n} H_m = \langle \text{grad } H_m, K_n \rangle = (m + \varrho + \lambda) \langle J K_m, K_n \rangle = 0 .$$

□

Bemerkung (2.1): Für die weiteren Relationen setzen wir voraus, daß K_0 invers-hamiltonisch bzgl. J ist. Dann ist das Vektorfeld K_1 zusätzlich hamiltonisch bzgl. Θ_1 . Weiterhin besagt die Eigenschaft (2.10) gerade, daß jedes Skalarfeld H_m ein Erhaltungssatz zu jedem Vektorfeld K_n ist.

Lemma (2.3): Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt

$$(i) \quad \Theta_{n+1} := \Phi^n \Theta_1 \text{ ist implektisch ,} \quad (2.14)$$

$$(ii) \quad L_{K_n} \Phi^m = 0 , \quad (2.15)$$

$$(iii) \quad L_{K_n} \Theta_m = 0 . \quad (2.16)$$

Beweis: (i): Nach Voraussetzung sind Θ und Θ_1 implektisch. Mit vollständiger

Induktion erhalten wir für alle $\gamma \in X^*(M)$

$$\begin{aligned}
& L_{\Theta_{n+1}\gamma} \Theta_{n+1} + \Theta_{n+1} (\gamma' - \gamma'^*) \Theta_{n+1} \\
&= L_{\Theta_1 J \Theta_n \gamma} (\Theta_1 J \Theta_n) + \Theta_n J \Theta_1 (\gamma' - \gamma'^*) \Theta_1 J \Theta_n \\
&= (L_{\Phi \Theta_n \gamma} \Phi) \Theta_n + \Phi (L_{\Theta_n J \Theta_1 \gamma} \Theta_n) - \Theta_n J (L_{\Theta_1 \gamma} \Theta_1) J \Theta_n \\
&= (L_{\Phi \Theta_n \gamma} \Phi) \Theta_n - \Phi \Theta_n ((J \Theta_1 \gamma)' - (J \Theta_1 \gamma)^{**}) \Theta_n - \Phi^n (L_{\Theta_1 \gamma} \Theta_1) J \Theta_n \\
&= (L_{\Phi \Theta_n \gamma} \Phi) \Theta_n - \Phi^n \Theta_1 (L_{\Theta_1 \gamma} J) \Theta_n - \Phi^n (L_{\Theta_1 \gamma} \Theta_1) J \Theta_n \\
&= (L_{\Phi^n \Theta_1 \gamma} \Phi - \Phi^n L_{\Theta_1 \gamma} \Phi) \Theta_n = 0.
\end{aligned}$$

Die letzte Klammer verschwindet wegen der Heredität von Φ (vgl. (1.15)).

(ii): Wegen

$$(\varrho + \lambda) J K_0 = \text{grad } H_0$$

folgt

$$(\varrho + \lambda) K_1 = \Theta_1 \text{grad } H_0 ,$$

d.h. es gilt

$$L_{K_1} \Phi = L_{K_1} (\Theta_1 J) = (L_{K_1} \Theta_1) J + \Theta_1 (L_{K_1} J) = 0 .$$

Aus der Heredität von Φ erhalten wir $L_{K_n} \Phi = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$; mit der Produktregel für Lie Ableitungen folgt die Behauptung.

(iii): Mit Folgerung (2.1) gilt $L_{K_n} \Theta_1 = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Behauptung ergibt sich somit aus der Produktregel

$$L_{K_n} \Theta_{m+1} = L_{K_n} (\Phi^m \Theta_1) = (L_{K_n} \Phi^m) \Theta_1 + \Phi^m (L_{K_n} \Theta_1) = 0 .$$

□

Die beiden letzten Relationen offenbaren weitere wesentliche Struktureigenschaften integrabler Systeme mit nicht-hamiltonischen Mastersymmetrien. Es gilt nämlich offensichtlich:

Folgerung (2.2): Der Rekursionsoperator Φ ist invariant unter allen Symmetrien K_n . Jede der Symmetrien ist hamiltonisch bzgl. aller implektischen Operatoren Θ_m .

2.2 Der hamiltonische Fall

Wie im ersten Kapitel festgelegt, existieren in diesem Fall zu

$$u_t = K_1(u) = \Theta_0(u) \operatorname{grad} f(u) \quad (2.17)$$

eine Hierarchie von Symmetrien K_n und eine Hierarchie hamiltonischer (bzgl. Θ_0) Mastersymmetrien τ_n , die für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$ folgende Relationen erfüllen

$$\begin{aligned} [K_n, K_m] &= 0, \quad [\tau_n, K_m] = (m + n + \varrho) K_{n+m} \\ [\tau_n, \tau_m] &= (m - n) \tau_{n+m}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Der implektische Operator Θ_0 sei invertierbar mit $J := \Theta_0^{-1}$. Setzen wir wie im nicht-hamiltonischen Fall zusätzlich voraus, daß K_0 hamiltonisch bzgl. Θ_0 ist, so erhalten wir, daß auch in diesem Fall die K_n hamiltonisch sind:

Lemma (2.4): Alle Symmetrien K_n sind hamiltonisch bzgl. Θ_0 , d.h. es gilt $L_{K_n} \Theta_0 = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis: Für $n = 0$ gilt die Behauptung nach Voraussetzung. Mit Hilfe der Jacobi-Identität folgt dann für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} L_{K_{n+1}} \Theta_0 &= \frac{1}{(n+1+\varrho)} L_{[\tau_1, K_n]} \Theta_0 = \\ &= \frac{1}{(n+1+\varrho)} (L_{\tau_1} L_{K_n} \Theta_0 - L_{K_n} L_{\tau_1} \Theta_0), \end{aligned}$$

und die Behauptung ergibt sich durch Induktion. \square

Im Gegensatz zum nicht-hamiltonischen Fall können wir hier zwei Hierarchien von Skalarfeldern definieren:

Definition (2.2): Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ seien die Skalarfelder $H_n, T_n \in \mathcal{F}(M)$ bestimmt durch

$$(n + \varrho) K_n = \Theta_0 \operatorname{grad} H_n, \quad (2.19)$$

$$\tau_n = \Theta_0 \operatorname{grad} T_n. \quad (2.20)$$

Bemerkung (2.2): Die durch (2.19) und (2.20) definierten Skalarfelder H_n und T_n sind bis auf Konstanten, die nicht von den Koordinaten abhängen, festgelegt. Die uns interessierenden Eigenschaften der Skalarfelder werden durch ihre Gradienten bestimmt, deshalb spielen die Konstanten im weiteren keine Rolle.

Die Eigenschaften der Skalarfelder H_n und T_n werden im folgenden Lemma charakterisiert:

Lemma (2.5): Für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$ gilt

- (i) $\{H_n, H_m\}_{\Theta_0} = 0$, $\{T_n, T_m\}_{\Theta_0} = (m - n) T_{n+m}$,
 $\{T_n, H_m\}_{\Theta_0} = \langle \text{grad } H_m, \tau_n \rangle = (m + \varrho) H_{n+m}$, (2.21)
- (ii) $\langle J K_n, K_m \rangle = 0$, $\langle J \tau_m, \tau_n \rangle = (m - n) T_{n+m}$,
 $\langle J K_n, \tau_m \rangle = H_{n+m}$. (2.22)

Beweis: (i): Die beiden ersten Relationen folgen mit dem Noether-Theorem (Bemerkung (1.2)) bis auf Konstanten sofort aus (2.18). Setzt man voraus, daß die Skalarfelder H_n und T_n polynominal von u, u_x, u_{xx}, \dots abhängen, so liefert die Evaluierung in $u = 0$ das Verschwinden dieser Konstanten. Auf diese Weise erhält man ebenfalls mit dem Noether-Theorem und der Definition (2.2) für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} \{T_n, H_m\}_{\Theta_0} &= \langle \text{grad } H_m, \Theta_0 \text{ grad } T_n \rangle = \\ &= (m + \varrho) \langle \frac{1}{(m + \varrho)} \text{ grad } H_m, \tau_n \rangle = (m + \varrho) H_{n+m} . \end{aligned}$$

(ii): Die Gleichungen (2.22) ergeben sich aus (2.21), wenn man die Umformulierungen

$$J K_n = \frac{1}{(n + \varrho)} \text{ grad } H_n \quad \text{und} \quad J \tau_n = \text{grad } T_n$$

wählt. □

Während im nicht-hamiltonischen Fall der Rekursionsoperator Φ eine wichtige Rolle spielt, findet man im hamiltonischen Fall häufig andere Rekursionsgrößen, sogenannte Mastersymmetrien höherer Stufe ([40]).

Definition (2.3): Es sei $k \in \mathbb{N}$. Ein Vektorfeld $G \in X(M)$ heißt **Master-symmetrie k -ter Stufe** zu einer Folge K_n untereinander kommutierender Vektorfelder, wenn für jedes K_n gilt

$$\underbrace{[K_n, [K_n, [K_n, \dots [K_n, G] \dots]]]}_{k-\text{mal}} \neq 0 \text{ und } \underbrace{[K_n, [K_n, [K_n, \dots [K_n, G] \dots]]]}_{(k+1)-\text{mal}} = 0 .$$

Da die Symmetrien K_n alle untereinander vertauschen, können wir sie als Mastersymmetrien 0-ter Stufe interpretieren. Die schon bekannten Vektorfelder τ_n sind gemäß obiger Definition die Mastersymmetrien 1-ter Stufe. Aus schreibtechnischen Gründen nennen wir die τ_n weiterhin kurz Mastersymmetrien.

In fast allen Situationen, in denen die Folge der τ_n hamiltonisch ist, wurde eine Mastersymmetrie 2-ter Stufe gefunden, die sich folgendermaßen normieren läßt

$$[S_{-1}, K_1] = \tau_0. \quad (2.23)$$

Ob eine derartige Rekursionsgröße im hamiltonischen Fall immer existieren muß, ist aber noch nicht geklärt.

Unter der Voraussetzung, daß es ein S_{-1} wie in (2.23) gibt, gilt

Lemma (2.6): Definiert man $S_n := [S_{-1}, \tau_{n+1}]$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, so sind die folgenden Relationen gültig

$$(i) \quad [S_{-1}, K_n] = \tau_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, \quad (2.24)$$

$$(ii) \quad [S_k, K_n] = (2k + 3 + \varrho) \tau_{n+k} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N}. \quad (2.25)$$

Beweis: (i): Mit der Jacobi-Identität und den Relationen (2.18) folgt

$$(n+1+\varrho) K_{n+1} = [\tau_0, K_{n+1}] = [[S_{-1}, K_1], K_{n+1}] = [[S_{-1}, K_{n+1}], K_1].$$

Mit Induktion und der Vollständigkeit der Mastersymmetrien 1-ter Stufe gilt also für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$[S_{-1}, K_{n+1}] = \tau_n.$$

(ii): Mit (i), der Jacobi-Identität und den Relationen (2.18) folgt für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} [S_k, K_n] &= [[S_{-1}, \tau_{k+1}], K_n] = \\ &= -[[K_n, S_{-1}], \tau_{k+1}] - [[\tau_{k+1}, K_n], S_{-1}] = \\ &= [\tau_{n-1}, \tau_{k+1}] + (n+k+1+\varrho) [S_{-1}, K_{n+k+1}] = \\ &= (-n+k+2) \tau_{n+k} + (n+k+1+\varrho) \tau_{n+k} = \\ &= (2k+3+\varrho) \tau_{n+k}. \end{aligned}$$

□

Bemerkung (2.3): Ist das Vektorfeld $\tau_{-1} := [S_{-1}, K_0] \neq 0$ und erfüllt es die Relationen

$$[\tau_{-1}, \tau_0] = \tau_{-1}, \quad [\tau_{-1}, \tau_1] = 2\tau_0, \quad [\tau_{-1}, \tau_2] = 3\tau_1,$$

so folgt mit der Jacobi-Identität

$$[\tau_{-1}, \tau_n] = (n+1) \tau_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Dann gilt (2.25) auch für $n = 0$, d.h.

$$[S_k, K_0] = (2k+3+\varrho) \tau_k \quad \forall k \in \mathbb{N}_0. \quad (2.26)$$

Lemma (2.7): Ist S_{-1} hamiltonisch bzgl. Θ_0 , so gilt $L_{S_n} \Theta_0 = 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$, d.h. S_n ist hamiltonisch bzgl. Θ_0 .

Beweis: Mit der Jacobi-Identität gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$L_{S_n} \Theta_0 = L_{[S_{-1}, \tau_{n+1}]} \Theta_0 = L_{S_{-1}} (L_{\tau_{n+1}} \Theta_0) - L_{\tau_{n+1}} (L_{S_{-1}} \Theta_0) = 0.$$

□

Als empirische Tatsache halten wir zu diesem Lemma fest, daß die bislang gefundenen Rekursionsgrößen S_{-1} tatsächlich in allen bekannten Beispielen hamiltonisch sind. Eine Klärung der Frage, ob dies bei hamiltonischen Mastersymmetrien automatisch gelten muß, steht allerdings noch aus.

2.3 Beispiele

Anhand einiger ausgewählter Beispiele wollen wir die eingeführten Begriffe verdeutlichen. Den nicht-hamiltonischen Fall decken wir mit fünf Beispielen ab. Für den hamiltonischen Fall gibt es in einer Raumdimension bisher nur wenige Beispiele, u.a. die BO Gleichung und die ILW. Das durch BO gegebene Beispiel wird zum Schluß des Kapitels vorgestellt.

(a) Die Korteweg-deVries Gleichung

Die wohl bekannteste unter den integrablen Gleichungen ist die Korteweg-deVries Gleichung (KdV) ([51],[112])

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xxx} + 6uu_x = \\ &=: D \operatorname{grad} \int_{-\infty}^{+\infty} (u^3 - \frac{1}{2} u_x^2) dx \end{aligned} \quad (2.27)$$

mit $u(t,.) \in S(\mathbb{R})$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Es bezeichne D den Differentialoperator bzgl. x und D^{-1} den inversen Operator, d.h.

$$(Du)(x) := u_x \quad , \quad (D^{-1}u)(x) := \int_{-\infty}^x u(\xi) d\xi \quad \forall u \in S(\mathbb{R}) .$$

Der Dualraum $S^*(\mathbb{R})$ von $S(\mathbb{R})$ ist als Bildmenge von $S(\mathbb{R})$ unter D^{-1} erklärt

$$S^*(\mathbb{R}) = \{D^{-1}u \mid u \in S(\mathbb{R})\} .$$

$S(\mathbb{R})$ wird in diesen Dualraum eingebettet durch die Dualitätsklammer $\langle \cdot, \cdot \rangle$

$$\langle \gamma(u), G(u) \rangle := \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(u) G(u) dx$$

für alle $\gamma \in X^*(M)$ und $G \in X(M)$. Sofern nichts anderes gesagt wird, verwenden wir diese Dualität in allen weiteren Beispielen.

In dieser Notation erweisen sich D und $J(u) := D^{-1}$ als implektisch bzw. symplektisch und die KdV ist invers-hamiltonisch bzgl. J . Der hereditäre Rekursionsoperator ([38])

$$\begin{aligned} \Phi(u) &:= D^2 + 2DuD^{-1} + 2u = \\ &= (D^3 + 2Du + 2uD) D^{-1} =: \Theta_1(u) J(u) \end{aligned}$$

erzeugt mit den Startvektorfeldern

$$K_0(u) := u_x \quad \text{und} \quad \tau_0(u) := \frac{x}{2}u_x + u$$

die Hierarchien $K_n := \Phi^n K_0$ und $\tau_n := \Phi^n \tau_0$. Die Symmetrien K_n und die Mastersymmetrien τ_n erfüllen die folgenden Kommutatorrelationen ([23])

$$[K_n, K_m] = 0 \quad , \quad [\tau_n, \tau_m] = (m - n) \tau_{m+n}$$

$$[\tau_n, K_m] = (m + \frac{1}{2}) K_{n+m} \quad ,$$

d.h. $\varrho = 1/2$. Das Vektorfeld K_0 ist invers-hamiltonisch bzgl. J mit

$$J(u) K_0(u) = \text{grad} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dx .$$

Weiterhin gilt

$$L_{\tau_0} J = J \quad \text{und} \quad L_{\tau_1} J = 2 J \Theta_1 J \quad ,$$

also $\lambda = 1$. Insbesondere sehen wir, daß der nicht-hamiltonische Fall vorliegt. Die Erhaltungssätze H_n und die höheren implektischen Operatoren Θ_m ergeben

sich gemäß Kapitel 2.1 .

(b) Die modifizierte Korteweg-deVries Gleichung

Ebenfalls auf $S(\mathbb{R})$ ist die modifizierte Korteweg-deVries Gleichung (mKdV)

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xxx} + 6u^2u_x = \\ &= D \operatorname{grad} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (u^4 - u_x^2) dx \end{aligned} \quad (2.28)$$

definiert und invers-hamiltonisch bzgl. $J(u) := D^{-1}$. Der Rekursionsoperator

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= D^2 + 4DuD^{-1}u = \\ &= (D^3 + 4DuD^{-1}uD) D^{-1} =: \Theta_1(u) J(u) \end{aligned}$$

ist hereditär ([38]) und erzeugt die Hierarchien

$$\begin{aligned} K_n(u) &= \Phi^n(u) K_0(u) = \Phi^n(u) u_x , \\ \tau_n(u) &= \Phi^n(u) \tau_0(u) = \Phi^n(u) \frac{1}{2}(xu_x + u) . \end{aligned}$$

Diese Vektorfelder erfüllen die Kommutatorrelationen ([23])

$$\begin{aligned} [K_n, K_m] &= 0 , \quad [\tau_n, \tau_m] = (m - n) \tau_{m+n} \\ [\tau_n, K_m] &= (m + \frac{1}{2}) K_{n+m} . \end{aligned}$$

Das Vektorfeld K_0 ist hamiltonisch bzgl. $\Theta_0 = J^{-1} = D$, denn es gilt

$$K_0(u) = D \operatorname{grad} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dx .$$

Für die Lie Ableitungen von J in Richtung von τ_0 und τ_1 erhalten wir

$$L_{\tau_0} J = 0 \quad \text{und} \quad L_{\tau_1} J = J \Theta_1 J ,$$

insgesamt also $\varrho = 1/2$ und $\lambda = 0$. Die Erhaltungssätze und die höheren implektischen Operatoren ergeben sich wieder gemäß Kapitel 2.1 .

(c) Die CDGSK - Gleichung

Unser nächstes Beispiel ist die Caudrey-Dodd-Gibbon-Sawada-Kotera Gleichung (CDGSK), die wir ebenfalls für $u \in S(\mathbb{R})$ betrachten ([22],[99]). Der implektische Operator

$$\Theta_1(u) := D^3 + 2uD + 2Du$$

und der symplektische Operator

$$J(u) := 2D^3 + 2D^2uD^{-1} + 2D^{-1}uD^2 + u^2D^{-1} + D^{-1}u^2$$

sind kompatibel und definieren den hereditären Operator ([49],[58])

$$\Phi(u) := \Theta_1(u) J(u) .$$

Φ ist invariant unter den Vektorfeldern K_0 und G_0 , die durch

$$J(u) K_0(u) = J(u) u_x = \text{grad} \int_{-\infty}^{+\infty} (u_{xx}^2 + \frac{3}{2} u^2 u_{xx} + \frac{1}{3} u^4) dx$$

und

$$\begin{aligned} J(u) G_0(u) &= J(u) (u_{xxxx} + 5uu_{xxx} + 5u_x u_{xx} + 5u^2 u_x) = \\ &= \text{grad} \int_{-\infty}^{+\infty} (u_{xxxx}^2 + \frac{16}{3} u_{xx}^3 - 7uu_{xx}^2 - \frac{17}{3} u_x^4 + 16u^2 u_{xx}^2 + 144u^3 u_x^2 + \frac{4}{9} u^6) dx . \end{aligned}$$

gegeben sind. Wir definieren $K_n := \Phi^n K_0$ und $G_n := \Phi^n G_0$. Da K_0 und G_0 miteinander kommutieren, folgt aus der Hereditärität von Φ , daß alle Vektorfelder K_n und G_n untereinander vertauschen

$$[K_n, K_m] = [K_n, G_m] = [G_n, G_m] = 0 .$$

Das dem Vektorfeld G_0 zugeordnete dynamische System

$$u_t = G_0(u)$$

wird die CDGSK 5.Ordnung genannt; das dem Vektorfeld K_1 zugeordnete System wird entsprechend CDGSK 7.Ordnung genannt. Zu den beiden getrennten Hierarchien von Symmetrien K_n und G_n definieren wir eine Hierarchie von Mastersymmetrien durch

$$\tau_n(u) := \Phi^n(u) \tau_0(u) = \Phi^n(u) \frac{1}{6} (xu_x + 2u) .$$

Diese so definierten Mastersymmetrien τ_n sind von der Form

$$\tau_n = x K_n + \text{Rest} .$$

Es ist bisher noch nicht geklärt, ob es bei der CDGSK noch eine weitere Folge von Mastersymmetrien $\tilde{\tau}_n$ der Form

$$\tilde{\tau}_n = x G_n + \text{Rest}$$

gibt. Für die bekannten Vektorfelder K_n, G_n und τ_n gelten die folgenden Kommutatoreigenschaften

$$[K_n, K_m] = 0 \quad , \quad [G_n, G_m] = 0 \quad ,$$

$$[K_n, G_m] = 0 \quad , \quad [\tau_n, \tau_m] = (m - n) \tau_{m+n} \quad ,$$

$$[\tau_n, K_m] = (m + \frac{1}{6}) K_{n+m} \quad , \quad [\tau_n, G_m] = (m + \frac{5}{6}) G_{n+m} \quad .$$

Darüberhinaus berechnet man $L_{\tau_0} J = J$ und $L_{\tau_1} J = 2 J \Theta_1 J$. Es ist also $\lambda = 1$, während sich die Konstante ϱ nicht eindeutig festlegen lässt. Wir kommen auf dieses Phänomen in Kapitel 6.3 zurück und werden es dort diskutieren.

(d) Die nicht-lineare Schrödinger Gleichung

Auf dem Schwartz-Raum der komplexwertigen Funktionen $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ betrachten wir die nicht-lineare Schrödinger Gleichung (NLS) ([113])

$$z_t = -iz_{xx} + i|z|^2 z \quad (2.29)$$

Wir setzen $z := u + iv$ mit $u, v \in S(\mathbb{R})$ und erhalten als reelle Version von (2.29) das zweikomponentige dynamische System

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_t &= \begin{pmatrix} v_{xx} - v(u^2 + v^2) \\ -u_{xx} + u(u^2 + v^2) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{grad} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}(u_x^2 + v_x^2) + \frac{1}{4}(u^2 + v^2)^2 \right) dx = \\ &=: K_1 \left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right) . \end{aligned} \quad (2.30)$$

Als zugrunde liegende Mannigfaltigkeit ist betrachten wir hier $M = S(\mathbb{R}) \oplus S(\mathbb{R})$. Der Dualraum von M ist dann gegeben durch die direkte Summe der vorher eingeführten Dualräume $S^*(\mathbb{R})$. Die Dualitätsklammer zwischen Vektorfeldern K und Kovektorfeldern γ mit

$$K \left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} K_1(u, v) \\ K_2(u, v) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \gamma \left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \gamma_1(u, v) \\ \gamma_2(u, v) \end{pmatrix}$$

legen wir für zweikomponentige Systeme folgendermaßen fest

$$\langle \gamma, K \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (\gamma_1(x)K_1(x) + \gamma_2(x)K_2(x)) \, dx \, .$$

Für das System (2.30) ist der hereditäre Rekursionsoperator Φ gegeben durch ([38])

$$\begin{aligned} \Phi\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} D - 2vD^{-1}v & 2vD^{-1}u \\ 2uD^{-1}v & D - 2uD^{-1}u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &=: \Theta_1\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) J\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) \, . \end{aligned}$$

Mit den Startvektorfeldern

$$K_0\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} \, , \quad \tau_0\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} xu_x + u \\ xv_x + v \end{pmatrix}$$

werden die Hierarchien $K_n := \Phi^n K_0$ und $\tau_n := \Phi^n \tau_0$ erzeugt. Die Symmetrien und Mastersymmetrien erfüllen in diesem Beispiel die folgenden Relationen ([23])

$$\begin{aligned} [K_n, K_m] &= 0 \, , \quad [\tau_n, \tau_m] = (m - n) \tau_{m+n} \\ [\tau_n, K_m] &= (m + 1) K_{m+n} \, , \end{aligned}$$

d.h. ϱ ist gleich 1. Das Vektorfeld K_0 ist hamiltonisch bzgl. $\Theta_0 = J^{-1}$; wir erhalten

$$K_0\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \operatorname{grad} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (uv_x - vu_x) \, dx \, .$$

Für die Lie Ableitungen von J in Richtung τ_0 und τ_1 berechnet man

$$L_{\tau_0} J = J \, , \quad L_{\tau_1} J = 2 J \Theta_1 J \, .$$

d.h. $\lambda = 1$. Erhaltungssätze H_n und höhere implektische Operatoren findet man wiederum gemäß Kapitel 2.1.

(e) Das Hirota-Satsuma System

Als letztes Beispiel zum nicht-hamiltonischen Fall betrachten wir für $u, v \in \mathbb{S}(\mathbb{R})$ das gekoppelte Hirota-Satsuma System (HS) ([57])

$$\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right)_t = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}u_{xxx} + 3uu_x - 6vv_x \\ -v_{xxx} - 3uv_x \end{pmatrix} =: G_0\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) \, , \quad (2.31)$$

wobei die Mannigfaltigkeit wie bei der NLS gegeben sei. Das Vektorfeld G_0 ist invers-hamiltonisch, d.h. mit dem Operator

$$J\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}D + D^{-1}u + uD^{-1} & -2D^{-1}v \\ -2vD^{-1} & -2D \end{pmatrix}$$

und dem Skalarfeld

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) &= \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{8}u_{xx}^2 + v_{xx}^2 + \frac{5}{8}u^4 + \frac{3}{2}v^4 - \frac{3}{2}u^2v^2 + \frac{1}{4}uu_x^2 + \frac{3}{4}u^2u_{xx} - uvv_{xx} - 4uv_x^2 \right) dx \end{aligned}$$

gilt $JG_0 = \text{grad } f$. Zusätzlich ist J kompatibel mit dem implektischen Operator ([39])

$$\Theta_1\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}D^3 + Du + uD & Dv + vD \\ Dv + vD & \frac{1}{2}D^3 + Du + uD \end{pmatrix}.$$

Der Operator $\Phi := \Theta_1 J$ ist daher hereditär ([50]) und zusätzlich invariant unter G_0 . Er erzeugt die Symmetrien $G_n := \Phi^n G_0$ und die Mastersymmetrien $\tau_n := \Phi^n \tau_0$, wobei τ_0 durch

$$\tau_0\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} xu_x + 2u \\ xv_x + 2v \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Wie bei der CDGSK Gleichung existiert auch hier ein zweites Startvektorfeld

$$K_0\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix},$$

das mit G_0 kommutiert. K_0 ist ebenfalls invers-hamiltonisch bzgl. J mit

$$J\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} = \text{grad} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}u^3 - \frac{1}{4}u_x^2 - uv^2 + v_x^2 \right) dx.$$

Wir erhalten also wieder zwei getrennte Hierarchien G_n und $K_n := \Phi^n K_0$ untereinander kommutierender Vektorfelder. Sie erfüllen die folgenden Relationen

$$[K_n, K_m] = 0 \quad , \quad [G_n, G_m] = 0 \quad ,$$

$$[K_n, G_m] = 0 \quad , \quad [\tau_n, \tau_m] = (m - n) \tau_{m+n} \quad ,$$

$$[\tau_n, K_m] = (m + \frac{1}{4}) K_{n+m} \quad , \quad [\tau_n, G_m] = (m + \frac{3}{4}) G_{n+m} \quad .$$

Wie bei der CDGSK ist auch in diesem Beispiel die Frage nach der Existenz einer zweiten Folge von Mastersymmetrien $\tilde{\tau}_n$ bisher nicht geklärt. Man berechnet

$$L_{\tau_0} J = J \quad , \quad L_{\tau_1} J = 2 J \Theta_1 J \quad ,$$

d.h. $\lambda = 1$.

(f) Die Benjamin-Ono Gleichung

Als Beispiel für den hamiltonischen Fall wählen wir die Benjamin-Ono Gleichung (BO) ([11],[89])

$$u_t = Hu_{xx} + 2uu_x . \quad (2.32)$$

Hier ist u wiederum ein Element von $S(\mathbb{R})$ und H ist die Hilbert Transformation

$$(Hu)(x) := \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(z)}{z-x} dx ,$$

wobei das Integral als Hauptwertintegral zu verstehen ist.

Die wichtigsten Eigenschaften der Hilbert Transformation sind

$$H^2 = -I \quad , \quad H^* = -H \quad , \quad H D = D H ,$$

$$(Hu) \cdot (Hv) = uv + H(uHv) + H(vHu) ,$$

$$(H(xu))(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u(y) dy - y(Hu)(y) .$$

Hier steht $*$ für die Transposition bzgl. der Dualitätsklammer. Mit dem implikativen Operator $\Theta_0(u) := D$ besitzt die BO Gleichung eine Hamiltonformulierung in der folgenden Form

$$Hu_{xx} + 2uu_x = D \operatorname{grad} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2} u_x Hu_x + \frac{1}{3} u^3 \right) dx .$$

Wir definieren ([32]

$$G_0(u) := \frac{1}{2} u_x = D \operatorname{grad} \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dx ,$$

$$\tau_0(u) := xu_x + u = D \operatorname{grad} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} xu^2 dx ,$$

$$\begin{aligned}
\tau_1(u) &:= 2(x(Hu_{xx} + 2uu_x) + u^2 + \frac{3}{2}Hu_x) = \\
&= D \operatorname{grad} 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} xuHu_x + \frac{1}{3} xu^3 \right) dx , \\
\tau_2(u) &:= 2x(2u^3 + 3Hu_{xx} + 3uHu_x - 2u_{xx})_x + \\
&+ 2(-4u_{xx} + 5Hu_{xx} + 4uHu_x + 2u^3 + u_xHu) = \\
&= D \operatorname{grad} 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x \left(\frac{1}{2}u^4 + 3uHu_{xx} + u_x^2 \right) + uHu^2 \right) dx .
\end{aligned}$$

Diese Vektorfelder erfüllen die folgenden Relationen

$$[\tau_0, G_0] = G_0, \quad [\tau_0, \tau_1] = \tau_1, \quad [\tau_0, \tau_2] = 2\tau_1 ,$$

d.h. insbesondere $\varrho = 1$. Definiert man nun

$$(n+1) G_{n+1} := [\tau_1, G_n] \quad \forall n \geq 0$$

und

$$(n-1) \tau_{n+1} := [\tau_1, \tau_n] \quad \forall n \geq 2$$

so folgt ([23],[32]) für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$

$$[G_n, G_m] = 0, \quad [\tau_n, \tau_m] = (m-n) \tau_{n+m} ,$$

$$[\tau_n, G_m] = (m+1) G_{n+m} .$$

Das der BO Gleichung zugeordnete Vektorfeld erhält man durch

$$Hu_{xx} + 2uu_x = G_1(u) = [\tau_1, G_0] .$$

Da G_0, G_1, τ_0, τ_1 und τ_2 hamiltonisch bzgl. Θ_0 sind, folgt mit Kapitel 2.2, daß alle Vektorfelder G_n, τ_n hamiltonisch bzgl. Θ_0 sind.

Um die Normierung (1.17) zu erhalten, setzen wir

$$K_n(u) := \frac{1}{n+1} G_n(u)$$

und finden folgende Relationen

$$[K_n, K_m] = 0, \quad [\tau_n, \tau_m] = (m-n) \tau_{n+m} ,$$

$$[\tau_n, K_m] = (m+n+1) K_{n+m} .$$

In diesem Fall ist also

$$\begin{aligned} K_0(u) &= G_0(u) = \frac{1}{2} u_x , \\ K_1(u) &= \frac{1}{2} G_1(u) = \frac{1}{2} (Hu_{xx} + 2uu_x) , \\ K_2(u) &= \frac{1}{3} G_2(u) = \frac{1}{3} (2u^3 + 3Hu u_x + 3uHu_x - 2u_{xx})_x . \end{aligned}$$

Wir definieren die Skalarfelder H_n und T_n , die die Relationen (2.21) und (2.22) erfüllen, durch

$$\begin{aligned} \Theta_0 \operatorname{grad} H_n &:= (n+1) K_n = G_n , \\ \Theta_0 \operatorname{grad} T_n &:= \tau_n . \end{aligned}$$

Für die BO Gleichung existiert eine hamiltonische Mastersymmetrie 2-ter Stufe ([40])

$$S_{-1} := x = D \operatorname{grad} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 u \, dx .$$

Man berechnet

$$[S_{-1}, K_0] = \frac{1}{2} =: \tau_{-1} , \quad [S_{-1}, K_1] = \tau_0$$

und

$$[\tau_{-1}, \tau_0] = \tau_{-1} , \quad [\tau_{-1}, \tau_1] = 2\tau_0 , \quad [\tau_{-1}, \tau_2] = 3\tau_1 .$$

Definieren wir zusätzlich für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$S_n := [S_{-1}, \tau_{n+1}] ,$$

so folgt mit Lemma (2.6) und Bemerkung (2.3)

$$[S_{-1}, K_n] = \tau_{n-1} , \quad [S_k, K_n] = 2(k+2)\tau_{n+k}$$

für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$. Mit Lemma (2.7) und dem Noether-Theorem erhalten wir daraus für $k=0$ und $J = \Theta_0^{-1}$

$$\langle JS_0, K_n \rangle = -4\tau_n . \quad (2.33)$$

3 Das Tangentialbündel der Multi-Soliton Mannigfaltigkeit

Für integrierbare Gleichungen existiert eine Klasse außergewöhnlicher Lösungen, die sogenannten Multi-Soliton Lösungen. Deren physikalische Eigenschaften und die entsprechenden mathematischen Charakterisierungen werden in den Kapiteln 3.1 und 3.2 diskutiert. Insbesondere sollen die heuristischen Betrachtungen in Kapitel 3.2 zur Motivation der in [80] eingeführten gruppen-theoretischen Definition von Multi-Soliton Lösungen dienen. Weiterhin wird rekapituliert, daß die Gesamtheit aller N -Soliton Lösungen eine bezüglich der Evolutionsgleichung (1.11) invariante, häufig endlich dimensionale Untermannigfaltigkeit M_N der Ausgangsmannigfaltigkeit M bildet. Da wir an einem Vergleich zwischen Größen auf M_N und den wohlbekannten Feldern auf der gesamten Mannigfaltigkeit M interessiert sind, konstruieren wir in Kapitel 3.3 explizit das Tangentialbündel von M_N mit Hilfe der Symmetrien und Mastersymmetrien der Ausgangsgleichung (1.11). Dabei stellt sich heraus, daß alle Symmetrien und alle Mastersymmetrien tangential an die Untermannigfaltigkeit M_N sind. Als wesentliches Ergebnis von Kapitel 3 erhalten wir also die explizite Beschreibung des Tangentialbündels TM_N von M_N in extrinsischen Größen. Damit können in 3.5 weitere Eigenschaften von TM_N hergeleitet werden. Mit Hilfe dieser Charakterisierungen zeigen wir dann, daß die bloße Einschränkung aller wichtigen Operatoren auf die Untermannigfaltigkeit M_N bereits die Reduktion dieser Operatoren auf M_N liefert.

