

Dipl.-Ing. Joachim Böcker, Berlin

**Modellierung der dissipativen Eigenschaften linearer passiver Systeme unter Verwendung der Distributionentheorie**

Reihe **8**: Meß-, Steuerungs-  
und Regelungstechnik

Nr. **159**

Böcker, Joachim

# **Modellierung der dissipativen Eigenschaften linearer passiver Systeme unter Verwendung der Distributionentheorie**

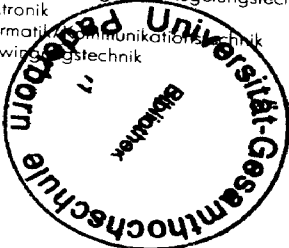
Fortschr.-Ber. VDI Reihe 8 Nr. 159. Düsseldorf: VDI-Verlag 1988.  
222 Seiten, 17 Bilder.

**Für die Dokumentation:** Passive Systeme – Positive Funktionen – Reversibilität – Irreversibilität – Verlorene Arbeit – Relaxation – Dissipationsleistung – Dissipative Systeme – Mehrgrößensysteme

Die in dieser Arbeit behandelten passiven Systeme sind dadurch gekennzeichnet, daß die äußere Arbeit am System niemals negativ wird. Physikalischer Hintergrund ist der 2. Hauptsatz der Thermodynamik. Die Eigenschaften linearer passiver Systeme werden im Zeit- und Fourier- bzw. Laplace-Bereich untersucht, wobei man zum bekannten Begriff der positiven Funktionen gelangt. Für die Untersuchung der Frage nach der Reversibilität wird der Begriff der nicht wiedergewinnbaren oder verlorenen Arbeit nach Meixner und König verwendet. Reversibilitätskriterien werden für Ein- und Mehrgrößensysteme erarbeitet. Es zeigt sich, daß die Klasse der reversiblen Systeme auch relaxierende (abklingende) Systeme enthält, die eine Übergangstellung zwischen den eigentlich (streng) reversiblen und den irreversiblen Systemen einnehmen. Zum Schluß wird diskutiert, welche Folgerungen von dem äußeren Systemverhalten auf die innere Dissipationsleistung möglich sind. Ein ausführlicher Anhang stellt als mathematische Hilfsmittel unter anderem einen Abriss über die Theorie der Distributionen und das wichtige Kriterium von Paley und Wiener bereit.

## **Die Reihen der FORTSCHRITT-BERICHTE VDI:**

- |  |                                     |
|--|-------------------------------------|
| 1 Konstruktionstechnik/Maschinenelemente | 12 Verkehrstechnik/Fahrzeugtechnik  |
| 2 Fertigungstechnik                      | 13 Fördertechnik                    |
| 3 Verfahrenstechnik                      | 14 Landtechnik/Lebensmitteltechnik  |
| 4 Bauingenieurwesen                      | 15 Umwelttechnik                    |
| 5 Grund- und Werkstoffe                  | 16 Technik und Wirtschaft           |
| 6 Energieerzeugung                       | 17 Biotechnik                       |
| 7 Strömungstechnik                       | 18 Mechanik/Bruchmechanik           |
| 8 Meß-, Steuerungs- und Regelungstechnik | 19 Wärmetechnik/Kältetechnik        |
| 9 Elektronik                             | 20 Rechnerunterstützte Verfahren    |
| 10 Informatik/Kommunikationstechnik      | ICAD, CAM, CAE, CAP, CAQ, CIM, ...) |
| 11 Schwingungstechnik                    | 21 Elektrotechnik                   |



88/11927

D 83

51  
W FA  
1567-159

© VDI-Verlag GmbH · Düsseldorf 1988

Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes, der auszugsweisen oder vollständigen Wiedergabe (Photokopie, Mikrokopie), der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen und das der Übersetzung, vorbehalten.  
Als Manuskript gedruckt. Printed in Germany.

ISSN 0178-9546

ISBN 3-18-145908-9

## **Vorwort**

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als Wissenschaftlicher Mitarbeiter am 1. Institut für Mechanik, Fachbereich Physikalische Ingenieurwissenschaft, der Technischen Universität Berlin.

Herrn Prof. Dr.-Ing. G. BRUNK, der diese Arbeit anregte und förderte, bin ich zu großem Dank verpflichtet. Weiterhin danke ich Herrn Prof. Dr.-Ing. I. HARTMANN für die Bereitschaft, die Mitberichterstattung zu übernehmen, und Herrn Prof. Dr.-Ing. H. SANDER für die Führung des Vorsitzes im Promotionsausschuß.

Meinen Lehrern auf den Gebieten der Systemtheorie, Regelungstechnik und Mechanik, den Herren Professoren HARTMANN und BRUNK, möchte ich für meine Ausbildung nochmals gesondert danken.

Den jetzigen und ehemaligen Kollegen des Instituts danke ich für die gute Zusammenarbeit und das angenehme Arbeitsklima während der vergangenen Jahre.

Nicht zuletzt gebührt Frau M. HECK Dank für die Anfertigung der Zeichnungen.

Berlin, im März 1988

Joachim Böcker

# Inhalt

<b>1</b>	<b>Einführung und Übersicht</b>	<b>1</b>
1.1	Passive Systeme	1
1.2	Überblick über diese Arbeit	3
<b>2</b>	<b>Systembeschreibung und Voraussetzungen</b>	<b>5</b>
2.1	Die Systembeschreibung	5
2.2	Die Voraussetzungen	8
2.3	Diskussion der Voraussetzungen	12
2.3.1	Passivität	12
2.3.2	Zeitinvarianz	16
2.3.3	Stetigkeit	16
2.3.4	Linearität	18
<b>3</b>	<b>Erste Auswertung der Voraussetzungen</b>	<b>20</b>
3.1	Matrixdarstellung des Systemoperators	20
3.2	Faltungsdarstellung des Systemoperators	21
3.3	Kausalität	24
3.4	Übergang auf generalisierte Geschwindigkeiten	27
3.5	FOURIER- und LAPLACE-Transformierbarkeit	27
<b>4</b>	<b>Eigenschaften passiver Systeme im Bereich der LAPLACE-Transformation</b>	<b>35</b>
4.1	Positive Funktionen	35
4.2	Beispiele passiver Systeme und positiver Funktionen	38

VI	Inhalt	
4.3	Darstellungen positiver Funktionen	44
4.4	Verknüpfungen positiver Funktionen und passiver Systeme	52
4.4.1	Verknüpfungen positiver Funktionen	52
4.4.2	Verknüpfungen passiver Systeme	54
4.5	Rationale positive Funktionen	59
4.6	Ein algebraisches Kriterium zur Prüfung der Positivität	70
<b>5</b>	<b>Reversibilität und Irreversibilität</b>	75
5.1	Erweiterung des Raums der zugelassenen Erregungen	81
5.2	Quasistationäre Prozesse	85
5.3	Bestimmung des Minimalelementes	91
5.4	Das Reversibilitätskriterium	99
5.4.1	Das Reversibilitätskriterium für Eingrößensysteme	100
5.4.2	Reversible Systeme mit rationalen Übertragungsfunktionen	107
5.4.3	Das Reversibilitätskriterium für Mehrgrößensysteme	108
5.5	Weitere Klassifikation reversibler Systeme	109
5.5.1	Strenge und schwache Reversibilität	109
5.5.2	Relaxation	114
5.5.3	Verknüpfungen reversibler Systeme	119
<b>6</b>	<b>Dissipation</b>	122
6.1	Eigenschaften der Dissipationsleistung	122
6.2	Ansatz für die Dissipationsleistung mit Hilfe der verlorenen Arbeit	128
6.2.1	Die verlorene Leistung für Eingrößensysteme	131
6.2.2	Die verlorene Leistung im Fall rationaler Übertragungsfunktionen	134
6.2.3	LAPLACE- und FOURIER-Transformation quadratischer und bilinearer Funktionen	135
6.2.4	Die verlorene Arbeit und die zugehörige LJAPUNOW-Funktion	137
6.3	Weitere Ansätze für die Dissipationsleistung	143
6.4	Die LAGRANGE-Funktion	146

Inhalt	VII
<b>Anhang</b>	
<b>A Aus der Theorie der Distributionen</b>	150
A.1 Grundfunktionen	150
A.2 Distributionen als lineare stetige Funktionale	152
A.3 Einbettung gewöhnlicher Funktionen in die Räume der Distributionen	154
A.4 Äquivalenzrelation zwischen Distributionen	156
A.5 Multiplikation von Distributionen mit Funktionen	157
A.6 Lineare Substitution und komplexe Konjugation	158
A.7 Verallgemeinerte Differentiation	160
A.8 Faltung	163
A.9 FOURIER-Transformation	166
A.10 LAPLACE-Transformation	172
A.11 Positiv semidefinite Distributionen	175
<b>B Analytische Funktionen im Einheitskreis und in der rechten Halbebene</b>	178
B.1 Die LEBESGUE-Räume	178
B.2 Das POISSONSche Integral	180
B.3 Die HARDY-LEBESGUE-Räume	181
B.4 Das POISSONSche Integral der rechten Halbebene	185
B.5 Das Kriterium von PALEY-WIENER	187
B.6 Positive Funktionen	197
<b>Symbolverzeichnis</b>	203
<b>Literatur</b>	208

# 1 Einführung und Übersicht

## 1.1 Passive Systeme

Ein *passives System* – was ist das? Im ursprünglichen Sinn darf man sich passive Systeme aus den klassischen passiven Elementen der Mechanik oder Elektrotechnik aufgebaut denken: Feder, Dämpfer und Massen als mechanische oder Kondensatoren, Widerständen und Spulen als elektrotechnische Bauelemente. Alle diese Elemente sind dadurch gekennzeichnet, daß sie von sich aus keine Energie erzeugen können. Widerstände und Dämpfer sind *Energievernichter* während Federn, bewegte Massen, Spulen und Kondensatoren als *Energiespeicher* erscheinen; sie können nur die Arbeit wieder abgeben, die sie vorher aufgenommen haben. Genau diese Eigenschaft wird zur Definition der Passivität bei komplizierten Systemen benutzt, deren innere Struktur man nicht kennt: Ein passives System ist allgemein dadurch ausgezeichnet, daß die von der *Umgebung* an ihm geleistete *Arbeit* niemals negativ werden kann (wegen der möglichen Speichereigenschaften des Systems kann die Leistung selbst durchaus negativ werden).

Da die physikalische Energie einer Bilanzgleichung gehorcht, muß auch bei Zusammenschaltungen (Parallelschaltung, Reihenschaltung, Rückkopplung) passiver Systeme und speziell der passiven Grundelemente das entstehende Gesamtsystem passiv sein. Die Umkehrung dieser Frage ist keineswegs einfach zu beantworten: Gibt es zu jedem (gedachten) passiven System tatsächlich eine physikalische Realisierung aus passiven Grundelementen? Hinter dieser Überlegung stand in den Anfängen der systematischen Konstruktion elektrischer Netzwerke das ganz konkrete Problem, *ob* und *wie* ein entworfenen Übertragungsverhalten zum Beispiel eines Filters durch ein Netzwerk mit passiven Bauelemente realisiert werden kann. Die Beschränkung auf passive Elemente ist ganz einfach in der zu der damaligen Zeit beschränkten Verfügbarkeit von aktiven Bauelementen (Verstärkerröhren) zu sehen. Hierzu sind besonders die Arbeiten von CAUER [10, 11, 12] zu nennen, der dieses Problem in breiter systematischer Weise erörtert und vorhandene Ergebnisse zusammengefaßt hat. Wenn auch heute in der Mikroelektronik wegen der guten Einsetzbarkeit preiswerter Verstärker kaum noch Beschränkungen auf passive Netzwerke notwendig sind und auch

in der mechanischen Schwingungstechnik der Einsatz aktiver Elemente (»aktive Schwingungstilgung«) mehr und mehr zu finden ist, so behalten die passiven Systeme in der Technik auch heute noch dort ihre Bedeutung, wo es um große Belastungen und Leistungen geht, bei denen aktive Elemente nicht mehr einsetzbar sind oder sich ihr Einsatz aus wirtschaftlichen Gründen verbietet.

Schon früh erlangte die Passivität Bedeutung in der Systemtheorie und Regelungstechnik. Die systemimmanente »Stabilität« passiver Systeme, die auch bei Zusammenschaltung mehrerer passiver Systeme, insbesondere bei den in der Regelungstechnik so wichtigen *Rückkopplungen*, erhalten bleibt, ermöglichte die Entwicklung entsprechender Stabilitätskriterien. Die grundsätzlichen Aussagen dieser Stabilitätssätze waren gar nicht mehr von der physikalischen Bedeutung der Begriffe Energie, Arbeit, Leistung berührt, so daß lediglich eine verallgemeinerte Passivitätsbedingung, die keine physikalische Bedeutung besitzen brauchte, vorausgesetzt wurde. Von zahlreichen Autoren, die an dieser Entwicklung mitgewirkt haben, die zur *Hyperstabilitätstheorie* führte, sind unter anderem BROCKETT, WILLEMS, LEE, LANDAU und POPOV [6, 7, 28, 39, 45] zu nennen.

Eine ganz andere Entwicklung des Passivitätsbegriffes wurde von MEIXNER, KÖNIG, und TOBERGTE [24, 25, 26, 27, 31, 32, 33, 34, 35, 43] betrieben. Ihr Ansatzpunkt war die *Materialtheorie* und *Thermodynamik*. Anders als sonst üblich, bedienten sie sich einer phänomenologischen Systembeschreibung unter Zuhilfenahme linearer Nachwirkungsintegrale (»Faltung«, »Übertragungsfunktionen«), die zwar in der Netzwerktheorie schon alltägliches Handwerkszeug darstellte, in der Materialtheorie aber nicht sehr verbreitet war. Bezüglich der Materialtheorie ist die Passivität letztlich eine Folgerung des 2. Hauptsatzes der Thermodynamik, der freilich in den verschiedenen thermodynamischen »Schulen« unterschiedlich formuliert wird. Durch den Rückzug auf die phänomenologische Beschreibung mit der formalen Passivitätsaussage konnten sie sich von der Formulierung des 2. Hauptsatzes unabhängig machen. Es gelang ihnen, die wichtige thermodynamische Klassifizierung in reversible und irreversible Systeme nachzuvollziehen. Dazu bedienten sie sich des Begriffs der *verlorenen Energie*. Diese Größe wird allein durch die phänomenologische »Black Box«-Beschreibung eingeführt und kennzeichnet den Teil der Gesamtarbeit am System, der durch beliebige Manipulationen *nicht* wieder vom System an die Umgebung abgegeben wird. Es zeigt sich jedoch, daß die verlorene Energie zwar zur Beschreibung der Reversibilität gut geeignet ist, sie eine angestrebte Identifikation der

*Dissipationsleistung* (lösgelöst von der speziellen Formulierung des 2. Hauptsatzes) aber nicht in der erhofften Weise gestattet oder zumindest zu der »richtigen« Dissipation im Widerspruch steht. Den bisherigen Abschluß dieser Gedanken stellt aus mathematischer Sicht die Arbeit von TOBERGTE [43] dar. Danach wurden die Arbeiten anscheinend nur noch gelegentlich zitiert – so etwa KERN [23] mit einer Anwendung auf eine Kontinuumsmechanik – und die Theorie nicht weiter ausgebaut.

## 1.2 Überblick über diese Arbeit

Die vorliegende Arbeit knüpft an die Entwicklung der Theorie passiver Systeme von MEIXNER, KÖNIG und TOBERGTE an. Es werden lineare passive Mehrgrößensysteme behandelt, wenn auch gelegentlich eine Beschränkung auf Eingrößensystem vorgenommen wird. Anders als bei den zitierten Autoren wird dabei konsequent die *Theorie der Distributionen* verwendet, die sich als adäquates Hilfsmittel erweist. Wegen der grundsätzlichen Bedeutung für diese Arbeit und der bisher nur sporadischen Verwendung der Distributionen in der technischen Literatur ist im Anhang A ein kurzer Abriß der Distributionentheorie zusammengestellt.

Im 2. Kapitel werden zunächst die Voraussetzungen aufgestellt, wobei eine möglichst schwache Formulierung gewählt wird. Das sind neben der *Passivität* die *Linearität*, *Stetigkeit* und *Zeitinvarianz*. Ihre physikalische Bedeutung wird diskutiert und insbesondere der thermodynamische Hintergrund der Passivität im Abschnitt 2.3.1 erörtert. Trotz der Beschränkung auf lineare Systeme sind die Ergebnisse auch auf spezielle Klassen nichtlinearer Systeme anwendbar, was im Abschnitt 2.3.4 gezeigt wird.

Im 3. Kapitel wird eine erste Auswertung der Voraussetzungen betrieben. Hier zeigt sich, daß die *Theorie der Distributionen* ein geeignetes Mittel für die Systembeschreibung darstellt. Mit diesen Mitteln wird unter anderem die Anwendbarkeit der FOURIER- und LAPLACE-Transformation nachgewiesen, *bevor* mit diesen Hilfsmitteln gearbeitet wird.

Das 4. Kapitel beinhaltet dann eine weitere Auswertung der Passivitätsbedingung, die zu Darstellungssätzen und zu der wichtigen Charakterisierung passiver linearer Systeme im LAPLACE-Bereich, zu den *positiven Funktionen*, führen. Diese Ergebnisse

sind in der Literatur durchaus bekannt, siehe CAUER [11], YOULA [47], KÖNIG / MEIXNER [26], ZEMANIAN [48]. Wegen der allgemeineren Grundlagen und der daraus resultierenden abweichenden Bezeichnungweisen scheint eine vollständige Wiedergabe sinnvoll, zumal zu deren Herleitung zum Teil andere Wege besritten werden. Weiterhin wird die Zusammenschaltung passiver Systeme bzw. positiver Funktionen diskutiert.

Das 5. Kapitel widmet sich der *Reversibilität* und *Irreversibilität*. Dazu wird wie bei MEIXNER, KÖNIG und TOBERGTE die *verlorene Energie* verwendet, die hier aber als *verlorene Arbeit* bezeichnet wird. Zur Herleitung des Reversibilitätskriteriums wird ein anderer Weg gewählt als der von TOBERGTE in [43]. Dieser benutzt Untersuchungen über (zeit-) verschiebungsinvariante lineare Teilräume. Hier wird das Kriterium nach PALEY und WIENER direkt in seiner Form zur Charakterisierung kausaler Funktionen im FOURIER-Bereich herangezogen. Da dieses Kriterium in der Literatur in der hier benötigten allgemeinen Fassung nicht zur Verfügung gestellt wird, ist im Anhang B die Herleitung dieses Kriterium auf der Grundlage der Theorie der HARDY-LEBESGUE-Räume eingehend dargelegt. Am Ende des 5. Kapitels wird eine weitergehende Klassifizierung reversibler Systeme vorgenommen, die in zwei recht unterschiedliche Gruppen zerfallen. Die eine Gruppe kann als reversible *relaxierende* Systeme identifiziert werden, die eine Übergangsstellung zwischen den eigentlich (streng) reversiblen und den irreversiblen Systemen einnehmen.

Im 6. Kapitel wird die Dissipation erörtert. Es wird geprüft, was in diesem Zusammenhang die verlorene Arbeit zu leisten vermag und welche Mängel sie besitzt. Speziell werden die rationalen Eingrößensysteme herangezogen, an denen manche Eigenschaften besonders deutlich werden und sich auch Möglichkeiten zur Verbesserung der Unzulänglichkeiten des Ansatzes mit Hilfe der verlorenen Arbeit erkennen lassen. Als praktikables Hilfsmittel zur Bearbeitung der dabei auftretenden Arbeits- und Leistungsausdrücke im FOURIER- und LAPLACE-Bereich werden »quadratische Übertragungsfunktionen« eingeführt, die über »Polynomkoeffizienten-Matrizen« die Beziehung zur Zustandsdarstellung eines Systems herstellen. Die Konstruktion der LAGRANGE-Funktion ausgehend vom äußeren Systemverhalten, wie sie TELLEGEN [42] und MEIXNER [32] gezeigt haben, wird in diesen Formalismus eingebettet und zur Formulierung einer Restriktion für das zu ermittelnde Dissipationsfunktional verwendet.

## 2 Systembeschreibung und Voraussetzungen

### 2.1 Die Systembeschreibung

Die hier behandelten Systeme werden ausschließlich durch ihre *Phänomenologie*, daß heißt, durch ihr äußeres Verhalten beschrieben, welches mit der *Umgebung* in Wechselwirkung tritt. Im Fall elektrischer Systeme sind das die *Klemmeneigenschaften*. Welche physikalischen Grundgesetze innerhalb des Systems für das beobachtete äußere Verhalten verantwortlich sind, wird nicht erörtert. Während bei Kenntnis der inneren Struktur auch das äußere Verhalten bekannt ist, kann man aus dem äußeren Verhalten nicht ohne weiteres Schlüsse über die inneren Eigenschaften ziehen. Es bleibt dem Betrachter verborgen, durch welche inneren Mechanismen das beobachtete äußere Systemverhalten hervorgerufen wird, wenn es ihm auch unbenommen ist, sich irgendein Modell für das beobachtete Verhalten zu konstruieren oder ein anderes System mit gleichen äußeren Eigenschaften, aber mit bekannter innerer Struktur heranzuziehen. Man darf aber nicht ohne weiteres davon ausgehen, daß die dem willkürlich herangezogenen Modell eigenen *inneren* Eigenschaften etwas mit den *inneren* Eigenschaften des tatsächlich vorliegenden Systems zu tun haben. Ob und mit welchen Aussagen derartige Schlüsse möglich sind, ist ein Aspekt, dem im Folgenden Beachtung geschenkt werden soll.

Obwohl in dieser Arbeit oftmals elektrische Beispiele herangezogen werden, ist die Natur der betrachteten Systeme nicht festgelegt. Es darf sich um mechanische, elektrische, gemischte elektromechanische oder andere physikalische oder technische Systeme handeln, sofern sie nur den im nächsten Abschnitt formulierten Voraussetzungen genügen.

Die geschilderte Systembeschreibung wird gemeinhin als »*Black Box*« bezeichnet. Das äußere Klemmenverhalten ist durch geeignete Experimente bestimmbar, doch besteht keine Möglichkeit, einmal einen Blick in die Black Box zu werfen. Diese Struktur wird im Bild 2.1 verdeutlicht.

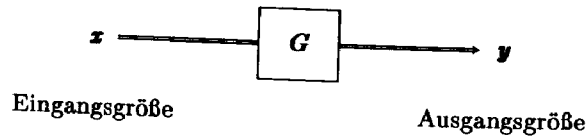


Bild 2.1: Eingangs-Ausgangs-Modell

In diesem Bild ist bereits zum Ausdruck gebracht, daß von dem vollständigen Satz  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  der äußeren Systemgrößen der Teil  $\mathbf{x}$  unabhängig vorgebar sein soll, während der Teil  $\mathbf{y}$  von  $\mathbf{x}$  (und dem Systemverhalten) abhängt. Die Funktion  $\mathbf{x}$  heißt *Eingangsgröße* oder *Erregung*, die Funktion  $\mathbf{y}$  heißt *Ausgangsgröße* oder *Antwort*. Sowohl die Erregung als auch die Systemantwort seien im allgemeinen  $n$ -dimensionale vektorwertige Funktionen (eigentlich Spaltenmatrizen)

$$(2.1) \quad \mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T,$$

$$(2.2) \quad \mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T.$$

Im Hinblick auf die Interpretation des später eingeführten Produkts  $P$  nach (2.16) als *Leistung* werden mit der Begriffsbildung der Analytischen Mechanik die Komponenten  $x_i$  der Erregung auch als *generalisierte Koordinaten* oder *Arbeitsvariablen* und die Komponenten  $y_i$  der Systemantwort auch als *generalisierte Kräfte* bezeichnet. Aus diesem Grund müssen die Vektoren  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{y}$  von gleicher Dimension sein, da sonst die Voraussetzung der Passivität sinnlos wäre.

Die im Bild 2.1 dargestellte Eingangs-Ausgangsbeziehung kann auch in Form der Operatorgleichung

$$(2.3) \quad \mathbf{y} = G \mathbf{x}$$

wiedergegeben werden. Mit dieser Schreibweise ist gemeint, daß das System  $G$  oder synonym der Operator  $G$  jeder *Eingangsfunktion*  $\mathbf{x}$  komplett eine *Ausgangsfunktion*  $\mathbf{y}$  zuordnet. Keinesfalls ist mit der Gleichung (2.3) eine Abhängigkeit des Momentanwertes  $\mathbf{y}(t)$  allein von dem Momentanwert  $\mathbf{x}(t)$  gemeint. Die Gleichung für den Funktionswert  $\mathbf{y}(t)$  muß korrekt in der Form

(2.4)

$$\mathbf{y}(t) = (G\mathbf{x})(t)$$

geschrieben werden.

Vom technischen Standpunkt kann die Vorstellung einer unabhängig vorgebbaren Eingangsgröße oder Erregung kritisiert werden: Bei jeder technischen Versuchsanordnung ist es höchstens in guter Näherung möglich, eine Größe (z.B. Last, Verschiebung, elektrischer Strom, Spannung) in beliebiger Weise dem System aufzuprägen. Durch zwangsläufig vorhandene Amplituden- oder Frequenzbeschränkungen schon allein der zur Verfügung stehenden technischen Hilfsmittel gerät man immer an irgendwelche Grenzen. Von einer beliebig vorgebbaren Eingangsgröße kann eigentlich keine Rede sein. Bei machen Versuchsanordnungen ist man auch aus technischen oder physikalischen Gründen gar nicht in der Lage, die gewünschte Systemgröße direkt aufzuprägen. Man ist dann darauf angewiesen, dem System hilfsweise andere Größen aufzuschalten, und dann die sich daraus ergebende eigentliche Eingangsgröße und die Ausgangsgröße zu messen.

Zunächst soll nun aber überlegt werden, welche Klassen von Eingangsfunktionen überhaupt zugelassen werden sollen. Bei der Beantwortung dieser Fragestellung kann man sich durchaus von dem Gedanken an einen realen Versuchsaufbau leiten lassen. Das System liegt als »Black Box« vor, d.h. es sind a priori keine Kenntnisse über die innere Struktur vorhanden. Ist es sinnvoll, bei einem völlig unbekannten System, das man sich zunächst wirklich als einen »schwarzen Kasten« auf dem Labortisch vorstellen kann, gleich mit Sprung-, Stoß- oder periodischen Erregungen zu beginnen? Es ist denkbar, daß z.B. bei periodischer Erregung ungedämpfte Schwingungen dieser Frequenz angeregt werden, die dann über alle Grenzen wachsen. Im ungünstigsten Fall »brennt der Kasten durch«. Eine Sprungerregung ist in dieser Hinsicht nicht besser: Enthält das System ein- oder sogar mehrfache Differenzierer, können im System bereits unerwünschte Spitzen innerer oder äußerer Systemgrößen auftreten, die wiederum zur Zerstörung der Versuchsanordnung führen können. Angesichts dieser Überlegungen wird man zunächst in ersten Experimenten nur sehr vorsichtige Erregungen zulassen: Diese sollten als erste Voraussetzung genügend »glatt« sein; also mindestens stetig, am besten auch hinreichend oft differenzierbar. Da man nicht weiß, was »hinreichend« ist, fordert man sicherheitshalber gleich Differenzierbarkeit von unendlicher Ordnung. Das wären dann also Funktionen der Differenzierbarkeitsklasse  $C_\infty$ . Der Gedanke an ein unbeschränktes »Aufklingen« des Systems legt es nun als



zweite Voraussetzung nahe, nur endliche Erregungszeiten zuzulassen. Darüber hinaus sind Erregungen über »unendliche Zeiten« auch praktisch nicht vorstellbar: Irgendwann muß das Experiment begonnen haben und es muß auch irgendwann enden, wenn man schließlich noch eine Auswertung machen will. Der mathematische Ausdruck für Funktionen, die nur in einem endlichen Zeitintervall von Null verschieden sind, heißt *finit* und ist im Anhang (A.3) definiert. In diesem Sinn identifizieren wir den »ausgeschalteten« Versuchsaufbau mit der Nullerregung, wobei man aber schon den Gedanken an die *Linearität* des Systems im Hinterkopf hat, die impliziert, daß die Erregung mit der Nullfunktion auch die Nullfunktion als Systemantwort liefert.