3.1 Physikalische Eigenschaften von Multi-Soliton Lösungen

Beobachtet wurde die Existenz einer ungewöhnlichen Solitärwelle, die wir heute Soliton Lösung nennen, von John Scott Russell schon 1834. Seine Beschreibung ([96]) gibt auch heute noch Aufschluß über die wesentliche Eigenschaft dieser Wasserwellen :

I was observing the motion of a boat which was rapidly drawn along a narrow channel by a pair of horses, when the boat suddenly stopped-not so the mass of water in the channel which it had put in motion; it accumulated round the prow of the vessel in a state of violent agitation, then suddenly leaving it behind, rolled forward with great velocity, assuming the form of a large solitary elevation, a rounded, smooth and well defined heap of water, which continued its course along the channel apparently without change of form or diminution of speed.

Eine Soliton Lösung ist also eine lokalisierte Welle, die mit konstanter Geschwindigkeit reist und dabei ihre Gestalt nicht ändert. Nach seiner Entdeckung der "great wave of translation" beschäftigte sich Russell intensiv mit diesen Flachwasserwellen ([36]). So erkannte er zum Beispiel auch schon den asymptotischen Zerfall recht allgemeiner Anfangsbedingungen in Solitärwellen ([96]):

If such a heap be by any means forced into existence, it will rapidly fall into pieces and become disintegrated and resolved into a series of different waves, which do not move forward in company with each other, but move separately, each with a velocity of its own, and each of course continuing to depart from the other.

Die Differentialgleichung, die das von Russell beobachtete Phänomene beschreibt, wurde 1895 von Korteweg und deVries aufgestellt ([63]) und ihnen zu Ehren KdV (vgl. (2.27)) genannt. Breiteres Interesse erregte diese Gleichung erst wieder in den 60-er Jahren unseres Jahrhunderts, als sie zur Beschreibung von magnetohydrodynamischen Wellen im Plasma verwandt wurde. Beim numerischen Studium der Wechselwirkung mehrerer Soliton Lösungen fand man nämlich eine außergewöhnliche Struktur ([110]). Letztlich war diese Entdeckung der Entstehungspunkt für ein Forschungsfeld der mathematischen Physik, das unter dem Schlagwort "Soliton-Theorie" bekannt ist. Bevor wir die Ergebnisse der numerischen Experimente in ([110]) schildern, wollen wir noch anmerken, daß es sich hierbei selbstverständlich um ein Phänomen handelt, welches nicht nur auf die KdV, sondern auf alle in dieser Arbeit interessierenden Gleichungen zutrifft.

Gegeben sei also eine Lösung der nichtlinearen partiellen Differentialgleichung (1.11), die asymptotisch zum Zeitpunkt $t \approx -\infty$ aus zwei lokalisierten Wellen besteht. Angenommen, die beiden Wellen reisen mit unterschiedlichen, aber jeweils konstanten Geschwindigkeiten, wobei die "hintere" Welle die schnellere sei. Zu einem gewissen Zeitpunkt holt die schnellere Welle die langsamere ein, zwischen den beiden Wellen findet eine nichtlineare Wechselwirkung statt. Danach erleben wir das für eine nichtlineare Gleichung erstaunliche Phänomen: die beiden Wellen kehren wieder in ihre ursprüngliche Gestalt und zu ihrer Ausgangsgeschwindigkeit zurück. Dies ist das von Zabusky, Kruskal und Deem beobachtete Rekurrenzphänomen ([111]). Das Bild (vergleiche Fig. 1) der beiden Wellen unterscheidet sich vor und nach der Wechselwirkung nur in maximal zwei Punkten: Zum einen hat die schnellere Welle die langsamere überholt. Zum anderen erleben beide Wellen im Vergleich mit einer jeweils ungestörten zeitlichen Entwicklung eine Phasenverschiebung.

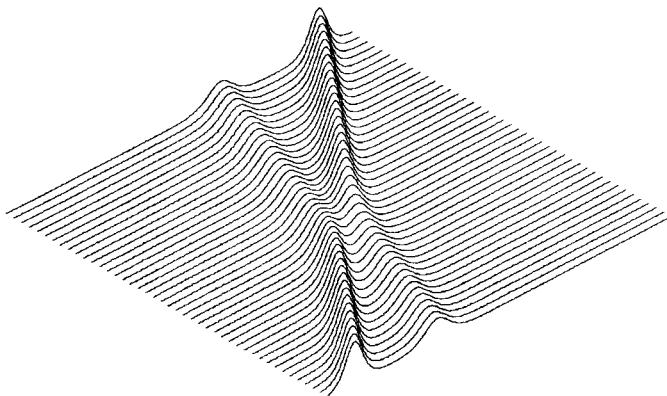


Fig. 1
2-Soliton Lösung der KdV

Die Phasenverschiebung findet bei allen Soliton Lösungen im nicht-hamiltonischen Fall statt. Bei den durch rationale Funktionen gegebenen Soliton Lösungen der Benjamin-Ono Gleichung existiert dagegen keine Phasenverschiebung ([72]).

Startet man mit einer Anfangsbedingung von N einzelnen Soliton Wellen, so beobachtet man die gleiche Art von Wechselwirkungen so lange, bis die schnellste Welle alle anderen überholt, die nächstschnellere die restlichen überholt hat, usw. Der Endzustand einer beliebigen Anfangsbedingung von N einzelnen lokalisierten Wellen mit jeweils konstanten Geschwindigkeiten ist also immer die Dekomposition in N lokalisierte Lösungen ohne weitere Wechselwirkungen. Da die geschilderten Wechselwirkungsphänomene dieser Wellen eher den Eigenschaften von (identifizierbaren) Teilchen beim elastischen Stoß als einem typischen Wellenverhalten entsprechen, nannte man diese speziellen Wellen Solitone. Findet man für große Zeiten eine asymptotische Dekomposition in N einzelne Soliton Lösungen vor, so spricht man kurz von einer N -Soliton Lösung. Als letzte bemerkenswerte Eigenschaft von N -Soliton Lösungen halten wir fest, daß die Amplituden der einzelnen Wellen von den jeweiligen Geschwindigkeiten abhängen, worin sich die nichtlineare Natur der Ausgangsgleichung offenbart. Darüberhinaus bestimmen die Geschwindigkeiten der beteiligten Ein-Soliton Lösungen ebenfalls den Wert der Phasenverschiebung.

Die bisher vorgestellten Lösungen betreffen Evolutionsgleichungen mit für $t \rightarrow \pm\infty$ verschwindenden Randbedingungen. Aber auch für periodische Randbedingungen findet man zum Beispiel Lösungen mit Soliton-Verhalten. Diese heißen "Finite Gap Solutions" und lassen sich mit Hilfe von Theta-Funktionen beschreiben ([27]). Im weiteren beschränken wir die heuristischen Betrachtungen, die als Motivation für die einzuführenden Begriffe gelten sollen, allerdings auf solche Soliton Lösungen, die für $t \rightarrow \pm\infty$ verschwinden.

Explizit lassen sich N -Soliton Lösungen z.B. mit der Hirota-Methode ([55], [56]) oder auch durch Auto-Bäcklund Transformationen ([8], [74]) konstruieren. Uns interessieren in dieser Arbeit aber hauptsächlich die strukturellen Eigenschaften der N -Soliton Lösungen. Aus diesem Grund wollen wir im folgenden Kapitel verschiedene Definitionsmöglichkeiten von N -Soliton Lösungen angeben. Dabei sei allerdings noch angemerkt, daß es in der Literatur bisher keine einheitliche Definition dessen gibt, was man unter einer Soliton Lösung zu verstehen hat. Man vergleiche zum Beispiel die gruppentheoretische Definition in [48] mit der bei Physikern üblichen Definition in [91], die keinen Zusammenhang mit den strukturellen Eigenschaften der Ausgangsgleichung aufweist.

3.2 Charakterisierungen der Multi-Soliton Lösungen

Im Mittelpunkt dieses Kapitels steht der gerade erwähnte Zusammenhang von Multi-Soliton Lösungen mit den strukturellen Eigenschaften der Evolutionsgleichung

$$u_t = K_1(u) .$$

Unsere spezielle Aufmerksamkeit richtet sich auf die in [80] eingeführte gruppentheoretische Definition der Multi-Soliton Lösungen. Diese Definition ist der Ausgangspunkt für die ab Kapitel 3.3 exakt hergeleiteten Resultate der vorliegenden Arbeit. Dagegen dienen die heuristischen Betrachtungen dieses Kapitels lediglich zur Motivation der strukturellen Charakterisierung von Multi-Soliton Lösungen.

Eine erste, physikalisch motivierte, Definition einer Soliton Lösung haben wir bereits kennengelernt.

Definition (3.1): Eine Lösung $s \in S(\mathbb{R})$ der Evolutionsgleichung (1.11) heißt **N -Soliton Lösung**, wenn sie für $t \rightarrow \pm\infty$ in N Ein-Soliton Lösungen s_i zerfällt. Wir schreiben dann asymptotisch

$$s(x, t) \approx \sum_{i=1}^N s_i(c_i, x + c_i t + d_i) =: \sum_{i=1}^N s_i(c_i, x + q_i) . \quad (3.1)$$

Hierbei sind c_i und d_i die asymptotisch auftretenden Geschwindigkeiten und Phasen der entsprechenden Ein-Soliton Lösungen s_i . Wir setzen außerdem voraus, daß die Gesamtenergie des Systems von den asymptotisch auftretenden Ein-Solitonen getragen wird. Mathematisch bedeutet dieses, daß es ein zeitinvariantes, positiv definites Skalarfeld gibt, welches auf der Summe der asymptotischen Ein-Solitonen denselben Wert wie auf der Anfangsbedingung annimmt.

Unter dieser Voraussetzung ist c_i konstant, während sich die Phasen d_i für $t \approx -\infty$ und $t \approx +\infty$ auf Grund der Wechselwirkungen unterscheiden. Da sich die Phasenverschiebungen aus den Geschwindigkeiten berechnen lassen ([26]), folgt

Bemerkung (3.1): Unter den oben gemachten Voraussetzungen ist eine N -Soliton Lösung zu jedem Zeitpunkt t durch die Angabe ihrer asymptotischen Daten c_i und d_i (bzw. durch c_i und q_i) für $t \approx +\infty$ (oder $t \approx -\infty$) vollständig bestimmt.

Eine weitere Charakterisierung von Soliton Lösungen erhält man mit Hilfe der Inversen Streumethode (*IST*), deren Grundidee ([75]) wir im nicht-hamiltonischen Fall kurz schildern wollen.

Ein von u abhängiger Operator $L(u)$ heißt **Lax Operator** ([68]) zu einer gegebenen Evolutionsgleichung

$$u_t = K_1(u) , \quad (3.2)$$

wenn die Gleichung (3.2) einen isospektralen Fluß für $L(u)$ darstellt, d.h. für eine Lösung $u(., t)$ der Gleichung (3.2) ändert sich das Spektrum von $L(u(., t))$ nicht mit der Zeit t . Natürlich findet man nur für spezielle Gleichungen eine solche Lax-Darstellung. Im Fall der KdV ist L gerade der Schrödinger-Operator

$$L(u(x, t)) = D^2 + u(x, t) .$$

Aus der Anfangsbedingung $u_0 = u(x, 0)$ lassen sich die Streudaten $S(0)$ von L zum Zeitpunkt $t = 0$ bestimmen. Diese Streudaten ergeben sich im wesentlichen aus den spektralen Eigenschaften von L . Wenn die zeitliche Entwicklung von u gemäß (3.2) erfolgt, so erhalten wir i.a. für Potentiale u , die für $x \rightarrow \pm\infty$ verschwinden, eine lineare Abhängigkeit für $S(t)$ von der Zeit. Damit ist $S(t)$ durch die Angabe von $S(0)$ leicht bestimmbar. Sofern man nun die Umrechnung vom Potential u auf Streudaten S wieder rückgängig machen kann, läßt sich aus $S(t)$ das Potential $u(., t)$ zu jedem Zeitpunkt zurückgewinnen ([21]). Für die KdV erhält man mit Hilfe der Inversen Streumethode die folgende interessante Charakterisierung einer wie in Definition (3.1) definierten Multi-Soliton Lösung ([1]).

Bemerkung (3.2): Genau für die reflektionsfreien Potentiale u sind die Streudaten von L nur durch das diskrete Spektrum von L festgelegt.

Mit anderen Worten: Ist eine reflektionsfreie Lösung u von (3.2) zu einem Zeitpunkt $t = 0$ vorgegeben, so findet man die allgemeine Lösung allein mit der Kenntnis des diskreten Spektrums von L . Da Soliton Lösungen reflektionsfrei sind, bietet die obige Bemerkung sofort eine Möglichkeit, Soliton Lösungen zu konstruieren. Für die KdV fand man auf diese Weise tatsächlich die ersten expliziten Formeln für Soliton Lösungen, denn die reflektionsfreien Potentiale des Schrödinger Operators sind die Bargmann Potentiale ([10]). Untersucht man den Zusammenhang zwischen einer N -Soliton Lösung und dem Spektrum des Lax-Operators genauer, so stellt man fest ([28])

Bemerkung (3.3): Bei einer N -Soliton Anfangsbedingung mit paarweise verschiedenen Geschwindigkeiten c_1, \dots, c_N der einzelnen lokalisierten Wellen besteht das diskrete Spektrum von L aus N paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_N$. Die Geschwindigkeit c_i eines einzelnen Solitons ist eindeutig durch den entsprechenden Eigenwert λ_i bestimmt.

Die diskreten Eigenwerte von L legen also nach Kapitel 3.1 mit den Geschwindigkeiten c_i auch die Amplituden der entsprechenden Ein-Solitonen und die Phasenverschiebungen bei Wechselwirkungen fest, d.h. bei einer vorgegebenen N -Soliton Anfangsbedingung von (3.2) ist die zeitliche Entwicklung der Lösung tatsächlich durch das diskrete Spektrum von L gegeben. Fragen wir umgekehrt in diesem Fall nach der zeitlichen Entwicklung der diskreten Eigenwerte λ_i von L , so bleiben sie nach Definition des Lax Operators konstant.

Über die Methode des spektralen Gradienten ([37],[31]) findet man für eine gegebene Evolutionsgleichung einen Zusammenhang zwischen dem Lax Operator L und dem hereditären Rekursionsoperator Φ (vgl. Kapitel 1 und 2). Im Fall der KdV zum Beispiel folgt aus

$$L \phi_i = \lambda_i \phi_i$$

für den zu Φ adjungierten Operator Φ^*

$$\Phi^* (\phi_i)^2 = 4 \lambda_i (\phi_i)^2 .$$

Dieser Zusammenhang lässt sich auch direkt verifizieren, wie in [45] gezeigt wurde. Aus diesem Grund verwundert es nicht, daß Soliton Lösungen auch mit Hilfe des Rekursionsoperators Φ beschrieben werden können ([43]). Für die weiteren Betrachtungen treffen wir die

Vereinbarung: Im folgenden sei eine N -Soliton Lösung s immer *nicht-degeneriert* in dem Sinne, daß alle Geschwindigkeiten c_1, \dots, c_N der asymptotisch auftretenden Ein-Solitonen jeweils paarweise verschieden sind.

Mit M_N bezeichnen wir die Gesamtheit aller nicht-degenerierten N -Soliton Lösungen s von (3.2). Im folgenden wollen wir die erwähnte gruppentheoretische Definition von M_N motivieren. Es wird sich herausstellen, daß die Linearkombination der Vektorfelder

$$\sum_{n=0}^N \alpha_n(u) K_n(u) = 0 \quad (3.3)$$

unter geeigneten Rand- bzw. Zwangsbedingungen genau die Mannigfaltigkeit aller in Definition (3.1) charakterisierten N -Soliton Lösungen beschreibt. Dieses Resultat erlaubt es uns, die Lösungsmenge der Gleichung (3.3) als Definition für die N -Soliton Lösungen zu nehmen. Es handelt sich dabei dann um eine von der Asymptotik losgelöste Definition dieser Lösungsklasse, welche durch rein gruppentheoretische Eigenschaften gegeben ist.

Wir beginnen unsere Betrachtungen mit dem nicht-hamiltonischen Fall und betrachten Evolutionsgleichungen

$$u_t = K_1(u) \quad (3.4)$$

auf $M = S(\mathbb{R})$ bzw. $M = S(\mathbb{R}) \times S(\mathbb{R})$. Es sei Φ der hereditäre Rekursionsoperator, der mit dem Startvektorfeld

$$K_0(u) = u_x \quad \text{bzw.} \quad K_0 \left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix}$$

die Hierarchie der kommutierenden Symmetrien $K_n = \Phi^n K_0$ erzeugt. Für $i = 1, \dots, N$ seien $s_i = s_i(c_i, x + c_i t + d_i)$ Ein-Soliton Lösungen von (3.4). Dann gilt mit der Definition von K_1 als $K_1 = \Phi K_0$

$$\Phi(s_i) K_0(s_i) = K_1(s_i) = (s_i)_t = c_i (s_i)_x = c_i K_0(s_i) ,$$

d.h. $(s_i)_x$ ist Eigenvektor von $\Phi(s_i)$ zum Eigenwert c_i für alle $i = 1, \dots, N$. Ist s die N -Soliton Lösung, die asymptotisch die Darstellung

$$s(x, t) \approx \sum_{i=1}^N s_i(c_i, x + c_i t + d_i)$$

hat, so folgt mit asymptotischen Argumenten für $t \rightarrow \pm\infty$

$$\Phi(s) (s_i)_x = \Phi \left(\sum_{j=1}^N s_j \right) (s_i)_x = \Phi(s_i) (s_i)_x = c_i (s_i)_x .$$

Hierbei beachte man, daß wegen der lokalisierten Form von $(s_i)_x$ und der Form der expliziten Abhängigkeit des Rekursionsoperators von s die Anwendung $\Phi(s)(s_i)_x$ lediglich $\Phi(s_i)(s_i)_x$ ergibt. Insbesondere ist also $(s_i)_x$ für $t \rightarrow \pm\infty$ ein Eigenvektor von $\Phi(s)$ zum Eigenwert c_i . Asymptotisch erhalten wir daher die Dekomposition von s_x in Eigenvektoren ϕ_i von $\Phi(s)$

$$s_x(x, t) \approx \sum_{i=1}^N (s_i (c_i, x + c_i t + d_i))_x \approx \sum_{i=1}^N \phi_i(s) . \quad (3.5)$$

Mit den Methoden in [35] und [38] folgt daraus bereits, daß die Dekomposition (3.5) von s_x in Eigenvektoren ϕ_i von Φ für alle Zeiten gilt, d.h.

$$K_0(s) = s_x = \sum_{i=1}^N \phi_i(s) . \quad (3.6)$$

Insbesondere erhalten wir aus der Definition der Symmetrien $K_n = \Phi^n K_0$ deren spektrale Dekomposition als

$$K_n(s) = \sum_{i=1}^N c_i^n \phi_i(s) . \quad (3.7)$$

Durch Anwenden von $\prod_{i=1}^N (\Phi - c_i)$ auf die Gleichung (3.6) finden wir weiterhin

$$\begin{aligned} 0 &= (\Phi(s) - c_1) (\Phi(s) - c_2) \dots (\Phi(s) - c_N) K_0(s) = \\ &= \left(\sum_{n=0}^N \alpha_n(c_1, \dots, c_N) \Phi^n(s) \right) K_0(s) = \sum_{n=0}^N \alpha_n(c_1, \dots, c_N) K_n(s) . \end{aligned}$$

Damit ist für jede N -Soliton Lösung s gezeigt, daß es Skalarfelder $\alpha_0, \dots, \alpha_N \in \mathcal{F}(M_N)$ gibt, so daß s die Charakterisierung (3.3) erfullt. Aus der Konstruktion ergibt sich darüberhinaus, daß jedes Skalarfeld α_n die symmetrische Funktion der Ordnung n von c_1, \dots, c_N ist. Da die Geschwindigkeiten $c_i(s)$ während der zeitlichen Entwicklung von s konstant bleiben, sind sie -interpretiert in Abhängigkeit von s - Erhaltungsgrößen für den Fluß (3.4), der die Dynamik von s bestimmt. Die analoge Aussage trifft dann auch auf die Skalarfelder $\alpha_n(s)$ zu.

Ist umgekehrt eine invariante Untermannigfaltigkeit von M durch

$$\sum_{n=0}^N \alpha_n(u) K_n(u) = 0 \quad (3.8)$$

gegeben, wobei das Polynom $\sum_{n=0}^N \alpha_n x^n$ nur einfache Nullstellen hat, so folgt unter geeigneten Rand- bzw. Zwangsbedingungen, daß jede Lösung von (3.8)

eine gemäß der Definition (3.1) nicht-degenerierte N -Soliton Lösung von (3.4) ist ([43]).

Setzt man also die Existenz eines Rekursionsoperators voraus, so haben die obigen Betrachtungen gezeigt, daß die Lösungsmenge von (3.8) unter geeigneten Rand- bzw. Zwangsbedingungen tatsächlich die $2N$ -dimensionale Mannigfaltigkeit aller nicht-degenerierten N -Soliton Lösungen beschreibt. Wir können daher im nicht-hamiltonischen Fall die Charakterisierung in (3.8) als von der Asymptotik losgelöste Definition einer N -Soliton Lösung nehmen. Als formale Definition ist (3.8) natürlich auch im hamiltonischen Fall anwendbar. Allerdings stellt sich die Frage, ob diese von der Asymptotik unabhängige Definition ebenfalls auf die physikalisch definierten N -Soliton Lösungen führt. Anhand der BO läßt sich eine hinreichende Bedingung für die Bejahung dieser Frage im hamiltonischen Fall herauskristallisieren. Für die expliziten Überlegungen verweisen wir auf den Anhang A und halten hier als Ergebnis dieses Kapitels fest (vgl. auch [43]):

Definition (3.2): Es sei s eine Lösung der Evolutionsgleichung (3.4). Erfüllt s zusätzlich eine Relation

$$\sum_{n=0}^N \alpha_n(s) K_n(s) = 0 , \quad (3.9)$$

wobei $\sum_{n=0}^N \alpha_n x^n$ ein Polynom mit nur einfachen Nullstellen ist, so heißt s eine **N -Soliton Lösung** von (3.4).

Bemerkung (3.4):

- (1) Unter geeigneten Rand- und Zwangsbedingungen an s beschreibt (3.9) also die $2N$ -dimensionale Mannigfaltigkeit M_N der in Definition (3.1) durch die Asymptotik gegebenen N -Soliton Lösungen. Im weiteren nehmen wir diese Rand- und Zwangsbedingungen als festgelegt an und betrachten Definition (3.2) als Definition von M_N . Wie in Bemerkung (3.1) bereits erwähnt, läßt sich M_N durch die asymptotischen Daten c_i und d_i (bzw. durch c_i und q_i) parametrisieren.
- (2) Statt in der Darstellung $\sum_{n=0}^N \alpha_n(s) K_n(s) = 0$ die Normierung $\alpha_N = 1$ zu verwenden, setzen wir $\alpha_0 := 1$. Dann sind natürlich $\frac{\alpha_n}{\alpha_N}$ die symmetrischen Funktionen der Geschwindigkeiten.
- (3) Um im nächsten Kapitel eine symmetrische Schreibweise der Ergebnisse zu erhalten, ersetzen wir im hamiltonischen Fall noch α_n durch $\alpha_n(n+\varrho)$ für jedes $n = 0, \dots, N$. Wir verwenden also die definierende Gleichung (3.9) der N -Soliton Lösungen in der folgenden Normierung

$$\sum_{n=0}^N \alpha_n(s) \kappa_n K_n(s) = 0 . \quad (3.10)$$

Hierbei sind für $n = 0, \dots, N$ die Konstanten $\kappa_n \in \mathbb{N}$ und tragen die Werteigkeit $\kappa_n := 1$ für alle $n = 0, \dots, N$ im nicht-hamiltonischen Fall und die Werteigkeit $\kappa_n := n + \varrho$ für alle $n = 0, \dots, N$ im hamiltonischen Fall. Wie oben festgelegt habe das Polynom $\sum_{n=0}^N \alpha_n \kappa_n x^n$ nur einfache Nullstellen.

- (4) Die Charakterisierung einer N -Soliton Lösung durch

$$\sum_{n=0}^N \alpha_n(s) \kappa_n K_n(s) = 0$$

findet man als Konsequenz der Inversen Streumethode zum ersten Mal in ([51]). Ebenfalls 1974 wurde diese Darstellung zur Konstruktion von Finite-Gap Solutions der KdV verwandt ([80]) und auf die analoge Repräsentation für andere Randbedingungen hingewiesen. Der Zusammenhang von Soliton Lösungen mit den spektralen Eigenschaften des Rekursionsoperators wurde zum ersten Mal in [35] hergestellt, die Ergebnisse und Beweise im nicht-hamiltonischen Fall findet man ausführlich in [43]. Für den hamiltonischen Fall sei auf den Anhang A verwiesen.

3.3 Das Tangentialbündel von M_N

Wie wir in Bemerkung (3.4) (1) gesehen haben, läßt sich M_N mit Hilfe der asymptotischen Daten von N -Soliton Lösungen parametrisieren. Diese Darstellung interessiert uns im Moment noch nicht, sondern wir suchen die Beschreibung der Untermannigfaltigkeit M_N in den bekannten Größen auf M . In anderen Worten wir wollen herausfinden, wie sich Rekursionsoperator, symplektischer Operator, Symmetrien und Mastersymmetrien von der unendlich dimensionalen Mannigfaltigkeit M auf die endlich dimensionale Untermannigfaltigkeit M_N reduzieren lassen. Dazu beginnen wir mit der Bestimmung der Vektorfelder $V \in X(M)$, die tangential an M_N sind, d.h. für die auch $V \in X(M_N)$ gilt.

Ist $V \in X(M_N)$, so muß für jede N -Soliton Lösung $s \in M_N$ die Richtungsableitung

$$\left(\sum_{n=0}^N \alpha_n(s) \kappa_n K_n(s) \right)' [V(s)] = 0 \quad (3.11)$$

verschwinden, d.h. V muß die Gleichung

$$\sum_{n=0}^N \alpha_n(s)' [V(s)] \kappa_n K_n(s) + \alpha_n(s) \kappa_n K_n(s)' [V(s)] = 0 \quad (3.12)$$

erfüllen. Wegen

$$\sum_{n=0}^N \alpha_n(s) \kappa_n K_n(s) = 0 \quad \forall s \in M_N \quad (3.13)$$

gilt trivialerweise

$$0 = V(s)' \left[\sum_{n=0}^N \alpha_n(s) \kappa_n K_n(s) \right] = \sum_{n=0}^N \alpha_n(s) \kappa_n V(s)' [K_n(s)] . \quad (3.14)$$

Die Gleichung (3.14) kombiniert mit (3.12) ergibt die folgende Charakterisierung für tangentiale Vektorfelder $V \in X(M_N)$

$$\sum_{n=0}^N \kappa_n (\langle \operatorname{grad} \alpha_n(s), V(s) \rangle K_n(s) + \alpha_n(s) [V(s), K_n(s)]) = 0 . \quad (3.15)$$

Da es sich hierbei im Gegensatz zu (3.11) um eine (unter Kartenwechsel) invariante Bedingung an die tangentiale Vektorfelder handelt, ist die Charakterisierung (3.15) der Formulierung (3.11) vorzuziehen. Gesucht sind also im folgenden diejenigen Vektorfelder $V \in X(M)$, die (3.15) erfüllen. Um den Term $\langle \operatorname{grad} \alpha_n(s), V(s) \rangle$ behandeln zu können, sammeln wir zunächst Informationen über die skalaren Funktionen $\alpha_n : M_N \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 0, \dots, N$. Aus dem vorherigen Kapitel wissen wir bereits, daß die α_n Erhaltungsgrößen sind. Wir stellen nun den Zusammenhang zwischen α_n und den in Kapitel 2 eingeführten Erhaltungsgrößen H_n her.

Mit der Definition von H_n gilt insbesondere (vgl. (2.6)/(2.22))

$$H_n(s) = \langle J(s) K_n(s), \tau_0(s) \rangle .$$

Da jedes H_n konstant ist unter dem Fluß $u_t = K_1(u)$ können wir $H_n(s)$ für $t \rightarrow +\infty$ auswerten und erhalten eine gültige Darstellung von $H_n(s)$ für alle Zeiten t . Für $t \rightarrow +\infty$ ist K_n darstellbar als (vgl. (3.5), (3.7) und Gleichung (A.4) im Anhang)

$$K_n(s) \approx \mu_1 \sum_{i=1}^N c_i^n (s_i)_x$$

mit einer festen Konstanten $\mu_1 \neq 0$. Hierbei bezeichnen wie in den vorherigen Kapiteln s_i die bei der N -Soliton Lösung s asymptotisch auftretenden Ein-Solitonen. Weil τ_0 lokal in s ist, folgt aus der lokalisierten Form von $(s_i)_x$ und der Form der expliziten Abhängigkeit des Operators $J(s)$ von s für $t \rightarrow +\infty$

$$H_n(s) \approx \mu_1 \sum_{i=1}^N c_i^n \langle J(s_i) (s_i)_x, \tau_0(s_i) \rangle .$$

Unter der Annahme (die in Kapitel 3.4 begründet wird) daß asymptotisch

$$\langle J(s_i) (s_i)_x, \tau_0(s_i) \rangle = \mu_2 c_i^\nu \quad (3.16)$$

ist, wobei die Zahlen $0 \neq \mu_2$ und ν von der betrachteten Evolutionsgleichung abhängen, gilt zunächst asymptotisch für $t \rightarrow +\infty$

$$H_n(s) \approx \delta \sum_{i=1}^N c_i^{n+\nu} .$$

Hierbei haben wir zur Abkürzung $\delta = \mu_1 \mu_2 \neq 0$ gesetzt. Da jedes H_n eine Erhaltungsgröße ist, gilt die Darstellung

$$H_n(s) = \delta \sum_{i=1}^N c_i^{n+\nu} \quad (3.17)$$

für alle Zeiten t . Im weiteren setzen wir (3.16) und (3.17) als gültig voraus und formulieren

Lemma (3.1):

(1) Die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} \kappa_1 H_1 & \kappa_2 H_2 & \dots & \kappa_N H_N \\ \kappa_1 H_2 & \kappa_2 H_3 & \dots & \kappa_N H_{N+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \kappa_1 H_N & \kappa_2 H_{N+1} & \dots & \kappa_N H_{2N-1} \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

ist auf M_N invertierbar.

(2) Die symmetrischen Matrizen

$$B_m := \begin{pmatrix} H_m & H_{m+1} & \dots & H_{m+N-1} \\ H_{m+1} & H_{m+2} & \dots & H_{m+N} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ H_{m+N-1} & H_{m+N} & \dots & H_{m+2N-2} \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

sind auf M_N für jedes $m \in \mathbb{N}_0$ invertierbar.

Beweis: (1): Mit der Voraussetzung (3.17) gilt

$$\det A = \left(\prod_{i=1}^N \kappa_i \right) \begin{vmatrix} H_1 & H_2 & \dots & H_N \\ H_2 & H_3 & \dots & H_{N+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ H_N & H_{N+1} & \dots & H_{2N-1} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \delta^N \left(\prod_{i=1}^N \kappa_i \right) \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^N c_i^{1+\nu} & \sum_{i=1}^N c_i^{2+\nu} & \dots & \sum_{i=1}^N c_i^{N+\nu} \\ \sum_{i=1}^N c_i^{2+\nu} & \sum_{i=1}^N c_i^{3+\nu} & \dots & \sum_{i=1}^N c_i^{N+1+\nu} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \sum_{i=1}^N c_i^{N+\nu} & \sum_{i=1}^N c_i^{N+1+\nu} & \dots & \sum_{i=1}^N c_i^{2N-1+\nu} \end{vmatrix} \\
&= \delta^N \left(\prod_{i=1}^N \kappa_i \right) \begin{vmatrix} c_1^{1+\nu} & c_2^{1+\nu} & \dots & c_N^{1+\nu} \\ c_1^{2+\nu} & c_2^{2+\nu} & \dots & c_N^{2+\nu} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_1^{N+\nu} & c_2^{N+\nu} & \dots & c_N^{N+\nu} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & c_1 & c_1^2 & \dots & c_1^{N-1} \\ 1 & c_2 & c_2^2 & \dots & c_2^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & c_N & c_N^2 & \dots & c_N^{N-1} \end{vmatrix} \\
&= \delta^N \left(\prod_{i=1}^N \kappa_i \right) \left(\prod_{i=1}^N c_i^{1+\nu} \right) \prod_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^N (c_j - c_i)^2.
\end{aligned}$$

Da $\delta \neq 0$, $\kappa_i \neq 0$ und $c_i \neq 0$ für alle $i = 1, \dots, N$ und die Geschwindigkeiten c_i paarweise verschieden sind, folgt die Behauptung.

(2): Analog dem Teil (1) gilt für jedes $m \in \mathbb{N}_0$

$$\det B_m = \delta^N \left(\prod_{i=1}^N c_i^{1+\nu} \right) \prod_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^N (c_j - c_i)^2.$$

□

Bemerkung (3.5): Als nicht-degenerierte N -Soliton Lösungen betrachten wir in dieser Arbeit N -Soliton Lösungen mit paarweise verschiedenen Geschwindigkeiten c_1, \dots, c_N (vgl. Kapitel 3.1). Diese Einschränkung ist nach dem Beweis von Lemma (3.1) äquivalent zur Invertierbarkeit der Matrix A (bzw. der Matrizen B_m).

Mit Lemma (3.1) können wir die Skalarfelder $\alpha_n \in \mathcal{F}(M_N)$ als Funktionen der bekannten Erhaltungsgrößen H_n darstellen.