Die beiden Voraussetzungen der Differenzierbarkeit von unendlicher Ordnung und die Finitheit der Erregung bieten leider immer noch keine Gewähr dafür, daß ein erster Versuch ohne Schaden ablaufen kann – man denke an irgendwelche nichtlinearen Systeme, die ja erst *nach* einem Experiment als solche erkannt werden können –, doch ist die Klasse der linearen Systeme, die derartige Erregungen vertragen können, sehr umfassend – wenn auch immer noch nicht allumfassend. Die zulässige Menge der finiten, unendlich oft differenzierbaren Funktionen wird üblicherweise mit dem Symbol  $\mathcal{D}$  gekennzeichnet. Diese Funktionen sind in der Distributionentheorie von zentraler Bedeutung; sie heißen *Grundfunktionen* (siehe dazu Anhang A.1). Im hier vorliegenden vektorwertigen Fall bedeutet das, daß jede Komponente  $x_i$  eine Grundfunktion aus  $\mathcal{D}$  sein soll. Für den  $n$ -dimensionalen Vektor  $x$  schreiben wir dann kurz

$$(2.5) \quad x \in \mathcal{D}^n := \underbrace{\mathcal{D} \times \mathcal{D} \times \dots \times \mathcal{D}}_{n\text{-faches kartesisches Produkt}}.$$

## 2.2 Die Voraussetzungen

Die Voraussetzungen der hier untersuchten Systeme sind die *Linearität*, die *Stetigkeit*, die *Zeitinvarianz* und die *Passivität*. Bevor mit diesen Begriffen gearbeitet werden soll, ist klar zu definieren, was darunter zu verstehen ist. Als erstes benötigen wir aber folgende Grundvoraussetzung, die bereits in dem vorangegangenen Abschnitt anschaulich entwickelt wurde:

### (2.6) Grundvoraussetzung:

Der Definitionsbereich des Operators  $G$  (die Menge der zugelassenen Erregungen  $x$ ) soll die Menge  $\mathcal{D}^n$  der Grundfunktionen umfassen und der Bildbereich (die Menge der möglichen Systemantworten) bestehe aus gewöhnlichen (vektorwertigen) Funktionen, das heißt, die Werte  $y(t) = (Gx)(t)$  seien für jedes  $x \in \mathcal{D}^n$  und jedes  $t \in \mathbb{R}$  definiert:

$$(2.7) \quad x \in \mathcal{D}^n, t \in \mathbb{R} \longrightarrow y(t) = (Gx)(t) \in \mathbb{C}^n \quad \square$$

Der erste zu definierende Begriff ist die Linearität, die mit der Anwendbarkeit des Superpositionsprinzips gleichzusetzen ist:

### (2.8) Definition: Linearität eines Systems

Ein System  $G$  heißt *linear* in  $\mathcal{D}^n$ , wenn für alle Erregungen  $x_i \in \mathcal{D}^n$  und alle Zahlen  $\alpha_i \in \mathbb{C}$

$$(2.9) \quad G(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 Gx_1 + \alpha_2 Gx_2$$

gilt. □

### (2.10) Bemerkung: Komplexe Systembeschreibung

Die Definition der Linearität wurde gleich mit komplexen Konstanten vorgenommen. Auch der Grundraum  $\mathcal{D}$  enthält grundsätzlich komplexwertige Funktionen. Dem steht die Gewohnheit entgegen, technisch-physikalische Größen als reellwertig anzusehen. Auch wenn in der Elektrotechnik komplexe Zeigerrechnung betrieben wird, kommt als Momentanwert dort nur dem Realteil wirkliche Bedeutung zu. Betrachtet man aber zum Beispiel die Quantenmechanik, in der durchgängig mit komplexen Größen gerechnet wird, oder gewisse Bereiche der Theorie elektrischer Maschinen, wo mit Vorteil zwei reelle Größen zu einer einzigen komplexen zusammengefaßt werden, so erscheint es nicht ohne Sinn, diese Arbeit von vornherein für komplexwertige Systeme aufzubauen, zumal der reellwertige Fall stets enthalten ist und die komplexe Formulierung kaum größeren Aufwand erfordert. □

Der nächste Begriff ist die *Stetigkeit* eines Systems: Damit ist gemeint, daß bei einer kleinen Änderung der Erregung sich auch die Systemantwort nur wenig ändert. Der Ausdruck »Änderung« ist hier nicht im zeitlichen Sinn zu interpretieren, sondern in

einer parallelen Ausführung eines ähnlichen Experiments. Man muß nun quantifizieren, was unter einer »kleinen« Änderung verstanden werden soll. Da jede Komponente  $x_i$  der Erregung  $\mathbf{x}$  aus der Menge  $\mathcal{D}$  der Grundfunktionen stammen soll, kann man zur Beschreibung kleiner Änderungen die Topologie in  $\mathcal{D}$  verwenden, die in (A.4) über die Definition konvergenter Folgen beschrieben ist. Damit wird auch eine Topologie in dem Raum  $\mathcal{D}^n$  definiert, wenn wir als konvergente Folgen in  $\mathcal{D}^n$  genau solche bezeichnen, für die jede Komponentenfolge in  $\mathcal{D}$  konvergiert. Man ist nun geneigt, zur Beschreibung der Änderung der Ausgangsgröße  $\mathbf{y}$  ebenfalls die Topologie von  $\mathcal{D}^n$  heranzuziehen. Es ist aber keineswegs bekannt, ob die Funktion  $\mathbf{y}$  überhaupt zur Menge  $\mathcal{D}^n$  gehört, weshalb wir hier die Bedeutung einer »kleinen« Änderung an einem einzelnen Funktionswert festmachen:

**(2.11) Definition: Stetigkeit eines Systems**

Ein System  $G$  heißt *stetig* in  $\mathcal{D}^n$ , wenn für jede in  $\mathcal{D}^n$  konvergente Funktionenfolge  $\{\mathbf{x}_k\}$  mit der Grenzfunktion

$$(2.12) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k =: \mathbf{x} \in \mathcal{D}^n$$

für jedes  $t \in \mathbf{R}$  die Folge der Funktionswerte  $\{(G\mathbf{x}_k)(t)\}$  konvergiert und den Grenzwert

$$(2.13) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} (G\mathbf{x}_k)(t) = (G\mathbf{x})(t) \in \mathcal{C}^n$$

besitzt.

□

Als weiterer Begriff tritt nun die Zeit- oder Verschiebungsinvarianz hinzu. Das bedeutet anschaulich, daß das Versuchsergebnis unabhängig von dem Zeitpunkt ist, zu welchem das Experiment beginnt.

**(2.14) Definition: Zeitinvarianz**

Ein System  $G$  heißt *zeitinvariant*, wenn für alle  $\mathbf{x} \in \mathcal{D}^n$  und alle  $T \in \mathbf{R}$

$$(2.15) \quad G(\mathbf{x}(\cdot + T)) = (G\mathbf{x})(\cdot + T)$$

gilt.

□

Wir kommen nun zum zentralen Begriff der *Passivität*. Wir betrachten  $\mathbf{x}(t)$  und  $\mathbf{y}(t) = (G\mathbf{x})(t)$  als zueinander konjugierte Größen und definieren das Produkt

$$(2.16) \quad P(t) := \operatorname{Re} (\dot{\mathbf{x}}^\dagger(t) \mathbf{y}(t)) = \sum_{i=1}^n \operatorname{Re} (\dot{\bar{x}}_i(t) y_i(t)) \in \mathbf{R}.$$

$(\cdot)^\dagger$  bezeichnet die komplexe Konjugation in Zusammenhang mit der Transposition der Matrizenrechnung. Der Punkt steht für die Differentiation nach der Zeit. Da im Grundraum  $\mathcal{D}$  unbeschränkt differenziert werden darf, ist  $P(t)$  wegen der Grundvoraussetzung (2.6) stets wohldefiniert.

**(2.17) Definition: Passivität**

Ein System  $G$  heißt *passiv*, wenn für alle  $\mathbf{x} \in \mathcal{D}^n$  und alle  $t \in \mathbf{R}$  das Funktional

$$(2.18) \quad (W\mathbf{x})(t) = W(t) := \int_{-\infty}^t P(\tau) d\tau \in \mathbf{R}$$

existiert (d.h.  $P$  muß integrierbar sein) und einen nicht negativen Wert besitzt:

$$(2.19) \quad W(t) \geq 0$$

□

Die Integrierbarkeit des Funktionals  $P$  scheitert nicht an der unteren uneigentlichen Integrationsgrenze  $-\infty$ . Da  $\mathbf{x}$  als finite Funktion nur in einem endlichen Intervall von Null verschieden ist, gilt das gleiche auch für  $P$ . Die untere Integrationsgrenze kann also immer durch eine endliche Grenze ersetzt werden. Die Integrierbarkeit richtet sich vielmehr nach dem lokalen Verhalten. Da  $\mathbf{x}$  unendlich oft differenzierbar ist, hängt die Integrierbarkeit im Wesentlichen von der noch unbekannten Systemantwort  $\mathbf{y}$  ab.

Als weitere Bezeichnungsweise wird an dieser Stelle der Ausdruck

$$(2.20) \quad (\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{y})_t := \int_{-\infty}^t \dot{\mathbf{x}}^\dagger(\tau) \mathbf{y}(\tau) d\tau$$

eingeführt. (2.18) erhält damit die Form

$$(2.21) \quad W(t) = \operatorname{Re} (\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{y})_t$$

Damit sind alle notwendigen Begriffe erklärt. Neben der Grundannahme (2.6) sollen die hier behandelten Systeme den Voraussetzungen der *Linearität*, *Stetigkeit*, *Zeitinvarianz* und *Passivität* genügen. Es werden keine weiteren über diese Voraussetzungen hinausgehenden Annahmen gemacht oder benötigt. Da sich diese Arbeit ausschließlich mit dieser Systemklasse beschäftigt, werden diese Annahmen immer als Grundlage – im mathematischen Sinn als Axiome – vorausgesetzt.

## 2.3 Diskussion der Voraussetzungen

Unter den vier vorliegenden Voraussetzungen ist nach rein formalen Gesichtspunkten keine Klassifikation erkennbar. Es handelt sich jeweils um Einschränkungen der Allgemeinheit oder – als Gültigkeitsannahme aufgefaßt – um *Axiome der Theorie linearer stetiger zeitinvarianter passiver Systeme*. Inhaltlich kann man die Voraussetzungen aber in zwei Gruppen gliedern. Das Augenmerk dieser Arbeit richtet sich eben auf die Passivität; sie hat inhaltlich klassierende Bedeutung. Die Linearität, Stetigkeit und Zeitinvarianz als zweite Gruppe der Voraussetzungen erscheinen demgegenüber als Einschränkungen der Klasse passiver Systeme, die wohl oder übel gemacht werden, um in den Ableitungen zu Ergebnissen zu kommen.

Als erstes soll der technische und physikalische Hintergrund der Passivität erörtert werden. Danach wird diskutiert, als wie einschränkend die Voraussetzungen der zweiten Gruppe in Bezug auf mögliche Anwendungsfälle beurteilt werden müssen.

### 2.3.1 Passivität

Die Passivität kann in einem energetischen Sinn gedeutet werden. Sind  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{y}$  im thermodynamischen Sinn zueinander konjugierte Größen, bedeutet dies, daß das in (2.16) definierte Produkt

$$P = \operatorname{Re}(\dot{\mathbf{x}}^\dagger \mathbf{y}) = \sum_i \operatorname{Re}(\dot{\mathbf{x}}_i \mathbf{y}_i)$$

eine *Leistung* angibt. Mit den Begriffen der Analytischen Mechanik wird dies besonders deutlich: Sind  $\mathbf{x}_i$  die generalisierten Koordinaten und  $\mathbf{y}_i$  die generalisierten (äußeren)

Kräfte des Systems, so ist (2.16) eine Summe von Produkten zwischen generalisierten Geschwindigkeiten (als Zeitableitungen der generalisierten Koordinaten) und generalisierten Kräften; die Kraft  $\mathbf{y}_i$  leistet an der Geschwindigkeit  $\dot{\mathbf{x}}_i$  Arbeit. Wir nehmen nun an, daß die Vorzeichenkonventionen der generalisierten Koordinaten und Kräfte derart getroffen wurden, daß der Ausdruck  $P$  eine Leistung der Umgebung an dem System ist. Für ein positives Vorzeichen von  $P$  haben wir dann einen Leistungsfluß in das System hinein. Dementsprechend ist  $W(t)$  als Integral der Leistung die am System bis zum Zeitpunkt  $t$  geleistete Arbeit. Umfaßt  $P$  sämtliche in das System hineingehende Leistungen mit Ausnahme des Wärmestromes  $P_q$ , kann der 1. Hauptsatz der Thermodynamik oder die *totale Energiebilanz* in der Form

(2.22)

$$\dot{E} = P + P_q$$

angegeben werden. Die totale Energie  $E$  enthält die innere Energie, mechanische Energieen wie Formänderungs- und kinetische Energie sowie elektromagnetische Energieen. Nach dem 1. Teil des 2. Hauptsatzes der Thermodynamik existiert nun eine Zustandsgröße  $S$ , die *Entropie* genannt wird, mit der sich der Wärmestrom durch die Beziehung