Satz (3.1): Auf M_N gilt für alle $i = 1, \dots, N$

$$\alpha_i = - \frac{\det A_i}{\det A} . \quad (3.20)$$

Hierbei ist A durch (3.18) gegeben. Die Matrizen A_i werden aus A erzeugt, indem man die i -te Spalte von A durch $\kappa_0 H_0, \dots, \kappa_{N-1} H_{N-1}$ ersetzt:

$$A_i := \begin{pmatrix} \kappa_1 H_1 & \dots & \kappa_{i-1} H_{i-1} & \kappa_0 H_0 & \kappa_{i+1} H_{i+1} & \dots & \kappa_N H_N \\ \kappa_1 H_2 & \dots & \kappa_{i-1} H_i & \kappa_0 H_1 & \kappa_{i+1} H_{i+2} & \dots & \kappa_N H_{N+1} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \kappa_1 H_N & \dots & \kappa_{i-1} H_{N+i-2} & \kappa_0 H_{N-1} & \kappa_{i+1} H_{N+i} & \dots & \kappa_N H_{2N-1} \end{pmatrix}.$$

Beweis: Durch Anwenden von $J\tau_r$ auf $\sum_{n=0}^N \alpha_n \kappa_n K_n = 0$ erhalten wir mit (2.7) und (2.22) auf M_N die für das weitere sehr wichtigen Gleichungen

$$\sum_{n=0}^N \alpha_n \kappa_n H_{n+r} = 0 \quad \text{für alle } r \in \mathbb{N}_0. \quad (3.21)$$

Da wir $\alpha_0 = 1$ normiert haben, nehmen wir für $r = 0, 1, \dots, N-1$ die Gleichungen (3.21) als lineares Gleichungssystem für $\alpha_1, \dots, \alpha_N$, d.h.

$$\begin{pmatrix} \kappa_1 H_1 & \kappa_2 H_2 & \dots & \kappa_N H_N \\ \kappa_1 H_2 & \kappa_2 H_3 & \dots & \kappa_N H_{N+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \kappa_1 H_N & \kappa_2 H_{N+1} & \dots & \kappa_N H_{2N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \kappa_0 H_0 \\ \kappa_0 H_1 \\ \vdots \\ \kappa_0 H_{N-1} \end{pmatrix}.$$

Mit der Cramer'schen Regel und Lemma (3.1) folgt die Behauptung. □

Bemerkung (3.6):

(1) Mit der Wahl von

$$\sum_{n=0}^N \alpha_n \kappa_n H_{n+r} = 0, \quad r = 0, 1, \dots, N-1$$

zur Bestimmung von $\alpha_n = \alpha_n(H_0, H_1, \dots, H_{2N-1})$ sind die α_n durch die Normierung $\alpha_0 = 1$ und durch (3.20) eindeutig festgelegt. Jede andere Wahl von N aufeinanderfolgenden Gleichungen der Form

$$\sum_{n=0}^N \alpha_n \kappa_n H_{n+r} = 0 \quad \text{mit } r = p, p+1, \dots, p+N-1$$

mit einer beliebigen natürlichen Zahl p ergibt analog zu Satz (3.1) die eindeutige Darstellung von α_n durch $\alpha_n = \alpha_n(H_p, H_{p+1}, \dots, H_{2N-1+p})$.

- (2) Zu einer N -Soliton Lösung $s \in M_N$ gibt Satz (3.1) die Skalarfelder $\alpha_n(s) = \alpha_n(H_0(s), H_1(s), \dots, H_{2N-1}(s))$ als Funktionen der $H_n(s)$ auf M_N . Da die Skalarfelder $H_n \in \mathcal{F}(M)$ auf der gesamten Mannigfaltigkeit definiert sind, setzen wir für jedes $u \in M$

$$\alpha_n(u) := \alpha_n(H_0(u), H_1(u), \dots, H_{2N-1}(u)) \quad (3.22)$$

und erhalten so Skalarfelder α_n , die ebenfalls auf ganz M definiert sind.

- (3) Drücken wir die Skalarfelder $\alpha_n(s)$ auf M_N durch (3.20) aus, setzen dann für jedes $u \in M$ $\alpha_n(u)$ gemäß (3.22), so sind die Gleichungen

$$\sum_{n=0}^N \alpha_n(u) \kappa_n H_{n+r}(u) = 0 \quad (3.23)$$

für $r = 0, 1, \dots, N-1$ identisch, d.h. für alle $u \in M$ erfüllt.

Für das weitere wählen wir α_n auf M_N gemäß Satz (3.1) als

$$\alpha_n = \alpha_n(H_0, H_1, \dots, H_{2N-1}) .$$

Dann sind die Gradienten der α_n gegeben durch

$$\text{grad } \alpha_n = \sum_{k=0}^{2N-1} \frac{\partial \alpha_n}{\partial H_k} \text{grad } H_k , \quad n = 0, 1, \dots, N , \quad (3.24)$$

insbesondere gilt $\text{grad } \alpha_0 = 0$.

Nach diesen Vorbetrachtungen wenden wir uns den tangentialen Vektorfeldern an M_N zu. Für jedes $V(s) = K_r(s)$ ist die Gleichung (3.15) für tangentiale Vektorfelder erfüllt, da jedes α_n und jedes K_n Erhaltungsgröße bzw. Symmetrie zu K_r ist. Man beachte hierbei, daß wir auf Grund von Bemerkung (3.6) (2) die Lie Ableitungen in (3.15) zunächst auf der gesamten Mannigfaltigkeit (wo sie wohl definiert sind) berechnen und die so erhaltenen Ergebnisse auf der Untermannigfaltigkeit evaluieren. Dieses Prinzip wird im weiteren noch mehrfach angewendet, aber nicht mehr explizit genannt.

Um die Abhängigkeiten der höheren Symmetrien zu untersuchen, machen wir für ein $l \in \mathbb{N}$ den Ansatz

$$\sum_{n=0}^{N-1} \beta_n(s) K_{n+l}(s) = 0 . \quad (3.25)$$

Durch Anwenden von $J\tau_0, J\tau_1, \dots, J\tau_{N-1}$ auf (3.25) erhalten wir

$$\sum_{n=0}^{N-1} \beta_n(s) H_{n+l+r}(s) = 0$$

für $r = 0, 1, \dots, N-1$. Da die Matrix B_l auf M_N invertierbar ist, folgt $\beta_0 = \beta_1 = \dots = \beta_{N-1} = 0$, d.h. $K_l(s), K_{l+1}(s), \dots, K_{N+l-1}(s)$ sind linear unabhängig. Wir betrachten nun Kombinationen von $(N+1)$ -aufeinanderfolgenden Symmetrien und machen für ein $l \in \mathbb{N}$ den Ansatz

$$\sum_{n=0}^N \beta_n(s) K_{n+l}(s) = 0 \quad \text{mit} \quad \beta_N(s) \neq 0 .$$

Durch Anwenden von $J\tau_0, J\tau_1, \dots, J\tau_{N-1}$ erhalten wir wiederum

$$\sum_{n=0}^N \beta_n(s) H_{n+l+r}(s) = 0 , \quad r = 0, 1, \dots, N-1 .$$

Wegen Bemerkung (3.6) (1) ist dieses Gleichungssystem (bis auf ein konstantes Skalarfeld $\mu(s)$) eindeutig lösbar durch

$$\beta_n(s) = \mu(s) \alpha_n(s) \kappa_n .$$

Da $\beta_N(s) \neq 0$, folgt $\mu(s) \neq 0$ und insgesamt erhalten wir

Lemma (3.2): Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist $K_n(s)$ tangential an M_N , d.h. $K_n(s) \in T_s M_N$. Außerdem ist die folgende Relation gültig für jedes $r \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{n=0}^N \alpha_n(s) \kappa_n K_{n+r}(s) = 0 . \quad (3.26)$$

Bemerkung (3.7): Im nicht-hamiltonischen Fall erhält man die Gleichungen (3.26) sofort durch r -faches Anwenden des Rekursionsoperators $\Phi(s)$ auf die Ausgangsgleichung

$$\sum_{n=0}^N \alpha_n(s) \kappa_n K_n(s) = 0 .$$

Um den Tangentialraum $T_s M_N$ vollständig zu beschreiben, fehlen N weitere, von $K_0(s), K_1(s), \dots, K_{N-1}(s)$, unabhängige Vektoren. Im nächsten Abschnitt wollen wir zeigen, daß für jedes $m \in \mathbb{N}_0$ auch die Mastersymmetrie $\tau_m(s)$ im Tangentialraum liegt, d.h. nachzuweisen ist

$$\sum_{n=0}^N \kappa_n (\langle \text{grad } \alpha_n(s), \tau_m(s) \rangle K_n(s) + \alpha_n(s) [\tau_m(s), K_n(s)]) = 0 .$$

Wie zuvor sammeln wir zuerst Informationen über $\langle \text{grad } \alpha_n(s), \tau_m(s) \rangle$. Dafür erinnern wir uns, daß für $r = 0, 1, \dots, N-1$ die Gleichungen

$$\sum_{n=0}^N \alpha_n(u) \kappa_n H_{n+r}(u) = 0 \quad (3.27)$$

für alle $u \in M$ gelten (vgl. Bemerkung (3.6) (3)). Die Lie Ableitung von (3.27) in Richtung von $\tau_m(u) \in T_u M$ ist daher wohl definiert und ergibt

$$\sum_{n=0}^N \kappa_n (\alpha_n(u)' [\tau_m(u)] H_{n+r}(u) + \alpha_n(u) H_{n+r}(u)' [\tau_m(u)]) = 0 . \quad (3.28)$$

Mit der Definition der Erhaltungsgrößen H_n und ihrer Gradienten (vgl. (2.6)/(2.8) und (2.19)/(2.22)) gilt für alle $u \in M$

$$\begin{aligned} H_{n+r}(u)' [\tau_m(u)] &= \langle \text{grad } H_{n+r}(u), \tau_m(u) \rangle = \\ &= (n+r+\varrho+\lambda) \langle J K_{n+r}(u), \tau_m(u) \rangle = \\ &= (n+r+\varrho+\lambda) H_{n+r+m}(u) , \end{aligned}$$

wobei im hamiltonischen Fall wegen $L_{\tau_0} J = 0 \quad \lambda = 0$ gesetzt wird. Gehen wir zurück auf die N -Soliton Mannigfaltigkeit M_N , so verschwindet wegen (3.21) die Summe

$$(r+\varrho+\lambda) \sum_{n=0}^N \alpha_n(s) \kappa_n H_{n+r+m}(s)$$

und wir erhalten aus (3.28) für alle $s \in M_N$, $m \in \mathbb{N}_0$ und $r = 0, 1, \dots, N-1$

$$\sum_{n=0}^N \kappa_n (\alpha_n(s)' [\tau_m(s)] H_{n+r}(s) + n \alpha_n(s) H_{n+r+m}(s)) = 0 . \quad (3.29)$$

Für den Rest des Kapitels befinden wir uns auf M_N und lassen daher aus schreibtechnischen Gründen die Abhängigkeit der auftretenden Felder von $s \in M_N$ weg.

Mit der Definition der symmetrischen Matrizen B_m (vgl. Lemma (3.1) (2)) gilt

Satz (3.2): Für jedes $m \in \mathbb{N}_0$ ist $\alpha_n' [\tau_m]$ als eindeutige Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} \kappa_1 \alpha_1' [\tau_m] \\ \kappa_2 \alpha_2' [\tau_m] \\ \vdots \\ \kappa_N \alpha_N' [\tau_m] \end{pmatrix} = - B_1^{-1} B_{m+1} \begin{pmatrix} 1 \kappa_1 \alpha_1 \\ 2 \kappa_2 \alpha_2 \\ \vdots \\ N \kappa_N \alpha_N \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

gegeben.

Beweis: Wegen der Normierung $\alpha_0 = 1$ ist $\text{grad } \alpha_0 = 0$, d.h. $\alpha_0'[\tau_m] = 0$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$. Mit der Definition von B_m lassen sich die Gleichungen (3.29) dann schreiben als

$$B_1 \begin{pmatrix} \kappa_1 \alpha_1'[\tau_m] \\ \kappa_2 \alpha_2'[\tau_m] \\ \vdots \\ \kappa_N \alpha_N'[\tau_m] \end{pmatrix} = -B_{m+1} \begin{pmatrix} 1 \kappa_1 \alpha_1 \\ 2 \kappa_2 \alpha_2 \\ \vdots \\ N \kappa_N \alpha_N \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

und die Behauptung folgt aus der Invertierbarkeit von B_1 . \square

Lemma (3.3): Für alle $m \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$B_{m+1} B_1^{-1} \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{1+m} \\ H_{2+m} \\ \vdots \\ H_{N+m} \end{pmatrix}. \quad (3.32)$$

Beweis: Da $\sum_{n=0}^N \alpha_n \kappa_n H_{n+r} = 0$ für jedes $r \in \mathbb{N}_0$ kann man jede Erhaltungsgröße H_m in H_1, H_2, \dots, H_N ausdrücken. Für jedes $m \in \mathbb{N}_0$ und $i = 1, \dots, N$ existieren also Koeffizienten $\gamma_{i1}, \gamma_{i2}, \dots, \gamma_{iN} \in \mathcal{F}(M_N)$ mit

$$H_{i+m} = \gamma_{i1}(m) H_1 + \gamma_{i2}(m) H_2 + \dots + \gamma_{iN}(m) H_N.$$

In Matrixschreibweise erhalten wir

$$\Gamma(m) \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_N \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \gamma_{11}(m) & \gamma_{12}(m) & \dots & \gamma_{1N}(m) \\ \gamma_{21}(m) & \gamma_{22}(m) & \dots & \gamma_{2N}(m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{N1}(m) & \gamma_{N2}(m) & \dots & \gamma_{NN}(m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{1+m} \\ H_{2+m} \\ \vdots \\ H_{N+m} \end{pmatrix}.$$

Natürlich kann man als "Basis" auch H_2, H_3, \dots, H_{N+1} wählen und für $i = 1, \dots, N$ das Skalarfeld H_{i+m+1} in H_2, H_3, \dots, H_{N+1} beschreiben. Da sich die Abhängigkeiten wegen (3.21) nicht ändern, gilt

$$H_{i+m+1} = \gamma_{i1}(m) H_2 + \gamma_{i2}(m) H_3 + \dots + \gamma_{iN}(m) H_{N+1}.$$

Man erhält also insgesamt

$$\Gamma(m) \begin{pmatrix} H_1 & H_2 & \dots & H_N \\ H_2 & H_3 & \dots & H_{N+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_N & H_{N+1} & \dots & H_{2N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{1+m} & H_{2+m} & \dots & H_{N+m} \\ H_{2+m} & H_{3+m} & \dots & H_{N+1+m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{N+m} & H_{N+1+m} & \dots & H_{2N-1+m} \end{pmatrix}$$

oder äquivalent

$$\Gamma(m) = B_{m+1} B_1^{-1} .$$

□

Satz (3.3): Jede Mastersymmetrie τ_m erfüllt die Gleichung

$$\sum_{n=0}^N \kappa_n (\langle \text{grad } \alpha_n, \tau_m \rangle K_n + \alpha_n [\tau_m, K_n]) = 0 \quad (3.33)$$

für tangentiale Vektorfelder an M_N , d.h. $\tau_m(s) \in T_s M_N$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$.

Beweis: Da die Abhängigkeiten der Vektorfelder K_n

$$\sum_{n=0}^N \kappa_n \alpha_n K_{n+r} = 0 \quad , \quad r \in \mathbb{N}_0 \quad (3.34)$$

auf M_N mit den Abhängigkeiten der Skalarfelder H_{n+r} übereinstimmen (vgl. (3.21)), gilt mit dem Beweis von Lemma (3.3) für jedes $m \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{pmatrix} K_{1+m} \\ K_{2+m} \\ \vdots \\ K_{N+m} \end{pmatrix} = \Gamma(m) \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ \vdots \\ K_N \end{pmatrix} = B_{m+1} B_1^{-1} \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ \vdots \\ K_N \end{pmatrix} . \quad (3.35)$$

Mit den Kommutatorrelationen zwischen den Symmetrien und den Mastersymmetrien (vgl. (1.12)/(1.17)) und (3.34) erhält man aus (3.33) die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n=0}^N \kappa_n (\alpha_n' [\tau_m] K_n + \alpha_n n K_{n+m}) \\ &= \sum_{n=1}^N \kappa_n (\alpha_n' [\tau_m] K_n + \alpha_n n K_{n+m}) , \end{aligned} \quad (3.36)$$

deren Erfülltsein wir nachzuprüfen haben. Mit (3.35) folgt für jedes $m \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{n=1}^N \alpha_n \kappa_n n K_{n+m} = \sum_{n=1}^N \alpha_n \kappa_n n (\sum_{i=1}^N \gamma_{ni}(m) K_i) . \quad (3.37)$$

Aus Satz (3.2) finden wir auf Grund der Symmetrie der Matrizen B_1^{-1} und B_m

$$\begin{pmatrix} \kappa_1 \alpha_1' [\tau_m] \\ \kappa_2 \alpha_2' [\tau_m] \\ \vdots \\ \kappa_N \alpha_N' [\tau_m] \end{pmatrix} = -\Gamma^*(m) \begin{pmatrix} 1 \kappa_1 \alpha_1 \\ 2 \kappa_2 \alpha_2 \\ \vdots \\ N \kappa_N \alpha_N \end{pmatrix} ,$$

wobei $\Gamma^*(m)$ die Transponierte von $\Gamma(m)$ ist. Damit folgt

$$\sum_{n=1}^N \kappa_n \alpha_n' [\tau_m] K_n = - \sum_{n=1}^N K_n \left(\sum_{i=1}^N i \kappa_i \alpha_i \gamma_{in}(m) \right) .$$

Zusammen mit (3.37) zeigt die letzte Gleichung die Gültigkeit von (3.36). \square

Da wir bereits N linear unabhängige Vektoren $K_0(s), K_1(s), \dots, K_{N-1}(s)$ in $T_s M_N$ gefunden hatten, können nur noch N von $K_0(s), K_1(s), \dots, K_{N-1}(s)$ unabhängige Vektoren unter den Mastersymmetrien $\tau_m(s)$ existieren. Diese Abhängigkeit wollen wir nun untersuchen.

Wir wählen zwei beliebige natürliche Zahlen $l, p \in \mathbb{N}_0$, beliebige Skalarfelder $\beta_0, \dots, \beta_{N-1}, \gamma_0, \dots, \gamma_{N-1} \in \mathcal{F}(M_N)$ und betrachten für $s \in M_N$ die Linearkombination

$$\sum_{n=0}^{N-1} (\beta_n(s) \tau_{n+l}(s) + \gamma_n(s) K_{n+p}(s)) = 0 . \quad (3.38)$$

Durch Anwenden von $JK_0, JK_1, \dots, JK_{N-1}$ auf (3.38) erhalten wir für $r = 0, 1, \dots, N-1$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \beta_n(s) H_{n+r+l}(s) = 0 . \quad (3.39)$$

Da die Matrix B_l invertierbar ist, folgt $\beta_0 = \beta_1 = \dots = \beta_{N-1} = 0$, d.h. es gilt

$$\sum_{n=0}^{N-1} \gamma_n(s) K_{n+p}(s) = 0 . \quad (3.40)$$

Analog ergibt das Anwenden von $J\tau_0, J\tau_1, \dots, J\tau_{N-1}$ auf (3.40) und die Invertierbarkeit von B_p

$$\gamma_0 = \gamma_1 = \dots = \gamma_{N-1} = 0 ,$$

d.h. die Vektoren $K_p(s), \dots, K_{N-1+p}(s), \tau_l(s), \dots, \tau_{N-1+l}(s) \in T_s M_N$ sind linear unabhängig. Da die Dimension von $T_s M_N$ gleich $2N$ ist, gilt also

Satz (3.4): Für jedes $s \in M_N$, $l, p \in \mathbb{N}_0$ bilden die Vektoren

$$K_p(s), \dots, K_{N-1+p}(s), \tau_l(s), \dots, \tau_{N-1+l}(s)$$

eine Basis von $T_s M_N$.

Da die Abhängigkeit der Symmetrien durch

$$\sum_{n=0}^N \alpha_n \kappa_n K_{n+r} = 0 , \quad r \in \mathbb{N}_0$$

bereits festgelegt ist, wollen wir nun noch die Linearkombinationen

$$\sum_{n=0}^N \kappa_n \alpha_n \tau_{n+r}$$

untersuchen.

Im nicht-hamiltonischen Fall starten wir für ein $l \in \mathbb{N}_0$ mit dem Ansatz

$$\sum_{n=0}^N \beta_n \tau_{n+l} = \sum_{i=0}^{N-1} \gamma_i K_i , \quad (3.41)$$

wobei $\beta_0, \dots, \beta_N, \gamma_0, \dots, \gamma_{N-1}$ Skalarfelder auf M_N seien. Wegen Satz (3.4) sei mindestens ein $\beta_n \neq 0$. Wie oben erhalten wir durch Anwenden von $J\tau_0, J\tau_1, \dots, J\tau_{N-1}$ auf (3.41) das Ergebnis $\gamma_0 = \gamma_1 = \dots = \gamma_{N-1} = 0$, d.h. zu jedem $l \in \mathbb{N}_0$ existieren $\beta_0, \dots, \beta_N \in \mathcal{F}(M_N)$ mit mindestens einem $\beta_n \neq 0$ und

$$\sum_{n=0}^N \beta_n \tau_{n+l} = 0 . \quad (3.42)$$

Um die Skalarfelder β_n zu bestimmen, wenden wir $JK_0, JK_1, \dots, JK_{N-1}$ auf (3.42) an. Dann folgt

$$\sum_{n=0}^N \beta_n H_{n+r+l} = 0 \quad \text{für } r = 0, 1, \dots, N-1$$

und wir erhalten mit Satz (3.1) aus der Eindeutigkeit der α_n

$$\beta_n = \mu \kappa_n \alpha_n \quad \text{für } n = 0, 1, \dots, N ,$$

wobei $\mu(s) \neq 0$ ein beliebiges Skalarfeld auf M_N ist. Insbesondere gilt also im nicht-hamiltonischen Fall auf M_N für alle $r \in \mathbb{N}_0$ die Relation

$$\sum_{n=0}^N \kappa_n \alpha_n \tau_{n+r} = 0 . \quad (3.43)$$

Existiert im hamiltonischen Fall eine Mastersymmetrie 2-ter Stufe S_{-1} (vgl. Kapitel 2.2), so erhält man mit dem Noether-Theorem (vgl. (2.33)) und durch Anwenden von JS_0 auf

$$\sum_{n=0}^N \alpha_n \kappa_n K_{n+r} = 0 , \quad r \in \mathbb{N}_0$$

die Relationen

$$\sum_{n=0}^N \alpha_n \kappa_n T_{n+r} = 0 , \quad r \in \mathbb{N}_0 . \quad (3.44)$$

Lemma (3.4): Im hamiltonischen Fall gilt unter der Voraussetzung der Existenz von S_{-1} für jedes $r \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{n=0}^N \alpha_n \kappa_n \tau_{n+r} \neq 0 .$$

Beweis: Wir nehmen an, daß es ein $l \in \mathbb{N}_0$ gibt mit

$$\sum_{n=0}^N \alpha_n \kappa_n \tau_{n+l} = 0 . \quad (3.45)$$

Anwenden von $J\tau_0$ auf (3.45) liefert mit (2.22)

$$\sum_{n=0}^N \alpha_n \kappa_n T_{n+l} (n+l) = 0 .$$

Wegen (3.44) folgt daraus

$$\sum_{n=0}^N \alpha_n \kappa_n n T_{n+l} = 0 . \quad (3.46)$$

Da alle Symmetrien tangentiale Vektorfelder an M_N sind, ergibt die Lie Ableitung von (3.46) in Richtung K_0, \dots, K_{N-1}

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n=0}^N n \kappa_n (\alpha_n' [K_r] T_{n+l} + \alpha_n T_{n+l}' [K_r]) \\ &= - \sum_{n=0}^N n \kappa_n \alpha_n < J K_r, T_{n+l} > \\ &= - \sum_{n=0}^N n \kappa_n \alpha_n H_{n+l+r} \quad r = 0, 1, \dots, N-1 . \end{aligned}$$

Hierbei haben wir neben der Antisymmetrie von J und (2.22) ausgenutzt, daß die Skalarfelder α_n Erhaltungsgrößen zu allen Symmetrien sind. Mit der Eindeutigkeit der Linearkombinationen $\sum_{n=0}^N \kappa_n \alpha_n H_{n+l+r} = 0$ für $r = 0, 1, \dots, N-1$ (vgl. Satz (3.1)) erfolgt der Widerspruch. \square

Auf die Linearkombination $\sum_{n=0}^N \kappa_n \alpha_n \tau_{n+r}$ im hamiltonischen Fall werden wir in Kapitel 6.2 zurückkommen.

Bemerkung (3.8): Die sehr symmetrischen Resultate dieses Kapitels lassen vermuten, daß sich hinter den Konstruktionen eine tieferliegende mathematische Struktur verbirgt. Tatsächlich wurde in [42] gezeigt, daß sich die hergeleiteten Relationen aus den algebraischen Eigenschaften symplektischer Ideale ergeben.

Die Ergebnisse dieses sehr technischen Kapitels lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

Zusammenfassung:

- (1) Für eine N -Soliton Lösung $s \in M_N$ mit $\sum_{n=0}^N \kappa_n \alpha_n K_n = 0$ bildet

$$K_p(s), \dots, K_{N-1+p}(s), \tau_l(s), \dots, \tau_{N-1+l}(s)$$

für beliebige $l, p \in \mathbb{N}_0$ eine Basis des Tangentialraumes $T_s M_N$. Insbesondere sind alle Symmetrien K_n und alle Mastersymmetrien τ_n tangential an die Untermannigfaltigkeit M_N .

- (2) Auf M_N gelten für alle $r \in \mathbb{N}_0$ die folgenden Relationen

$$\sum_{n=0}^N \kappa_n \alpha_n K_{n+r} = 0 \quad , \quad \sum_{n=0}^N \kappa_n \alpha_n H_{n+r} = 0 \quad .$$

- (3) Im nicht-hamiltonischen Fall erfüllen die Mastersymmetrien für jedes $r \in \mathbb{N}_0$ auf M_N die Gleichungen

$$\sum_{n=0}^N \kappa_n \alpha_n \tau_{n+r} = 0 \quad .$$

- (4) Existiert im hamiltonischen Fall eine Mastersymmetrie 2-ter Stufe S_{-1} , so sind auf M_N die Relationen

$$\sum_{n=0}^N \kappa_n \alpha_n T_{n+r} = 0 \quad , \quad \sum_{n=0}^N \kappa_n \alpha_n \tau_{n+r} \neq 0 \quad .$$

für alle $r \in \mathbb{N}_0$ erfüllt.

3.4 Beispiele

In diesem Kapitel weisen wir die asymptotische Gültigkeit der fundamentalen Gleichung (3.16)

$$\langle J(s_i)(s_i)_x, \tau_0(s_i) \rangle = \mu_2 c_i^\nu \quad (3.47)$$

für die in Kapitel 2.3 betrachteten Beispiele nach.

Für die **KdV** ist $J(u) = D^{-1}$, $\tau_0(u) = \frac{x}{2}u_x + u$, und die N -Soliton Lösungen sind für $t \rightarrow \pm\infty$ gegeben durch ([1])

$$s(x, t) \approx \sum_{i=1}^N s_i(x, t) = \sum_{i=1}^N \frac{c_i}{2} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{c_i^{1/2}}{2} (x + c_i t + d_i) \right].$$

Man berechnet

$$\begin{aligned} \langle J(s_i)(s_i)_x, \tau_0(s_i) \rangle &= \langle D^{-1}(s_i)_x, \frac{x}{2}(s_i)_x + s_i \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{x}{2} s_i(s_i)_x + s_i^2 \right) dx \\ &= \frac{1}{2} c_i^{3/2}. \end{aligned}$$

Für die **mKdV** erhalten wir $J(u) = D^{-1}$ und $\tau_0(u) = \frac{1}{2}(xu_x + u)$. Die N -Soliton Lösungen sind für $t \rightarrow \pm\infty$ gegeben durch ([67])

$$s(x, t) \approx \sum_{i=1}^N s_i(x, t) = \sum_{i=1}^N c_i^{1/2} \operatorname{sech} \left[c_i^{1/2} (x + c_i t + d_i) \right],$$

und es gilt

$$\begin{aligned} \langle J(s_i)(s_i)_x, \tau_0(s_i) \rangle &= \langle D^{-1}(s_i)_x, \frac{1}{2}(x(s_i)_x + s_i) \rangle \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (s_i(s_i)_x + s_i^2) dx \\ &= \frac{1}{2} c_i^{1/2}. \end{aligned}$$

Bei der **CDGSK** lauten der symplektische Operator

$$J(u) = 2D^3 + 2D^2uD^{-1} + 2D^{-1}uD^2 + u^2D^{-1} + D^{-1}u^2$$

und die Mastersymmetrie $\tau_0(u) = \frac{1}{6}(xu_x + 2u)$. Die N -Soliton Lösungen

$$s(x, t) \approx \sum_{i=1}^N s_i(x, t) = \sum_{i=1}^N \frac{3}{2} c_i^{1/3} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{c_i^{1/6}}{2} (x + c_i t + d_i) \right].$$

findet man z.B. in [61]. Die Berechnung von (3.47) liefert damit

$$\langle J(s_i)(s_i)_x, \tau_0(s_i) \rangle = -\frac{8}{9} c_i^{7/6}$$

Für die reelle Version der NLS gilt

$$J(\vec{u}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\tau_0(\vec{u}) = \begin{pmatrix} xu_x + u \\ xv_x + v \end{pmatrix}.$$

Die N -Soliton Lösungen der komplexen NLS sind oszillierende Wellen, deren Einhüllenden sich wie KdV-Soliton Lösungen verhalten ([113],[114]). Für $t \rightarrow \pm\infty$ haben sie die Form

$$s(x, t) \approx \sum_{k=1}^N s_k(x, t) = \sum_{k=1}^N \frac{\delta_k}{\sqrt{2}} \exp(i\omega_k) \operatorname{sech} \left[\frac{\delta_k}{2} (x + c_k t + q_k) \right].$$

mit

$$\omega_k = \frac{c_k}{2} x + \frac{c_k^2 - \delta_k^2}{4} t + \varphi_k$$

für $k = 1, \dots, N$. Im Gegensatz zu den vorherigen Beispielen hat der reelle Rekursionsoperator Φ hier die komplexen Eigenwerte $\lambda_k = \frac{1}{2}(c_k + i\delta_k)$ und eine Ein-Soliton Lösung s_k erfüllt die Gleichung

$$(\Phi(s_k) - \lambda_k) (\Phi(s_k) - \bar{\lambda}_k) K_0(s_k) = 0.$$

Hierbei ist $\bar{\lambda}_k$ das konjugiert Komplexe von λ_k . In dieser Darstellung ist die NLS mit der bisher vorgestellten Theorie nicht abgedeckt und wird deshalb hier nicht weiterbchandelt. Ohne große Schwierigkeiten lassen sich die Resultate dieser Arbeit allerdings auf die NLS und andere komplexe Gleichungen übertragen, wenn man die hier angegebenen 4-parametrischen Ein-Soliton Lösungen mit den reellen Parametern c_k, δ_k, q_k und φ_k als 2-Soliton Lösungen gemäß unserer Notation mit den komplexen Parametern λ_k und $\bar{\lambda}_k$ interpretiert.

Im Fall des **HS Systems** ist der Operator $J(\vec{u})$ bestimmt durch

$$J\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}D + D^{-1}u + uD^{-1} & -2D^{-1}v \\ -2vD^{-1} & -2D \end{pmatrix}$$

und die Mastersymmetrie $\tau_0(\vec{u})$ gegeben durch

$$\tau_0\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} xu_x + 2u \\ xv_x + 2v \end{pmatrix}.$$

Mit den N -Soliton Lösungen ([57])

$$\vec{s}(x, t) \approx \sum_{i=1}^N \vec{s}_i(x, t) = \left(\begin{array}{l} \sum_{i=1}^N 2 c_i^{1/2} \operatorname{sech}^2 [c_i^{1/4} (x - c_i t + d_i)] \\ \sum_{i=1}^N \sqrt{2} c_i^{1/2} \operatorname{sech} [c_i^{1/4} (x - c_i t + d_i)] \end{array} \right)$$

erhält man

$$\langle J(\vec{s}_i) (\vec{s}_i)_x, \tau_0(\vec{s}_i) \rangle = 5 c_i^{5/4}.$$

Bei der **BO** berechnet man mit Hilfe von $J(u) = D^{-1}$, $\tau_0(u) = xu_x + u$ und den N -Soliton Lösungen ([60],[72])

$$s(x, t) \approx \sum_{i=1}^N s_i(x, t) = \sum_{i=1}^N -2 \frac{c_i}{c_i^2(x - c_i t + d_i)^2 + 1}$$

das gesuchte Integral

$$\langle J(s_i) (s_i)_x, \tau_0(s_i) \rangle = -\pi c_i.$$

Bemerkung (3.9): Wie wir in Kapitel 4.2 beweisen werden, ergibt sich der Exponent ν in (3.47) aus den Skalierungskonstanten ϱ und λ (vgl. (1.13), (1.16) und (1.17)) zu

$$\nu = \varrho + \lambda.$$

Hierbei ist für die BO wegen $L_{\tau_0} J = 0$ wiederum $\lambda = 0$ zu setzen.

3.5 Reduktionen auf M_N

In diesem Kapitel untersuchen wir weitere Eigenschaften der N -Solitonen Mannigfaltigkeit M_N , wobei wir im ersten Schritt zeigen, daß auf M_N eine nicht-degenerierte, geschlossene 2-Form ω ([9]) existiert, die invariant unter der durch (3.4) gegebenen Bewegung ist. Diese 2-Form ω erlaubt es uns dann, die Evolutionsgleichung

$$s_t = K_1(s)$$

als hamiltonisches System auf der Untermannigfaltigkeit M_N zu interpretieren.

Als Standardbasis im Tangentialraum $T_s M_N$ an der Stelle s wählen wir (vgl. Satz (3.4)) die Menge

$$\mathcal{B} = \{ K_0, K_1, \dots, K_{N-1}, \tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{N-1} \}. \quad (3.48)$$

Als Restriktion des symplektischen Operators J bleibt $J|_{M_N}$ symplektisch (vgl.