(2.23)

$$P_q = \Theta (\dot{S} - \Sigma)$$

ausdrücken läßt (siehe BECKER / BÜRGER [3], 4.3, 4.4). Hierin ist  $\Theta > 0$  die absolute Temperatur der Gleichgewichtsumgebung, die den Wärmestrom  $P_q$  abgibt. Die Größe  $\Sigma$  heißt *Entropieproduktion*. Als 2. Teil des 2. Hauptsatzes wird in vielen thermodynamischen Theorien die *CLAUSIUS-DUHEM-Ungleichung*

(2.24)

$$\Sigma \geq 0$$

gefordert (siehe z. B. MÜLLER [36], IV.1; TRUESDELL / NOLL [44], D.II.a; COLEMAN [13], 2.; ERINGEN [15], 4.6 oder BALKE / BERGANDER [2]). Mit (2.23) lautet die totale Energiebilanz nun

(2.25)

$$\dot{E} = P + \Theta \dot{S} - \Theta \Sigma.$$

Geht man jetzt von der totalen Energie  $E$  durch eine LEGENDRE-Transformation auf die verallgemeinerte freie Energie

(2.26)

$$\Phi := E - \Theta S$$

über, so erhält man für deren Bilanz

$$(2.27) \quad \dot{\Phi} = P - \dot{\Theta}S - \Theta\Sigma.$$

Im Fall *isothermer Prozesse*, also  $\dot{\Theta} = 0$ , ist

$$(2.28) \quad P = \dot{\Phi} + \Theta\Sigma.$$

und für das Arbeitsfunktional ergibt sich

$$(2.29) \quad W(t) = \int_{-\infty}^t P(\tau) d\tau = \Phi(t) - \Phi(-\infty) + \int_{-\infty}^t \Theta\Sigma(\tau) d\tau.$$

Die totale Energie wie auch die freie Energie sind Zustandsgrößen, daß heißt,  $\Phi(t)$  hängt nur über hier nicht explizit benannte innere Zustandsvariablen von der Zeit  $t$  ab. Durch eine Normierung kann für den »Anfangszeitpunkt«  $t = -\infty$  die Festlegung  $\Phi(-\infty) = 0$  getroffen werden. Ist nun die freie Energie eine nicht negativ Zustandsfunktion,  $\Phi(t) \geq 0$ , was den physikalischen Erfahrungen entspricht, ist wegen  $\Theta > 0$  und  $\Sigma \geq 0$  auch das Arbeitsfunktional stets nicht negativ:

$$(2.30) \quad W(t) \geq 0.$$

Dies bleibt auch dann richtig, wenn als 2. Teil des 2. Hauptsatzes statt (2.24) nur die Gültigkeit der *integralen CLAUSIUS-Ungleichung*

$$(2.31) \quad \int_{-\infty}^t \Sigma(\tau) d\tau \geq 0$$

gefordert wird. Wir haben dann im Sinne unserer Definition ein passives System vorliegen. Dies ist eine direkte Folgerung aus den beiden Hauptsätzen der Thermodynamik.

Kann der ursprüngliche Anfangszustand durch geeignete Steuerung wieder erreicht werden (Kreisprozeß), gilt für das nur von den Zustandsgrößen abhängende »Potential«  $\Phi(t) = \Phi(-\infty) = 0$ . Der erste Anteil der äußeren Arbeit in (2.29) ist also *wiedergewinnbar* oder *reversibel*, während in dem Integral der *nicht wiedergewinnbare* oder *irreversible* Anteil der Arbeit erkannt werden kann. Den zugehörigen Leistungsanteil

$$(2.32) \quad P_d := \Theta\Sigma \geq 0$$

nennt man *Dissipationsleistung*.

Für isentrope Prozesse, also  $\dot{S} = 0$ , gelangt man unter direkter Verwendung der totalen Energie  $E$  ebenfalls zu einer Passivitätsaussage. Läuft der Prozess weder isotherm noch isentrop ab, hat man die Möglichkeit, durch Erweiterung der Variablensätze zu einer Aussage über die Passivität zu kommen. Bei Benutzung der totalen Energie muß der Satz  $\mathbf{x}$  der generalisierten Koordinaten um die Entropie  $S$ ,

$$(2.33) \quad \dot{\mathbf{x}} := [\dot{\mathbf{x}}, S],$$

und der Satz  $\mathbf{y}$  der generalisierten Kräfte um die Temperatur  $\Theta$ ,

$$(2.34) \quad \dot{\mathbf{y}} := [\dot{\mathbf{y}}, \Theta],$$

erweitert werden. Dadurch ergibt sich für den neuen Leistungs Ausdruck

$$(2.35) \quad \dot{P} := \text{Re}[\dot{\mathbf{x}}^\dagger \dot{\mathbf{y}}] = P + \dot{\Theta}S$$

mit der Definitheit der totalen Energie wiederum die Passivität. Bei Verwendung der freien Energie sind die Variablensätze genau anders herum zu ergänzen.

Im Gegensatz zu der totalen Energiebilanz (2.22) werden in der Technik nur partielle Energiebilanzen aufgestellt. Erfasst man bei einem elektrischen Netzwerk nur die an den Klemmen zugeführten elektrischen Leistungen, so ist trotzdem für diesen Leistungs Ausdruck Passivität zu erwarten, wenn man sicher ist, daß die elektromagnetischen Energieen nur in Wärme umgewandelt werden können und kein Austausch mit anderen Energieformen stattfindet. Das ist bei elektrischen Maschinen, die elektromagnetische Energieen in mechanische wandeln, nicht mehr der Fall. Hier müssen auch die mechanischen Leistungen berücksichtigt werden. Es ist auch denkbar, daß nicht einmal alle Leistungen einer Klasse erfaßt werden. »Vergißt« man bei einem elektrischen Netzwerk die Leistung der Versorgungsspannungen, wird im allgemeinen eine Passivität mehr vorliegen. Das Verhalten an den restlichen Klemmen erscheint dann aktiv (im Gegensatz zu passiv); das Netzwerk kann über diese Klemmen Leistung abgeben, ohne daß man sie vorher dort hineingebracht hätte. Die Frage »aktiv oder passiv« ist also immer verbunden mit der mehr oder weniger vollständigen Bilanzierung der in das System hineingebrachten Leistungen.

Die Passivität kann aber auch völlig losgelöst von einer energetischen Interpretation betrachtet werden. Davon wird in der Hyperstabilitätstheorie (siehe LANDAU [28] oder POPOV [39]) Gebrauch gemacht, wo es darum geht, für eine spezielle Systemstruktur,

die aus einem linearem und einem nichtlinearem Teilsystem besteht, Stabilitätsaussagen, also gewisse Beschränktheitsaussagen über innere oder äußere Systemgrößen, aufzustellen. Auch hierbei treten Funktionen auf, die Energien formal gleichen, die *LJAPUNOW-Funktionen*. Ob und in welcher Weise diese als reale physikalische Energien interpretiert werden können, interessiert bei dieser Aufgabenstellung nicht.

### 2.3.2 Zeitinvarianz

In einem physikalischen Umfeld betrachtet, ist die Voraussetzung der Zeitinvarianz eigentlich gar keine zusätzliche Einschränkung. In allen physikalischen Theorien gehen Zeitmessungen nur als *Zeitdifferenzen* ein. Die physikalischen Gesetze sind bereits von ihrer Formulierung her zeitinvariant. Eine absolute Zeit im Sinne eines ausgezeichneten Zeitursprungs existiert nicht.

Trotzdem ist es denkbar, daß bei Beschreibungen technischer Systeme Zeitabhängigkeiten auftreten (z. B. bei einem chemischen Reaktor die Zeitdifferenz zum Startzeitpunkt). Dies kommt dadurch zustande, daß ein Teil der eigentlich zeitinvarianten Beschreibungsgleichungen vorab zumindest näherungsweise gelöst oder durch empirische Daten ersetzt wird. Diese Ergebnisse werden dann in den verbleibenden Teil der Systemgleichungen eingesetzt und erscheinen dort als zeitabhängige Parameter, obgleich die zugrunde liegende physikalische Theorie zeitinvariant ist.

In Bezug auf derartige Anwendungsfälle stellt die Zeitinvarianz eine Einschränkung dar, doch darf man diese als relativ schwach werten.

### 2.3.3 Stetigkeit

Die Frage nach der Stetigkeit eines Systems ist eng mit der Frage nach der Gültigkeit der mathematischen Modellbildung verknüpft. Ist ein System nicht stetig, können beliebig kleine Änderungen in der Erregung große Wirkungen auf die Systemantwort ausüben. Dann ist die Frage berechtigt, ob ein derartiges mathematisches Modell das

physikalische oder technische System überhaupt in einer vernünftigen Weise beschreibt, denn zum einen ist jede Modellbildung mit gewissen Modellierungsfehlern verbunden und es treten zum anderen unvermeidlich Meßfehler auf. Hängt das Systemverhalten empfindlich von diesen nicht bekannten Fehlern ab, muß das mathematische Modell als unbrauchbar bezeichnet werden. Das heißt nicht unbedingt, daß das System als solches unsinnig ist oder falsch modelliert ist. Hier seien die in momentan großem Interesse stehenden *chaotischen Systeme* genannt, die zwar deterministisch sind, aber eine ungeheure Empfindlichkeit gegenüber kleinsten Parameteränderungen besitzen und daher eine mathematische Vorhersage ihres Verhaltens unmöglich machen. Chaotische Systeme treten allerdings nur in Zusammenhang mit Nichtlinearitäten auf.

Neben derartigen »globalen« Unstetigkeiten gibt es natürlich auch wesentlich einfachere Fälle, bei denen nur in einzelnen »Punkten« Unstetigkeiten vorliegen. Das sind speziell technische Systeme mit *Schaltgliedern*, die zwischen zwei oder mehreren diskreten Zuständen hin- und herschalten.

Die Forderung der Stetigkeit stellt also durchaus eine größere Einschränkung dar. Da die geschilderten Unstetigkeiten aber nur in Verbindung mit Nichtlinearitäten auftreten, ist gleichzeitig auch die Voraussetzung der Linearität verletzt. In Bezug auf die Klasse der linearen Systeme ist die Stetigkeitsforderung kaum eine Einschränkung, die irgendwelche technischen Systeme berührt. Bei Linearität liegt »fast immer« auch Stetigkeit vor, so daß diese Forderung nur noch zur mathematisch einwandfreien Ableitung der Ergebnisse dient.

Darüber hinaus ist der hier verwendete Stetigkeitsbegriff von verhältnismäßig »schwacher Natur: Die Topologie des Grundraums  $\mathfrak{D}$  ist nämlich recht »stark«, das heißt sie ist z.B. dicht in jener der LEBESGUE- oder SOBOLEW-Räume  $L_p$  oder  $W_p^k$ . Jede konvergente Folge in  $\mathfrak{D}$  ist auch in den LEBESGUE- oder SOBOLEW-Räumen konvergent, nicht aber umgekehrt. Daher ist die Stetigkeit in  $\mathfrak{D}$ , da  $\mathfrak{D}$  »weniger« konvergente Funktionenfolgen als etwa  $L_p$  umfaßt, eine schwächere Bedingung als die im Raum  $L_p$ . Die Klasse der Systeme, die in  $\mathfrak{D}$  stetig sind, ist also umfangreicher als die der in  $L_p$  stetigen Systeme.

### 2.3.4 Linearität

Die empfindlichste Einschränkung ist zweifellos die Linearität. Es ist durchaus von großem Interesse, Aussagen auch über nichtlineare passive Systeme zu gewinnen, da in fast allen technischen Disziplinen versucht wird, sich den Nichtlinearitäten weitestgehend zu nähern. Es muß aber betont werden, daß sich die Ergebnisse dieser Arbeit trotzdem auf eine spezielle Klasse nichtlinearer Systeme anwenden lassen. Oftmals ist es möglich, ein nichtlineares System derart in ein lineares und in ein nichtlineares Teilsystem aufzuspalten, daß der nichtlineare Teil nur noch aus einer *algebraischen* Nichtlinearität besteht, während der lineare Teil die »Dynamik« oder die *Nachwirkungseigenschaften* beschreibt. Das bedeutet, daß sich die zugehörige nichtlineare Operatorgleichung

$$(2.36) \quad \mathbf{w} = N \mathbf{u}$$

in die Teile

$$(2.37) \quad \mathbf{x}(t) := \boldsymbol{\vartheta}(\mathbf{u}(t)),$$

$$(2.38) \quad \mathbf{y}(t) := (G\mathbf{x})(t),$$

$$(2.39) \quad \mathbf{w}(t) = \boldsymbol{\eta}(\mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t))$$

aufspalten lassen möge. Die Funktionen  $\boldsymbol{\vartheta}$  und  $\boldsymbol{\eta}$  seien rein algebraische nichtlineare Funktionen, was dadurch zum Ausdruck kommt, daß in ihren Argumenten nur die Funktionswerte zum Zeitpunkt  $t$  auftreten, während  $G$  einen linearen, stetigen, zeitinvarianten Operator darstellt, dessen Argument die gesamte Funktion  $\mathbf{x}$  ist. Die Dimension der vektorwertigen Funktionen  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{w}$  ist im allgemeinen eine andere als die der Funktionen  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{y}$ . Im Vorgriff auf das Ergebnis (3.33) für den Fall, daß der zum System  $G$  gehörende Nachwirkungskern oder die Gewichtsverteilung  $\mathbf{g}$  eine gewöhnliche Funktion ist, führt (2.37) bis (2.39) auf die Gesamtdarstellung

$$(2.40) \quad \mathbf{w}(t) = \boldsymbol{\eta} \left\{ \int_{-\infty}^t \mathbf{g}(t-\tau) \boldsymbol{\vartheta}(\mathbf{u}(\tau)) d\tau, \mathbf{u}(t) \right\}.$$

Derartige nichtlineare Gesetze lassen sich z. B. in der Materialtheorie finden. Man vergleiche etwa BRUNK [8] das dort diskutierte allgemeine viskoelastische Materialgesetz (2), bei dem allerdings auch der Nachwirkungskern noch vom Vektor  $\mathbf{u}(t)$  abhängen darf. Die phänomenologische Materialbeschreibung des JOSEPHSON-Tunnelkontaktes in der Arbeit von BRUNK [9] besitzt genau die Struktur (2.40). Ebenso wird von BALKE und BERGANDER in [2] ein viskoelastisches Materialgesetz dieser Form besprochen.