Bemerkung (1.5)). Es sei nun $V \in T_s M_N$ ein Element aus dem Kern von $J(s)$. Dann existieren Skalarfelder $\beta_0, \dots, \beta_{N-1}, \gamma_0, \dots, \gamma_{N-1} \in \mathcal{F}(M_N)$ mit

$$V = \sum_{n=0}^{N-1} (\beta_n K_n + \gamma_n \tau_n).$$

Da $J(s)$ ein linearer Operator ist, folgt

$$0 = J(s)V = \sum_{n=0}^{N-1} (\beta_n JK_n + \gamma_n J\tau_n) . \quad (3.49)$$

Analog der Herleitung von Satz (3.4) liefert die Anwendung von K_0, K_1, \dots, K_{N-1} auf (3.49) zunächst $\gamma_0 = \gamma_1 = \dots = \gamma_{N-1} = 0$. Durch Anwendung von $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{N-1}$ folgt dann $\beta_0 = \beta_1 = \dots = \beta_{N-1} = 0$. Insgesamt ist also $V = 0$, d.h. $J(s)$ ist injektiv. Als Kotangentialraum $T_s^*M_N$ an der Stelle s definieren wir daher den $2N$ -dimensionalen Raum

$$T_s^*M_N = J(T_sM_N) .$$

Nach Definition ist damit $J(s) : T_sM_N \rightarrow T_s^*M_N$ bijektiv, d.h. die durch $J(s)$ auf M_N definierte 2-Form

$$\omega(s)(X, Y) := \langle J(s)X, Y \rangle \quad \forall X, Y \in T_sM_N$$

ist nicht-degeneriert. Insbesondere ist also in klassischer Notation (M_N, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit ([2]). Da die invers-hamiltonischen Vektorfelder K_0, K_1, \dots, K_{N-1} bei der Einschränkung auf M_N invers-hamiltonisch bzgl. $J|_{M_N}$ bleiben und $J|_{M_N}$ invertierbar ist, sind die Vektorfelder K_0, K_1, \dots, K_{N-1} auf M_N hamiltonisch bzgl. $\Theta_0 := J_{|M_N}^{-1}$. Weiterhin sind die Gradienten der Skalarfelder H_0, H_1, \dots, H_{N-1} wegen Lemma (3.1) auf M_N linear unabhängig und erfüllen auf Grund des Noether-Theorems die Relationen

$$\{H_n, H_m\}_{\Theta_0} = 0 .$$

In klassischer Sprechweise ist daher jeder von $K_n \in \{K_0, K_1, \dots, K_{N-1}\}$ induzierte Fluß auf der symplektischen Mannigfaltigkeit (M_N, ω) vollständig integrierbar mit H_0, H_1, \dots, H_{N-1} als Skalarfelder in Involution. Für die explizite Bestimmung der linearisierenden Koordinaten für diesen Fluß fehlen N weitere Skalarfelder, die Winkelvariablen. Sie werden in den nächsten Kapiteln konstruiert.

Für den nicht-hamiltonischen Fall wenden wir uns nun der Reduktion des hereditären Rekursionsoperator Φ zu. Nach Definition erzeugt $\Phi(s)$ rekursiv die Symmetrien $K_n(s)$ und die Mastersymmetrien $\tau_n(s)$. Da diese Vektoren für alle $n \in \mathbb{N}_0$ tangential an M_N sind, lässt $\Phi(s)$ die Untermannigfaltigkeit M_N invariant. Die Einschränkung $\Phi|_{M_N}$ von Φ auf M_N liefert daher einen endlich dimensionalen Operator

$$\Phi|_{M_N} : T_sM_N \rightarrow T_sM_N$$

Da die Hereditärität eines Operators von einer Einschränkung des Definitionsbereiches auf eine invariante Untermannigfaltigkeit nicht beeinflußt wird (vgl. (1.15)), bleibt $\Phi|_{M_N}$ hereditär. Die spektralen Eigenschaften des endlich dimensionalen Operators $\Phi|_{M_N}$ werden bei der Konstruktion der Winkelvariablen im nicht-hamiltonischen Fall eine wesentliche Rolle spielen (vgl. Kapitel 4 und 6.1).

Notationsvereinbarung: Sofern eine Verwechslung ausgeschlossen ist, verwenden wir statt $J|_{M_N}$ und $\Phi|_{M_N}$ die Kurzschreibweise J und Φ . Man beachte allerdings, daß diese Abbildungen per definitionem auf endlich dimensionalen Räumen operieren.

Da im hamiltonischen Fall kein Rekursionsoperator auf der gesamten Mannigfaltigkeit existiert, definieren wir eine lineare Abbildung $\Phi(s) : T_s M_N \rightarrow T_s M_N$ für alle $s \in \mathbb{N}_0$ durch

$$\Phi(s) K_n(s) := K_{n+1}(s) , \quad \Phi(s) \tau_n(s) := \tau_{n+1}(s) . \quad (3.50)$$

Weil alle $K_n(s)$ und $\tau_n(s)$ Elemente des Tangentialraumes $T_s M_N$ sind, ist $\Phi(s)$ durch (3.50) wohldefiniert.

Lemma (3.5): Die durch (3.50) definierte Abbildung auf $T_s M_N$ ist hereditär.

Beweis: Aufgrund der Kommutatorrelationen (1.17) gilt die Eigenschaft

$$\Phi^2 [G_1, G_2] + [\Phi G_1, \Phi G_2] = \Phi [\Phi G_1, G_2] + \Phi [G_1, \Phi G_2] \quad (3.51)$$

für alle $G_1, G_2 \in \{K_n \mid n \in \mathbb{N}_0\} \cup \{\tau_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$. Da Φ linear ist, folgt die Gültigkeit von (3.51) auch für beliebige Linearkombinationen aus $T_s M_N$. \square

Auf Grund der Aussage von Lemma (3.5) nennt man eine Familie von Vektorfeldern K_n und τ_n , die die Relationen (1.12) bzw. (1.17) erfüllen auch eine *hereditäre Algebra* ([48]).

Eine wesentliche Differenz zwischen den Operatoren Φ im nicht- und hamiltonischen Fall beschreibt das folgende

Lemma (3.6): Im nicht-hamiltonischen Fall ist $J\Phi$ antisymmetrisch auf M_N ; im hamiltonischen Fall gilt dieses nicht.

Beweis: Nach Voraussetzung ist im nicht-hamiltonischen Fall $J\Phi = J\Theta_1 J$ symplektisch auf M , d.h. die Einschränkung von $J\Phi$ auf M_N bleibt symplektisch, insbesondere auch antisymmetrisch. Wäre im hamiltonischen Fall $J\Phi$

antisymmetrisch auf M_N , so ist

$$\begin{aligned} \langle J\tau_1, \tau_0 \rangle &= \langle J\Phi\tau_0, \tau_0 \rangle = -\langle J\Phi\tau_0, \tau_0 \rangle = \\ &= -\langle J\tau_1, \tau_0 \rangle \end{aligned}$$

im Widerspruch zu $\langle J\tau_1, \tau_0 \rangle = -T_1 \neq 0$ (vgl. (2.20), (2.22) und Satz (3.4)). \square

Charakterisiert man die Antisymmetrie von $J\Phi$ auf M_N mit Hilfe der Standardbasis \mathcal{B} , so folgen aus (2.7), (2.10) und (2.22) die Relationen

$$\langle JK_n, K_m \rangle = 0, \quad \langle JK_n, \tau_m \rangle = H_{n+m}$$

und man erhält

Folgerung (3.1): $J\Phi$ ist auf M_N antisymmetrisch genau dann, wenn $J\Phi$ auf der linearen Hülle von $\tau_0, \dots, \tau_{N-1}$ antisymmetrisch ist, d.h. wenn für alle $n, m, r, l \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ mit $n+m = r+l$ gilt

$$\langle J\tau_n, \tau_m \rangle = \langle J\tau_r, \tau_l \rangle.$$

\square

Da $J\Phi|_{M_N}$ im nicht-hamiltonischen Fall symplektisch ist, erhalten wir für die Einschränkung des Rekursionsoperators auf M_N die folgende Faktorisierung auf der Untermannigfaltigkeit

$$\Phi|_{M_N} = \Theta_0 (J\Phi)|_{M_N}.$$

Dabei sind Θ_0 und $(J\Phi)|_{M_N}$ implektisch bzw. symplektisch auf M_N . Höhere implektische Operatoren auf M_N findet man daher im nicht-hamiltonischen Fall analog zu Lemma (2.3) (i) durch

$$(\Theta_n)|_{M_N} := \Phi|_{M_N}^n \Theta_0, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (3.52)$$

Zum Abschluß dieses insgesamt sehr technischen Kapitels soll noch einmal betont werden, daß wir mit den Ergebnissen der Kapitel 3.3 bis 3.5 in der Lage sind, die endlich dimensionale Untermannigfaltigkeit M_N vollständig zu beschreiben. Die Kenntnis des Tangentialbündels von M_N ist das wesentliche Hilfsmittel, um Größen von der gesamten Mannigfaltigkeit auf M_N reduzieren zu können. Dabei ist die Struktur von M_N so, daß die Einschränkung aller Operatoren auf die Untermannigfaltigkeit M_N bereits reduzierte Operatoren ergibt.

4 Spektrale Eigenschaften des Rekursionsoperators

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns im nicht-hamiltonischen Fall mit der geometrischen Interpretation von Symmetrien und Mastersymmetrien. Wie bereits in der Einleitung geschildert, wollen wir den Zusammenhang von Mastersymmetrien und Winkelvariablen auf der Untermannigfaltigkeit M_N klären. Dafür suchen wir auf M_N zunächst nach hamiltonischen Linearkombinationen der τ_n . Es stellt sich heraus, daß bei der Konstruktion dieser Größen die spektralen Eigenschaften des auf M_N reduzierten, endlich dimensionalen Rekursionsoperators Φ von Bedeutung sind. Aus diesem Grund beschäftigen wir uns in Kapitel 4.1 mit den Eigenwerten und -vektoren von Φ . Als Resultat erhalten wir eine explizite Darstellung der Eigenvektoren von Φ mit Hilfe der K_n und τ_n . Die gesuchten Linearkombinationen der Mastersymmetrien ergeben sich in Kapitel 4.2 dann als hamiltonische Eigenvektoren des Rekursionsoperators. Die Ergebnisse dieses Kapitels werden im wesentlichen aus den festgelegten Lie Ableitungen und Kommutatorrelationen hergeleitet. Eine Interpretation der Resultate mit Hilfe der asymptotischen Daten wird in Kapitel 5 vorgenommen. Die Darstellung der Ergebnisse der Kapitel 4 und 5 folgt der Vorgehensweise in [48].

4.1 Eigenwerte und Eigenvektoren des Rekursionsoperators

Wie bereits erwähnt, beschäftigen wir uns im gesamten Kapitel 4 ausschließlich mit dem nicht-hamiltonischen Fall. Dafür hatten wir in Kapitel 3.5 festgelegt, daß wir unter dem Rekursionsoperator Φ immer den endlich dimensionalen Operator verstehen wollen, der durch Einschränkung des Ausgangsoperators auf M_N entsteht. Wir erinnern ferner daran, daß die Nullstellen c_1, \dots, c_N des Polynoms

$$\sum_{n=0}^N \alpha_n \kappa_n x^n = \sum_{n=0}^N \alpha_n x^n \quad (4.1)$$

einfach sind (vgl. Definition (3.2)). Mit Hilfe des normierten Polynoms

$$P(x) := \frac{1}{\alpha_N} \sum_{n=0}^N \alpha_n x^n = \prod_{i=1}^N (x - c_i) \quad (4.2)$$

und der Hilfspolynome

$$Q_k(x) := \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N (x - c_i) =: \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_{n,k} x^n \quad (4.3)$$

für $k = 1, \dots, N$ erhalten wir

Lemma (4.1): Für alle Vektoren $V \in T_s M_N$ gilt

$$(i) \quad P(\Phi) V = 0 ,$$

(ii) $Q_k(\Phi) V$ ist ein Eigenvektor von Φ zum Eigenwert c_k .

Beweis: (i): Die erste Behauptung folgt für alle Basisvektoren $V \in \mathcal{B} = \{K_0, \dots, K_{N-1}, \tau_0, \dots, \tau_{N-1}\}$ von $T_s M_N$ aus der Definition von Φ (vgl. Kapitel 2.1) und der Gültigkeit der Relationen

$$\sum_{n=0}^N \alpha_n K_{n+r} = 0 , \quad \sum_{n=0}^N \alpha_n \tau_{n+r} = 0$$

auf M_N für alle $r \in \mathbb{N}_0$.

(ii): Da für alle $k = 1, \dots, N$ und für alle $V \in T_s M_N$ die Gleichung

$$((\Phi - c_k) Q_k(\Phi)) V = P(\Phi) V = 0$$

erfüllt ist, ist auch die zweite Behauptung bewiesen. \square

Da das Polynom $P(x)$ nur einfache Nullstellen hat, erhalten wir durch Partialbruchzerlegung

$$1 = \sum_{k=1}^N \beta_k Q_k(x) , \quad (4.4)$$

wobei die Koeffizienten β_k durch die Ableitungen

$$\beta_k = (P'(x)|_{x=c_k})^{-1} = Q_k(c_k)^{-1} \quad (4.5)$$

gegeben sind. Als spezielle Eigenvektoren zum Eigenwert c_k definieren wir

$$v_k := Q_k(\Phi) K_0 = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_{n,k} K_n \quad (4.6)$$

und

$$w_k := Q_k(\Phi) \tau_0 = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_{n,k} \tau_n . \quad (4.7)$$

Aus der linearen Unabhängigkeit von $K_0, \dots, K_{N-1}, \tau_0, \dots, \tau_{N-1}$ und $\alpha_{N-1,k} = 1$ folgt die lineare Unabhängigkeit von v_k und w_k für jedes $k = 1, \dots, N$. Mit Hilfe der Linearen Algebra erhalten wir insgesamt

Folgerung (4.1):

- (i) Die Eigenvektoren $v_1, \dots, v_N, w_1, \dots, w_N$ von Φ bilden eine Basis von $T_s M_N$.
- (ii) Jeder Eigenwert c_k von Φ ist zweifach entartet ($k = 1, \dots, N$).
- (iii) $P(x)$ ist das Minimalpolynom von Φ .

Bemerkung (4.1): Die obige Folgerung besagt, daß die Einschränkung des Ausgangsoperators auf M_N gerade dessen Restriktion auf die zum diskreten Spektrum gehörigen Eigenräume ist.

Lemma (4.2): Auf der N -Soliton Mannigfaltigkeit M_N gilt

$$(i) \quad K_n = \sum_{k=1}^N c_k^n \beta_k v_k, \quad \tau_n = \sum_{k=1}^N c_k^n \beta_k w_k, \quad (4.8)$$

$$(ii) \quad L_{\tau_m} J = (\lambda + m) J \Phi^m, \quad (4.9)$$

$$(iii) \quad \langle J v_n, v_m \rangle = \langle J w_n, w_m \rangle = 0, \quad (4.10)$$

$$(iv) \quad \langle J v_n, w_m \rangle = \delta_{n,m} Q_n(c_n) \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k,n} H_k, \quad (4.11)$$

wobei $\delta_{n,m} = 0$ für $n \neq m$ und $\delta_{n,n} = 1$ ist.

Beweis: (i): Die Relationen (4.8) folgen sofort aus (4.4) und (4.6).

(ii): Wir müssen die Gültigkeit von (4.9) auf der linearen Hülle der Symmetrien K_n und der Mastersymmetrien τ_r nachweisen. Da alle Produkte der Form $\langle J \tau_r, K_n \rangle$, $\langle J \tau_r, \tau_r \rangle$ und $\langle J K_r, K_n \rangle$ bekannt sind (vgl. (2.3) und (2.4)), folgt die Behauptung aus der Produktregel für Lie Ableitungen.

(iii): Aus der Antisymmetrie von J folgt die Behauptung für $n = m$. Für $n \neq m$ erhalten wir (4.10) aus der Antisymmetrie von $J \Phi$ (vgl. Lemma (3.6))

$$\begin{aligned} c_n \langle J v_n, v_m \rangle &= \langle J \Phi v_n, v_m \rangle = - \langle J \Phi v_m, v_n \rangle = \\ &= c_m \langle J v_n, v_m \rangle. \end{aligned}$$

Da die Eigenwerte c_n paarweise verschieden sind, muß $\langle J v_n, v_m \rangle$ verschwinden. Für $\langle J w_n, w_m \rangle$ folgt die Behauptung analog.

(iv): Für $n \neq m$ enthält das Produkt der Hilfspolynome $Q_n(\Phi)Q_m(\Phi)$ das

Polynom $P(\Phi)$ als Faktor (vgl. (4.2) und (4.3)). Wegen Lemma (4.1) ist $P(\Phi) = 0$ auf $T_s M_N$, d.h. $Q_n(\Phi)Q_m(\Phi) = 0$ auf $T_s M_N$. Damit folgt für $n \neq m$

$$\begin{aligned} \langle Jv_n, w_m \rangle &= \langle JQ_n(\Phi)K_0, Q_m(\Phi)\tau_0 \rangle = \\ &= \langle JK_0, Q_n(\Phi)Q_m(\Phi)\tau_0 \rangle = 0, \end{aligned}$$

wobei wir wiederum die Antisymmetrie von J und $J\Phi$ benutzt haben.

Da nach Lemma (4.1) der Operator $Q_k(\Phi)$ jeden Vektor aus dem Tangentialraum $T_s M_N$ auf den c_k -Eigenraum von Φ abbildet, gilt für $n = m$

$$Q_n(\Phi)Q_n(\Phi) = Q_n(c_n)Q_n(\Phi).$$

Analog den obigen Schlüssen erhalten wir daraus

$$\begin{aligned} \langle Jv_n, w_n \rangle &= \langle JQ_n(\Phi)K_0, Q_n(\Phi)\tau_0 \rangle = \\ &= \langle JK_0, Q_n(\Phi)Q_n(\Phi)\tau_0 \rangle = Q_n(c_n) \langle JK_0, w_n \rangle = \\ &= -Q_n(c_n) \langle J\tau_0, v_n \rangle = Q_n(c_n) \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k,n} H_k, \end{aligned}$$

wobei wir zusätzlich (4.6) und (2.6) benutzt haben.

Man beachte darüberhinaus, daß $\langle Jv_n, w_n \rangle$ nicht verschwindet, da $Q_n(c_n) \neq 0$ (vgl. (4.3)) und

$$\langle Jv_n, \tau_0 \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k,n} H_k \neq 0$$

(vgl. Lemma (3.1)). □

Wir sind nun in der Lage, das Verhalten der Eigenwerte c_1, \dots, c_N entlang der Bahnen, die durch die Mastersymmetrien bestimmt werden, zu beschreiben. In Analogie zu Lemma (2.1) (iv) folgt

Satz (4.1): Für die Eigenwerte c_1, \dots, c_N des Rekursionsoperators gilt auf M_N für alle $m \in \mathbf{N}_0$

$$L_{\tau_m} c_n = c_n^{m+1}. \quad (4.12)$$

Beweis: Da $J\Phi = \Phi^*J$ ist (vgl. Lemma (2.1) (i)), gilt für jeden Eigenvektor w_n von Φ mit $\Phi w_n = c_n w_n$ auch

$$\Phi^*(Jw_n) = (\Phi^*J) w_n = (J\Phi) w_n = c_n Jw_n. \quad (4.13)$$

Weil für jedes $k \in \mathbf{N}_0$ die Mastersymmetrie τ_k ein Element des Tangentialraumes ist, ist die Lie Ableitung der Eigenwertgleichung $\Phi v_n = c_n v_n$ in Richtung

τ_k definiert. Mit der Produktregel für Lie Ableitungen und (2.5) erhalten wir auf diese Weise

$$(\Phi - c_n) L_{\tau_k} v_n = (L_{\tau_k}(c_n) - c_n^{k+1}) v_n . \quad (4.14)$$

Die Anwendung von Jw_n auf (4.14) liefert mit (4.13)

$$0 = <(\Phi^* - c_n) Jw_n, L_{\tau_k} v_n> = (L_{\tau_k}(c_n) - c_n^{k+1}) < Jw_n, v_n> .$$

Da wegen Lemma (4.2) $< Jw_n, v_n>$ nicht verschwindet, ist die Behauptung bewiesen. \square

Folgerung (4.2): Auf der N -Soliton Mannigfaltigkeit M_N gilt für alle $n = 1, \dots, N$

$$\text{grad } c_n = < Jv_n, \tau_0 >^{-1} c_n Jv_n . \quad (4.15)$$

Beweis: Wir weisen die Gültigkeit der Gleichung (4.15) auf der Basis $\mathcal{B} = \{K_0, \dots, K_{N-1}, \tau_0, \dots, \tau_{N-1}\}$ des Tangentialraumes $T_s M_N$ nach. Da die Eigenwerte c_n Erhaltungsgrößen zu den Flüssen $u_t = K_t$ sind (vgl. Kapitel 3.2), gilt $< \text{grad } c_n, K_r > = 0$ für jedes $K_r \in \mathcal{B}$. Wegen $Jv_n = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k,n} K_k$ folgt mit (2.4) ebenfalls $< Jv_n, K_r > = 0$ für jedes $K_r \in \mathcal{B}$. Die Anwendung von τ_r auf die rechte Seite von (4.15) liefert für alle $\tau_r \in \mathcal{B}$

$$\begin{aligned} < Jv_n, \tau_0 >^{-1} c_n < Jv_n, \tau_r > &= < Jv_n, \tau_0 >^{-1} c_n < Jv_n, \Phi^r \tau_0 > = \\ &= < Jv_n, \tau_0 >^{-1} c_n < J\Phi^r v_n, \tau_0 > = \\ &= c_n^{r+1} , \end{aligned}$$

d.h. mit Satz (4.1) ist die Folgerung bewiesen. \square

Um die Kommutatoren zwischen den Eigenvektoren v_n und w_n zu berechnen, führen wir die folgenden Hilfspolynome

$$T_m(x) = -(m+1)x^m + \sum_{k=1}^N \frac{x^{m+1} - c_k^{m+1}}{x - c_k} \quad (4.16)$$

ein. Ist $x = c_i$ mit $i \in \{1, \dots, N\}$, so wird $T_m(c_i)$ als Grenzwert $\lim_{x \rightarrow c_i} T_m(x)$ definiert. Die Eigenschaften der Polynome $T_m(x)$ charakterisiert der folgende

Hilfssatz (4.1): Für alle $m \in \mathbb{N}_0$ und $n = 1, \dots, N$ gilt

- (i) $L_{K_m} Q_n(\Phi) = 0$,
- (ii) $L_{\tau_m} Q_n(\Phi) = T_m(c_n) Q_n(\Phi)$,
- (iii) $L_{\tau_m} Q_n(c_n)^{-1} = -T_m(c_n) Q_n(c_n)^{-1}$.

Beweis: (i): Die Behauptung folgt aus der Invarianz von Φ und c_n unter allen Symmetrien K_m (vgl. (2.15)).

(ii): Für alle $m \in \mathbb{N}_0$ und $n = 1, \dots, N$ erhalten wir aus den Definitionen der $Q_n(\Phi)$ und $T_m(\Phi)$ und mit (2.5) bzw. (4.12)

$$\begin{aligned} L_{\tau_m} Q_n(\Phi) &= L_{\tau_m} \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^N (\Phi - c_i) \right) = \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^N \left(\frac{\Phi^{m+1} - c_i^{m+1}}{\Phi - c_i} \right) Q_n(\Phi) = \\ &= \sum_{i=1}^N \left(\left(\frac{\Phi^{m+1} - c_i^{m+1}}{\Phi - c_i} \right) Q_n(\Phi) \right) - \left(\frac{\Phi^{m+1} - c_n^{m+1}}{\Phi - c_n} \right) Q_n(\Phi) . \end{aligned}$$

Da durch $Q_n(\Phi)$ alle Vektoren auf den c_n -Eigenraum von Φ abgebildet werden, muß der Grenzwert des letzten Summanden genommen werden. Damit gilt

$$\begin{aligned} L_{\tau_m} Q_n(\Phi) &= \sum_{i=1}^N \left(\left(\frac{\Phi^{m+1} - c_i^{m+1}}{\Phi - c_i} \right) Q_n(\Phi) \right) - (m+1) c_n Q_n(\Phi) = \\ &= T_m(c_n) Q_n(\Phi) . \end{aligned}$$

(iii): Analog der Schlußweise in (ii) folgt für $Q_n(c_n)$

$$L_{\tau_m} Q_n(c_n) = T_m(c_n) Q_n(c_n) ,$$

d.h. für die Inversen $Q_n(c_n)^{-1}$ gilt die Behauptung. \square

Wir sind nun in der Lage einige wichtige Lie Ableitungen zu berechnen.

Lemma (4.3): Für jedes $m \in \mathbb{N}_0$ und $n, k = 1, \dots, N$ gilt auf M_N :

- (i) Die Lie Ableitungen $L_{v_n} K_m$, $L_{v_n} v_m$, $L_{v_n} \Phi$, $L_{v_n} J$ und $L_{v_n} c_k$ verschwinden,
- (ii) $L_{w_n} K_m = c_n^m (m + \varrho) v_n$,

- (iii) $L_{\tau_m} v_n = (T_m(c_n) + \varrho c_n^m) v_n ,$
(iv) $L_{\tau_m} w_n = (T_m(c_n) - m c_n^m) w_n .$

Beweis: (i): Die erste Behauptung folgt aus der Invarianz von K_m, c_n, J und Φ unter allen Symmetrien.

(ii): Wegen $L_{K_m} Q_n(\Phi) = 0$ erhalten wir mit (1.12)

$$\begin{aligned} L_{w_n} K_m &= -L_{K_m} w_n = -L_{K_m} (Q_n(\Phi) \tau_0) = \\ &= -Q_n(\Phi) L_{K_m} \tau_0 = (m + \varrho) Q_n(\Phi) K_m = \\ &= (m + \varrho) \Phi^m Q_n(\Phi) K_0 = (m + \varrho) c_n^m v_n . \end{aligned}$$

(iii): Mit Hilfssatz (4.1) (ii) und (1.12) gilt

$$\begin{aligned} L_{\tau_m} v_n &= (L_{\tau_m} Q_n(\Phi)) K_0 + Q_n(\Phi) L_{\tau_m} K_0 = \\ &= T_m(c_n) Q_n(\Phi) K_0 + \varrho Q_n(\Phi) K_m = \\ &= (T_m(c_n) + \varrho c_n^m) v_n . \end{aligned}$$

(iv): Die gesuchte Lie Ableitung ergibt sich mit den gleichen Argumenten wie in (iii) zu

$$L_{\tau_m} w_n = (T_m(c_n) - m c_n^m) w_n .$$

□

Als letzten Schritt in diesem Kapitel führen wir eine Ummormierung der Eigenvektoren v_n, w_n durch und setzen für $n = 1, \dots, N$

$$V_n := Q_n(c_n)^{-1} v_n , \quad W_n := Q_n(c_n)^{-1} w_n . \quad (4.17)$$

Mit den Hilfspolynomen

$$\hat{Q}_n(\Phi) = Q_n(c_n)^{-1} Q_n(\Phi)$$

erhalten wir aus (4.4), Lemma (4.2), (4.6) und (4.7) für alle $n, m = 1, \dots, N$

Folgerung (4.3):

- (i) $1 = \sum_{n=1}^N \hat{Q}_n(\Phi) ,$
(ii) $\hat{Q}_n(\Phi) \hat{Q}_m(\Phi) = \delta_{n,m} \hat{Q}_n(\Phi) ,$

$$(iii) \quad V_n = \hat{Q}_n(\Phi) K_0, \quad W_n = \hat{Q}_n(\Phi) \tau_0,$$

$$(iv) \quad K_n = \sum_{k=1}^N c_k^n V_k, \quad \tau_n = \sum_{k=1}^N c_k^n W_k.$$

Analog zu Lemma (4.3) finden wir die folgenden Lie Ableitungen:

Lemma (4.4): Für jedes $m \in \mathbb{N}_0$ und $n = 1, \dots, N$ gilt

$$(i) \quad L_{W_m} K_m = c_n^m (m + \varrho) V_n,$$

$$(ii) \quad L_{\tau_m} V_n = \varrho c_n^m V_n,$$

$$(iii) \quad L_{\tau_m} W_n = -m c_n^m W_n.$$

$$(iv) \quad \text{Für alle } n, m = 1, \dots, N \text{ gilt: } L_{V_m} c_n = 0, \quad L_{W_m} c_n = \delta_{n,m} c_n.$$

Beweis: Die Gleichungen (i)-(iii) folgen sofort aus Lemma (4.3), den Eigenschaften der Lie Ableitung und Hilfssatz (4.1) (iii).

(iv): Die erste Lie Ableitung verschwindet wegen Lemma (4.3) (i). Mit Hilfe von Folgerung (4.2) und dem Beweis von Lemma (4.2) (iv) gilt

$$\begin{aligned} L_{W_m} c_n &= \langle \text{grad } c_n, W_m \rangle = \\ &= \langle Jv_n, \tau_0 \rangle^{-1} c_n Q_m(c_m)^{-1} \langle Jv_n, w_m \rangle = \\ &= \delta_{n,m} c_n Q_m(c_m)^{-1} Q_n(c_n) = \delta_{n,m} c_n. \end{aligned}$$

□

Für die Hilfspolynome $\hat{Q}_n(\Phi)$ erhalten wir damit

Hilfssatz (4.2): Für alle $m, n = 1, \dots, N$ gelten die Lie Ableitungen

$$(i) \quad L_{V_m} \Phi = 0, \quad L_{V_m} \hat{Q}_n(\Phi) = 0,$$

$$(ii) \quad L_{W_m} \Phi = c_m \hat{Q}_m(\Phi), \quad L_{W_m} \hat{Q}_n(\Phi) = 0.$$

Beweis: (i): Die beiden Lie Ableitungen ergeben sich aus Lemma (4.3) (i) und der Tatsache, daß $Q_m(c_m)^{-1}$ eine Erhaltungsgröße für jedes K_n ist.

(ii): Mit Lemma (4.4) (iii) und der Produktregel für Lie Ableitungen gilt für alle $m, n = 1, \dots, N$

$$\begin{aligned} (L_{W_m} \Phi) \tau_n &= L_{W_m} \tau_{n+1} - \Phi L_{W_m} \tau_n = ((n+1)c_m^{n+1} - nc_m c_m^n) W_m = \\ &= c_m \hat{Q}_m(\Phi) \tau_n. \end{aligned}$$

Auf die gleiche Weise erhalten wir

$$(L_{W_m} \Phi) K_n = c_n^{n+1} V_m = c_m \hat{Q}_m(\Phi) K_n .$$

Da die Vektorfelder $\tau_1, \dots, \tau_N, K_1, \dots, K_N$ eine Basis des Tangentialraumes bilden, folgt die erste Relation.

Die zweite Relation weisen wir ebenfalls auf einer Basis von $T_s M_N$ nach. Mit der Produktregel für Lie Ableitungen und (1.12) gilt für alle $m, k \in \mathbb{N}_0$ und $n = 1, \dots, N$

$$\begin{aligned} L_{\tau_m}(\hat{Q}_n(\Phi) \tau_k) &= (L_{\tau_m} \hat{Q}_n(\Phi)) \tau_k + \hat{Q}_n(\Phi) (L_{\tau_m} \tau_k) = \\ &= (L_{\tau_m} \hat{Q}_n(\Phi)) \tau_k + (k-m) \hat{Q}_n(\Phi) \tau_{m+k} = \\ &= (L_{\tau_m} \hat{Q}_n(\Phi)) \tau_k + (k-m) c_n^{m+k} W_n . \end{aligned}$$

Auf der anderen Seite folgt $\hat{Q}_n(\Phi) \tau_k = c_n^k W_n$ und daraus mit Lemma (4.4) (iii) und Satz (4.1)

$$\begin{aligned} L_{\tau_m}(c_n^k W_n) &= k c_n^{m+k} W_n - m c_n^{m+k} W_n = \\ &= (k-m) c_n^{m+k} W_n . \end{aligned}$$

Also gilt $L_{\tau_m} \hat{Q}_n(\Phi) = 0$ auf der linearen Hülle der Mastersymmetrien τ_k . Analog zeigt man

$$L_{\tau_m}(\hat{Q}_n(\Phi)) K_k = 0 ,$$

für alle $m, k \in \mathbb{N}_0$ und $n = 1, \dots, N$ und folgert daraus die Behauptung. \square

Satz (4.2): Für die Basis von Eigenvektoren $V_1, \dots, V_N, W_1, \dots, W_N$ des Tangentialraumes gelten die folgenden Kommutatorrelationen

- (i) $[V_m, V_n] = 0 ,$
- (ii) $[W_m, W_n] = 0 ,$
- (iii) $[W_m, V_n] = \delta_{n,m} \varrho V_m .$

Beweis: (i): Die erste Kommutatorrelation ergibt sich aus Lemma (4.3) (i) und der Tatsache, daß $Q_n(c_n)^{-1}$ eine Erhaltungsgröße für jede Symmetrie K_m ist.

(ii): Mit Lemma (4.4) (iii) und Hilfssatz (4.2) (ii) erhalten wir für alle $m, n = 1, \dots, N$

$$\begin{aligned} [W_m, W_n] &= L_{W_m} W_n = L_{W_m}(\hat{Q}_n(\Phi) \tau_0) = \\ &= \hat{Q}_n(\Phi)(L_{W_m} \tau_0) = -\hat{Q}_n(\Phi) L_{\tau_0} W_m = 0 . \end{aligned}$$

(iii): Auf die gleiche Weise wie in (ii) und mit Folgerung (4.3) (ii) gilt

$$[W_m, V_n] = \hat{Q}_n(\Phi)(L_{W_m} K_0) = \varrho \hat{Q}_n(\Phi) V_m = \delta_{m,n} \varrho V_m .$$

□

4.2 Hamiltonische Eigenvektoren des Rekursionsoperators

In diesem Kapitel wollen wir aus den Eigenvektoren V_n und W_n des Rekursionsoperators Eigenvektoren konstruieren, die invers-hamiltonisch bzgl. J sind. Da J auf M_N invertierbar ist, (vgl. Kapitel 3.5), sind die gesuchten Eigenvektoren automatisch hamiltonisch bzgl. $\Theta_0 = J^{-1}$.

Mit Lemma (4.3) (i) und der Tatsache, daß V_n aus v_n durch Normierung mit einer Erhaltungsgröße hervorging, folgt zunächst, daß die Lie Ableitungen $L_{V_n} J$ verschwinden. Damit sind die Eigenvektoren V_n bereits hamiltonisch bzgl. Θ_0 (vgl. Bemerkung (1.6)). Um aus den W_n hamiltonische Größen zu konstruieren, benötigen wir das folgende

Lemma (4.5): Für alle zulässigen Indizes $n, m \in \mathbf{N}_0$ gilt

- (i) $\langle JV_m, W_n \rangle = \delta_{n,m} \langle JV_m, \tau_0 \rangle ,$
- (ii) $L_{\tau_m} \langle JV_n, \tau_0 \rangle = (\lambda + \varrho) c_n^m \langle JV_n, \tau_0 \rangle ,$
- (iii) $\text{grad } \langle JV_n, \tau_0 \rangle = (\lambda + \varrho) JV_n ,$
- (iv) $L_{W_m} \langle JV_n, \tau_0 \rangle = \delta_{n,m} (\lambda + \varrho) \langle JV_n, \tau_0 \rangle ,$
- (v) $\text{grad } (c_n^{-(\lambda+\varrho)} \langle JV_n, \tau_0 \rangle) = 0 .$

Beweis: (i) Mit Hilfe der Projektionseigenschaft der $\hat{Q}_n(\Phi)$ aus Folgerung (4.3) (ii) und $\Phi^* J = J \Phi$ (vgl. (2.2)) folgt

$$\begin{aligned} \langle JV_m, W_n \rangle &= \langle JV_m, \hat{Q}_n(\Phi) \tau_0 \rangle = \langle J \hat{Q}_n(\Phi) V_m, \tau_0 \rangle = \\ &= \langle J \hat{Q}_n(\Phi) \hat{Q}_m(\Phi) K_0, \tau_0 \rangle = \delta_{n,m} \langle JV_m, \tau_0 \rangle . \end{aligned}$$

(ii): Mit der Produktregel für Lie Ableitungen, (4.9), Lemma (4.4) (ii) und (1.12) erhalten wir

$$\begin{aligned} L_{\tau_m} \langle JV_n, \tau_0 \rangle &= \\ &= \langle (L_{\tau_m} J) V_n, \tau_0 \rangle + \langle J L_{\tau_m} V_n, \tau_0 \rangle + \langle JV_n, L_{\tau_m} \tau_0 \rangle = \\ &= (\lambda + m) c_n^m \langle JV_n, \tau_0 \rangle + \varrho c_n^m \langle JV_n, \tau_0 \rangle - m c_n^m \langle JV_n, \tau_0 \rangle = \\ &= (\lambda + \varrho) c_n^m \langle JV_n, \tau_0 \rangle . \end{aligned}$$

(iii): Analog zu (ii) gilt mit Folgerung (2.1) (ii), Lemma (4.3) (i), (1.12) und (4.10)

$$\begin{aligned} L_{K_m} < JV_n, \tau_0 > &= < JV_n, L_{K_m} \tau_0 > = - (m + \varrho) < JV_n, K_m > = \\ &= 0 = (\lambda + \varrho) < JV_n, K_m > . \end{aligned}$$

(Man beachte dabei stets, daß V_n aus v_n durch Normierung mit einer Erhaltungsgröße entsteht.) Mit (ii) ist daher die Behauptung auf der Basis \mathcal{B} des Tangentialraumes gezeigt.

(iv): Die Gültigkeit der Gleichung folgt sofort aus (i) und (iii).

(v): Wegen Folgerung (4.2) und (iii) erhalten wir mit der Produktregel

$$\begin{aligned} \text{grad} (c_n^{-(\lambda+\varrho)} < JV_n, \tau_0 >) &= \\ &= - (\lambda + \varrho) c_n^{-(\lambda+\varrho+1)} \text{grad} c_n < JV_n, \tau_0 > + c_n^{-(\lambda+\varrho)} (\lambda + \varrho) JV_n = \\ &= 0 . \end{aligned}$$

□

Folgerung (4.4):

(i) Für jedes $n = 1, \dots, N$ gibt es eine Konstante C_J , die nur von J abhängt, mit

$$< JV_n, \tau_0 > = C_J c_n^{(\lambda+\varrho)} . \quad (4.18)$$

(ii) Für jedes $n = 1, \dots, N$ gilt

$$\text{grad} c_n = C_J^{-1} c_n^{(1-\lambda-\varrho)} JV_n . \quad (4.19)$$

Beweis: (i): Aus Lemma (4.5) (v) folgern wir, daß es eine Konstante $C_{J,n}$ gibt, die von J und n abhängt, mit

$$< JV_n, \tau_0 > = C_{J,n} c_n^{(\lambda+\varrho)} .$$

Nach Kapitel 3.3 und 3.4 existieren aber Konstanten δ, ν mit

$$H_n = \delta \sum_{i=1}^N c_i^{n+\nu} .$$

Auf der anderen Seite folgt mit (2.6) und Folgerung (4.3) (iv)

$$\begin{aligned} H_n &= < JK_n, \tau_0 > = \sum_{i=1}^N c_i^n < JV_i, \tau_0 > = \\ &= \sum_{i=1}^N C_{J,i} c_i^{n+\lambda+\varrho} . \end{aligned}$$

Insgesamt gilt also $\delta = C_{J,i}$, d.h. $C_{J,i}$ ist unabhängig von i , und $\nu = \lambda + \varrho$ (vgl. Bemerkung (3.9)).

(ii): Die Behauptung ergibt sich aus (i) und Lemma (4.5) (iii). \square

Nach diesen Vorbereitungen sind wir nun in der Lage, einen Satz von hamiltonischen Eigenvektoren des Rekursionsoperators anzugeben.

Satz (4.3):

(i) Für $k = 1, \dots, N$ sind die Vektorfelder

$$Z_k := c_k^{-\lambda} W_k \quad (4.20)$$

hamiltonisch bzgl. $\Theta_0 = J^{-1}$.

(ii) Die hamiltonischen Eigenvektoren $V_1, \dots, V_N, Z_1, \dots, Z_N$ von Φ bilden eine Basis des Tangentialraumes $T_s M_N$, und sie erfüllen die folgenden Kommutatorrelationen

$$[V_m, V_n] = 0, \quad [Z_m, Z_n] = 0,$$

$$[Z_m, V_n] = \delta_{n,m} \varrho c_n^{-\lambda} V_m. \quad (4.21)$$

Beweis: (i): Wir weisen die Gültigkeit von $L_{Z_k} J = 0$ wiederum auf einer Basis nach und zeigen dazu, daß die Produkte $\langle (L_{Z_k} J)V_n, V_m \rangle$, $\langle (L_{Z_k} J)V_n, W_m \rangle$ und $\langle (L_{Z_k} J)W_n, W_m \rangle$ für alle $k, n, m = 1, \dots, N$ verschwinden.

Mit der Produktregel für Lie Ableitungen, Lemma (4.5) (i) und (iv), Satz (4.2) und Lemma (4.2) (iv) gilt

$$\begin{aligned} & \langle (L_{Z_k} J) V_n, W_m \rangle = \\ & = L_{Z_k} \langle JV_n, W_m \rangle - \langle J L_{Z_k} V_n, W_m \rangle - \langle JV_n, L_{Z_k} W_m \rangle = \\ & = c_k^{-\lambda} L_{W_k} \langle JV_n, W_m \rangle - c_k^{-\lambda} \langle J L_{W_k} V_n, W_m \rangle + \\ & + \langle \text{grad } c_k^{-\lambda}, V_n \rangle \langle JV_k, W_m \rangle - c_k^{-\lambda} \langle JV_n, L_{W_k} W_m \rangle + \\ & + \langle \text{grad } c_k^{-\lambda}, W_m \rangle \langle JV_n, W_k \rangle = \\ & = c_k^{-\lambda} \delta_{n,m} L_{W_k} \langle JV_n, \tau_0 \rangle - c_k^{-\lambda} \delta_{n,k} \varrho \langle JV_k, W_m \rangle + \\ & + \delta_{n,k} \langle JV_k, \tau_0 \rangle \langle \text{grad } c_k^{-\lambda}, W_m \rangle = \\ & = c_k^{-\lambda} \delta_{n,m} \delta_{n,k} (\lambda + \varrho) \langle JV_k, \tau_0 \rangle - c_k^{-\lambda} \varrho \delta_{n,k} \delta_{k,m} \langle JV_k, \tau_0 \rangle - \\ & - \lambda c_k^{-\lambda} \delta_{n,k} \delta_{k,m} \langle JV_k, \tau_0 \rangle = \\ & = 0. \end{aligned}$$

Zur Behandlung der anderen Produkte erinnern wir uns an die Gleichungen (4.10), aus denen die Relationen

$$\langle JV_n, V_m \rangle = 0 = \langle JW_n, W_m \rangle$$

für alle $n, m = 1, \dots, N$ folgen. In Analogie zu den obigen Rechnungen erhalten wir damit

$$\begin{aligned} \langle (L_{Z_k} J) V_n, V_m \rangle &= \\ &= -c_k^{-\lambda} \langle J L_{W_k} V_n, V_m \rangle - c_k^{-\lambda} \langle JV_n, L_{W_k} V_m \rangle = \\ &= -c_k^{-\lambda} \delta_{n,k} \varrho \langle JV_n, V_m \rangle - c_k^{-\lambda} \delta_{k,m} \varrho \langle JV_n, V_m \rangle = 0. \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \langle (L_{Z_k} J) W_n, W_m \rangle &= \\ &= -c_k^{-\lambda} \langle J L_{W_k} W_n, W_m \rangle - c_k^{-\lambda} \langle J W_n, L_{W_k} W_m \rangle = 0. \end{aligned}$$

(ii): Die lineare Unabhängigkeit der Eigenvektoren $V_1, \dots, V_N, Z_1, \dots, Z_N$ folgt aus der linearen Unabhängigkeit von $v_1, \dots, v_N, w_1, \dots, w_N$. Die Kommutatorrelationen ergeben sich aus Satz (4.2) und Lemma (4.4) (iv) zu

$$\begin{aligned} [V_m, V_n] &= 0, \\ [Z_m, Z_n] &= c_m^{-\lambda} \langle \text{grad } c_n^{-\lambda}, W_m \rangle W_n - c_n^{-\lambda} \langle \text{grad } c_m^{-\lambda}, W_n \rangle W_m + \\ &\quad + c_n^{-\lambda} c_m^{-\lambda} [W_m, W_n] = \\ &= -\lambda c_n^{-\lambda} c_m^{-\lambda} \delta_{n,m} W_n + \lambda c_n^{-\lambda} c_m^{-\lambda} \delta_{n,m} W_m = 0, \\ [Z_m, V_n] &= -\langle \text{grad } c_m^{-\lambda}, V_n \rangle W_m + c_m^{-\lambda} [W_m, V_n] = \\ &= c_m^{-\lambda} \varrho \delta_{n,m} V_m. \end{aligned}$$

□

Nach Satz (4.2) sind die Kovektorfelder JV_n, JZ_n also Gradienten von Skalarfeldern auf M_N , die sich wegen (4.21) als nicht-kanonische Wirkungs- und Winkelvariablen interpretieren lassen. Das zu JV_n gehörige Skalarfeld ist gemäß Folgerung (4.4) (ii) gegeben durch

$$C_J \frac{1}{\lambda + \varrho} c_n^{\lambda + \varrho}.$$

In den nächsten beiden Kapiteln wird es daher um das Auffinden der zu JZ_n gehörigen Winkelvariablen gehen.

Da die Eigenvektoren W_k als Linearkombinationen der τ_n definiert sind, haben wir mit den Vektorfeldern Z_k ebenfalls die gesuchten hamiltonischen Linearkombinationen von Mastersymmetrien auf M_N gefunden. Ihre geometrische Bedeutung ist damit auch im nicht-hamiltonischen Fall im Zusammenhang mit Winkelvariablen für Multi-Soliton Lösungen zu sehen.

5 Asymptotische Interpretation der Eigenvektoren des Rekursionsoperators

In diesem Kapitel leiten wir eine besonders einfache Charakterisierung der in Kapitel 4 konstruierten Eigenvektoren von Φ her. Als Ergebnis erhalten wir, daß die partiellen Ableitungen einer N -Soliton Lösung s nach den asymptotischen Daten q_i und c_i die Eigenvektoren des Rekursionsoperators Φ liefern. Während diese Aussage für das Feld s_{q_i} bekannt war ([13],[41]), ist nun auch die Bedeutung von s_{c_i} geklärt.

5.1 Vorbetrachtungen

In Kapitel 3 hatten wir das asymptotische Verhalten einer N -Soliton Lösung s benutzt, um eine Motivation für die Definition von s als Lösung der Linear-kombination

$$\sum_{n=0}^N \alpha_n(s) \kappa_n K_n(s) = 0 \quad (5.1)$$

zu erhalten. Für die explizite Konstruktion der Eigenvektoren des Rekursions-operators (bzw. der hamiltonischen Linearkombination der τ_n) im vorherigen Kapitel 4 haben wir lediglich die (algebraische) Relation (5.1) benötigt ohne zusätzlich auf die explizite Form der N -Soliton Lösung einzugehen. In diesem Kapitel nun wollen wir die gefundenen Eigenvektoren V_n, W_n mit Hilfe der asymptotischen Daten c_n und q_n interpretieren. Dazu beschränken wir uns wie in Kapitel 4 ausschließlich auf den nicht-hamiltonischen Fall und setzen (vgl. Kapitel 3.2) als Startvektorfeld

$$K_0(u) = u_x \quad \text{bzw.} \quad K_0\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

voraus, d.h. die zugelassenen Evolutionsgleichungen

$$u_t = K_1(u) = \Phi(u)K_0(u) \quad (5.3)$$

sind translationsinvariant. Von den in Kapitel 2.3 und 3.4 betrachteten Bei-spielen erfüllen die KdV, die mKdV, die NLS und jeweils eine Hierarchie der CDGSK und des HS Systems diese Voraussetzungen. Eine Ein-Soliton Lösung s der Evolutionsgleichung (5.3) ergibt sich mit (5.1) als Lösung von

$$0 = K_1(s) - c K_0(s) = s_t - c s_x ,$$

wobei c ein Eigenwert des Rekursionsoperators ist. Die allgemeine Form der Ein-Soliton Lösung lautet damit

$$s(x, t) = s(c, x + ct + d) =: s(c, x + q) .$$

Wie zuvor legen wir die Rand- und Zwangsbedingungen an (5.1) für eine N -Soliton Lösung $s(x, t)$ so fest, daß sie asymptotisch in N Ein-Soliton Lösungen s_i zerfällt (vgl. Bemerkung (3.4) (1))

$$s(x, t) \approx \sum_{i=1}^N s_i (c_i, x + c_i t + d_i) = \sum_{i=1}^N s_i (c_i, x + q_i) . \quad (5.4)$$

Hierbei seien die Geschwindigkeiten c_i paarweise verschieden, und die Gesamtenergie der Lösung werde durch die asymptotisch auftretenden Ein-Solitonen getragen. Für die Normierung der asymptotischen Daten $c_i(s)$ und $q_i(s)$ von (5.4) legen wir fest, daß sie sich aus der Betrachtung für $t \rightarrow +\infty$ ergeben sollen (vgl. Kapitel 3.2). Mit Hilfe dieser Daten läßt sich die Mannigfaltigkeit M_N aller N -Soliton Lösungen parametrisieren (vgl. Bemerkung (3.1)). Daher liegen die Vektoren $\frac{\partial s}{\partial c_i}$ und $\frac{\partial s}{\partial q_i}$ für $i = 1, \dots, N$ im Tangentialraum $T_s M_N$ und müssen sich in der Basis aus Eigenvektoren $V_1, \dots, V_N, W_1, \dots, W_N$ darstellen lassen. Eine solche Charakterisierung von s_{c_i} und s_{q_i} ist das Ziel dieses Kapitels 5. Dem genannten Ziel nähern wir uns in drei Schritten: Zunächst stellen wir weitere Hilfsmittel zur Verfügung, um dann in Kapitel 5.2 für die Mannigfaltigkeit der Ein-Soliton Lösungen das gewünschte Resultat herzuleiten. Mit Hilfe der asymptotischen Dekomposition (5.4) von N -Soliton Lösungen in N Ein-Soliton Lösungen können wir die Ergebnisse aus Kapitel 5.2 im anschließenden Kapitel 5.3 benutzen, um daraus die Darstellung von s_{c_i} und s_{q_i} für eine N -Soliton Lösung s herzuleiten. In Kapitel 5.4 werden die Ergebnisse anhand von Beispielen erläutert.

Ist $s = s(c_1, \dots, c_N, q_1, \dots, q_N)$ eine N -Soliton Lösung von (5.3), so gilt für die partielle Ableitung s_{c_i} ,

$$\frac{d}{dt} (s_{c_i}) = K'_1 [s_{c_i}] .$$

Da auf der anderen Seite $s_{c_i} \in T_s M_N$, können wir $s_{c_i} = s_{c_i}(s, t)$ auch als Vektorfeld in Abhängigkeit von s interpretieren. Dann gilt

$$\frac{d}{dt} (s_{c_i}) = \frac{\partial s_{c_i}}{\partial t} + s'_{c_i} [K_1] .$$

Die gleiche Argumentation ist anwendbar auf s_{q_i} und wir erhalten insgesamt

Lemma (5.1): Für jedes $i = 1, \dots, N$ sind die Vektorfelder s_{c_i} und s_{q_i} invariant bzgl. K_1 , d.h. es gilt

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + L_{K_1} \right) s_{c_i} = 0 , \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + L_{K_1} \right) s_{q_i} = 0 . \quad (5.5)$$

Für ein unter $K_1(u)$ invariantes Vektorfeld $G(u, t)$ mit expliziter, analytischer Zeitabhängigkeit kann man $G(u, t)$ aus einer vorgegebenen Anfangsbedingung $G(u, 0)$ durch die folgende formale Reihe gewinnen (vgl. [40],[83]):

$$\begin{aligned} G(u, t) &= \exp(-tL_{K_1}) G(u, 0) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!} (L_{K_1})^n G(u, 0) . \end{aligned} \quad (5.6)$$

Da die uns interessierenden Vektorfelder s_{c_i} und s_{q_i} von analytischer Zeitabhängigkeit sind, ist die Reihe (5.6) anwendbar. Darüberhinaus bricht die Reihe in diesen Fällen nach endlich vielen Summanden ab, so daß keine Konvergenzprobleme auftauchen können. Nach diesen Vorberichtigungen wenden wir uns nun der Ein-Soliton Mannigfaltigkeit zu.

5.2 Die Ein-Soliton Mannigfaltigkeit

Im folgenden sei $s(x, t)$ eine Ein-Soliton Lösung von (5.3), die wir durch die asymptotischen Daten c und q parametrisieren wollen. Wegen der Translationsinvarianz von (5.3) ist eine reisende Welle $s(x, t)$ mit der Geschwindigkeit c von der Form

$$s = s(x, t) = s(c, x + ct + d) = s(c, x + q) . \quad (5.7)$$

Damit folgt mit der Definition der höheren Symmetrien

$$\Phi(s)K_0(s) = K_1(s) = s_t = c s_x = c K_0(s) ,$$

also

$$K_1(s) - c K_0(s) = 0 . \quad (5.8)$$

$K_0(s)$ ist also der zum Eigenwert c von $\Phi(s)$ gehörige Eigenvektor V (vgl. auch Kapitel 3.2). Nach den Ergebnissen der vorherigen Kapitel gilt auch

$$\tau_1(s) - c \tau_0(s) = 0 ,$$

d.h. $\tau_0(s) = W$ ist der zweite zum Eigenwert c gehörige Eigenvektor von Φ . Der Tangentialraum $T_s M_1$ am Punkt s ist also durch $K_0 = V$ und $\tau_0 = W$ aufgespannt. Um s_c durch K_0 und τ_0 auszudrücken, betrachten wir wegen der expliziten Form der Ein-Soliton Lösung s in (5.7) diese zunächst in Abhängigkeit von

$$s = s(x, t, c)$$

und machen zum Zeitpunkt $t = 0$ für $s_c(x, t, c)$ den Ansatz

$$s_c(x, 0, c) = a V + b W = a K_0 + b \tau_0 . \quad (5.9)$$

Wegen der Translationsinvarianz der betrachteten Evolutionsgleichung (5.3) ist a nicht eindeutig bestimmbar. Wir legen deshalb einen Bezugspunkt fest und normieren

$$s_c(x, 0, c) = b \tau_0 .$$

Da s_c analytisch vom Zeitparameter t abhängt, ergibt sich b durch Koeffizientenvergleich aus dem zeitunabhängigen Summanden und wir erhalten

$$1 = \frac{\partial c}{\partial c} = \langle \text{grad } c, s_c(x, 0, c) \rangle .$$

Aus Satz (4.1) folgt $\langle \text{grad } c, \tau_0 \rangle = c$, d.h. $b = c^{-1}$. Da s_c invariant unter K_1 ist (vgl. Lemma (5.1)), erhalten wir $s_c(x, t, c)$ aus $s_c(x, 0, c)$ mit Hilfe der formalen Reihe (5.6). Mit $L_{K_1} c = 0$, (1.12) und (5.8) gilt

$$L_{K_1}(c^{-1}\tau_0) = c^{-1}L_{K_1}\tau_0 = -c^{-1}(1+\varrho)K_1 = -(1+\varrho)K_0 .$$

Insbesondere folgt daraus $(L_{K_1})^2(c^{-1}\tau_0) = 0$, d.h.

$$s_c(x, t, c) = c^{-1}\tau_0 + (1+\varrho)tK_0 . \quad (5.10)$$

Auf Grund der expliziten Form der Ein-Soliton Lösungen s (vgl. (5.7) oder auch Kapitel 3.4) und der Form der Mastersymmetrie $\tau_0(s) = xs_x + \text{const } s$ folgt, daß die Normierung $s_c(x, 0, c) = c^{-1}\tau_0$ gerade $d = 0$ bedeutet. Da das Ein-Soliton keine Wechselwirkung erfährt, ist damit q in dieser Normierung bestimmt durch $q = ct$.

Parametrisieren wir nun die Mannigfaltigkeit aller Ein-Soliton Lösungen durch x, c und $q = ct + d = ct$, so erhalten wir $s = s(x, c, q)$ und s_c ergibt sich in den neuen unabhängigen Koordinaten zu

$$\begin{aligned} s_c(x, c, q) &= c^{-1}(\tau_0 + \varrho q K_0) = \\ &= c^{-1}(W + \varrho q V) . \end{aligned} \quad (5.11)$$

Da q und c als unabhängig voneinander betrachtet werden, gilt mit (5.7)

$$s_q = s_x = K_0 = V . \quad (5.12)$$

Damit haben wir nicht nur s_c und s_q in der Basis V und W ausgedrückt (also in der Feldvariablen s dargestellt), sondern außerdem noch gezeigt, daß s_c und s_q linear unabhängige Eigenvektoren des Rekursionsoperators zum Eigenwert c sind.

Als nächsten Schritt in diesem Kapitel wollen wir nun noch die Gradienten der asymptotischen Daten in der Feldvariablen s ausdrücken. D.h. gesucht sind $\text{grad } c$ und $\text{grad } q$ als Linearkombinationen von JV und JW bzw. als

Kombinationen bzgl. der hamiltonischen Vektorfelder V und Z .
Aus Folgerung (4.4) ist $\text{grad } c$ bereits bekannt als

$$\text{grad } c = C_J^{-1} c^{1-\lambda-\varrho} JV . \quad (5.13)$$

Aus der Unabhängigkeit von c und q folgt mit (5.11)

$$0 = \frac{\partial q}{\partial c} = \langle \text{grad } q, s_c \rangle = c^{-1} \langle \text{grad } q, \tau_0 + \varrho q K_0 \rangle ,$$

d.h. es gilt

$$L_{\tau_0} q = -\varrho q L_{K_0} q . \quad (5.14)$$

Auf der anderen Seite ist

$$1 = \frac{\partial q}{\partial q} = \langle \text{grad } q, s_q \rangle = \langle \text{grad } q, s_x \rangle = L_{K_0} q ,$$

d.h. es folgt

$$L_{K_0} q = 1 \quad \text{und} \quad L_{\tau_0} q = -\varrho q . \quad (5.15)$$

Außerdem gilt mit $K_1 = c K_0$ (vgl. (5.8))

$$L_{K_1} q = c L_{K_0} q = c . \quad (5.16)$$

Insgesamt erhalten wir

Lemma (5.2):

$$\text{grad } (c^\varrho q) = -C_J^{-1} JZ . \quad (5.17)$$

Beweis: Wir weisen die Gültigkeit von (5.17) auf der Basis K_0 und τ_0 nach.
Mit Satz (4.1) und (5.15) folgt

$$L_{\tau_0} (c^\varrho q) = \varrho q c^\varrho - \varrho q c^\varrho = 0 .$$

Die Anwendung von τ_0 auf

$$-C_J^{-1} JZ = -C_J^{-1} c^{-\lambda} JW = -C_J^{-1} c^{-\lambda} J\tau_0$$

verschwindet wegen (2.4) ebenfalls. Für den Basisvektor K_0 finden wir mit (5.15)

$$L_{K_0} (c^\varrho q) = c^\varrho L_{K_0} q = c^\varrho .$$

Auf der anderen Seite folgt aus Lemma (4.5) (i) und (4.18)

$$-C_J^{-1} \langle JZ, K_0 \rangle = -C_J^{-1} c^{-\lambda} \langle JW, V \rangle = c^\varrho$$

und daraus die Behauptung. \square

Lemma (5.2) liefert uns zusammen mit (5.13) bzw. (5.11) die gesuchte Darstellung von $\text{grad } q$ als

$$\begin{aligned} \text{grad } q &= -C_J^{-1} c^{-(\lambda+\varrho)} (JW + \varrho q JV) = \\ &= -C_J^{-1} c^{1-\lambda-\varrho} Js_c . \end{aligned} \quad (5.18)$$

5.3 Die N-Soliton Mannigfaltigkeit

Es sei $s = s(x, t)$ nun eine N -Soliton Lösung, die für $t \rightarrow +\infty$ die folgende asymptotische Zerlegung hat

$$s = s(x, t) \approx \sum_{i=1}^N s_i(c_i, x + c_i t + d_i) = \sum_{i=1}^N s_i(c_i, x + q_i) . \quad (5.19)$$

Analog der Vorgehensweise im Ein-Soliton Fall interpretieren wir $s = s(x, c_i, t)$ zunächst als Funktion in x, c_i und t und suchen die Darstellung des Tangentialvektors s_{c_i} mit Hilfe der Eigenvektoren $V_1, \dots, V_N, W_1, \dots, W_N$. Im Gegensatz zum Ein-Soliton Fall legen wir die Normierung hier für $t \rightarrow +\infty$ fest und berechnen $s_{c_i}(x, c_i, t)$ für beliebige Zeiten t mit Hilfe der formalen Reihe (5.6).

Für $t \rightarrow +\infty$ zerfällt s in N einzelne Soliton Lösungen, die voneinander ungestört ihre Bahnen ziehen. Da wir c_1, \dots, c_N als unabhängige Parameter interpretieren, ergibt sich $s_{c_i}(x, c_i, t)$ für $t \rightarrow +\infty$ durch $(s_i)_{c_i}(x, c_i, t)$. Für Ein-Soliton Lösungen ist $(s_i)_{c_i}$ bereits bekannt und in Analogie zu (5.11) normieren wir für $t \rightarrow +\infty$

$$s_{c_i}(x, c_i, t) \approx (s_i)_{c_i}(x, c_i, t) \approx c_i^{-1} (W_i + (1 + \varrho) (x + c_i t + d_i) V_i) . \quad (5.20)$$

Wegen der vorhandenen Phasenverschiebungen haben wir hierbei $q = ct$ im Ein-Soliton Fall durch $q_i = c_i t + d_i$ im N -Soliton Fall ersetzt. Ist also $N = 1$, so ist $d_i = 0$, und wir erhalten das Ergebnis aus Kapitel 5.2. Mit Hilfe der bekannten Lie Ableitungen aus Kapitel 4 hat man sich schnell überzeugt, daß sich die asymptotische Formel (5.20) durch Anwenden der formalen Reihe (5.6) aus

$$s_{c_i}(x, c_i, 0) = c_i^{-1} (W_i + (1 + \varrho) d_i) V_i \quad (5.21)$$

ergibt. Insbesondere folgt damit die Gültigkeit von

$$s_{c_i}(x, c_i, t) = c_i^{-1} (W_i + (1 + \varrho) (x + c_i t + d_i) V_i) \quad (5.22)$$

für jeden Zeitpunkt t (unter der vorausgesetzten Normierung). Da für $t \rightarrow +\infty$ die N -Soliton Lösung $s = s(x, c_i, t)$ die asymptotische Zerlegung

$$s(x, c_i, t) \approx \sum_{i=1}^N s_i(c_i, x + c_i t + d_i)$$

besitzt, gilt für $t \rightarrow +\infty$ mit der Schreibweise $q_i = c_i t + d_i$

$$s_{q_i} \approx (s_i)_{q_i} \approx V_i .$$

Wiederum liefert uns das Anwenden der formalen Reihe (5.6) das gesuchte Resultat für alle Zeiten t

$$s_{q_i}(x, c_i, t) = V_i . \quad (5.23)$$

Parametrisieren wir nun die Mannigfaltigkeit aller N -Soliton Lösungen durch $x, c_i, q_i = c_i t + d_i$, so erhalten wir $s = s(x, c_i, q_i)$ und s_{c_i} ergibt sich zu

$$s_{c_i}(x, c_i, q_i) = c_i^{-1} (W_i + \varrho q_i V_i) . \quad (5.24)$$

Für $s_{q_i}(x, c_i, q_i)$ bleibt (5.23) gültig.

Als nächsten Schritt berechnen wir die Gradienten von c_1, \dots, c_N und q_1, \dots, q_N mit Hilfe der Eigenvektoren $V_1, \dots, V_N, W_1, \dots, W_N$.

Mit Folgerung (4.4) ist $\text{grad } c_i$ für jedes $i = 1, \dots, N$ gegeben durch

$$\text{grad } c_i = C_J^{-1} c_i^{1-\lambda-\varrho} J V_i \quad (5.25)$$

Für die Berechnung von $\text{grad } q_i$ benutzen wir (5.23) und erhalten

$$\delta_{i,k} = \frac{\partial q_i}{\partial q_k} = \langle \text{grad } q_i, s_{q_k} \rangle = \langle \text{grad } q_i, V_k \rangle . \quad (5.26)$$

Wegen der Unabhängigkeit der Parameter c_1, \dots, c_N und q_1, \dots, q_N folgt außerdem mit (5.24)

$$0 = \frac{\partial q_i}{\partial c_k} = \langle \text{grad } q_i, s_{c_k} \rangle = c_i^{-1} \langle \text{grad } q_i, W_k + \varrho q_k V_k \rangle . \quad (5.27)$$

Insgesamt finden wir

Lemma (5.3): Für jedes $i = 1, \dots, N$ sind die Gradienten der q_i gegeben durch

$$\text{grad } q_i = - C_J^{-1} c_i^{-(\lambda+\varrho)} (J W_i + \varrho q_i J V_i) . \quad (5.28)$$

Beweis: Der Beweis von Lemma (5.3) ergibt sich durch Überprüfen von (5.28) auf der Basis $V_1, \dots, V_N, W_1, \dots, W_N$. Für jedes $k, i = 1, \dots, N$ erhalten wir mit Lemma (4.5), (4.18) und (5.26)

$$\begin{aligned} & - C_J^{-1} c_i^{-(\lambda+\varrho)} (\langle J W_i, V_k \rangle + \varrho q_i \langle J V_i, V_k \rangle) = \\ & = - C_J^{-1} c_i^{-(\lambda+\varrho)} \langle J W_i, V_k \rangle = \delta_{i,k} = \langle \text{grad } q_i, V_k \rangle \end{aligned}$$

und außerdem mit (5.27)

$$\begin{aligned} & - C_J^{-1} c_i^{-(\lambda+\varrho)} (\langle J W_i, W_k \rangle + \varrho q_i \langle J V_i, W_k \rangle) = \\ & = - C_J^{-1} c_i^{-(\lambda+\varrho)} \varrho q_i \langle J V_i, W_k \rangle = - \delta_{i,k} \varrho q_i = \\ & = - \varrho q_k \langle \text{grad } q_i, V_k \rangle = \langle \text{grad } q_i, W_k \rangle . \end{aligned}$$

□

Folgerung (5.1): In den Vektorfeldern s_{c_i} und s_{q_i} haben die Gradienten von c_i und q_i für jedes $i = 1, \dots, N$ die Darstellung

$$\text{grad } c_i = C_J^{-1} c_i^{1-\lambda-\epsilon} J s_{q_i} , \quad (5.29)$$

$$\text{grad } q_i = - C_J^{-1} c_i^{1-\lambda-\epsilon} J s_{c_i} . \quad (5.30)$$

Bemerkung (5.1):

- (1) In Analogie zu Lemma (5.2) gilt für jedes $i = 1, \dots, N$

$$\text{grad } (c_i^\epsilon q_i) = - C_J^{-1} J Z_i . \quad (5.31)$$

- (2) Wählt man die Normierung von s_{c_i} und s_{q_i} , wie die im Ein-Soliton Fall für $t \rightarrow -\infty$, so ergeben sich bis auf Phasenverschiebungen die gleichen Resultate ([48]).

Als wesentliches Ergebnis dieses Kapitels halten wir fest:

Zusammenfassung:

- (1) Nimmt man die partielle Ableitung einer N -Soliton Lösung s bzgl. eines asymptotischen Datums c_i oder q_i , so erhält man einen Eigenvektor des Rekursionsoperators zum Eigenwert c_i .
- (2) Bis auf einen integrierenden Faktor ergeben sich s_{q_i} und s_{c_i} als die den asymptotischen Daten c_i und q_i zugeordneten Vektorfelder.

Während das Resultat für s_{q_i} und die dazugehörige asymptotische Geschwindigkeit bekannt war ([13],[41]), beantworten die vorliegenden Ergebnisse die Frage nach den diskreten Eigenvektoren des Rekursionsoperators im N -Soliton Fall vollständig. Sie lassen sich sowohl als Linearkombinationen der Symmetrien und Mastersymmetrien darstellen als auch durch die partielle Ableitung nach den asymptotischen Daten charakterisieren. In Kapitel 6 werden wir darüberhinaus zeigen, daß s_{q_i} und s_{c_i} , die zu kanonischen Wirkungs- und Winkelvariablen gehörigen Vektorfelder sind. Unser nächstes Ziel ist es daher, die Skalarfelder $c_i(s)$ und $q_i(s)$ explizit in der Feldvariablen s auszudrücken und somit explizite Wirkungs- und Winkelvariablen in s zu konstruieren. Bevor wir damit beginnen, wollen wir in Kapitel 5.4 die Eigenvektoren s_{q_i} und s_{c_i} an Beispielen visualisieren.