Das System  $G$  in (2.38) ist nach Annahme linear, stetig und zeitinvariant. Es ist nun denkbar, daß sich auch die Passivität durch entsprechende Schlußfolgerungen aus den speziellen Eigenschaften des vorliegenden nichtlinearen Systems zeigen läßt. Für eine gewisse Klasse von nichtlinearen Systemen überträgt sich aber eine Aussage über die Passivität des nichtlinearen Gesamtsystems direkt auf die Passivität des linearen Teilsystems. Ist nämlich die Funktion  $\boldsymbol{\eta}$  von der Struktur

$$(2.41) \quad \boldsymbol{\eta}(\mathbf{y}, \mathbf{u}) = \overline{\partial_{\mathbf{u}} \boldsymbol{\vartheta}(\mathbf{u})} \mathbf{y},$$

wobei  $\partial_{\mathbf{u}} \boldsymbol{\vartheta}$  die Matrix mit den Elementen

$$(2.42) \quad (\partial_{\mathbf{u}} \boldsymbol{\vartheta})_{ij} = \frac{\partial \vartheta_j}{\partial u_i}$$

bezeichnet, folgt mit

$$(2.43) \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}^\dagger(t) \mathbf{y}(t) &= \dot{\boldsymbol{\vartheta}}^\dagger(\mathbf{u}(t)) \mathbf{y}(t) = \dot{\mathbf{u}}^\dagger(t) \overline{\partial_{\mathbf{u}} \boldsymbol{\vartheta}(\mathbf{u}(t))} \mathbf{y}(t) \\ &= \dot{\mathbf{u}}^\dagger(t) \boldsymbol{\eta}(\mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t)) = \dot{\mathbf{u}}^\dagger(t) \mathbf{w}(t) \end{aligned}$$

die Invarianz der Leistungen und damit die Äquivalenz der Passivitätsaussagen über die Größen  $\mathbf{u}, \mathbf{w}$  einerseits und  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  andererseits. Eine derartige Leistungsinvarianz tritt tatsächlich bei der Beschreibung des JOSEPHSON-Tunnelkontaktes in der Arbeit [9] von BRUNK auf.

### 3 Erste Auswertung der Voraussetzungen

#### 3.1 Matrixdarstellung des Systemoperators

Bezeichnet

$$(3.1) \quad \mathbf{e}_i := [0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots]^T$$

den  $i$ -ten Einheitsvektor, kann man damit den Zusammenhang eines beliebigen Vektors  $\boldsymbol{\kappa} \in \mathbb{C}^n$  mit seinen Komponenten  $\kappa_i$  durch die Beziehungen

$$(3.2) \quad \boldsymbol{\kappa} = \sum_j \mathbf{e}_j \kappa_j, \quad \kappa_i = \mathbf{e}_i^T \boldsymbol{\kappa}$$

ausdrücken. Für den linearen Operator  $G$  folgt damit

$$(3.3) \quad \mathbf{y} = G\mathbf{x} = G\left(\sum_j \mathbf{e}_j x_j\right) = \sum_j G\mathbf{e}_j x_j.$$

Für die  $i$ -te Komponente von  $\mathbf{y}$  gilt damit

$$(3.4) \quad y_i = \mathbf{e}_i^T \mathbf{y} = \mathbf{e}_i^T \sum_j G\mathbf{e}_j x_j = \sum_j \mathbf{e}_i^T G\mathbf{e}_j x_j.$$

Mit der Definition

$$(3.5) \quad G_{ij} := \mathbf{e}_i^T G\mathbf{e}_j$$

geht (3.4) formal in die indizistische Schreibweise einer Matrixmultiplikation

$$(3.6) \quad \boxed{y_i = \sum_j G_{ij} x_j}$$

über. Der Operator  $G$  darf also als eine quadratische  $(n \times n)$ -Matrix aufgefaßt werden, deren Elemente  $G_{ij}$  »Eingrößen-Operatoren« sind. Die Aussagen über die Linearität, Stetigkeit und Zeitinvarianz des Operators  $G$  übertragen sich unmittelbar auf alle Elemente  $G_{ij}$ , jedoch nicht die Passivität. Durch die Setzung von

$$(3.7) \quad \mathbf{z} = \mathbf{e}_k x$$

mit einem beliebigen  $\mathbf{e}_k$  und einem  $x \in \mathcal{D}$  erhält man wegen

$$(3.8) \quad \mathbf{z}^\dagger \mathbf{y} = \sum_i \bar{z}_i y_i = \bar{z}_k y_k = \bar{x} G_{kk} x$$

als unmittelbare Aussage über einzelne Elemente nur die Passivität der »Diagonalelemente«  $G_{kk}$ .

#### 3.2 Faltungsdarstellung des Systemoperators

Es soll gezeigt werden, daß sich aufgrund der Voraussetzungen die Operatorgleichung (2.3) als Faltungsgleichung mit einer Gewichtsdistribution schreiben läßt. Es wird folgender Satz formuliert:

##### (3.9) Satz: Faltungsdarstellung eines Systems

Für jedes lineare, stetige, zeitinvariante System  $G$  gibt es eine eindeutige Gewichtsdistribution  $\mathbf{g} \in \mathcal{D}^{n \times n}$ , mit der die Operatorgleichung als Faltung

$$(3.10) \quad \boxed{\mathbf{y} = G\mathbf{x} = \mathbf{g} * \mathbf{x}}$$

geschrieben werden kann. □

##### (3.11) Bemerkung: Vektoren und Matrizen von Distributionen

Elemente des Raums  $\mathcal{D}^n$  sind  $n$ -dimensionale Vektoren, deren Komponenten Distributionen des in A.2 definierten Dual- oder Distributionenraums  $\mathcal{D}'$  sind. Mathematisch ausgedrückt ist  $\mathcal{D}^n$  das  $n$ -fache kartesische Produkt mit sich selbst. Analog bezeichnet  $\mathcal{D}^{n \times m}$  den Raum der  $(n \times m)$ -Matrizen mit Komponenten aus  $\mathcal{D}'$ . Die Faltung zwischen einer Funktion  $\mathbf{x} \in \mathcal{D}^m$  und einer Distribution  $\mathbf{g} \in \mathcal{D}^{n \times m}$  wird komponentenweise durch

$$(3.12) \quad y_i = \sum_j g_{ij} * x_j$$

oder

$$(3.13) \quad \mathbf{y} = \mathbf{g} * \mathbf{x} = \sum_i \sum_j \mathbf{e}_i g_{ij} * \mathbf{e}_j^T \mathbf{x}$$

erklärt. □

Ist die Gewichtsdistribution  $\mathbf{g}$  eine gewöhnliche, lokal integrierbare Funktion, darf die Faltung auch durch das Integral

$$(3.14) \quad \boxed{\mathbf{y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{g}(t-\tau) \mathbf{x}(\tau) d\tau}$$

dargestellt werden.

### (3.15) Beweis von Satz (3.9):

Da nach Abschnitt 3.1 der Operator  $\mathbf{G}$  eine Matrixdarstellung besitzt und sich die Eigenschaften der Linearität, Stetigkeit und Zeitinvarianz auf die Matricelemente übertragen, reicht es aus, den Satz für den Eingrößenfall  $n = 1$  zu beweisen. Die Abbildung

$$(3.16) \quad x \in \mathcal{D} \longrightarrow y(t) = (Gx)(t) \in C$$

ist für jedes  $t$  aufgrund der Voraussetzungen linear und stetig im Raum  $\mathcal{D}$ . Da auf diese Weise jeder Funktion aus  $\mathcal{D}$  eine (komplexe) Zahl zugewiesen wird, handelt es sich bei dieser Abbildung um ein lineares, stetiges Funktional in  $\mathcal{D}$ . Nach der Distributionentheorie werden diese Funktionale auf dem Grundraum  $\mathcal{D}$  mit Distributionen identifiziert (siehe dazu Anhang A.2). Es gibt also zu der Abbildung (3.16) eine eindeutige Distribution  $G_t$  aus dem Dual- oder Distributionenraum  $\mathcal{D}'$ , mit der nach (A.14) das Funktional formal in der Form

$$(3.17) \quad y(t) = (Gx)(t) = (G_t, x)$$

geschrieben werden kann. Wegen der Voraussetzung der Zeitinvarianz gilt

$$(Gx)(t+T) = (Gx(\cdot+T))(t).$$

Mit der Darstellung (3.17) folgt hieraus in Zusammenhang mit der Rechenregel (A.47)

$$(G_{t+T}, x) = (G_t, x(\cdot+T)) = (G_t(\cdot-T), x).$$

Aus der Gleichheit der Funktionale für alle  $x \in \mathcal{D}$  folgt nach Abschnitt A.4 die Gleichheit der Distributionen

$$G_{t+T} = G_t(\cdot-T).$$

Setzen wir

$$g := G_0^* = \bar{G}_0(\cdot) \in \mathcal{D}',$$

wobei  $(\cdot)^*$  die totale Konjugation entsprechend (A.51) bezeichnet (Zeitspiegelung und komplexe Konjugation), folgt

$$(3.18) \quad y(t) = (Gx)(t) = (G_t, x) = (\bar{g}(t-\cdot), x).$$

Ein Funktional in dieser Form definiert nach (A.82) die Faltung zwischen der Distribution  $g$  und der Grundfunktion  $x$ , so daß wir statt (3.18) auch

$$y(t) = (g * x)(t)$$

oder

$$(3.19) \quad y = Gx = g * x$$

schreiben können. □

Aus dieser Faltungsdarstellung kann man sofort mit den Aussagen aus (A.81) folgern, daß die Ausgangsfunktion  $y$  unendlich oft differenzierbar ist, wenn  $x$  aus  $\mathcal{D}^n$  ist:

$$(3.20) \quad \boxed{x \in \mathcal{D}^n \Rightarrow y = Gx = g * x \in C_{\infty}^n}$$

Wegen  $x_i \in \mathcal{D}$ ,  $y_i \in C_{\infty}$  folgt dann für die äußere Leistung

$$(3.21) \quad \boxed{P = \operatorname{Re} [\dot{x}^\dagger y] \in \mathcal{D}},$$

weshalb die Forderung der Integrierbarkeit von  $P$  in dem Arbeitsfunktional (2.18) der Passivitätsdefinition aufgrund der ersten drei Voraussetzungen Linearität, Stetigkeit und Zeitinvarianz bereits von selbst erfüllt ist. Die aufgenommene Arbeit  $W(t)$  des Systems ist als Integral der finiten, unendlich oft differenzierbaren Funktion  $P$  selbst unendlich oft differenzierbar, linksseitig finit und auch beschränkt, da



$$(3.22) \quad W(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\tau) d\tau = \int_{\text{supp}(\mathbf{x})} \text{Re}[\dot{\mathbf{x}}^\dagger(\tau)\mathbf{y}(\tau)] d\tau$$

nur scheinbar ein uneigentliches Integral ist; die Integration ist nur über den Träger  $\text{supp}(\mathbf{x})$  (siehe (A.1)) der Funktion  $\mathbf{x}$  durchzuführen, auf dem  $\mathbf{x}$  Werte ungleich Null besitzt. Für  $W$  gilt also

$$(3.23) \quad W \in C_\infty, \quad 0 = W(-\infty) \leq W(\infty) < \infty$$

### 3.3 Kausalität

Man ist gewohnt, die Kausalität eines Systems als gängige *Voraussetzung* anzusehen, die meistens gar nicht mehr ausdrücklich erwähnt wird. Unter den hier zusammengestellten Voraussetzungen ist sie nicht zu finden. Es läßt sich nämlich zeigen (man vergleiche KÖNIG [24], KÖNIG / MEIXNER [26]), daß die Kausalität bereits aus den angegebenen Voraussetzungen folgt und nicht als weitere Annahme mit aufgenommen zu werden braucht. Zunächst wird dieser Begriff genau definiert:

#### (3.24) Definition: Kausalität

Ein System  $G$  heißt *kausal*, wenn für beliebige Erregungen  $\mathbf{x}_i \in \mathcal{D}^n$  und jedes  $T \in \mathcal{R}$  aus

$$(3.25) \quad \mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}_2(t) \quad \forall t < T$$

für die Systemantworten

$$(2.26) \quad (G\mathbf{x}_1)(t) = (G\mathbf{x}_2)(t) \quad \forall t < T$$

folgt.

□

Die Werte der Systemantwort  $\mathbf{y}(t) = (G\mathbf{x})(t)$  dürfen also für  $t < T$  nicht von Werten der Erregung  $\mathbf{x}(t)$  aus dem Zeitintervall  $t \geq T$  abhängen.

#### (3.27) Satz: Kausalität passiver Systeme

Ein lineares, passives System ist kausal. □

Die Voraussetzungen der Stetigkeit und Zeitinvarianz werden für diese Aussage nicht benötigt.