5.4 Beispiele

In diesem Kapitel plotten wir die Eigenvektoren s_{q_i} und s_{c_i} für einige ausgewählte Beispiele. Dazu nehmen wir der Einfachheit halber jeweils eine 2-Soliton Lösung s und zeigen die entsprechenden partiellen Ableitungen von s bzgl. der asymptotischen Daten. Da die Eigenvektoren s_{q_i} und s_{c_i} für $i = 1, 2$ und für verschiedene Beispiele das gleiche qualitative Verhalten haben, beschränken wir uns auf die Lösungen der KdV und des HS Systems. Die analogen Bilder für die mKdV und die CDGSK findet man in ([100]).

Die 2-Soliton Lösung $s(x, t)$ der KdV ist in Hirota-Form gegeben durch ([1])

$$s(x, t) = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log F(x, t) \quad (5.32)$$

mit

$$F(x, t) = 1 + \exp(\eta_1) + \exp(\eta_2) + \left(\frac{\sqrt{c_2} - \sqrt{c_1}}{\sqrt{c_2} + \sqrt{c_1}} \right)^2 \exp(\eta_1 + \eta_2)$$

und für $i = 1, 2$

$$\eta_i = \sqrt{c_i} (x - c_i t + e_i) .$$

Für die Geschwindigkeiten $c_1 = 0.8$ und $c_2 = 0.4$ ist das entsprechende 2-Soliton in Figur 1 abgebildet (vgl. Kapitel 3.1). In jenem Bild und in allen weiteren sind jeweils Schnitte entlang der Zeitachse geplottet. In Figur 1 ist als Parameterbereich für x das Intervall von -33 bis $+33$ gewählt, während t zwischen -33 und $+30$ läuft. Die Koordinaten für den Standpunkt des Betrachters sind $(70, 70, 90)$ und die Blickrichtung ist in allen Bildern zum Nullpunkt hin. Die tatsächlichen Funktionswerte wurden aus ästhetischen Gesichtspunkten mit dem Faktor 24 multipliziert.

Die Größen $e_i - c_i t$ sind in diesem Fall nicht die q_i , aber sie stimmen mit q_i bis auf einen Faktor, der von c_1 und c_2 abhängt, überein. Da die Koordinaten c_1, c_2, q_1 und q_2 als unabhängig vorausgesetzt werden, erhalten wir den ersten Eigenvektor des Rekursionsoperators zum Eigenwert $c_1 = 0.8$ durch die partielle Ableitung von s in (5.32) nach e_i . Als Funktion in x und t ist $s_{c_i}(x, t)$ in Figur 2 dargestellt. Im Vergleich mit Figur 1 sind die Koordinaten des Betrachters modifiziert worden zu $(70, 80, 40)$ und der Parameterbereich für t beginnt bei -30 .

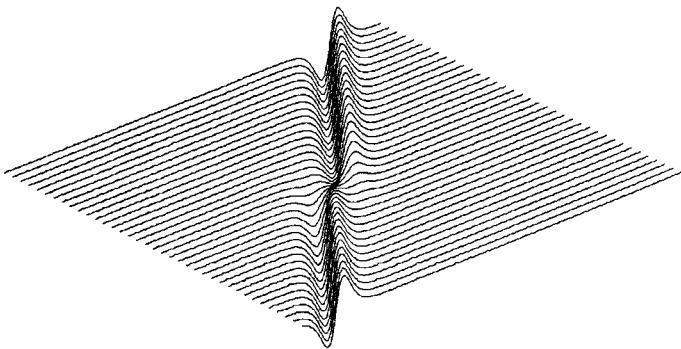


Fig. 2

1. Eigenvektor des Rekursionsoperators der KdV zum Eigenwert $c_1 = 0.8$

Ein zweiter Eigenvektor zum Eigenwert c_1 ergibt sich nach Kapitel 5.3 als partielle Ableitung von s nach c_1 . Differenziert man die 2-Soliton Lösung (5.32) nach c_1 , so muß man den "Phasenshiftfaktor"

$$\left(\frac{\sqrt{c_2} - \sqrt{c_1}}{\sqrt{c_2} + \sqrt{c_1}} \right)^2$$

aufgrund unserer Normierung in Kapitel 5.3 als Konstante voraussetzen. Damit ergibt sich $s_{c_1}(x, t)$ wie in Figur 3.

In diesem Plot bewegt sich x zwischen -18 und $+40$ und t im Bereich von -13 bis $+35$. Der Standpunkt des Betrachters ist $(90, 55, 20)$. Wegen des linearen Anwachses der Funktionswerte in der Zeit wurden die Funktionswerte nur mit dem Faktor 1.5 multipliziert.

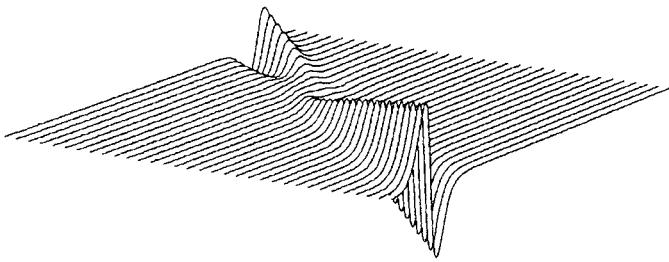


Fig. 3

2. Eigenvektor des Rekursionsoperators der KdV zum Eigenwert $c_1 = 0.8$

Für das **HS** System sind die beiden Komponenten u und v einer 2-Soliton Lösung gegeben durch ([57])

$$u = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log F, \quad v = \frac{G}{F}. \quad (5.33)$$

Hierbei bezeichnen F und G die beiden folgenden Funktionen

$$\begin{aligned} F &= 1 + a_{20} \exp(2\eta_1) + a_{11} \exp(\eta_1 + \eta_2) + \\ &\quad + a_{02} \exp(2\eta_2) + a_{22} \exp(2\eta_1 + 2\eta_2), \\ G &= \exp(\eta_1) + a_{21} \exp(2\eta_1 + \eta_2) + \exp(\eta_2) + a_{12} \exp(\eta_1 + 2\eta_2), \end{aligned}$$

und $\eta_i, a_{20}, a_{02}, a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{22}$ stehen für die Abkürzungen

$$\eta_i = c_i^{1/4} (x - c_i t + e_i) \quad \text{für } i = 1, 2$$

$$a_{20} = \frac{1}{8c_1}, \quad a_{02} = \frac{1}{8c_2},$$

$$a_{11} = \frac{2}{(c_1^{1/4} + c_2^{1/4})^2 (c_1^{1/2} + c_2^{1/2})} , \quad a_{21} = a_{20} \frac{(c_1^{1/4} - c_2^{1/4})^2}{(c_1^{1/4} + c_2^{1/4})^2} ,$$

$$a_{12} = a_{02} \frac{(c_1^{1/4} - c_2^{1/4})^2}{(c_1^{1/4} + c_2^{1/4})^2} , \quad a_{22} = a_{02} a_{20} \frac{(c_1^{1/4} - c_2^{1/4})^4}{(c_1^{1/4} + c_2^{1/4})^4} .$$

Für die Eigenwerte $c_1 = 1$ und $c_2 = 0.8$ geben die Figuren 4 und 5 die beiden Komponenten der Soliton Lösung wieder. Als Standpunkt wurde hier $(15, 50, 30)$ gewählt. In Figur 4 läuft x von -15 bis $+15$ und t von -18 bis $+15$, während in Figur 5 die Parameterbereiche von x das Intervall von -14 bis $+16$ und für t das Intervall von -13.5 bis $+14.5$ ist. Die aktuellen x -Werte wurden um den Faktor 1.5 vergrößert. In Figur 4 sind die aktuellen Funktionswerte mit dem Faktor 4 multipliziert worden; in Figur 5 wurde der Multiplikationsfaktor 5 gewählt.

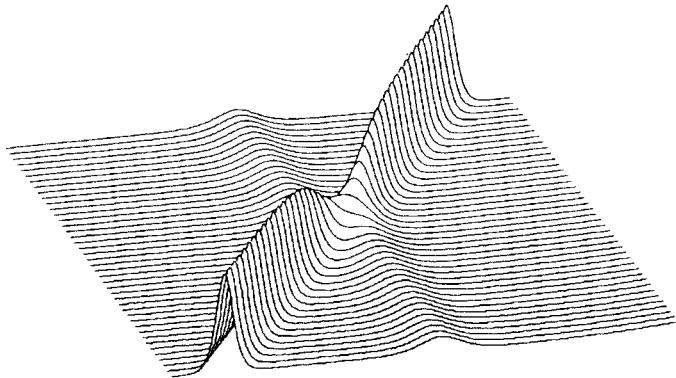


Fig. 4
1. Komponente der 2-Soliton Lösung von HS mit $c_1 = 1$ und $c_2 = 0.8$

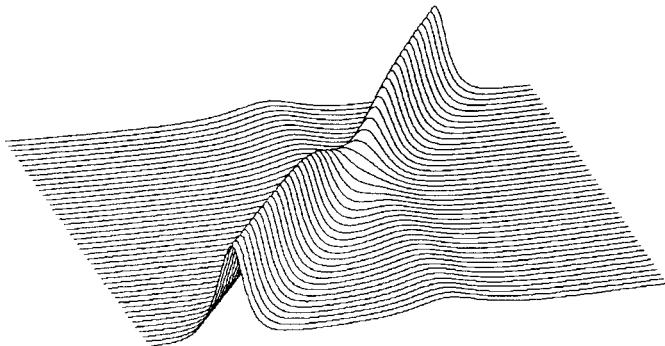


Fig. 5

2. Komponente der 2-Soliton Lösung von HS mit $c_1 = 1$ und $c_2 = 0.8$

Genau wie bei der KdV ergibt die partielle Ableitung nach e_i einen Eigenvektor des Rekursionsoperators zum Eigenwert c_i . Die Figuren 6 und 7 zeigen die Komponenten des 1. Eigenvektors bzgl. c_1 . In diesen Bildern ist der Standpunkt $(55, 85, 40)$, x variiert zwischen -8 und $+9$ und t zwischen -6 und $+5$. Die aktuellen x - und t -Werte wurden jeweils mit dem Faktor 2 vergrößert. In Figur 6 sind die aktuellen Funktionswerte mit 1.5 und in Figur 7 mit 2 multipliziert worden.

Die partielle Ableitung der Soliton Lösung nach c_1 liefert den zweiten Eigenvektor des Rekursionsoperators zum Eigenwert c_1 . Die Komponenten dieses Eigenvektors sind in Figur 8 und Figur 9 geplottet. Der Betrachter hat in Figur 8 die Koordinaten $(90, 60, 20)$, während in Figur 9 die Koordinaten $(90, 50, 20)$ gewählt wurden. Der Parameterbereich von x bzw. t liegt zwischen -30 und $+35$ bzw. zwischen -20 und $+20$. Die aktuellen x - und t -Werte sind mit dem Faktor 0.5 reduziert worden. Die aktuellen Funktionswerte wurden in Figur 8 mit dem Faktor 0.1 und in Figur 9 mit dem Faktor 0.3 multipliziert.

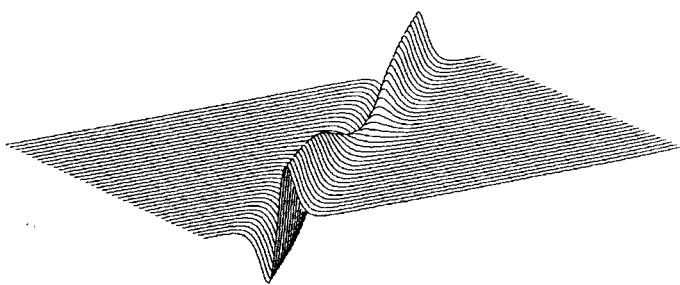


Fig. 6

1. Komponente des 1. Eigenvektors zum Eigenwert $c_1 = 1$

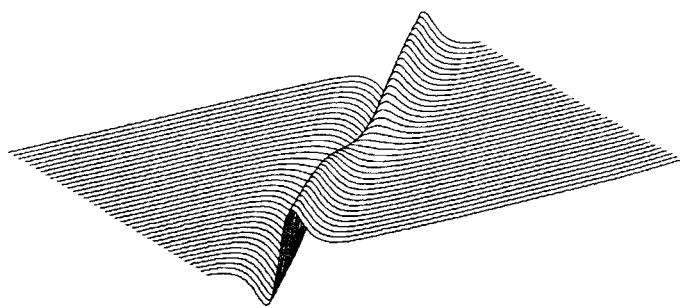


Fig. 7

2. Komponente des 1. Eigenvektors zum Eigenwert $c_1 = 1$

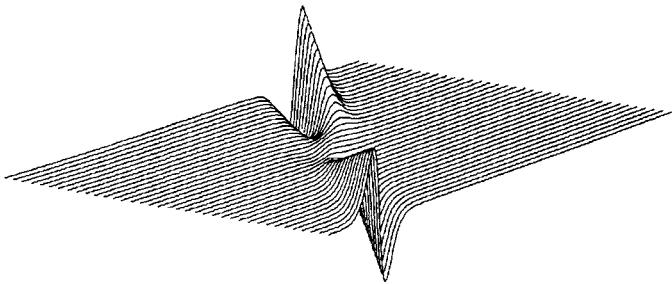


Fig. 8
1. Komponente des 2. Eigenvektors zum Eigenwert $c_1 = 1$

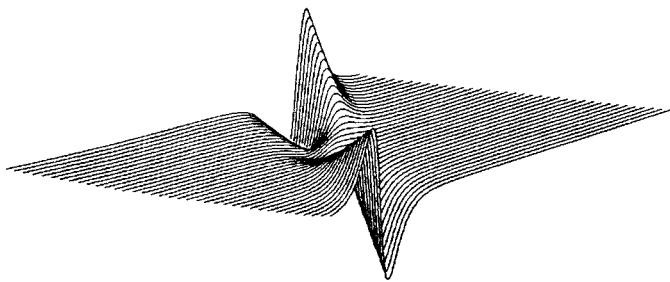


Fig. 9
2. Komponente des 2. Eigenvektors zum Eigenwert $c_1 = 1$

6 Wirkungs- und Winkelvariablen

Wie in den Kapiteln zuvor bezeichne s eine N -Soliton Lösung, die asymptotisch die Form

$$s \approx \sum_{i=1}^N s_i (c_i, x + q_i) \quad (6.1)$$

habe. In Kapitel 3.5 hatten wir gezeigt, daß das auf die Untermannigfaltigkeit M_N eingeschränkte System

$$s_t = K_1(s) \quad (6.2)$$

ein hamiltonisches System auf M_N bzgl. $\Theta_0(s) = J_{|M_N}^{-1}(s)$ ist. Darüberhinaus besitzt das System (6.2) die N unabhängigen Erhaltungsgrößen $H_0(s), H_1(s), \dots, H_{N-1}(s)$ (vgl. (2.10) und Lemma (3.1)), die zusätzlich alle in Involution sind, d.h. für die

$$\{H_i, H_j\}_{\Theta_0} = 0$$

gilt (vgl. (1.7), (2.4) und (2.8)). Damit ist (6.2) vollständig integrabel im Sinn des klassischen Theorems von Arnold/Liouville ([2],[9]). Auf M_N existieren daher Skalarfelder $Q_1(s), \dots, Q_N(s), P_1(s), \dots, P_N(s)$, die als kanonische Wirkungs- und Winkelvariablen interpretiert werden können. Für deren explizite Konstruktion suchen wir gemäß der Begriffsbestimmung in der Einleitung einen implektischer Operator $\Theta(s)$ und Skalarfelder $Q_1(s), \dots, Q_N(s), P_1(s), \dots, P_N(s), H(s) = H(Q_1, \dots, Q_N)$ mit den folgenden Eigenschaften

$$(W1) \quad K_1(s) = \Theta(s) \operatorname{grad} H(s) ,$$

$$(W2) \quad \begin{aligned} \{Q_i, Q_j\}_{\Theta} &= 0 = \{P_i, P_j\}_{\Theta} , \\ \{Q_i, P_j\}_{\Theta} &= \delta_{i,j} . \end{aligned}$$

Parametrisieren wir die Mannigfaltigkeit aller N -Soliton Lösungen mit Hilfe der asymptotischen Daten c_i und q_i , so müssen sich die gesuchten Wirkungs- und Winkelvariablen Q_i und P_i in c_i und q_i ausdrücken lassen. Die Inverse Streumethode liefert zum Beispiel diesen Zusammenhang für den nicht-hamiltonischen Fall. Ohne von deren Ergebnissen Gebrauch zu machen, werden wir mit den hier entwickelten Hilfsmitteln die Wirkungs- und Winkelvariablen konstruieren. Dieses geschieht zunächst in den Koordinaten c_i und q_i . Um den Zusammenhang zu den physikalisch relevanten Größen auf der gesamten Mannigfaltigkeit M herzustellen, suchen wir die Darstellung von Q_i und P_i bezüglich der Feldvariablen s . Mit diesem Ergebnis können dann alle in (W1) und (W2) vorkommenden Größen mit bekannten Feldern auf M in Beziehung gesetzt werden.

Die Ergebnisse der Kapitel 4 und 5 liefern uns in Kapitel 6.1 die gesuchten Wirkungs- und Winkelvariablen für den nicht-hamiltonischen Fall (vgl.

auch [81]). In Kapitel 6.2 behandeln wir den hamiltonischen Fall, während im abschließenden Kapitel 6.3 die Resultate an Beispielen interpretiert werden.

6.1 Der nicht-hamiltonische Fall

In Kapitel 4 hatten wir bereits hamiltonische (bzgl. $\Theta_0(s) = J^{-1}(s)$) Vektorfelder $V_i(s)$ und $Z_i(s)$ gefunden, die in der Lie Algebra der Vektorfelder die folgenden Kommutatorrelationen (vgl. Lemma (4.3), Lemma (4.4) und Satz (4.3))

$$[V_i, V_j] = 0, \quad [Z_i, Z_j] = 0, \quad [Z_i, V_j] = \delta_{i,j} \varrho c_i^{-\lambda} V_i$$

erfüllen. Da es sich bei der Abbildung $\Theta_0 \circ \text{grad}$ um einen Lie Algebren Homomorphismus handelt, sind die zu $V_i(s)$ und $Z_i(s)$ gehörigen Skalarfelder (bis auf Normierung) geeignete Kandidaten für die gesuchten Wirkungs- und Winkelvariablen. Mit Hilfe von $J(s)$ lassen sich $V_i(s)$ und $Z_i(s)$ auf Kovektorfelder abbilden, die wiederum in Termen von $\text{grad } c_i(s)$ und $\text{grad } q_i(s)$ ausgedrückt werden können. Da die Untermannigfaltigkeit M_N kein linearer Raum mehr ist, gibt es keinen vorgezeichneten Weg, die zu $\text{grad } c_i(s)$ und $\text{grad } q_i(s)$ gehörigen Potentiale zu finden. Aus diesem Grund schlagen wir einen Umweg ein und bestimmen alle relevanten Größen zunächst in den Koordinaten $c_1, \dots, c_N, q_1, \dots, q_N$. Im zweiten Schritt werden die Ergebnisse in der Feldvariablen s formuliert. Für diese Umformulierung benötigen wir die empirische Tatsache (vgl. Anhang B), daß für $\lambda \in \mathbb{N}_0$ die Skalierungsmastersymmetrie $\tau_0(u)$ auf der gesamten Mannigfaltigkeit eine eindeutige hamiltonische Formulierung besitzt. Genauer gesagt setzen wir im Fall

$$\lambda = 0 : \quad J(u) \tau_0(u) = \text{grad } F(u) \quad (6.3)$$

$$\lambda \in \mathbb{N} : \quad \tau_0(u) = \Theta_\lambda(u) \text{grad } F(u) . \quad (6.4)$$

Hierbei ist λ die in (1.16) eingeführte Normierungskonstante. Da alle Felder $J(u), \tau_0(u), \Theta_\lambda(u)$ und $F(u)$ auf die Untermannigfaltigkeit einschränkbar sind (vgl. Kapitel 3), läßt sich $\tau_0(s)$ auf M_N gemäß (6.3) und (6.4) darstellen, d.h. wir erhalten im Fall

$$\lambda = 0 : \quad J(s) \tau_0(s) = \text{grad } F(s) \quad (6.5)$$

$$\lambda \in \mathbb{N} : \quad \tau_0(s) = \Theta_\lambda(s) \text{grad } F(s) . \quad (6.6)$$

Nach diesen Vorbemerkungen wenden wir uns nun der Konstruktion der Wirkungs- und Winkelvariablen in den Koordinaten $c_1, \dots, c_N, q_1, \dots, q_N$ zu.

Weil die Mannigfaltigkeit M_N unter den gewählten Randbedingungen homöomorph zu \mathbb{R}^{2N} ist ([34]), ist die Parametrisierung der N -Soliton Lösungen

s durch die asymptotischen Daten c_i und q_i eine globale Karte von M_N . In dieser Karte werden $q_1, \dots, q_N, c_1, \dots, c_N$ als Koordinaten in \mathbb{R}^{2N} betrachtet. Die Tangentialvektoren $\frac{\partial s}{\partial q_i}, \frac{\partial s}{\partial c_i} \in T_s M_N$ entsprechen in dieser Karte den Einheitsvektoren des \mathbb{R}^{2N} ([88])

$$\frac{\partial s}{\partial q_i} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial s}{\partial c_i} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6.7)$$

und die Dualitätsklammer $\langle \cdot, \cdot \rangle$ zwischen Tangential- und Kotangentialraum geht über in das Standardskalarprodukt im \mathbb{R}^{2N} .

Für Felder A , die wir in der Karte betrachten, schreiben wir abkürzend A an Stelle von $A(q_1, \dots, q_N, c_1, \dots, c_N)$. Für Felder, die in der Variablen s ausgedrückt werden, benutzen wir $A(s)$ ohne auf die expliziten Transformationsgesetze für Tensorfelder einzugehen.

Der symplektische Operator J wird in der obigen Karte dargestellt als antisymmetrische Matrix mit

$$J_{ik} = \begin{cases} \langle Js_{q_i}, s_{q_k} \rangle & \text{für } i, k = 1, \dots, N \\ \langle Js_{q_i}, s_{c_{k-N}} \rangle & \text{für } i = 1, \dots, N, k = N+1, \dots, 2N \\ \langle Js_{c_{i-N}}, s_{q_k} \rangle & \text{für } i = N+1, \dots, 2N, k = 1, \dots, N \\ \langle Js_{c_{i-N}}, s_{q_{k-N}} \rangle & \text{für } i, k = N+1, \dots, 2N \end{cases}.$$

Da sich s_{c_i} und s_{q_i} mit Hilfe von V_i und W_i ausdrücken lassen (vgl. (5.23), (5.24)), kann man J_{ik} aus $\langle JV_i, V_k \rangle, \langle JV_i, W_k \rangle$ und $\langle JW_i, W_k \rangle$ berechnen. Mit Lemma (4.5) (i), (4.18) und wegen

$$\langle JV_i, V_k \rangle = 0 = \langle JW_i, W_k \rangle$$

(vgl. (4.10)) erhalten wir

$$J = C_J \begin{pmatrix} 0 & -\Lambda_{(\lambda+\varrho-1)} \\ \Lambda_{(\lambda+\varrho-1)} & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.8)$$

wobei als abkürzende Schreibweise Λ_p für die Diagonalmatrix

$$\Lambda_p = \begin{pmatrix} c_1^p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2^p & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & c_N^p \end{pmatrix} \quad (6.9)$$

steht. Da die Tangentialvektoren s_{c_i} und s_{q_i} Eigenvektoren von Φ zum Eigenwert c_i sind, hat Φ in der gewählten Karte Diagonalgestalt mit

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_1 \end{pmatrix} . \quad (6.10)$$

Die höheren implektischen Operatoren sind gemäß (3.52) für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ definiert als

$$\Theta_n = \Phi^n J^{-1} = \Phi^n \Theta_0 = C_J^{-1} \begin{pmatrix} 0 & \Lambda_{(n+1-\lambda-\epsilon)} \\ -\Lambda_{(n+1-\lambda-\epsilon)} & 0 \end{pmatrix} . \quad (6.11)$$

Für die in Kapitel 4 konstruierten Eigenvektoren V_i , W_i und Z_i finden wir mit (5.23), (5.24) und (5.31)

$$V_i = s_{q_i} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^* = \Theta_0 \operatorname{grad} (C_J \frac{1}{\lambda + \epsilon} c_i^{\lambda + \epsilon}) , \quad (6.12)$$

$$W_i = c_i s_{c_i} - \epsilon q_i s_{q_i} = (0, \dots, -\epsilon q_i, 0, \dots, c_i, 0, \dots, 0)^* , \quad (6.13)$$

$$\begin{aligned} Z_i &= (0, \dots, -\epsilon q_i c_i^{-\lambda}, 0, \dots, c_i^{1-\lambda}, 0, \dots, 0)^* = \\ &= \Theta_0 \operatorname{grad} (-C_J c_i^\lambda q_i) . \end{aligned} \quad (6.14)$$

Hierbei bedeutet $*$ die Transposition bzgl. $\langle \cdot, \cdot \rangle$, d.h.

$$(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^* = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Aus der Dekomposition von K_n und τ_n in Eigenvektoren von Φ (vgl. Folgerung (4.3) (iv)) erhalten wir mit (6.12) und (6.13) die Darstellungen der Symmetrien und Mastersymmetrien

$$K_n = (c_1^n, \dots, c_N^n, 0, \dots, 0)^* , \quad (6.15)$$

$$\tau_n = (-\epsilon q_1 c_1^n, \dots, -\epsilon q_N c_N^n, c_1^{n+1}, \dots, c_N^{n+1})^* . \quad (6.16)$$

In (2.6) sind die Erhaltungssätze H_n als $\langle JK_n, \tau_0 \rangle$ definiert worden. Mit (6.8), (6.15) und (6.16) folgt daher (vgl. auch (3.17) und Folgerung (4.4))

$$H_n = C_J \sum_{i=1}^N c_i^{n+\lambda+\epsilon} . \quad (6.17)$$

In der gewählten Karte wird die Evolutionsgleichung $s_t = K_1(s)$ zu dem linearen System

$$\frac{d}{dt} (q_1, \dots, q_N, c_1, \dots, c_N)^* = (c_1, \dots, c_N, 0, \dots, 0)^*. \quad (6.18)$$

Nach den Vorbemerkungen in diesem Kapitel ist für $\lambda \in \mathbf{N}_0$ die Mastersymmetrie $\tau_0(s)$ hamiltonisch bzgl. $\Theta(s) := \Theta_\lambda(s)$. Hierbei beachte man, daß J auf M_N invertierbar ist, und wir $\Theta_0(s) = J^{-1}(s)$ gesetzt hatten (vgl. Kapitel 3.5). Mit den Transformationsgesetzen für beliebige Tensorfelder unter Kartenwechsel ([2]) bleibt ein Vektorfeld hamiltonisch

$$\tau_0 = \Theta \operatorname{grad} F,$$

und $\Theta = \Theta_\lambda$ hat die Gestalt (vgl. (6.11))

$$\Theta = C_J^{-1} \begin{pmatrix} 0 & \Lambda_{(1-\varrho)} \\ -\Lambda_{(1-\varrho)} & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.19)$$

Daraus erhalten wir die hamiltonischen Formulierungen von τ_0 und K_1 bzgl. Θ als

$$\tau_0 = \Theta \operatorname{grad} \left(-C_J \sum_{i=1}^N c_i^\varrho q_i \right) =: \Theta \operatorname{grad} F, \quad (6.20)$$

$$K_1 = \Theta \operatorname{grad} \left(C_J \frac{1}{1+\varrho} \sum_{i=1}^N c_i^{1+\varrho} \right) =: \Theta \operatorname{grad} H. \quad (6.21)$$

Als Konsequenz finden wir die Gültigkeit des folgenden Satzes:

Satz (6.1):

- (i) Die Koordinaten $Q_i := C_J \frac{1}{\varrho} c_i^\varrho$ und $P_i := C_J q_i$ bilden einen Satz von kanonischen Wirkungs- und Winkelvariablen (bzgl. Θ) auf M_N , d.h. es gilt

$$\begin{aligned} \{Q_i, Q_k\}_\Theta &= 0 = \{P_i, P_k\}_\Theta, \\ \{Q_i, P_k\}_\Theta &= C_J \delta_{i,k}. \end{aligned} \quad (6.22)$$

- (ii) Das Skalarfeld H ist eine Funktion der Wirkungsvariablen Q_i .

- (iii) Die den kanonischen Wirkungs- und Winkelvariablen Q_i und P_i zugeordneten hamiltonischen Vektorfelder sind gegeben durch

$$A_i := (0, \dots, 1, 0, \dots, 0)^* = \Theta \operatorname{grad} Q_i, \quad (6.23)$$

$$B_i := (0, \dots, 0, -c_i^{1-\varrho}, 0, \dots)^* = \Theta \operatorname{grad} P_i. \quad (6.24)$$

(iv) Für die Lie Ableitung von Q_i und P_i in Richtung τ_0 gilt

$$L_{\tau_0} Q_i = \varrho Q_i, \quad L_{\tau_0} P_i = -\varrho P_i. \quad (6.25)$$

Beweis: (i): Wir erinnern an die durch Θ definierte Poissonklammer (vgl. (1.7)) für Skalarfelder $f, g \in \mathcal{F}(M_N)$

$$\{f, g\}_\Theta = \langle \text{grad } g, \Theta \text{ grad } f \rangle$$

und erhalten die Behauptung durch Nachrechnen. Ebenfalls durch Nachrechnen ergeben sich die Aussagen (ii) und (iii).

(iv): Mit der Definition der Lie Ableitung $L_{\tau_0} f$ als

$$L_{\tau_0} f = \langle \text{grad } f, \tau_0 \rangle$$

erhält man die angegebenen Lie Ableitungen. \square

Gemäß unserer Definition (W1) und (W2) von kanonischen Wirkungs- und Winkelvariablen haben wir diese Größen mit Satz (6.1) gefunden. Innerhalb der Karte sind diese Größen nicht eindeutig, denn jede andere Wahl des implektischen Operators hätte ebenfalls zu Skalarfeldern geführt, die die Anforderungen (W1) und (W2) erfüllen. Unser spezielles Augenmerk richtet sich aber auf solche Felder, die eine Darstellung in der "physikalischen" Variablen s haben, d.h. wir wollen Wirkungs- und Winkelvariablen konstruieren, die sich mit den bekannten Größen der Ausgangsgleichung darstellen lassen. In diesem Sinn sind die Wirkungs- und Winkelvariablen eindeutig, wie sich im folgenden zeigen wird.

Lemma (6.1):

(i) Die den Wirkungs- und Winkelvariablen Q_i und P_i zugeordneten hamiltonischen Vektorfelder A_i und B_i haben die folgende Darstellung

$$\begin{aligned} A_i &= s_{q_i}, \\ B_i &= -c_i^{1-\varrho} s_{c_i} = -\varrho \frac{\partial s}{\partial (c_i^\varrho)}. \end{aligned}$$

(ii) Das Skalarfeld H ergibt sich in den bekannten Skalarfeldern H_n zu

$$H = \frac{1}{1+\varrho} H_{(1-\lambda)}.$$

Beweis: Die Darstellung von A_i und B_i folgt aus (6.7), (6.23), (6.24) und der Kettenregel, während die Darstellung von H sich sofort aus (6.17) und (6.21) ergibt. \square

Lemma (6.1) liefert uns die Darstellung der Vektorfelder A_i und B_i in der Feldvariablen s als

$$A_i(s) = \Theta(s) \operatorname{grad} Q_i(s) = \frac{\partial s}{\partial q_i}(s) , \quad (6.26)$$

$$B_i(s) = \Theta(s) \operatorname{grad} P_i(s) = -\varrho \frac{\partial s}{\partial(c_i^e)}(s) . \quad (6.27)$$

Die explizite Form von $Q_i(s)$ und $P_i(s)$ ergibt sich aus

Satz (6.2): Es sei $F(s)$ das von $\tau_0(s)$ eindeutig bestimmte Skalarfeld auf M_N mit

$$\tau_0(s) = \Theta(s) \operatorname{grad} F(s) .$$

Dann haben die Skalarfelder $Q_i(s)$ und $P_i(s)$ die folgende Darstellung in der Feldvariablen s

$$Q_i(s) = -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial F}{\partial q_i}(s) \quad \text{und} \quad P_i(s) = -\frac{\partial F}{\partial(c_i^e)}(s) . \quad (6.28)$$

Beweis: Da Lie Ableitungen unter Kartenwechseln invariant sind ([88]) folgt mit Satz (6.1) (iv) und Lemma (6.1)

$$\begin{aligned} \varrho Q_i(s) &= L_{\tau_0(s)} Q_i(s) = \langle \operatorname{grad} Q_i(s), \tau_0(s) \rangle = \\ &= \langle \operatorname{grad} Q_i(s), \Theta(s) \operatorname{grad} F(s) \rangle = \\ &= -\langle \operatorname{grad} F(s), \Theta(s) \operatorname{grad} Q_i(s) \rangle = \\ &= -\langle \operatorname{grad} F(s), \frac{\partial s}{\partial q_i}(s) \rangle = -\frac{\partial F}{\partial q_i}(s) \end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned} -\varrho P_i(s) &= L_{\tau_0(s)} P_i(s) = \\ &= -\langle \operatorname{grad} F(s), \Theta(s) \operatorname{grad} P_i(s) \rangle = \\ &= \varrho \langle \operatorname{grad} F(s), \frac{\partial s}{\partial(c_i^e)}(s) \rangle = \varrho \frac{\partial F}{\partial(c_i^e)}(s) . \end{aligned}$$

\square

Folgerung (6.1): Weil Poissonklammern zwischen Skalarfeldern ebenfalls invariant unter einem Kartenwechsel sind, folgt aus Satz (6.1) (i), daß die Skalarfelder

$$Q_i(s) = -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial F}{\partial q_i}(s) \quad \text{und} \quad P_i(s) = -\frac{\partial F}{\partial(c_i^0)}(s) \quad (6.29)$$

kanonisch sind bzgl. $\Theta(s)$, d.h. sie erfüllen (W2).