#### (3.28) Beweis:

Wir definieren für  $\phi, \psi \in \mathcal{D}^n$  das bilineare Funktional

$$(3.29) \quad W_T(\phi, \psi) := \int_{-\infty}^T \text{Re} \{ \dot{\phi}^\dagger(t)(G\psi)(t) \} dt$$

Wegen der Voraussetzung der Passivität von  $G$  ist  $W_T$  ein nicht negatives Funktional, das heißt, es gilt für alle  $\phi \in \mathcal{D}^n$

$$(3.30) \quad W_T(\phi, \phi) \geq 0.$$

Für ein derartiges nicht-negatives bilineares Funktional gilt die CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung

$$(3.31) \quad (W_T(\phi, \psi) + W_T(\psi, \phi))^2 \leq 4 W_T(\phi, \phi) W_T(\psi, \psi)$$

Für  $\phi$  wird nun eine beliebige Funktion aus  $\mathcal{D}^n$  gewählt, die im Intervall  $(-\infty, T)$  verschwindet. Dann ist  $W_T(\phi, \phi) = 0$  und es ergibt sich

$$W_T(\psi, \phi)^2 \leq 0,$$

also

$$\int_{-\infty}^T \text{Re} \{ \dot{\psi}^\dagger(t)(G\phi)(t) \} dt = 0$$

Da  $\phi$  noch beliebig ist, kann diese Gleichung nur gelten, wenn

$$(G\phi)(t) = 0 \quad \text{für } t < T$$

gilt. Ersetzen wir nun  $\phi$  durch

$$\phi = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2,$$

ist das Verschwinden von  $\phi$  in Intervall  $(-\infty, T)$  äquivalent zu

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}_2(t) \quad \forall t < T$$

und das obige Ergebnis führt zusammen mit der Voraussetzung der Linearität zu

$$(G\mathbf{x}_1)(t) = (G\mathbf{x}_2)(t) \quad \forall t < T,$$

womit die Kausalität nachgewiesen ist.  $\square$

In Bezug auf die Faltungsdarstellung (3.10) bedeutet die Kausalität, daß die Gewichtsdistribution  $\mathbf{g}$  im Intervall  $(-\infty, 0)$  Null sein muß. Für beliebige  $\phi$ , welche in  $(-\infty, T)$  Null sind, kann nämlich

$$(G\phi)(t) = (\mathbf{g} * \phi)(t) = \sum_i \sum_j \mathbf{e}_i (g_{ij} * \phi_j)(t) = \sum_i \sum_j \mathbf{e}_i (\tilde{g}_{ij}, \phi_j(t-\cdot))$$

(siehe (A.82)) für  $t < T$  nach Abschnitt A.4 nur dann Null sein, wenn für jede Komponente

$$g_{ij} = 0 \quad \text{in } (-\infty, 0),$$

und damit

(3.32)

$$\mathbf{g} = 0 \quad \text{in } (-\infty, 0)$$

gilt. Da umgekehrt auch jede Gewichtsdistribution der Art (3.32) ein kausales System beschreibt, verknüpft man den Begriff der Kausalität auch direkt mit den Gewichtsdistributionen und bezeichnet solche wie (3.32) als kausal. Bei gewöhnlichen, lokal integrierbaren Funktionen kann in der Integraldarstellung (3.14) der Faltung wegen der Kausalität die obere Grenze durch  $t$  ersetzt werden:

(3.33)

$$\mathbf{y}(t) = \int_{-\infty}^t \mathbf{g}(t-\tau) \mathbf{x}(\tau) d\tau.$$

In dieser Form wird die Bezeichnung *Nachwirkungskern* für die Gewichtsfunktion verständlich, da nur Werte  $\mathbf{x}(\tau)$  mit  $\tau < t$  in die Gewichtung einfließen. Der ebenfalls gebräuchliche Ausdruck *Relaxationskern* beschreibt den Sachverhalt nicht genau, da nicht erkennbar ist, ob das System überhaupt relaxiert, also mit der Zeit abklingt (bei einer wichtigen Klasse passiver Systeme ist dies auch nicht der Fall).

### 3.4 Übergang auf generalisierte Geschwindigkeiten

Als Systemerregung traten bisher die generalisierten Koordinaten  $\mathbf{x}$  auf. Es werden sich aber gewisse Symmetrien zwischen den generalisierten Geschwindigkeiten

(3.34)

$$\mathbf{v} := \dot{\mathbf{x}}$$

und den generalisierten Kräften  $\mathbf{y}$  herausstellen, da das Leistungsfunktional  $P$  ein Produkt zwischen generalisierten Kräften und Geschwindigkeiten ist. Wir gehen daher in der Systembeschreibung von der unabhängigen Erregungsgröße  $\mathbf{x}$  auf  $\mathbf{v}$  über. Zu diesem Zweck definieren wir zu der ursprünglichen Gewichtsdistribution  $\mathbf{g}$  eine »Stammfunktion«  $\mathbf{h}$  durch

(3.35)

$$\mathbf{h} := \mathbf{g},$$

wobei die Integrationskonstante so festgelegt werden soll, daß  $\mathbf{h}$  genauso wie  $\mathbf{g}$  im Intervall  $(-\infty, 0)$  gleich Null sein soll. Dann ist auch  $\mathbf{h}$  eine kausale Distribution. Nach der Differentiationsregel (A.83) folgt damit

$$\mathbf{y} = G\mathbf{x} = \mathbf{g} * \mathbf{x} = \dot{\mathbf{h}} * \mathbf{x} = \mathbf{h} * \dot{\mathbf{x}},$$

(3.36)

$$\mathbf{y} = \mathbf{h} * \mathbf{v} =: H\mathbf{v}.$$

### 3.5 FOURIER- und LAPLACE-Transformierbarkeit

Bei der Behandlung linearer Systeme stellen die FOURIER- und die LAPLACE-Transformation mächtige Hilfsmittel dar. Mit der LAPLACE-Transformation könnte die Faltungsgleichung

(3.37)

$$\mathbf{y} = \mathbf{h} * \mathbf{v}$$

in eine Multiplikation der LAPLACE-Transformierten überführt werden:

$$(3.38) \quad \hat{y} = \hat{h} \hat{v}.$$

Zwar ist  $v \in \mathcal{D}$  und damit auf jeden Fall LAPLACE-Transformierbar, doch ist fraglich, ob auch die LAPLACE-Transformierte von  $h$ , die *Übertragungsfunktion* des Systems, existiert, was die Berechtigung der Gleichung (3.38) grundsätzlich in Frage stellt. Das gleiche gilt auch für die Anwendung der FOURIER-Transformation. Bereits einfache Gewichtsfunktionen wie z. B.

$$(3.39) \quad h(t) = e_+^{t^2}$$

sind weder FOURIER- noch LAPLACE-transformierbar. Der Index  $(\cdot)_+$  soll hier und im Folgenden stets die für  $t < 0$  abgeschnittene Funktion

$$(3.40) \quad f_+(t) := f(t)\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ f(t) & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

andeuten. Die vorgelegte Gewichtsfunktion  $h$  ist also kausal.

Das wirft die Frage auf, ob solche nicht LAPLACE-transformierbaren Gewichtsfunktionen vielleicht wegen der Passivität von vornherein ausscheiden, oder ob die LAPLACE-Transformierbarkeit als zusätzliche Voraussetzung benötigt wird, wenn man mit diesen Hilfsmitteln arbeiten möchte. Es läßt sich tatsächlich allgemein zeigen, daß alle unter den vorgelegten Voraussetzungen möglichen Gewichtsfunktionen immer FOURIER- und LAPLACE-Transformierbar sind; Funktionen wie (3.39) treten demnach nicht auf.

Bevor dies nachgewiesen wird, sollen noch einige nützliche Bezeichnungsweisen eingeführt werden. Ist  $f$  eine beliebige Matrix von Distributionen,  $f \in \mathcal{D}^{n \times m}$ , so definieren wir analog zu (A.51) die *totale Konjugation*

$$(3.41) \quad f^* := f^\dagger(-\cdot) = \bar{f}^T(-\cdot)$$

durch gleichzeitige komplexe Konjugation, Zeitspiegelung und Transponierung der Distributionsmatrix. Ist  $f$  eine quadratische Matrix und gilt

$$(3.42) \quad f = f^*,$$

heißt  $f$  *HERMITESch*. Dementsprechend wird für beliebige quadratische  $f$

$$(3.43) \quad f_H := \frac{1}{2} \{f + f^*\}$$

als HERMITEScher Anteil und

$$(3.44) \quad f_A := \frac{1}{2} \{f - f^*\}$$

als anti-HERMITEScher Anteil von  $f$  bezeichnet. Das »Produkt« zwischen Grundfunktionen  $\phi \in \mathcal{D}^{n \times m}$  und Distributionen  $f \in \mathcal{D}^{n \times m}$  (Vektoren werden als  $(n \times 1)$ -Matrizen aufgefaßt) wird durch eine komponentenweise Definition auf das Produkt (A.14) zwischen Grundfunktionen aus  $\mathcal{D}$  und Distributionen aus  $\mathcal{D}'$  zurückgeführt:

$$(3.45) \quad (f, \phi) := \sum_{i,j} (f_{ij}, \phi_{ij}).$$

Entsprechend werden die Rechenregeln des Anhangs A auf dieses »Matrizenprodukt« übertragen. Die Faltung zwischen Distributionen  $f \in \mathcal{D}^{n \times k}$  und  $g \in \mathcal{D}^{k \times m}$  soll analog einer Matrixmultiplikation verstanden werden:

$$(3.46) \quad f * g = \sum_{i,j} e_i e_j^T \sum_l f_{il} * g_{lj}$$

Bei dieser »Matrizenfaltung« gilt das Kommutativgesetz in der abgeänderten Form

$$(3.47) \quad f * g = (g^T * f^T)^T = (g^* * f^*)^*$$

und bei der Verallgemeinerung der Regel (A.87) ist wegen

$$(f_{ij} * g_{jk}, \phi_{ik}) = (f_{ij}, \phi_{ik} * g_{jk}^*)$$

auf die richtige Stellung der Operanden zu achten; es folgt

$$(3.48) \quad (f * g, \phi) = (f, \phi * g^*),$$

wobei  $f$  von der Dimension  $n \times m$ ,  $g$  von  $m \times p$  und  $\phi$  von der Dimension  $n \times p$  sein muß, damit diese Regeln einen Sinn ergeben. Als Erweiterung der Definition (A.123) nennen wir eine HERMITESche Distribution  $f \in \mathcal{D}'^{n \times n}$  *positiv semidefinit*, wenn für alle  $\phi \in \mathcal{D}^n$

$$(3.49) \quad (f, \phi \phi^*) \geq 0$$

gilt.

Mit diesen Hilfsmitteln kann nun die am System geleistete Arbeit bis zur Zeit  $\infty$  in der Form

$$W(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} \{y^\dagger(\tau) v(\tau)\} d\tau = \operatorname{Re} (y, v)_\infty = \operatorname{Re} (y, v)$$

angegeben werden. Weiter ergibt sich

$$(3.50) \quad \begin{aligned} W(\infty) &= \operatorname{Re} (h * v, v) = \operatorname{Re} (h, v * v^*), \\ 2W(\infty) &= (h, v * v^*) + \overline{(h, v * v^*)} = (h, v * v^*) + (h^*, (v * v^*)^*) \\ &= (h, v * v^*) + (h^*, v * v^*) = (h + h^*, v * v^*). \end{aligned}$$

Definieren wir

$$(3.51) \quad a := \frac{1}{2} \{h + h^*\}$$

als HERMITESchen Anteil der Gewichtsdistribution  $h$ , so gilt

$$(3.52) \quad W(\infty) = (a, v * v^*)$$

In die Gesamtarbeit  $W(\infty)$  geht der anti-HERMITESche Anteil von  $h$  gar nicht ein. Wegen  $0 \leq W(\infty)$  für alle  $v$  ist der HERMITESche Anteil  $a$  der Gewichtsdistribution  $h$  eine positiv definite Distribution. Für positiv semidefinite Distributionen ist im Anhang (A.125) ein Darstellungssatz nach BOCHNER / SCHWARTZ bereitgestellt. Dieser gilt aber nur für »skalare« Distributionen aus  $\mathcal{D}'$ , was seine Anwendung nicht verhindert. Von beliebigen Erregungen  $v$  wählen wir zunächst solche, die sich in der Form

$$(3.53) \quad v = \kappa v$$

mit einem konstanten Vektor  $\kappa \in \mathbb{C}^n$  und einer skalaren Funktion  $v \in \mathcal{D}$  darstellen lassen. Anschaulich bedeutet dies, daß die  $n$  unabhängigen Eingangsgrößen  $v_i$  des

Mehrgrößensystems bis auf konstante Verhältnisse alle gleichartig erregt werden. Damit wird aus (3.52)

$$(3.54) \quad W(\infty) = (a, \kappa v * v^* \kappa^\dagger) = (\kappa^\dagger a \kappa, v * v^*) = (a_\kappa, v * v^*)$$

mit der skalaren, positiv semidefiniten Distribution

$$(3.55) \quad a_\kappa := \kappa^\dagger a \kappa \in \mathcal{D}'.$$

Hierauf kann der Darstellungssatz (A.125) angewendet werden. Danach ist die Distribution  $a_\kappa$  sogar aus dem Teilraum der »langsam wachsenden Distributionen«  $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$  und besitzt eine FOURIER-Transformierte mit der Darstellung

$$(3.56) \quad \tilde{a}_\kappa = (c^2 + (\cdot)^2)^k \mu'_\kappa,$$

wobei  $\mu_\kappa$  eine reellwertige, beschränkte, monoton wachsende Funktion und  $k \in \mathbb{N}$  ist. Überträgt man (3.54) mit Hilfe der PARSEVALschen Gleichung (A.100) in den FOURIER-Bereich, erhält man

$$(3.57) \quad W(\infty) = \frac{1}{2\pi} (\tilde{a}_\kappa, \tilde{v} \tilde{v}).$$