Formal läßt sich das Skalarfeld $H(s)$ mit

$$K_1(s) = \Theta(s) \operatorname{grad} H(s)$$

nach Satz (6.1) (ii) in den Variablen $Q_1(s), \dots, Q_N(s)$ ausdrücken. Im Sinne unserer bislang verfolgten Philosophie fragen wir nun noch nach dem Zusammenhang von $H(s)$ mit den aus der Reduktion bekannten Skalarfeldern $H_n(s)$. Da

$$H = \frac{1}{1 + \varrho} H_{(1-\lambda)}$$

gilt, folgt

- (1) Ist $\lambda = 0$ oder $\lambda = 1$, so stimmt H bis auf die Normierung mit H_1 bzw. H_0 überein. Diese Größen stammen aus der Reduktion von der gesamten Mannigfaltigkeit und sind explizit als Funktion der Feldvariablen s gegeben. In allen hier betrachteten Beispielen tritt genau dieser Fall ein (vgl. auch Kapitel 6.3 und Anhang B).
- (2) Ist λ eine natürliche Zahl echt größer als 1, so kann H nur mit auf der gesamten Mannigfaltigkeit existierenden Skalarfeldern identifiziert werden, wenn es außer den hier betrachteten Erhaltungsgrößen H_n mit $n \in \mathbb{N}_0$ noch weitere gibt, die die Rekursionsformeln in Kapitel 2 mit einem negativen Index erfüllen. Dieses trifft zum Beispiel auf einige Gittersysteme wie das relativistische Toda-Gitter ([85]) und auf die sogenannten tri-hamiltonischen Systeme wie zum Beispiel das Kaup-Broer System ([18],[66]) zu.

Man beachte hierbei, daß wir für die Existenz einer hamiltonischen Formulierung von τ_0 bereits $\lambda \in \mathbb{N}_0$ vorausgesetzt hatten (vgl. Anhang B).

Folgerung (6.2):

- (i) Die Skalarfelder

$$Q_i(s) = -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial F}{\partial q_i}(s) \quad \text{und} \quad P_i(s) = -\frac{\partial F}{\partial(c_i^0)}(s)$$

bilden einen Satz von kanonischen Wirkungs- und Winkelvariablen (bzgl. $\Theta_\lambda(s)$) auf der N -Soliton Mannigfaltigkeit M_N .

(ii) Ist $\lambda = 0$ oder $\lambda = 1$, so ist die Evolutionsgleichung

$$s_t = K_1(s) = \Theta(s) \operatorname{grad} H(s)$$

ein hamiltonisches System mit der in der Feldvariablen s explizit darstellbaren Hamiltonfunktion $H(s) = H_{(1-\lambda)}(s)$.

Damit ist unser Ziel erreicht, wir haben für den nicht-hamiltonischen Fall die gesuchten Wirkungs- und Winkelvariablen gefunden. Analog den Ergebnissen der Inversen Streumethode erhalten wir in der Kartendarstellung die kanonischen Koordinaten als Funktionen in c_i und q_i . Die zugrundeliegende Poissonstruktur wird in unserem Zugang durch den implektischen Operator bestimmt, der τ_0 zu einem hamiltonischen Vektorfeld macht (vgl. auch Kapitel 6.3). Darüberhinaus haben wir im Gegensatz zu der Inversen Streumethode eine explizite Darstellung der Wirkungs- und Winkelvariablen in der Feldvariablen s gefunden. Auch hierbei spielte die eindeutige hamiltonische Formulierung von $\tau_0(u)$ bzw. die Existenz des globalen Skalarfeldes $F(u)$ die wesentliche Rolle.

Wegen (6.26) und (6.27) sind die im vorherigen Kapitel geplotteten Eigenvektoren des Rekursionsoperators bis auf Konstanten die zu den kanonischen Variablen gehörigen hamiltonischen Vektorfelder. Insbesondere folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial q_i}(s) &= V_i(s) , \\ c_i^{1-\varrho} \frac{\partial s}{\partial c_i}(s) &= c_i^\varrho (W_i(s) + \varrho q_i V_i(s)) , \end{aligned}$$

d.h. die Symmetrien K_n bestimmen die zu den Wirkungsvariablen gehörigen Vektorfelder. Die zu den Winkelvariablen gehörigen Vektorfelder sind dagegen bis auf die Normierung in Kapitel 5.3 strukturell durch die Mastersymmetrien τ_n festgelegt (vgl. Einleitung).

6.2 Der hamiltonische Fall

Auch im hamiltonischen Fall suchen wir kanonische Wirkungs- und Winkelvariablen für die auf die N -Soliton Mannigfaltigkeit eingeschränkte Gleichung

$$s_t = (1 + \varrho) K_1(s) \tag{6.30}$$

(vgl. die Normierung in Kapitel 1) in Termen der Feldvariablen s . Da die Methoden und die Ergebnisse der Kapitel 4 und 5 nur auf den nicht-hamiltonischen Fall zutreffen, müssen wir hier andere Hilfsmittel als in Kapitel 6.1

benutzen. Wir wollen deshalb kurz resümieren, welche Informationen uns aus den ersten drei Kapiteln bereits zur Verfügung stehen.

Wie im nicht-hamiltonischen Fall lassen sich der implektische Operator $\Theta_0(u)$, die Vektorfelder $K_n(u)$ und $\tau_n(u)$ und die Skalarfelder $H_n(u)$ und $T_n(u)$ auf die Untermannigfaltigkeit einschränken, so daß für $s \in M_N$ gilt (vgl. (2.19) und (2.20))

$$\begin{aligned} (n + \varrho) K_n(s) &= \Theta_0(s) \operatorname{grad} H_n(s) , \\ \tau_n(s) &= \Theta_0(s) \operatorname{grad} T_n(s) . \end{aligned}$$

Die Skalarfelder $H_n(s)$ und $T_n(s)$ erfüllen auf M_N für jedes $n, m \in \mathbb{N}_0$ die folgenden Poissonklammern (vgl. Lemma (2.5) (i))

$$\begin{aligned} \{H_n, H_m\}_{\Theta_0} &= 0 , \quad \{T_n, T_m\}_{\Theta_0} = (m - n) T_{n+m} , \\ \{T_n, H_m\}_{\Theta_0} &= \langle \operatorname{grad} H_m, \tau_n \rangle = (m + \varrho) H_{n+m} . \end{aligned} \quad (6.31)$$

Da die Vektorfelder $K_0(s), \dots, K_{N-1}(s), \tau_0(s), \dots, \tau_{N-1}(s)$ eine Basis des Tangentialraumes $T_s M_N$ bilden (vgl. Kapitel 3.3) und außerdem $\Theta_0(s)$ invertierbar ist, sind die Gradienten der Skalarfelder $H_0(s), \dots, H_{N-1}(s), T_0(s), \dots, T_{N-1}(s)$ linear unabhängig. Die Struktur der Poissonklammern (6.31) ermöglicht es daher, diese Skalarfelder als Koordinaten auf M_N zu interpretieren. Wie in der Einleitung bereits erwähnt, liefert diese Wahl einen Satz von nicht-kanonischen Wirkungs- und Winkelvariablen. Da wir aber auf der Suche nach kanonischen Größen sind, müssen wir eine andere Parametrisierung von M_N , d.h. eine entsprechende Koordinatentransformation auf M_N finden.

Wie im nicht-hamiltonischen Fall können wir die Mannigfaltigkeit der N -Soliton Lösungen natürlich auch mit Hilfe der asymptotischen Daten c_1, \dots, c_N , q_1, \dots, q_N parametrisieren. Weil diese Parametrisierung von M_N nicht von den Eigenschaften der Mastersymmetrien abhängt, ist sie in den beiden hier betrachteten Fällen eine globale Karte von M_N (vgl. Kapitel 6.1). In dieser Karte suchen wir zunächst die Darstellung der Skalarfelder H_n und T_n .

Lemma (6.2): Die Darstellung von H_n , T_n und Θ_0 ist in der gewählten Karte gegeben durch

$$H_n = \delta \sum_{i=1}^N c_i^{n+\varrho} , \quad T_n = -\delta \sum_{i=1}^N c_i^{n+\varrho} q_i \quad (6.32)$$

und

$$\Theta_0 = \delta^{-1} \begin{pmatrix} 0 & \Lambda_{(1-\varrho)} \\ -\Lambda_{(1-\varrho)} & 0 \end{pmatrix} . \quad (6.33)$$

Hierbei ist $\delta \neq 0$ eine skalare Konstante.

Beweis: Mit

$$\begin{aligned}\text{grad } H_n &= \delta(0, \dots, 0, (n+\varrho) c_1^{n+\varrho-1}, \dots, (n+\varrho) c_N^{n+\varrho-1}) \\ \text{grad } T_n &= -\delta(c_1^{n+\varrho}, \dots, c_N^{n+\varrho}, (n+\varrho) c_1^{n+\varrho-1} q_1, \dots, (n+\varrho) c_N^{n+\varrho-1} q_N)\end{aligned}$$

weist man die Relationen (6.31) in der Karte nach. \square

Nach Definition erhalten wir die Darstellung der Symmetrien durch

$$K_n = \frac{1}{n+\varrho} \Theta_0 \text{grad } H_n = (c_1^n, \dots, c_N^n, 0, \dots, 0)$$

und die der Mastersymmetrien durch

$$\tau_n = \Theta_0 \text{grad } T_n = (-(n+\varrho) c_1^n q_1, \dots, -(n+\varrho) c_N^n q_N, c_1^{n+1}, \dots, c_N^{n+1}),$$

die für alle K_n und für τ_0 mit den entsprechenden Größen im nicht-hamiltonischen Fall übereinstimmen (vgl. (6.15) und (6.16)). Wir definieren wiederum $\Theta := \Theta_0$ und erhalten mit der gleichen Argumentation wie in Kapitel 6.1 (vgl. (6.19) und (6.20))

$$\tau_0 = \Theta_0 \left(-\delta \sum_{i=1}^N c_i^\varrho q_i \right) =: \Theta \text{grad } T_0.$$

Beachtet man die Gleichsetzung $C_J = \delta$, so lassen sich die Sätze (6.1) und (6.2), Lemma (6.1) und die Folgerungen (6.1) und (6.2) wortgleich auf den hamiltonischen Fall übertragen. Wir erhalten also in Analogie zum nicht-hamiltonischen Fall (vgl. (6.26), (6.27) und Folgerung (6.2)):

Satz (6.3):

(i) Die Skalarfelder

$$Q_i(s) = -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial T_0}{\partial q_i}(s) \quad \text{und} \quad P_i(s) = -\frac{\partial T_0}{\partial(c_i^\varrho)}(s)$$

bilden einen Satz von kanonischen Wirkungs- und Winkelvariablen (bzgl. $\Theta_0(s)$) auf der N -Soliton Mannigfaltigkeit M_N . Die Evolutionsgleichung hat die folgende Form

$$s_t = (1+\varrho) K_1(s) = \Theta_0(s) \text{grad } H_1(s).$$

- (ii) Die den kanonischen Wirkungs- und Winkelvariablen zugeordneten Vektorfelder sind

$$A_i(s) = \Theta_0(s) \operatorname{grad} Q_i(s) = \frac{\partial s}{\partial q_i}(s), \quad (6.34)$$

$$B_i(s) = \Theta_0(s) \operatorname{grad} P_i(s) = -\varrho \frac{\partial s}{\partial (c_i^\varrho)}(s). \quad (6.35)$$

Zusammengefaßt kann man sagen, daß die kanonischen Wirkungs- und Winkelvariablen in den von uns unterschiedenen Fällen die gleiche Struktur haben. Sie werden im wesentlichen durch die Skalierungseigenschaften der Evolutionsgleichung bestimmt und lassen sich darstellen als die partielle Ableitung eines Skalarfeldes nach den asymptotischen Daten. Trotz dieser Gemeinsamkeiten gibt es fundamentale Unterschiede zwischen dem hamiltonischen und dem nicht-hamiltonischen Fall. Diese Unterschiede (vgl. auch Kapitel 1 bis 3) lassen sich in der von uns gewählten Kartendarstellung besonders einfach charakterisieren. Aus diesem Grund wollen wir auf diesen Aspekt zum Schluß des Kapitels eingehen.

Im nicht-hamiltonischen Fall waren c_1, \dots, c_N die Nullstellen des Polynoms $\sum_{n=0}^N \alpha_n x^n$, während im hamiltonischen Fall $\sum_{n=0}^N \alpha_n (n + \varrho) x^n$ gewählt wurde. Nach Definition verschwindet also die Linearkombination $\sum_{n=0}^N \alpha_n (n + \varrho) K_n = 0$ im hamiltonischen Fall. Für die gleiche Linearkombination der Mastersymmetrien τ_n hatten wir in Kapitel 3.3 bereits herausgefunden, daß sie auf M_N nicht verschwindet. Tatsächlich findet man in der Karte, die durch die asymptotischen Daten gegeben ist

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N \alpha_n (n + \varrho) \tau_n &= - \sum_{n=0}^N \alpha_n (n + \varrho)^2 (c_1^n q_1, \dots, c_N^n q_N, 0, \dots,)^* = \\ &= - \sum_{n,i=1}^N \alpha_n (n + \varrho) n c_i^n q_i \frac{\partial s}{\partial q_i}, \end{aligned}$$

wobei s_{q_i} für den Einheitsvektor $(0, \dots, 1, 0, \dots, 0)^*$ steht (vgl. Kapitel 6.1). Damit läßt sich $\sum_{n=0}^N \alpha_n (n + \varrho) \tau_n$ auf M_N auch in der Feldvariablen ausdrücken und man erhält

$$\sum_{n=0}^N \alpha_n (n + \varrho) \tau_n(s) = - \sum_{n,i=1}^N \alpha_n (n + \varrho) n c_i^n q_i \frac{\partial s}{\partial q_i}(s).$$

An dieser Stelle vernachlässigen wir unseren Standpunkt der Darstellbarkeit in der physikalischen Variablen s und untersuchen den hereditären Operator $\Phi(s) : T_s M_N \rightarrow T_s M_N$, der in Kapitel 3.5 für den hamiltonischen Fall folgendermaßen definiert wurde

$$\Phi K_n = K_{n+1}, \quad \Phi \tau_n = \tau_{n+1}.$$

Weil die Darstellung der Vektorfelder K_n und τ_n in den Koordinaten c_i und q_i bereits bekannt ist, erhalten wir Φ in der folgenden Form

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & -\Pi_1 \\ 0 & \Lambda_1 \end{pmatrix} .$$

Hierbei ist Λ_p wie in (6.9) definiert und Π_1 bezeichne die Diagonalmatrix

$$\Pi_1 = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & q_N \end{pmatrix} .$$

Obwohl Φ eine Hierarchie untereinander kommutierender Symmetrien erzeugt, ist Φ im Gegensatz zum nicht-hamiltonischen Fall (vgl. (2.15)) kein invarianter Tensorfeld unter K_n und daher kein Rekursionsoperator im Sinne von Kapitel 1. Darüberhinaus besitzt Φ auch keine Faktorisierung der Form (vgl. (2.2))

$$\Phi = \Theta_1 \Theta_0^{-1}$$

mit einem implektischen Operator Θ_1 . Die Annahme der Existenz einer solchen Faktorisierung liefert nämlich, daß Θ_1 nicht antisymmetrisch ist. In Analogie zum nicht-hamiltonischen Fall findet man dagegen (vgl. (2.5) und Folgerung (4.1))

$$(i) \quad L_{\tau_n} \Phi = \Phi^n ,$$

(ii) c_1, \dots, c_n sind die jeweils zweifach auftretenden Eigenwerte von Φ .

Während im nicht-hamiltonischen Fall der Eigenraum zum Eigenwert c_i von Φ zwei-dimensional ist und von s_{q_i} und s_{c_i} aufgespannt wird (vgl. Kapitel 5.3), ist im hamiltonischen Fall nur s_{q_i} ein Eigenvektor von Φ zum Eigenwert c_i . Der Vektor s_{c_i} ist dagegen ein Element des Kerns von $(\Phi - c_i I)^2$, d.h. Φ läßt sich nicht diagonalisieren. Dementsprechend ist im nicht-hamiltonischen Fall $P(x) = \prod_{i=1}^N (x - c_i)$ das Minimalpolynom von Φ (vgl. Folgerung (4.1)) und $P^2(x)$ das Minimalpolynom von Φ im hamiltonischen Fall.

Zusammenfassend kann man sagen, daß der formal definierte Operator Φ im hamiltonischen Fall wesentlich andere Eigenschaften hat als der in der physikalischen Variablen s existierende Operator Φ im nicht-hamiltonischen Fall. Vielleicht ist umgekehrt diese prinzipiell andere Struktur auch ein Grund, warum Φ im hamiltonischen Fall keine explizite Darstellung in den Feldvariablen besitzt. In diesem Zusammenhang stellt sich eine weitere interessante Frage. Wie bereits erwähnt (vgl. Kapitel 1) gelang es Fokas und Santini hereditäre

Rekursionsoperatoren für Gleichungen mit hamiltonischen Mastersymmetrien zu konstruieren. In ihrem bilokalen Zugang haben sie die Ausgangsmannigfaltigkeit erweitert und dort die entsprechenden Größen gefunden. Der Zusammenhang zwischen den Rekursionsoperatoren von Fokas und Santini und den hier betrachteten Operatoren ist noch gänzlich ungeklärt.

6.3 Beispiele

Für die **KdV** ist $\lambda = 1$, d.h. $\tau_0(u)$ ist hamiltonisch bzgl. $\Theta_1(u)$

$$\tau_0(u) = (D^3 + 2uD + 2uD) \operatorname{grad} \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} xu \, dx =: \Theta_1(u) \operatorname{grad} F(u).$$

Die Einschränkung von F auf die Untermannigfaltigkeit M_N ergibt $F(s)$ und die Einschränkung von $\Theta_1(u)$ auf M_N ist definiert durch $\Theta(s) := \Theta_1(s) = \Phi(s)J^{-1}(s)$, so daß auf M_N gilt

$$\tau_0(s) = \Theta(s) \operatorname{grad} F(s).$$

Da $\varrho = 1/2$ ist, liefert Folgerung (6.2) die kanonischen Wirkungs- und Winkelvariablen $Q_i(s)$ und $P_i(s)$ als

$$Q_i(s) = -2 \frac{\partial F}{\partial q_i}(s) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} xs_{q_i} \, dx, \quad (6.36)$$

$$P_i(s) = -\frac{\partial F}{\partial(\sqrt{c_i})}(s) = -\frac{1}{2} \sqrt{c_i} \int_{-\infty}^{+\infty} xs_{c_i} \, dx. \quad (6.37)$$

Man beachte, daß die angemessene Poissonstruktur bei uns durch den zweiten implektischen Operator der KdV gegeben ist. In den frühen Arbeiten der Inversen Streumethode zu den Wirkungs- und Winkelvariablen wurde immer die erste Poissonstruktur verwandt ([112],[1]), bis Faddeev und Takhtajan darauf hinwiesen ([29]), daß dieser Ansatz kein konsistentes Ergebnis liefert. Meines Wissens hat bis auf Ruijsenaars niemand versucht, über die Inverse Streumethode eine angemessene Poissonstruktur für die Interpretation von Wirkungs- und Winkelvariablen der KdV zu finden. Sein Resultat ([94]), daß die Streumatrix kanonisch bzgl. der zweiten Poissonstruktur Θ_1 ist, deckt sich mit den hier hergeleiteten Ergebnissen.

Für die **mKdV** gilt $\lambda = 0$, d.h.

$$\tau_0(u) = D \operatorname{grad} \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} xu^2 \, dx = \Theta_0(u) \operatorname{grad} F(u)$$

und $\varrho = 1/2$. Die kanonischen Wirkungs- und Winkelvariablen $Q_i(s)$ und $P_i(s)$ erhält man in Analogie zur KdV als

$$Q_i(s) = -2 \frac{\partial F}{\partial q_i}(s) = - \int_{-\infty}^{+\infty} x s s_{q_i} dx , \quad (6.38)$$

$$P_i(s) = - \frac{\partial F}{\partial(\sqrt{c_i})}(s) = - \sqrt{c_i} \int_{-\infty}^{+\infty} x s s_{c_i} dx . \quad (6.39)$$

Dieses Ergebnis stimmt mit den bekannten Resultaten über KdV und mKdV überein. Diese beiden Gleichungen stehen nämlich über eine Bäcklund-Transformation, die sogenannte Miura-Transformation ([73]), in Beziehung. Überträgt man mit Hilfe dieser Transformation die implektischen Operatoren ([47]) der mKdV, so wird aus $\Theta_0(u) = D$ der Operator $\Theta_1(u) = D^3 + 2Du + 2uD$ für die KdV.

Für die Hierarchie der **CDGSK**, die aus $K_0(u) = u_x$ hervorgeht, gilt $\varrho = 1/6$. Da $\lambda = 1$ ist, hat die Mastersymmetrie $\tau_0(u)$ die Form

$$\tau_0(u) = (D^3 + 2Du + 2uD) \operatorname{grad} \frac{1}{12} \int_{-\infty}^{+\infty} x u dx = \Theta_1(u) \operatorname{grad} F(u) .$$

Die kanonischen Wirkungs- und Winkelvariablen $Q_i(s)$ und $P_i(s)$ ergeben sich wiederum mit Folgerung (6.2) zu

$$Q_i(s) = -6 \frac{\partial F}{\partial q_i}(s) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x s_{q_i} dx , \quad (6.40)$$

$$P_i(s) = -\frac{\partial F}{\partial(c_i^{1/6})}(s) = -\frac{1}{2} c_i^{5/6} \int_{-\infty}^{+\infty} x s_{c_i} dx . \quad (6.41)$$

Zum Abrunden der bisherigen Ergebnisse wollen wir die zweite Hierarchie $G_n(u)$ von Symmetrien in die entwickelte Struktur von M_N einordnen. Da die Vektorfelder G_n mit den K_n vertauschen und zusätzlich auch hamiltonisch bzgl. des gleichen implektischen Operators sind, sind die Skalarfelder α_n , die die Mannigfaltigkeit M_N durch

$$\sum_{n=0}^N \alpha_n K_n = 0$$

definieren (vgl. Definition (3.2)), ebenfalls Erhaltungsgrößen zu den G_n . Daher folgt, daß die Vektorfelder G_n ebenfalls tangential an M_N sind. Insbesondere müssen sie sich in der Karte, die durch die asymptotischen Daten definiert ist, darstellen lassen. Weil die Darstellung von K_n und τ_n bereits bekannt ist, folgt aus den Kommutatorrelationen (vgl. Kapitel 2.3)

$$[K_n, G_m] = 0 , \quad [\tau_n, G_m] = (m + \frac{5}{6}) G_{n+m}$$

schn $G_n = (c_1^{n+\frac{2}{3}}, c_2^{n+\frac{2}{3}}, \dots, c_N^{n+\frac{2}{3}}, 0, \dots, 0)^*$. Damit ist auch die folgende Relation gültig auf M_N

$$\sum_{n=0}^N \alpha_n G_n = 0 .$$

Wie bei der CDGSK existieren auch bei dem HS System zwei Hierarchien von Symmetrien. Betrachten wir als Startvektorfeld

$$K_0\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} ,$$

so ergeben sich die Konstanten ϱ und λ zu

$$\varrho = \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad \lambda = 1 .$$

τ_0 ist damit hamiltonisch bzgl. Θ_1 , und wir erhalten

$$\tau_0\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) = \Theta_1\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) \text{grad} \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} xu \, dx = \Theta_1\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) \text{grad} F\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) .$$

Es bezeichne $\vec{s} = \begin{pmatrix} s^1 \\ s_2 \end{pmatrix}$ die N -Soliton Lösung des HS Systems. Mit Folgerung (6.2) sind die kanonischen Wirkungs- und Winkelvariablen $Q_i(\vec{s})$ und $P_i(\vec{s})$ bestimmt durch

$$Q_i(\vec{s}) = -4 \frac{\partial F}{\partial q_i}(\vec{s}) = - \int_{-\infty}^{+\infty} x s_{q_i}^1 \, dx \quad (6.42)$$

$$P_i(\vec{s}) = - \frac{\partial F}{\partial (c_i^{1/4})}(\vec{s}) = - c_i^{3/4} \int_{-\infty}^{+\infty} x s_{c_i}^1 \, dx . \quad (6.43)$$

Interessanterweise sind in diesem Fall die Skalarfelder $Q_i(\vec{s})$ und $P_i(\vec{s})$ nur von der ersten Komponente s^1 der N -Soliton Lösung abhängig.

Wie bei der CDGSK ist jedes Vektorfeld G_n der zweiten Hierarchie von Symmetrien ebenfalls tangential an M_N und läßt sich in der Karte darstellen als

$$G_n = (c_1^{n+\frac{2}{3}}, c_2^{n+\frac{2}{3}}, \dots, c_N^{n+\frac{2}{3}}, 0, \dots, 0)^* .$$

Man sieht, daß in diesem Fall die beiden Hierarchien K_n und G_n durch die formale Quadratwurzel des Rekursionsoperators verbunden sind, denn es gilt

$$K_n = \begin{pmatrix} \Lambda_{1/2} & 0 \\ 0 & \Lambda_{1/2} \end{pmatrix} G_{n-1} \quad \text{bzw.} \quad G_n = \begin{pmatrix} \Lambda_{1/2} & 0 \\ 0 & \Lambda_{1/2} \end{pmatrix} K_{n-1} .$$

Darüberhinaus erfüllen die Vektorfelder G_n auf M_N auch die Relation

$$\sum_{n=0}^N \alpha_n G_n = 0 .$$

Für die **BO** ist $\varrho = 1$ und $\tau_0(u)$ ist hamiltonisch bzgl. $\Theta_0(u) = D$ mit

$$\tau_0(u) = D \operatorname{grad} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x u^2 dx =: \Theta_0(u) \operatorname{grad} T_0(u) .$$

Die kanonischen Wirkungs- und Winkelvariablen ergeben sich auf M_N mit Satz (6.3) zu

$$Q_i(s) = - \frac{\partial T_0}{\partial q_i}(s) = - \int_{-\infty}^{+\infty} x s s_{q_i} dx \quad (6.44)$$

$$P_i(s) = - \frac{\partial T_0}{\partial c_i}(s) = - \int_{-\infty}^{+\infty} x s s_{c_i} dx . \quad (6.45)$$

Da die Standardtechniken der Inversen Streumethode bei der BO nicht anwendbar sind, gab es bislang in diesem Fall keine mathematische Interpretation von c_i und q_i als Wirkungs- und Winkelvariablen ([109]). Mit den hier entwickelten Methoden ist diese Lücke geschlossen.

Zum Ende dieses Kapitels wollen wir für eine 2-Soliton Lösung der BO die den Wirkungs- und Winkelvariablen entsprechenden Vektorfelder s_{q_i} und s_{c_i} plotten (vgl. Kapitel 5.4). Dazu nehmen wir eine 2-Soliton Lösung s in der folgenden Form ([72])

$$s(x, t) = \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\log \left(\frac{\bar{f}}{f} \right) \right) ,$$

wobei f die komplexe Funktion

$$f(x, t) = 1 - \eta_1 \eta_2 + \frac{4\eta_1 \eta_2}{(\eta_1 - \eta_2)^2} + i(\eta_1 + \eta_2)$$

ist. \bar{f} ist das konjugiert Komplexe von f und η_k steht als Abkürzung für

$$\eta_k = c_k (x - c_k t + d_k) , \quad k = 1, 2 .$$

Figur 10 zeigt die 2-Soliton Lösung s mit den Geschwindigkeiten $c_1 = 0.6$ und $c_2 = 1.2$. In Figur 11 und 12 sind die den Wirkungs- und Winkelvariablen entsprechenden Vektorfelder s_{q_1} und s_{c_1} geplottet. Man beachte das gleiche qualitative Verhalten dieser Größen mit denjenigen im nicht-hamiltonischen Fall (siehe Kapitel 5.4). Die Koordinaten des Betrachters betragen in allen drei Bildern $(-10, -60, 40)$. Die Variable x durchläuft das Intervall von -30 bis $+30$, während für t der Parameterbereich von -28 bis $+28$ gewählt wurde. Die aktuellen x -Werte wurden jeweils um den Faktor 1.5 vergrößert. In den Figuren 10 und 11 sind die aktuellen Funktionswerte mit dem Faktor 6 und in Figur 12 mit dem Faktor 0.3 multipliziert worden.

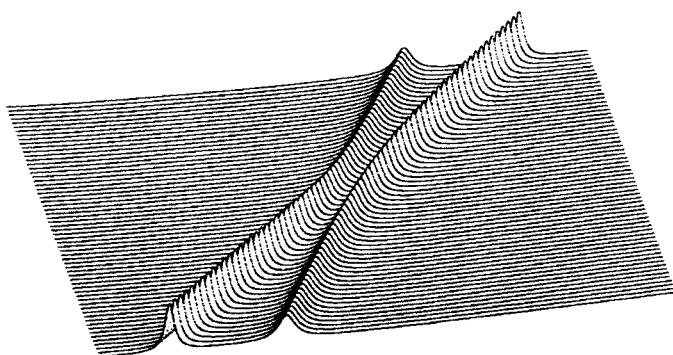


Fig. 10
2-Soliton Lösung der BO mit $c_1 = 0.6$ und $c_2 = 1.2$

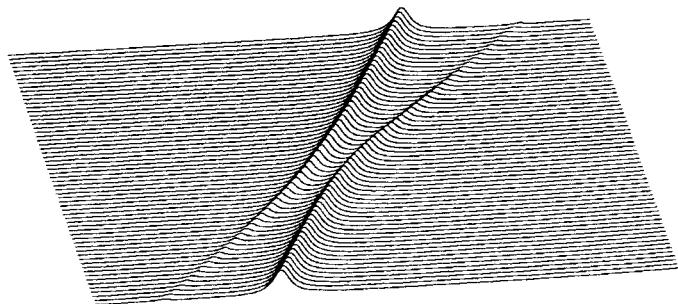


Fig. 11
 s_{q_1} der BO mit $c_1 = 0.6$ und $c_2 = 1.2$

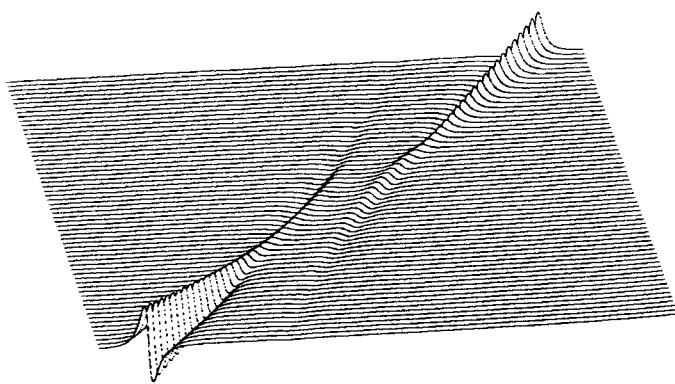


Fig. 12
 s_{c_1} der BO mit $c_1 = 0.6$ und $c_2 = 1.2$

7 Literaturvergleich und Ausblick

Im ersten Teil dieses Abschlußkapitels wollen wir zunächst die Resultate und Methoden dieser Arbeit kurz mit in der Literatur vorhandenen ähnlichen Ansätzen vergleichen. Im zweiten Teil werden einige mögliche Verallgemeinerungen diskutiert.

Die prinzipielle Struktur eines hereditären Rekursionsoperators auf einer endlich dimensionalen Mannigfaltigkeit wurde von TenEikelder untersucht. In seiner Arbeit ([102]) startet er auf einer $2N$ dimensionalen Mannigfaltigkeit mit einem hereditären Operator Φ , der neben einer Faktorisierung in einen implektischen und einen symplektischen Operator auch N verschiedene Eigenwerte mit jeweils zweidimensionalen Eigenräumen besitzt. Unter dieser Voraussetzung beweist TenEikelder die Existenz von hamiltonischen Eigenvektoren von Φ , deren Potentiale als Wirkungs- und Winkelvariablen interpretiert werden können. Im Unterschied dazu haben wir gezeigt, daß sich ein bei TenEikelder als existent vorausgesetzter Operator aus der Reduktion eines unendlich-dimensionalen integrablen Systems auf die Multi-Soliton Mannigfaltigkeit ergibt. Die entsprechenden Eigenvektoren haben wir explizit mit Hilfe der Symmetrien und Mastersymmetrien konstruiert.

Mit der Struktur von Rekursionsoperatoren für endlich dimensionale Systeme beschäftigen sich auch Adams, Anderson und Varley in [3]. Als spezielle Beispiele werden dort die Ein- und Zwei-Soliton Mannigfaltigkeiten der KdV mit einem entsprechend eingeschränkten Rekursionsoperator betrachtet. Als Koordinaten auf M_1 bzw. M_2 wurden die von uns als c_i und e_i benannten Größen (vgl. Kapitel 5.4) genommen und mit Hilfe von Computeralgebra die Zerlegung der Symmetrien K_n und der Mastersymmetrie τ_0 in s_{c_i} und s_{e_i} gezeigt. Da wir die asymptotischen Daten c_i und q_i als Koordinaten gewählt haben, stimmen die für die KdV im Ein- und Zwei-Soliton Fall abgeleiteten Ergebnisse in [3] mit den unseren bis auf eine Koordinatentransformation überein. Darüberhinaus ist zu bemerken, daß sich die hier bewiesenen Resultate aus strukturellen Argumenten ergeben und deshalb für N -Soliton Lösungen beliebiger integrabler Systeme in einer Raumdimension gelten.

Im Zusammenhang mit den Soliton Lösungen von integrablen Gleichungen taucht die Frage auf, ob es möglich ist, das Verhalten von Soliton Lösungen durch ein Teilchensystem zu modellieren. Das in Kapitel 6 eingeführte lineare System (6.18) wurde zum Beispiel benutzt, um Soliton Lösungen als freie Teilchen zu interpretieren, deren Massen Erhaltungsgrößen während der zeitlichen Entwicklung sind ([5],[6],[7],[12],[14],[15]). Für die explizite Konstruktion von

endlich dimensionalen Systemen, die zu jedem Zeitpunkt in Relation zu Soliton Lösungen stehen, d.h. die auch die Interaktion von Solitonen darstellen, sei auf die Arbeiten [65],[103],[4],[16],[20],[24],[64],[17],[95],[92],[93] verwiesen. Dort werden die Pole von Soliton-Gleichungen mit Teilchensystemen identifiziert. Da sich die Pole wie die Trajektorien der "interacting solitons" bewegen ([44]), liefert die einfache Darstellung der "interacting solitons" mit Hilfe der partiellen Ableitungen s_q und s_e ([48]) einen weiteren Zugang zu den Teilchensystemen.