Betrachtet man dieses Funktional jetzt für ein beliebiges, aber festgehaltenes  $v$  als Funktion von  $\kappa$ , kann die in (3.54) vorliegende HERMITESche Form in  $\kappa$  nur dann erreicht werden, wenn ein  $A$  mit

$$(3.58) \quad \tilde{a}_\kappa = \kappa^\dagger A \kappa$$

existiert. Die Zuordnung von HERMITESchen Formen zu HERMITESchen Matrizen

$$(3.59) \quad A = A^\dagger \in \mathbb{S}^{n \times n}$$

ist eindeutig. Da nach Definition von  $a_\kappa$

$$(3.60) \quad \mathfrak{F}(\kappa^\dagger a \kappa) = \tilde{a}_\kappa = \kappa^\dagger A \kappa$$

gilt, muß  $A$  gleich der FOURIER-Transformierten  $\tilde{a} = \mathfrak{F}(a)$  sein. Damit ist die FOURIER-Transformierbarkeit des HERMITESchen Anteils  $a$  gezeigt. Die Darstellung (3.56) führt dann zu

$$(3.61) \quad \tilde{a} = (c^2 + (\cdot)^2)^k \mu',$$

wobei  $\mu$  eine beschränkte, monoton wachsende Matrix im Sinne von

$$(3.62) \quad \kappa^\dagger \mu(\omega_1) \kappa \leq \kappa^\dagger \mu(\omega_2) \kappa \quad \text{für } \omega_1 < \omega_2$$

ist. Auch umgekehrt definiert jede Darstellung (3.61) mit einem beliebigen  $k \in \mathbb{N}$  und einer Funktion  $\mu$  mit den angegebenen Eigenschaften im Zeitbereich eine zugehörige positiv semidefinite Distribution. Durch Rücktransformation erhält man aus der Darstellung (3.61)

$$(3.63) \quad \mathbf{a} = (c^2 - d_t^2)^k \nu,$$

wobei  $d_t$  die Ableitung nach der Zeit bezeichnet. Für die FOURIER-Transformierte von  $\nu$  gilt

$$(3.64) \quad \tilde{\nu} = \mu'.$$

Wegen der Beschränktheit von  $\mu$  ist  $\nu$  stetig. Die Funktion  $\nu$  ist im Übrigen selbst wieder eine positiv semidefinite Distribution (Funktion), wie man an der Positivität des Faktors  $(c^2 + \omega^2)^k$  in (3.56) sofort erkennt. Um die FOURIER-Transformierbarkeit der gesamten Gewichtsdistribution  $\mathbf{h}$  nachzuweisen, fehlt noch eine Aussage über den anti-HERMITESchen Anteil. Wegen der Kausalität der Gewichtsfunktion ist aber diese schon fast allein durch den HERMITESchen Anteil bestimmt. Wegen

$$(3.65) \quad \mathbf{h} = \mathbf{0} \quad \text{in } (-\infty, 0)$$

bzw.

$$(3.66) \quad \mathbf{h}^* = \mathbf{0} \quad \text{in } (0, \infty)$$

gilt

$$(3.67) \quad \mathbf{a} = \frac{1}{2} \{ \mathbf{h} + \mathbf{h}^* \} = \frac{1}{2} \mathbf{h} \quad \text{in } (0, \infty).$$

Wir erhalten also

$$(3.68) \quad \mathbf{h} = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{in } (-\infty, 0) \\ 2\mathbf{a} & \text{in } (0, \infty) \end{cases}.$$

Diese beiden Fälle können mit der Abschneideoperation  $(\cdot)_+$  nach (3.40) und der Darstellung (3.63) zu

$$(3.69) \quad \mathbf{h} = 2(c^2 - d_t^2)^k (\nu_+)_+ \quad \text{in } (-\infty, 0) \text{ und } (0, \infty)$$

zusammengefaßt werden. Man beachte, daß die Abschneideoperation, also die Multiplikation mit der Sprungfunktion, nur auf die *stetige* Funktion  $\nu$  angewendet werden darf. Eine Anwendung auf den gesamten Ausdruck der rechten Seite von (3.69) ist nicht statthaft, da nur die Multiplikation einer beliebigen Distribution mit einer unendlich oft differenzierbaren Funktion definiert ist. An der Darstellung für  $\mathbf{h}$  fehlt noch eine Aussage für den Träger  $\{0\}$ . Als Distributionen auf einem solchen singulären Träger kommen aber nur die  $\delta$ -Distribution und ihre Ableitungen in Frage, so daß wir die Darstellung für  $\mathbf{h}$  auf der gesamten reellen Achse in der Form

$$(3.70) \quad \mathbf{h} = 2(c^2 - d_t^2)^k (\nu_+)_+ + \mathbf{r}$$

angeben können, wobei der Rest  $\mathbf{r}$  eine singuläre Distribution ( $\delta$  und Ableitungen) mit dem Träger  $\{0\}$  ist.

Die Elemente der Matrix  $\tilde{\mathbf{a}}$  bzw.  $\mu$  waren aus dem Raum  $\mathfrak{S}'$ . Die FOURIER- und deren Rücktransformation bilden diesen Raum in sich ab, so daß auch die Elemente von  $\mathbf{a}$  bzw.  $\nu$  wieder in  $\mathfrak{S}'$  liegen. Die Anwendung der Abschneideoperation auf die stetige Funktion  $\nu$  ändert nichts an der Zugehörigkeit zu  $\mathfrak{S}'$ , in dem auch beliebige lineare Differentialoperatoren angewendet werden dürfen. Da stets auch eine singuläre Distribution wie die Matrixelemente von  $\mathbf{r}$  zu  $\mathfrak{S}'$  gehören, sind schließlich auch die Elemente von  $\mathbf{h}$  aus  $\mathfrak{S}'$ , also  $\mathbf{h} \in \mathfrak{S}'^{n \times n}$ . Damit ist auch die FOURIER-Transformation auf  $\mathbf{h}$  anwendbar. Diese Ergebnisse werden in dem folgenden Satz zusammengefaßt:

### (3.71) Satz: FOURIER-Transformierbarkeit der Gewichtsdistribution

Die Gewichtsdistribution eines linearen, stetigen, zeitinvarianten, passiven Systems ist aus dem Raum  $\mathfrak{S}'^{n \times n}$  und damit FOURIER-transformierbar.  $\square$

### (3.72) Bemerkung: Erweiterung der zugelassenen Eingangsfunktionen

Der obige Satz gestattet noch eine andere wichtige Schlußfolgerung: Da die Gewichtsdistribution immer im Teilraum  $\mathfrak{S}'^{n \times n} \subset \mathcal{D}'^{n \times n}$  liegt, ist es möglich, die Menge der zugelassenen Eingangsfunktionen  $\mathfrak{v}$  zu erweitern. Statt  $\mathfrak{v} \in \mathcal{D}^n$  kann man nun  $\mathfrak{v} \in \mathfrak{S}^n \cap \mathcal{D}^n$  zulassen. Der Raum  $\mathfrak{S}$  umfaßt nach (A.8) unendlich oft differenzierbare Funktionen aus  $C_\infty$ , die samt ihren Ableitungen für  $t \rightarrow \pm \infty$  betragsmäßig schneller fallen als jeder Kehrwert einer Potenz von  $t$ . Nach (A.81) liegen dann die Elemente des Faltungsprodukts  $\mathfrak{y} = \mathbf{h} * \mathfrak{v}$  im Raum  $\mathcal{D}_{C_\infty} = \mathfrak{S}' \cap C_\infty$  (siehe (A.41)). Dann sind die Funktionale  $P(t)$  und  $W(t)$  für alle  $t$  weiterhin wohldefiniert und außerdem selbst aus  $C_\infty$ .  $\square$

Wir kommen nun zur Untersuchung der LAPLACE-Transformierbarkeit der Gewichts-distribution. Nach (A.114) ist diese gegeben, wenn für Werte  $d$  eines offenen Intervalls

$$\mathbf{h} e^{-d(\cdot)}$$

FOURIER-transformierbar ist. Um dies nachzuweisen, wählen wir zunächst irgendeine Funktion  $\chi$  aus  $C_\infty$  mit der Eigenschaft

$$(3.73) \quad \chi(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t \leq T \end{cases}$$

aus, wobei  $T < 0$  eine beliebige Konstante ist. Das Produkt  $\mathbf{h}\chi$  ist nach Abschnitt A.5 definiert und wegen der Kausalität von  $\mathbf{h}$  gilt  $\mathbf{h}\chi = \mathbf{h}$ . Andererseits ist nicht die Exponentialfunktion  $e^{-d(\cdot)}$ , aber das Produkt  $\chi e^{-d(\cdot)}$  aus dem Raum  $\mathfrak{S}$ , sofern  $d > 0$  ist. Daher gilt

$$(3.74) \quad \mathbf{h} e^{-d(\cdot)} = (\mathbf{h}\chi) e^{-d(\cdot)} = \mathbf{h}(\chi e^{-d(\cdot)}) \in \mathfrak{S}^{n \times n},$$

denn das Produkt einer Distribution aus  $\mathfrak{S}'$  und einer Funktion aus  $\mathfrak{S} \subset \mathcal{D}_{C_\infty}$  ist nach A.5 wiederum aus  $\mathfrak{S}'$ . Da  $d$  der Realteil der komplexen unabhängigen Variablen  $s$  des Bildbereichs ist, erhalten wir aus der Bedingung  $d > 0$  die rechte offene Halbebene  $\operatorname{Re}(s) > 0$  als Konvergenzbereich. Damit ist die LAPLACE-Transformierbarkeit nachwiesen, was im nachfolgenden Satz zusammengefaßt wird:

**(3.75) Satz: LAPLACE-Transformierbarkeit der Gewichts-distribution**

Die Gewichts-distribution eines linearen, stetigen, zeitinvarianten, passiven Systems ist LAPLACE-transformierbar mit dem Konvergenzgebiet  $\operatorname{Re}(s) > 0$ .  $\square$

## 4 Eigenschaften passiver Systeme im Bereich der LAPLACE-Transformation

### 4.1 Positive Funktionen

Im vorangegangenen Abschnitt 3.4 wurde bisher nur die Nicht-Negativität der gesamten am System geleisteten Arbeit  $W(\infty)$  ausgewertet, um die Existenz der LAPLACE-Transformierten zu zeigen. Das ist aber nur ein Sonderfall der Passivitätsaussage  $W(t) \geq 0$  für alle  $t$ . Die weitere Auswertung wird zu einer Charakterisierung der Übertragungsfunktionen (LAPLACE-Transformierte der Gewichts-distributionen) im LAPLACE-Bereich führen. Das bringt uns zum Begriff der *Positivität*:

#### (4.1) Definition: Positivität

Eine  $(n \times n)$ -Matrix  $f$ , deren Elemente analytische Funktionen in der rechten komplexen Halbebene  $\operatorname{Re}(s) > 0$  sind, heißt *positiv*, wenn der HERMITESche Anteil der Matrix  $f(s)$  für alle  $s$  der rechten Halbebene positiv semidefinit ist.  $\square$

Für den Eingrößenfall  $n = 1$  bedeutet die Positivität, daß die Funktionswerte  $f(s)$  für alle  $s$  mit positivem Realteil selbst einen nicht negativen Realteil besitzen:

$$(4.2) \quad \boxed{\operatorname{Re}(s) > 0 \Rightarrow \operatorname{Re} f(s) \geq 0}$$

Die Abbildungseigenschaft einer derartigen positiven, skalaren Funktion ist in Bild 4.1 skizziert. Die rechte Halbebene wird auf sich selbst abgebildet.

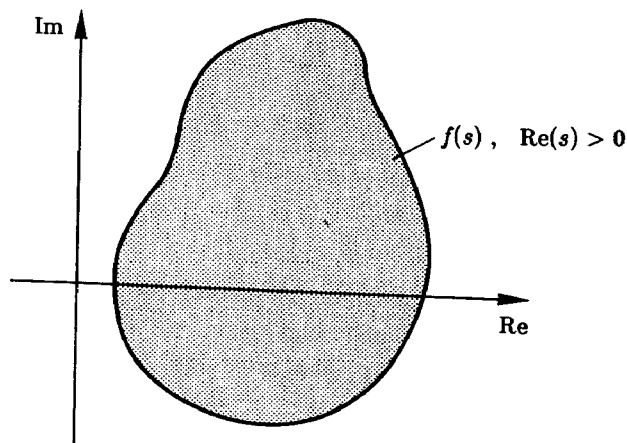


Bild 4.1: Abbildung der rechten Halbebene  $\text{Re}(s) > 0$  unter einer positiven skalaren Funktion

Für positive skalare Funktionen sind im Anhang B.6 Ergebnisse zusammengestellt. Im Grunde kann auch der Mehrgrößenfall auf diesen Eingrößenfall zurückgeführt werden: Definiert man zu der Matrix  $f$  und einem konstanten Vektor  $\kappa \in \mathbb{C}^n$  die skalare Funktion

$$(4.3) \quad f_{\kappa} := \kappa^{\dagger} f \kappa,$$

so ist der HERMITESche Anteil von  $f(s)$  positiv semidefinit für alle  $s$  mit  $\text{Re}(s) > 0$  genau dann, wenn  $f_{\kappa}(s)$  für alle  $\kappa$  nicht negativen Realteil besitzt:

$$(4.4) \quad \text{Re } f_{\kappa}(s) = \text{Re} \{ \kappa^{\dagger} f(s) \kappa \} = \frac{1}{2} \{ \kappa^{\dagger} f(s) \kappa + \kappa^{\dagger} f^{\dagger}(s) \kappa \}$$

$$\kappa^{\dagger} \{ f(s) + f^{\dagger}(s) \} \kappa \geq 0.$$

Nach der Bemerkung (B.74) kann in dem Gebiet  $\text{Re}(s) > 0$  der Wert  $\text{Re } f_{\kappa}(s) = 0$  nur angenommen werden, wenn  $f_{\kappa}$  konstant imaginär oder Null ist. In diesem Fall liegt  $\kappa$  im Nullraum von  $f$ .