Darerhinaus sind die Arbeiten von Ruijsenaars ([95],[92],[93]) für uns von besonderem Interesse, weil in ihnen die Transformation dieser endlich dimensionalen Teilchensysteme auf Wirkungs- und Winkelvariablen untersucht wird. Die dort gefundenen Variablen stimmen mit den aus der Inversen Streumethode bekannten (und damit mit den in dieser Arbeit konstruierten) Größen bis auf eine kanonische Transformation überein.

Zum Abschluß kommen wir zu der Diskussion, ob die hier vorgestellten Methoden und Ergebnisse auch auf andere Soliton- Gleichungen ausgeweitet werden können. Wie bereits erwähnt (vgl. Kapitel 3.4), lassen sich die Methoden ohne größere Modifikationen auf komplexe Gleichungen und Gittersysteme in einer "Raum" dimension und mit verschwindenden Randbedingungen übertragen.

Wählt man statt verschwindender Randbedingungen periodische Randbedingungen, so zeigt die Arbeit von Grinevich und Orlov ([54]), daß die Mastersymmetrien im Fall der KdV analog den hier vorgestellten Ergebnissen interpretiert werden können. Damit stellt sich die Frage, ob diese Interpretation auch mit den hier angewandten Methoden gezeigt werden kann. Aus folgenden Gründen ist meiner Meinung nach eine solche Frage zu bejahen:

- Auch für periodische Randbedingungen beschreibt

$$\sum_{n=0}^N \alpha_n K_n = 0$$

die N -Soliton Lösungen ([80]).

- Die hier benutzten algebraischen Relationen wie zum Beispiel Kommutatoreigenschaften und Lie Ableitungen reflektieren von den Randbedingungen unabhängige algebraische Eigenschaften integrabler Systeme.

Natürlich muß für periodische Randbedingungen der Integrationsoperator D^{-1} entsprechend modifiziert werden, aber prinzipielle Schwierigkeiten erwarte ich

in diesem Fall nicht.

Dafür ist es fast unmöglich, eine Prognose für Gleichungen in mehr als einer Raumdimension zu stellen. Die Struktur der bislang bekannten integrablen Systeme in zwei Raumdimensionen unterscheidet sich nämlich in vielen Dingen von den Gleichungen in einer Raumdimension. Im Vergleich mit unserem Zugang ergibt sich eine wesentliche Schwierigkeit aus der Tatsache, daß der Zusammenhang einer Linearkombination von Symmetrien mit den als Solitonen bezeichneten Lösungen bislang nicht geklärt ist. Dabei ist dies zur Zeit ein recht schwieriges Problem, da die strukturellen Eigenschaften von Soliton Lösungen in mehr als einer Raumdimension nahezu unbekannt sind.

A Soliton-Lösungen der BO

In diesem Kapitel weisen wir nach, daß die gruppentheoretische Definition (3.2) einer N -Soliton Lösung der BO unter geeigneten Rand- und Zwangsbedingungen äquivalent zur asymptotischen Definition (3.1) ist. Darüberhinaus wird aus der folgenden Konstruktion der allgemeine Zusammenhang der Definitionen (3.1) und (3.2) im hamiltonischen Fall deutlich.

Aus der expliziten Form der Ein-Soliton Lösung der BO

$$s(x, t) = -2 \frac{c}{c^2(x - ct + d)^2 + 1} \quad (\text{A.1})$$

folgt sofort, daß im Ein-Soliton Fall die Gleichung (vgl. Kapitel 2.3 (f))

$$2 K_1(s) = s_t = -c s_x = -c 2 K_0(s) \quad (\text{A.2})$$

schon

$$K_1(s) + c K_0(s) = 0 \quad (\text{A.3})$$

impliziert. Die Erhaltungsgröße c läßt sich auf ganz M durch das Skalarfeld

$$f_0(u) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dx$$

fortsetzen, da $f_0(s) = c$ gilt. Damit ist

$$K_1(u) = f_0(u) K_0(u)$$

auf ganz M wohl definiert, und wir können die Richtungsableitung dieses Vektorfeldes in Richtung der Mastersymmetrie 2-ter Stufe S_0 (vgl. Kapitel 2.2)

$$S_0 := [S_{-1}, \tau_1] = 4 x^2 u_x + 8 x u$$

betachten. Die Evaluierung dieser Richtungsableitung auf der Ein-Soliton Mannigfaltigkeit M_1 liefert eine 0, so daß $S_0(s)$ tangential an diese Mannigfaltigkeit ist. Da mit dem gleichen Argument alle Symmetrien $K_n(s)$ tangentiale Vektorfelder sind und der Kommutator zwischen Vektorfeldern den Tangentialraum invariant läßt ([88]), sind auch alle Mastersymmetrien $\tau_n(s)$ tangential an M_1 (vgl. (2.25)). Außerdem gilt (vgl. (2.19))

$$f_0(u) = \frac{2}{\pi} H_0(u) .$$

Die Lie Ableitungen von H_0 in Richtung der τ_n sind bekannt (vgl. (2.21)), d.h. insbesondere folgt auf M

$$L_{\tau_0} f_0 = f_0 .$$

Die Evaluierung dieser Größen auf der Untermannigfaltigkeit M_1 ist wohl definiert, da sowohl $\tau_0(s)$ als auch $f_0(s)$ auf M_1 eingeschränkt werden können. Somit erhalten wir

$$L_{\tau_0} c = c'[\tau_0] = c$$

und mit analogen Argumenten

$$L_{\tau_1} c = c'[\tau_1] = -c^2.$$

Mit vollständiger Induktion finden wir dann auf M_1 aus $K_1 = -cK_0$ die Gültigkeit von $K_n = (-c)^n K_0$, denn es gilt (vgl. (2.18))

$$\begin{aligned} (n+2) K_{n+1} &= [\tau_1, K_n] = [\tau_1, (-c)^n K_0] = \\ &= ((-c)^n)'[\tau_1] K_0 + (-c)^n [\tau_1, K_0] = \\ &= n(-c)^{n-1} c^2 K_0 + (-c)^n 2 K_1 = \\ &= (n+2) (-c)^{n+1} K_0. \end{aligned}$$

Im Ein-Soliton Fall erhalten wir also für die BO (vgl. auch die entsprechende Charakterisierung im nicht-hamiltonischen Fall in (3.7))

$$K_n(s) = (-c)^n K_0(s).$$

Als nächsten Schritt betrachten wir eine N -Soliton Lösung s , die asymptotisch in N Ein-Soliton Lösungen s_i zerfällt

$$s(x, t) \approx \sum_{i=1}^N s_i(x, t) = \sum_{i=1}^N -2 \frac{c_i}{c_i^2(x - c_i t + d_i)^2 + 1}$$

Für das Vektorfeld K_0 erhalten wir für $t \rightarrow \pm\infty$ daraus die asymptotische Zerlegung

$$K_0(s) = \frac{1}{2} s_x \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (s_i(x, t))_x.$$

Die höheren Symmetrien $K_n(s)$ bestehen jeweils aus einem polynominalen Anteil in s, s_x, \dots und einem Anteil, in dem die Hilbert Transformation H auf ein Polynom in s, s_x, \dots wirkt. Dies folgt aus der expliziten Form von K_0, K_1 und τ_1 und der Definition (vgl. (2.18))

$$(n+2) K_{n+1} = [\tau_1, K_n].$$

Für $t \rightarrow \pm\infty$ gilt daher auf Grund der asymptotischen Dekomposition von s und der Linearität von H

$$\begin{aligned} K_n(s) &\approx K_n \left(\sum_{i=1}^N s_i \right) \approx \sum_{i=1}^N K_n(s_i) = \\ &= \sum_{i=1}^N (-c_i)^n K_0(s_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (-c_i)^n (s_i)_x. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Damit stimmt asymptotisch die Darstellung der $K_n(s)$ für die BO (bis auf den Faktor 1/2) mit der Darstellung der Symmetrien (vgl. (3.7)) im nicht-hamiltonischen Fall überein. Asymptotisch existieren also Skalarfelder $\alpha_0, \dots, \alpha_N$ mit α_n als symmetrische Funktion der Ordnung n der Geschwindigkeiten c_1, \dots, c_N (vgl. Kapitel 3.2), so daß die Gleichung

$$\sum_{n=0}^N \alpha_n(s) K_n(s) \approx 0$$

asymptotisch erfüllt ist. Weil die c_1, \dots, c_N zu jedem Zeitpunkt t definiert sind, können wir auch deren symmetrische Funktionen $\alpha_0, \dots, \alpha_N$ zu jedem Zeitpunkt definieren. Daher ist nach Konstruktion das Vektorfeld

$$Y(s) := \sum_{n=0}^N \alpha_n(s) K_n(s)$$

zu jedem Zeitpunkt auf M_N definiert und invariant unter

$$s_t = K_1(s) ,$$

da mit c_1, \dots, c_N auch $\alpha_0, \dots, \alpha_N$ Erhaltungsgrößen für die BO sind. Also gilt $\frac{d}{dt} Y(s) = 0$, d.h. $Y(s)$ ist unabhängig von der Zeit. Damit ist für eine N -Soliton Lösung s der BO die Gleichung

$$\sum_{n=0}^N \alpha_n(s) K_n(s) = 0 \quad (A.5)$$

für alle Zeiten gültig. Es ist also gezeigt, daß sich jede N -Soliton Lösung s der BO durch (A.5) charakterisieren läßt. Beschreibt umgekehrt die Gleichung (A.5) eine invariante Untermannigfaltigkeit von M_N , so lassen sich wie im nicht-hamiltonischen Fall Rand- und Zwangsbedingungen an die Lösungen von (A.5) so festsetzen, daß (A.5) die N -Soliton Lösungen gemäß Definition (3.1) beschreibt. Insgesamt haben wir also gezeigt, daß unter geeigneten Bedingungen die gruppentheoretische Definition (3.2) auch die N -Soliton Lösungen der BO eindeutig charakterisiert.

An der Konstruktion der Ergebnisse für die BO sieht man deutlich, daß der wesentliche Punkt die Existenz des Skalarfeldes f_0 ist. Alle anderen Folgerungen ergeben sich dann bereits aus den in Kapitel 2 hergeleiteten Rekursions-eigenschaften der Gleichung. Sofern man also ein Skalarfeld f_0 mit den benötigten Eigenschaften findet, lassen sich die Gedankengänge auch auf andere Gleichungen im hamiltonischen Fall übertragen.

B Hamiltonische Formulierung von τ_0

Wir erinnern an die Normierungen (vgl. (1.16))

$$L_{\tau_0} J = \lambda J, \quad L_{\tau_0} \Phi = \Phi, \quad \Phi = \Theta_1 J \quad (\text{B.1})$$

und halten als empirische Tatsache fest, daß für alle bekannten Beispiele gilt

$$L_{\tau_0} \Theta_1 = (1 - \lambda) \Theta_1. \quad (\text{B.2})$$

Ist $\lambda = 0$, so folgt $L_{\tau_0} J = 0$, d.h. τ_0 ist invers-hamiltonisch bzgl. J . Ist $\lambda \in \mathbb{N}$, so gilt mit der Definition von $\Theta_k = \Phi^{k-1} \Theta_1$ (vgl. (2.14))

$$\begin{aligned} L_{\tau_0} \Theta_k &= L_{\tau_0} (\Phi^{k-1} \Theta_1) = \\ &= (k-1) \Phi^{k-1} \Theta_1 + (1 - \lambda) \Phi^{k-1} \Theta_1 = \\ &= (k - \lambda) \Theta_k, \end{aligned}$$

d.h. $L_{\tau_0} \Theta_k = 0$ genau dann, wenn $k = \lambda$.

Insgesamt erhalten wir also

Satz (B.1): Ist $\lambda \in \mathbb{N}_0$, so ist $\tau_0(u)$ (invers-) hamiltonisch bzgl. genau eines Operators aus der Familie

$$\{ J(u) \} \cup \{ \Theta_n(u) \mid n \in \mathbb{N} \}.$$

Wir setzen im Fall

$$\begin{array}{ll} \lambda = 0 : & J(u) \tau_0(u) = \text{grad } F(u), \\ \lambda \in \mathbb{N} : & \tau_0(u) = \Theta_\lambda(u) \text{grad } F(u). \end{array}$$

Bemerkung (B.1): In allen bisher bekannten Beispielen gilt entweder $\lambda = 0$ oder $\lambda = 1$.

Literaturverzeichnis

- [1] M.J. Ablowitz, H. Segur: *Solitons and the Inverse Scattering Transform*, SIAM, Philadelphia (1981)
- [2] R. Abraham, J.E. Marsden: *Foundations of Mechanics*, Benjamin/Cummings Publ. Co., London-Amsterdam-Sidney-Tokyo (1978)
- [3] M. Adams, R.L. Anderson, R. Varley: *Remarks on Integrable Hierarchies in Finite Dimensions*, to appear in: Proc. of the Workshop on Hamiltonian Systems, Transformation Groups and Spectral Transform Methods, CRM, University of Montreal (1989)
- [4] H. Airault, H.P. McKean, J. Moser: *Rational and elliptic solutions of the Korteweg-deVries equation and a related many-body problem*, Comm. Pure Appl. Math. 30, 95-148 (1977)
- [5] L.M. Alonso: *The nonlinear Schrödinger equation as a Galilean-invariant dynamical system*, J. Math. Phys. 23, 1518-1523 (1982)
- [6] L.M. Alonso: *Group-theoretical analysis of the sine-Gordon equation as a relativistic dynamical system*, J. Math. Phys. 24, 982-989 (1983)
- [7] L.M. Alonso: *Inverse scattering variables of the KdV equation from the point of view of Galilean mechanics*, J. Math. Phys. 24, 2652-2657 (1983)
- [8] R.L. Anderson, N.H. Ibragimov: *Lie-Bäcklund Transformations in Applications*, SIAM, Philadelphia (1979)
- [9] V.I. Arnold: *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Graduate Texts in Mathematics Vol.60, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1978)
- [10] V. Bargmann: *On the connection between phase shifts and scattering potentials*, Rev. Mod. Phys. 21, 488-493 (1949)
- [11] T.B. Benjamin: *Internal Waves of finite amplitude and permanent form*, J. Fluid Mech. 29, 559-592 (1967)
- [12] M. Blaszak: *Mastersymmetries and point-particle representation of Solitons*, J. Phys. A: Math. Gen. 20, 3619-3630 (1987)
- [13] M. Blaszak: *On Interacting Solitons*, Act. Phys. Pol. A74, 439-444 (1988)
- [14] M. Blaszak: *Benjamin-Ono interacting solitons as field representatives of Galilean point particles*, J. Phys. A: Math. Gen. 22, 451-457 (1989)
- [15] M. Blaszak: *Theory of Classical Soliton Particles*, A. Mickiewicz University Press Vol.60, University of Poznan (1989)

- [16] G. Bowtell, A.E.G. Stuart: *Interacting sine-Gordon Solitons and classical particles: A dynamic equivalence*, Phys. Rev. D 15, 3580-3591 (1977)
- [17] G. Bowtell, A.E.G. Stuart: *A particle representation for Korteweg - de Vries solitons*, J. Math. Phys. 24, 969-981 (1983)
- [18] L.J.F. Broer: *Approximate Equations for Long Water Waves*, Appl. Sci. Res. 31, 377-395 (1975)
- [19] F. Calogero: *Solutions of the one dimensional n-body problems with quadratic and/or inversely quadratic pair potentials*, J. Math. Phys. 12, 419-436 (1971)
- [20] F. Calogero, A. Degasperis: *Special solutions of coupled nonlinear evolution equations with bumps that behave as interacting particles*, Lett. Nuovo Cimento 19, 525-533 (1977)
- [21] F. Calogero, A. Degasperis: *Spectral Transform and Solitons I*, Studies in Mathematics and its Applications Vol. 13, North Holland Publ. Co, Amsterdam - New York - Oxford (1982)
- [22] P.J. Caudrey, R.K. Dodd, J.D. Gibbon: *A new hierarchy of Korteweg-de Vries equations*, Proc. Roy. Soc. London A 351, 407-422 (1976)
- [23] H.H. Chen, Y.C. Lee, J.E. Lin: *On a new Hierarchy of Symmetries for the Integrable Nonlinear Evolution Equations*, University of Maryland, Physics Publication Number 83-012, Plasma Preprint # PL 83-002 (1982)
- [24] D.V. Choodnovsky, G.V. Choodnovsky: *Pole expansions of nonlinear partial differential equations*, Nuovo Cimento B40, 339-353 (1977)
- [25] Y. Choquet-Bruhat, C. De Witt-Morette, M. Dillard-Bleick: *Analysis, Manifolds and Physics*, North-Holland Publ. Co, Amsterdam-New York-Oxford (1982)
- [26] R.K. Dodd, J.C. Eilbeck, J.D. Gibbon, H.C. Morris: *Solitons and Nonlinear Wave Equations*, Academic Press, London-New York-Paris-Sydney-Tokyo-Toronto (1982)
- [27] B.A. Dubrovin, S.P. Novikov: *Periodic and conditionally periodic analogs of the many-soliton solutions of the Korteweg-De Vries equation*, Sov. Phys. JETP 40, 1058-1063 (1975)
- [28] W. Eckhaus, A. Van Harten: *The Inverse Scattering Transformation and the Theory of Solitons*, North Holland Publ. Co, Amsterdam-New York-Oxford (1981)
- [29] L.D. Faddeev, L.A. Takhtajan: *Poisson Structure for the KdV Equation*, Lett. Math. Phys. 10, 183-188 (1987)

- [30] H. Flanders: *Differential Forms with Applications to the Physical Sciences*, Academic Press, New York-San Francisco-London (1963)
- [31] A.S. Fokas, R.L. Anderson: *On the use of isospectral eigenvalue problems for obtaining hereditary symmetries for Hamiltonian systems*, J. Math. Phys. 23, 1066-1073 (1982)
- [32] A.S. Fokas, B. Fuchssteiner: *The Hierarchy of the Benjamin-Ono Equation*, Phys. Lett. 86 A, 341-345 (1981)
- [33] A.S. Fokas, P.M. Santini: *The Recursion Operator of the Kadomtsev-Petviashvili equation and the squared eigenfunctions of the Schrödinger Operator*, Stud. Appl. Math. 75, 179-186 (1986)
- [34] J.P. Francoise: *Symplectic Geometry and Soliton Theory*, in: Topics in Soliton Theory and Exactly solvable Nonlinear equations (M. Ablowitz, B. Fuchssteiner, M. Kruskal, eds.), World Scientific Publ., Singapore (1987)
- [35] B. Fuchssteiner: *Pure Soliton Solutions of some Nonlinear Partial Differential Equations*, Comm. Math. Phys. 55, 187-194 (1977)
- [36] B. Fuchssteiner: *J. Scott Russel*, in: Jahrbuch Überblicke Mathematik, Bibl. Institut, Mannheim-Zürich (1978)
- [37] B. Fuchssteiner: *Application of spectral gradient methods to nonlinear evolution equations*, preprint, University of Paderborn (1979)
- [38] B. Fuchssteiner: *Application of Hereditary Symmetries to Nonlinear Evolution equations*, Nonlinear Analysis TMA 3, 849-862 (1979)
- [39] B. Fuchssteiner: *The Lie Algebra Structure of degenerate Hamiltonian and Bi-Hamiltonian Systems*, Progr. Theor. Phys. 68, 1082-1104 (1982)
- [40] B. Fuchssteiner: *Mastersymmetries, Higher order time-dependent Symmetries and Conserved Densities of Nonlinear Evolution Equations*, Progr. Theor. Phys. 70, 1508-1522 (1983)
- [41] B. Fuchssteiner: *Solitons in Interaction*, Progr. Theor. Phys. 78, 1022-1050 (1987)
- [42] B. Fuchssteiner: *The Tangent Bundle for Multisolitons*, in: Proceedings of the 5.th Workshop on Nonlinear Evolution Equations and Dynamical Systems (S. Carillo, S. DeLillo, O. Ragnisco, eds.), Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1990)
- [43] B. Fuchssteiner, R.N. Aiyer: *Multisolitons, or the discrete Eigenfunctions of the Recursion Operator of non-linear Evolution Equations: II. Background*, J. Phys. A: Math. Gen. A 20, 375-388 (1987)

- [44] B. Fuchssteiner, S. Carillo: *The soliton singularity transform*, in: Proceedings of the Como conference, Manchester University Press (1989)
- [45] B. Fuchssteiner, S. Carillo: *The Action-Angle transformation for Soliton Equations*, preprint, University of Paderborn, (1990)
- [46] B. Fuchssteiner, U. Falck: *Computer algorithms for the detection of completely integrable quantum spin chains*, in: Symmetries and nonlinear phenomena (D. Levi, P. Winternitz, eds.), World Scientific Publ., Singapore (1988)
- [47] B. Fuchssteiner, A. S. Fokas: *Symplectic Structures, Their Bäcklund Transformations and Hereditary Symmetries*, Physica 4 D, 47-66 (1981)
- [48] B. Fuchssteiner, G. Oevel: *Geometry and action-angle variables of multisoliton systems*, Rev. Math. Phys. (to appear)
- [49] B. Fuchssteiner, W. Oevel: *The bi-Hamiltonian structure of some nonlinear fifth-and seventh order differential equations and recursion formulas for their symmetries and conserved covariants*, J. Math. Phys. 23, 358-363 (1982)
- [50] B. Fuchssteiner, W. Oevel, W. Wiwianka: *Computer-algebra methods for Investigation of Hereditary Operators of higher order Soliton Equations*, Computer Physics Comm. 44, 47-55 (1987)
- [51] C.S. Gardner, J.M. Greene, M.D. Kruskal, R.M. Miura: *The Korteweg-de Vries equation and generalizations. VI. Methods for exact solution*, Comm. Pure Appl. Math. 27, 97-133 (1974)
- [52] I.M. Gel'fand, I.Y. Dorfman: *Hamiltonian Operators and Algebraic Structures related to them*, Funct. Anal. Appl. 13, 248-262 (1979)
- [53] I.M. Gel'fand, I.Y. Dorfman: *The Schouten bracket and Hamiltonian operators*, Funct. Anal. Appl. 14, 71-74 (1980)
- [54] P.G. Grinevich, A.Y. Orlov: *Virasoro action on moduli space and higher symmetries of the KP-equation, Krichever-Novikov Problem*, preprint (1989)
- [55] R. Hirota: *Direct methods of finding exact solutions of nonlinear evolution equations*, in: Bäcklund transformations (R.M. Miura, ed.), Lecture Notes in Mathematics Vol.515, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1976)
- [56] R. Hirota: *Direct Methods in Soliton Theory*, in: Solitons (R.K. Bullough, P.J. Caudrey, eds.), Topics in Current Physics Vol.17, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1980)
- [57] R. Hirota, J. Satsuma: *Soliton Solutions of a coupled Korteweg-de Vries Equation*, Phys. Lett. 85A, 407-408 (1981)

- [58] N.H. Ibragimov: *Transformation Groups Applied to Mathematical Physics*, Mathematics and Its Applications (Soviet Series), D. Reidel Publ., Dordrecht-Boston-Lancaster (1985)
- [59] C.G.J. Jacobi: *Vorlesungen über Dynamik*, in: Gesammelte Werke, Supplementband, 2. Auflage, Chelsea Publ. Co, New York (1969)
- [60] R.I. Joseph: *Multi-soliton-like solutions to the Benjamin-Ono equation*, J. Math. Phys. 18, 2251-2258 (1977)
- [61] D.J. Kaup: *On the Inverse Scattering Problem for Cubic Eigenvalue Problems of the Class $\Psi_{xxx} + 6Q\Psi_x + 6R\Psi = \lambda\Psi$* , Stud. Appl. Math. 62, 189-216 (1980)
- [62] B.G. Konopelchenko: *Nonlinear Integrable Equations*, Lecture Notes in Physics Vol.270, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1987)
- [63] D.J. Korteweg, G. DeVries: *On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and a new type of long stationary waves*, Philos. Mag. Ser. 5, 39, 422-443 (1895)
- [64] I.M. Krichever: *Elliptic solutions of the Kadomtsev-Petviashvili equation and integrable systems of particle*, Funct. Anal. Appl. 14, 282-290 (1980)
- [65] M. Kruskal: *The Korteweg- de Vries equation and related evolution equations*, Lect. Appl. Math. 15, 61-83 (1974)
- [66] B.A. Kupershmidt: *Mathematics of Dispersive Waves*, Comm. Math. Phys. 51-73 (1985)
- [67] G.L. Lamb: *Elements of Soliton Theory*, Wiley Interscience Publ., New York-Chichester-Brisbane-Toronto (1980)
- [68] P.D. Lax: *Integrals of Nonlinear Equations of Evolution and Solitary Waves*, Comm. Pure Appl. Math. 21, 467-490 (1968)
- [69] F. Magri: *A simple model of the integrable Hamiltonian equation*, J. Math. Phys. 19, 1156-1162 (1978)
- [70] F. Magri: *A Geometrical Approach to the Nonlinear Solvable equations*, in: Nonlinear Evolution equations and Dynamical Systems (M. Boiti, F. Pempinelli, G. Soliani, eds.), Lecture Notes in Physics Vol.120, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1980)
- [71] J. Marsden: *Applications of Global Analysis in Mathematical Physics*, Publish or Perish, Inc., 2, Boston (1970)
- [72] Y. Matsuno: *Exact multi-soliton solution of the Benjamin-Ono equation*, J. Phys. A: Math. Gen. 12, 619-621 (1979)

- [73] R.M. Miura: *Korteweg-de Vries equation and generalization I. A remarkable explicit nonlinear transformation*, J. Math. Phys. 9, 1202-1204 (1968)
- [74] R.M. Miura, ed.: *Bäcklund Transformations, the Inverse Scattering Method, Solitons, and their Applications*, Lecture Notes in Mathematics Vol.515, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1976)
- [75] R.M. Miura: *Solitons und die Inverse Streumethode*, in: Jahrbuch Überblicke Mathematik, Bibl. Institut, Mannheim-Zürich (1978)
- [76] J. Moser: *Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformations*, Adv. Math. 16, 197-220 (1975)
- [77] J. Moser: *Various Aspects of Integrable Hamiltonian Systems*, in: Dynamical Systems (J. Guckenheimer, J. Moser, S.E. Newhouse, eds.), Birkhäuser, Boston-Basel-Stuttgart (1980)
- [78] J. Moser: *Geometry of Quadrics and Spectral Theory*, in: The Chern Symposium 1979, Springer Verlag Berlin-Heidelberg-New York (1980)
- [79] C. Neumann: *De problemate quodam mechanico, quod ad primam integralium ultraellipticorum classem revocatur*, J. reine angew. Math. 56, (1859)
- [80] S.P. Novikov: *The periodic problem for the Korteweg-de Vries equation*, Funct. Anal. Appl. 8, 236-246 (1974)
- [81] G. Oevel, B. Fuchssteiner, M. Blaszak: *Action Angle representation of multi-solitons by potentials of Mastersymmetries*, Progr. Theor. Phys. (to appear)
- [82] W. Oevel: *Rekursionsmechanismen für Symmetrien und Erhaltungssätze in integrabilen Systemen*, Dissertation, Paderborn (1984)
- [83] W. Oevel: *A Geometrical approach to Integrable Systems admitting time dependent Invariants*, in: Topics in Soliton Theory and Exactly solvable Nonlinear equations (M. Ablowitz, B. Fuchssteiner, M. Kruskal, eds.), World Scientific Publ., Singapore (1987)
- [84] W. Oevel: *Mastersymmetries: weak Action/Angle structure for Hamiltonian and non Hamiltonian systems*, preprint, University of Paderborn (1988)
- [85] W. Oevel, B. Fuchssteiner, Hongwei Zhang, O. Ragnisco: *Mastersymmetries, Angle variables and recursion operator of the relativistic Toda lattice*, J. Math. Phys. 30, 2664-2670 (1989)
- [86] M.A. Olshanetsky, A.M. Perelomov: *Classical Integrable Finite-Dimensional Systems related to Lie Algebras*, Phys. Rep. 71, 313-400 (1981)

- [87] P.J. Olver: *Evolution Equations possessing infinitely many Symmetries*, J. Math. Phys. 18, 1212-1215 (1977)
- [88] P.J. Olver: *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, Graduate Texts in Mathematics Vol.107, Springer Verlag, New York-Berlin-Heidelberg-Tokyo (1986)
- [89] J.H. Ono: *Algebraic Solitary waves in stratified Fluids*, J. Phys. Soc. Japan 39, 1082-1091 (1975)
- [90] A.Y. Orlov, E.I. Schulman: *Additional Symmetries for Integrable Equations and Conformal Algebra Representation*, Lett. Math. Phys. 12, 171-179 (1986)
- [91] R. Rajaraman: *Solitons and Instantons*, North Holland Publ. Co., Amsterdam-New York-Oxford (1982)
- [92] S.N.M. Ruijsenaars: *Relativistic Calogero Moser systems and Solitons*, in: Topics in Soliton Theory and Exactly solvable Nonlinear equations (M. Ablowitz, B. Fuchssteiner, M. Kruskal, eds.), World Scientific Publ., Singapore (1987)
- [93] S.N.M. Ruijsenaars: *Action-Angle Maps and Scattering Theory for Some Finite-Dimensional Integrable Systems: I. The Pure Soliton Case*, Comm. Math. Phys. 115, 127-165 (1988)
- [94] S.N.M. Ruijsenaars: private communication
- [95] S.N.M. Ruijsenaars, H. Schneider: *A new class of integrable systems and its relation to solitons*, Ann. Phys. 170, 370-405 (1986)
- [96] J. Scott Russell: *Report on Waves*, John Murray, London, 311-390 (1844)
- [97] P.M. Santini, A.S. Fokas: *Recursion Operators and Bi-Hamiltonian structures in Multidimensions. I*, Comm. Math. Phys. 115, 375-419 (1988)
- [98] P.M. Santini, A.S. Fokas: *Recursion Operators and Bi-Hamiltonian structures in Multidimensions. II*, Comm. Math. Phys. 116, 449-474 (1988)
- [99] K. Sawada, T. Kotera: *A Method for Finding N-Soliton Solutions for the KdV Equation and KdV-Like Equation*, Prog. Theor. Phys. 51, 1355-1367 (1974)
- [100] T. Schulze: *Dynamik von Wirkungs- und Winkelvariablen bei nichtlinearen Systemen*, Diplomarbeit, Universität Paderborn (1990)
- [101] H.M.M. TenEikelder: *Symmetries for Dynamical and Hamiltonian Systems*, CWI Tract 17, CWI Amsterdam, (1985)
- [102] H.M.M. TenEikelder: *On the local structure of Recursion operators for Symmetries*, Indag. Math. 89, 386-403 (1986)

- [103] W.R. Thickstun: *A system of particles equivalent to solitons*, J. Math. Anal. Appl. 55, 335-346 (1976)
- [104] Tu Gui-zhang: *The Lie algebraic structure of symmetries generated by hereditary symmetries*, J. Phys. A: Math. Gen. 21, 1951-1957 (1988)
- [105] K. Weierstrass: *Über die geodätischen Linien auf dem dreiachsigem Ellipsoid*, in: Math. Werke I, 257-266, Akademische Verlagsgesellschaft, Berlin (1894)
- [106] W. Wiwianka: *Algorithmen zur rekursiven Berechnung von Lie - Bäcklund Symmetrien nichtlinearer partieller Differentialgleichungen*, Dissertation, Paderborn (1990)
- [107] S. Yamamuro: *Differential Calculus in Topological Linear Spaces*, Lecture Notes in Mathematics Vol.374, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1974)
- [108] S. Yamamuro: *A theory of differentiation in locally convex spaces*, AMS, Providence, Rhode Island (1979)
- [109] T. Yoneyama: *Interacting Benjamin-Ono Equations*, J. Phys. Soc. Japan 55, 3313-3320 (1986)
- [110] N.J. Zabusky, M.D. Kruskal: *Interaction of Solitons in a Collisionless Plasma and the Recurrence of initial states*, Phys. Rev. Lett. 15, 240-243 (1965)
- [111] N.J. Zabusky, M.D. Kruskal, G.S. Deem: *Formation, Propagation and Interactions of solitons in Nonlinear dispersive media (Numerical solutions of Differential Equations describing wave motion in Nonlinear dispersive media)*, Copyright: N.J. Zabusky and G.S. Deem, Bell Telephone Laboratory Inc. Whippany, New Jersey (1965)
- [112] V.E. Zakharov, L.D. Faddeev: *Korteweg-deVries Equation: A Completely Integrable Hamiltonian System*, Funct. Anal. Appl. 5, 280-287 (1971)
- [113] V.E. Zakharov, A.B. Shabat: *Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media*, Sov. Phys. JETP 34, 62-69 (1972)
- [114] V.E. Zakharov, A.B. Shabat: *Interaction between Solitons in a stable Medium*, Sov. Phys. JETP 37, 823-828 (1973)
- [115] H. Zhang: *Computeralgebra-Algorithmen zur Bestimmung der vollständigen Integrabilität der Dynamik auf nichtlinearen Gittersystemen*, Dissertation, Paderborn (1990)

Verzeichnis feststehender Symbole

M	Mannigfaltigkeit
$u \in M_N$	Feldvariable
TM	Tangentialbündel von M
T^*M	Kotangentialbündel von M
$T_u M$	Tangentialraum von M an der Stelle u
$T_u^* M$	Kotangentialraum von M an der Stelle u
$\mathcal{F}(M)$	Raum aller Skalarfelder auf M
$X(M)$	Raum aller Vektorfelder auf M
$X^*(M)$	Raum aller Kovektorfelder auf M
$T^{(p,q)}(M)$	Raum aller p -fach kovarianten und q -fach kontravarianten Tensorfelder auf M
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Verknüpfung von Vektoren und Kovektoren
$[\cdot, \cdot]$	Kommutator
$\{\cdot, \cdot\}$	Poissonklammer
$H_n \in \mathcal{F}(M)$	Erhaltungsgröße
$K_n \in X(M)$	Symmetrie
$\tau_n \in X(M)$	Mastersymmetrie (1. Stufe)
$J \in T^{(2,0)}(M)$	symplektischer Operator
$\Theta_n \in T^{(0,2)}(M)$	implektischer Operator
$\Phi \in T^{(1,1)}(M)$	Rekursionsoperator
M_N	Untermannigfaltigkeit aller N -Soliton Lösungen
$s \in M_N$	N -Soliton Lösung
s_n	asymptotisch auftretende Ein-Solitonen der N -Soliton Lösung s
ϕ_n	Eigenvektor des Rekursionsoperators
c_n	Eigenwert der Rekursionsoperators, Geschwindigkeit von s_n
λ, ϱ, δ	Skalierungskonstanten
$\delta_{i,j}$	Kroneckersymbol