Es gilt nun der bekannte Satz:

**(4.5) Satz: Positivität der Übertragungsfunktionen passiver Systeme**

Die Übertragungsfunktion eines linearen, stetigen, zeitinvarianten, passiven Systems ist eine positive Funktion.  $\square$

**(4.6) Beweis:**

Der Beweis wird geführt, indem man dem System geeignete Testfunktionen aufschaltet. Nach dem oben Gesagten über die Zurückführung des Positivitätsbegriffes auf den Eingrößenfall reicht es aus, Funktionen der Art

$$(4.7) \quad v = \kappa v$$

zu prüfen. Als Testfunktion  $v$  soll die Exponentialfunktion  $e^{s(\cdot)}$  Verwendung finden, wobei  $s$  eine komplexe Konstante mit positivem Realteil ist. Wie man aus dem Umgang mit der LAPLACE-Transformation weiß, bekommt man dann als »Amplitude« der Systemantwort den Wert der Übertragungsfunktion an der Stelle  $s$ , so daß sich ein Zusammenhang zwischen der Passivität und der Positivität herstellen läßt. Die vorgeschlagene Exponentialfunktion als Testfunktion hat aber einen Nachteil: Zwar haben wir entsprechend der Bemerkung (3.72) die Menge der zugelassenen Eingangsfunktionen zu dem Raum  $\mathfrak{S}^n$  erweitern können, doch gehört die Exponentialfunktion mit  $\text{Re}(s) > 0$  wegen ihres für  $t \rightarrow \infty$  unbeschränkt wachsenden Verhaltens nicht dazu. Betrachtet man aber einen Wert des Ausgangs zu einer festen Zeit, ist wegen der Kausalität der zukünftige Verlauf der Eingangsfunktion irrelevant, so daß wir sie »abschneiden« können. Dazu bedienen wir uns wieder der Funktion  $\chi$  nach (3.73) und nehmen als Erregung nun die Funktion

$$(4.8) \quad v = e^{s(\cdot)} \chi(T-\cdot),$$

die aus der zugelassenen Menge  $\mathfrak{S}$  ist. Damit gilt für  $t \leq T$  mit  $s =: d + j\omega$

$$\begin{aligned} y(t) &= (h * v)(t) = \left( h \kappa^{\dagger} (e^{s(\cdot)} \chi(T-\cdot)) \right)(t) = \left( \bar{h} \kappa, e^{s(t-\cdot)} \chi(T-t+\cdot) \right) \\ &= \left( \bar{h} \kappa \chi(T-t+\cdot), e^{s(t-\cdot)} \right) = \left( \bar{h} \kappa, e^{s(t-\cdot)} \right) = e^{st} \left( \bar{h} \kappa, e^{-s(\cdot)} \right) \end{aligned}$$

$$= e^{st} \left( \bar{h}\kappa e^{-d(\cdot)}, e^{-j\omega(\cdot)} \right) = e^{st} \mathfrak{F} \left( h\kappa e^{-d(\cdot)} \right) (\omega) = e^{st} \mathcal{L}(h\kappa)(d+j\omega)$$

$$(4.9) \quad y(t) = e^{st} \hat{h}(s) \kappa.$$

Daraus ergibt sich für das Arbeitsfunktional

$$(4.10) \quad \begin{aligned} W(t) &= \int_{-\infty}^t \operatorname{Re} \{ v^\dagger(\tau) y(\tau) \} d\tau = \int_{-\infty}^t \operatorname{Re} \{ e^{\bar{s}\tau} \kappa^\dagger \hat{h}(s) \kappa e^{s\tau} \} d\tau \\ &= \operatorname{Re} \{ \kappa^\dagger \hat{h}(s) \kappa \} \int_{-\infty}^t e^{2d\tau} d\tau = \operatorname{Re} \{ \kappa^\dagger \hat{h}(s) \kappa \} \frac{e^{2dt}}{2d}. \end{aligned}$$

Der letzte Term ist wegen  $d > 0$  stets positiv, so daß sich aus der Passivität als notwendige Bedingung die Positivität der Übertragungsfunktion  $\hat{h}$  ergibt:

$$(4.11) \quad \operatorname{Re} \{ \kappa^\dagger \hat{h}(s) \kappa \} \geq 0.$$

□

Die Positivität der Übertragungsmatrix ist nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend für die Passivität. Dieser Nachweis wird jedoch auf später verschoben (siehe Satz (4.77)).

## 4.2 Beispiele passiver Systeme und positiver Funktionen

In der nachfolgenden Tabelle sind die Gewichtsfunktionen und die zugehörigen Übertragungsfunktionen einiger passiver Systeme angegeben. Neben den geläufigen rationalen Übertragungsfunktionen, deren Liste man beliebig verlängern könnte, ist eine Reihe elementarer transzendenter positiver Funktionen angegeben, denen man beim Umgang mit gewöhnlichen Differentialgleichungssystemen nicht begegnet. Derartige Übertragungsfunktionen treten bei der Behandlung partieller Differentialgleichungen auf, wobei es im Einzelfall gar nicht so einfach ist, zu einer vorgegebenen Übertragungsfunktion eine passende partielle Differentialgleichung mit entsprechenden Randbedingung anzugeben.

(4.12) Tabelle einiger passiver Systeme

Nr		$h(t)$	$\hat{h}(s)$
1	Integrierer	$\sigma(t)$	$\frac{1}{s}$
2	Proportionalglied	$\delta(t)$	1
3	Differenzierer	$\dot{\delta}(t)$	$s$
4		$-t_+^{-3/2}$	$2\sqrt{\pi s}$
5		$\sigma / \sqrt{t}$	$\sqrt{\pi/s}$
6		$t_+^{\alpha-1}$	$\Gamma(\alpha) s^{-\alpha},  \alpha  < 1$
7	Schwinger	$\cos_+ at$	$1 / (s^2 + a^2)$
8	VZ <sub>1</sub> -Glieder	$e_+^{-at}$	$1 / (s+a)$
9		$J_{0,+}(at)$	$1 / \sqrt{s^2 + a^2}$
10	Prop.-gl. mit Totzeit	$a\delta(t) + b\delta(t-T)$	$a + be^{-Ts}$
11	Doppelleitung (offen)	$\delta(t) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \delta(t-2kT)$	$\coth Ts$
12		$\sin_+ \omega_0 t / t$	$\arctan(\omega_0/s)$
13		$e_+^{-t^2/2T^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} T e^{(sT)^2/2} \operatorname{erfc} \frac{sT}{\sqrt{2}}$
14		$e_+^{-at} / \sqrt{\pi t}$	$1 / \sqrt{s+a}$
15		$\frac{\sigma(t)}{\sqrt{\pi t}} - ae_+^{a^2 t} \operatorname{erfc}(a\sqrt{t})$	$1 / (\sqrt{s+a})$



**(4.13) Beispiel: Elektrische Doppelleitung**

Um den Zusammenhang zwischen der Übertragungsfunktion und den zugrunde liegenden partiellen Differentialgleichungen zu verdeutlichen (Blick in die Black Box), soll das Beispiel einer homogenen, elektrischen Doppelleitung aufgegriffen werden. Anders als in der Tabelle (4.12), Nr. 11, wo nur der Fall der an dem einen Ende offenen Leitung aufgeführt ist, wird jetzt die Leitung mit einem beliebigen OHMschen Abschlußwiderstand behandelt. Die Anordnung der beiden Einzelleiter kann natürlich abweichend von Bild 4.2 auch verdreht oder in koaxialer Form ausgeführt sein. Es soll sich aber um einen homogenen Leiter handeln, daß heißt, die Induktivität pro Längeneinheit  $L$  und die Kapazität pro Längeneinheit  $C$  seien längs der Leitung konstant.

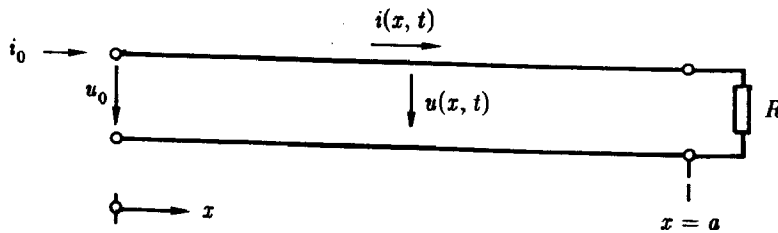


Bild 4.2: Doppelleitung

Die beschreibenden partiellen Differentialgleichungen lauten

$$(4.14) \quad \partial_x i + C \partial_t u = 0 ,$$

$$(4.15) \quad \partial_x u + L \partial_t i = 0 .$$

Durch Einsetzen erhält man beispielsweise für die Spannung  $u(x, t)$  die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$(4.16) \quad \partial_x^2 u - LC \partial_t^2 u = 0 ,$$

eine *Wellengleichung*. Bei der Anordnung wie in Bild 4.2 lauten die Randbedingungen

$$(4.17) \quad u(0, t) = u_0(t) ,$$

$$(4.18) \quad i(0, t) = i_0(t) ,$$

$$(4.19) \quad u(a, t) = R i(a, t) .$$

Von den Gleichungen (4.17) und (4.18) tritt jeweils nur eine als Randbedingung auf, je nachdem, ob der Strom  $i_0$  oder die Spannung  $u_0$  als äußere Erregung verstanden wird. Die jeweils andere Gleichung wird aber benötigt, um die Systemantwort an den Klemmen zu bestimmen. Aus der zweiten Randbedingung (4.19) wird bei Übersetzung in eine Beziehung allein in Ableitungen von  $u$

$$(4.20) \quad \partial_t u(a, t) = R \partial_t i(a, t) = -\frac{R}{L} \partial_x u(a, t) .$$

Durch LAPLACE-Transformation der Zeitkoordinate geht  $u(x, t)$  in  $\hat{u}(x, s)$  über und aus der partiellen Differentialgleichung (4.16) wird eine gewöhnliche Differentialgleichung in der Ortskoordinate

$$(4.21) \quad \partial_x^2 \hat{u} - LC s^2 \hat{u} = 0 ,$$

wobei die unabhängige Variable  $s$  des LAPLACE-Bereichs als Parameter auftritt. Diese hat als Lösung Hyperbelfunktionen

$$(4.22) \quad \hat{u}(x, s) = A(s) \cosh(\sqrt{LC} xs) + B(s) \sinh(\sqrt{LC} xs) .$$

Die Integrationskonstanten  $A$  und  $B$  sind Funktionen des Parameters  $s$ . Aus den Randbedingungen (4.17) und (4.20) ergibt sich

$$(4.23) \quad \hat{u}(0, s) = \hat{u}_0(s) \Rightarrow A(s) = \hat{u}_0(s)$$

und

$$s \left( \hat{u}_0(s) \cosh(\sqrt{LC} as) + B(s) \sinh(\sqrt{LC} as) \right) = -\frac{R}{L} \sqrt{LC} s \left( \hat{u}_0(s) \sinh(\sqrt{LC} as) + B(s) \cosh(\sqrt{LC} as) \right) \Rightarrow$$

$$(4.24) \quad B(s) = -\hat{u}_0(s) \frac{\cosh(\sqrt{LC} as) + R\sqrt{C/L} \sinh(\sqrt{LC} as)}{\sinh(\sqrt{LC} as) + R\sqrt{C/L} \cosh(\sqrt{LC} as)} .$$

Damit erhalten wir für die Spannung

$$(4.25) \quad \hat{u}(x, s) =$$

$$\hat{u}_0(s) \left\{ \cosh(\sqrt{LC} xs) - \frac{\cosh(\sqrt{LC} as) + R\sqrt{C/L} \sinh(\sqrt{LC} as)}{\sinh(\sqrt{LC} as) + R\sqrt{C/L} \cosh(\sqrt{LC} as)} \sinh(\sqrt{LC} xs) \right\}.$$

Mit

$$(4.26) \quad \hat{i}_0(s) = \hat{i}(0, s) = -\frac{1}{Ls} \partial_x \hat{u}(0, s)$$

ergibt sich als Übertragungsfunktion der Klemmengrößen  $u_0$  und  $i_0$  (der *Scheinwiderstand*)

$$(4.27) \quad Z(s) = \hat{h}(s) = \frac{\hat{u}_0(s)}{\hat{i}_0(s)} = R_0 \frac{R_0 \sinh Ts + R \cosh Ts}{R_0 \cosh Ts + R \sinh Ts},$$

wobei als Abkürzungen der *Wellenwiderstand*

$$(4.28) \quad R_0 := \sqrt{L/C}$$

und die Laufzeit eines Signals über die Leitungslänge  $a$

$$(4.29) \quad T := \sqrt{LC} a$$

verwendet wurden. Ist der Abschlußwiderstand  $R = 0$ , erhält man mit

$$(4.30) \quad Z(s) = R_0 \tanh Ts$$

die in der Tabelle (4.12) für den kurzgeschlossenen Fall angegebene Übertragungsfunktion. Ein anderer Sonderfall ist die an dem Ende  $x = a$  offene Leitung, also  $R = \infty$ . Für die Übertragungsfunktion ergibt sich dann

$$(4.31) \quad Z(s) = R_0 \coth Ts.$$

Ist der Abschlußwiderstand  $R$  gleich dem Wellenwiderstand  $R_0$  der Leitung (ideale Anpassung) folgt

$$(4.32) \quad Z(s) = R_0 = R.$$

Die Leitung ist dann von einem einfachen OHMschen Widerstand  $R$ , der direkt an den Eingangsklemmen angeschlossen sein könnte, nicht zu unterscheiden. Das ist der Normalfall bei einer Leitungsanpassung, bei der Reflexionen nicht erwünscht sind. Der

gleiche Fall ergibt sich, wenn es sich um eine unendlich lange Leitung handelt,  $a \rightarrow \infty$ . Dann wird der Abschlußwiderstand unerheblich, da ein mit endlicher Geschwindigkeit auf der Leitung fortschreitendes Signal diesen niemals erreicht.

Zu der allgemeinen Übertragungsfunktion (4.27) gehört als FOURIER-Transformierte der Gewichtsfunktion  $h$  unter der Einschränkung  $0 < R < \infty$

$$(4.33) \quad \tilde{h}(\omega) = R_0 \frac{jR_0 \sin \omega T + R \cos \omega T}{R_0 \cos \omega T + jR \sin \omega T}.$$

Im Fall  $R = 0$  treten  $\delta$ -Distributionen an den Polstellen hinzu:

$$(4.34) \quad \tilde{h} = jR_0 \tan(\cdot T) - \frac{\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\cdot - \frac{k\pi}{T}\right).$$

Ähnlich auch in Fall  $R = \infty$ :

$$(4.35) \quad \tilde{h} = -jR_0 \cot(\cdot T) + \frac{\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\cdot - \frac{k\pi}{T}\right).$$

Durch Rücktransformation gelangt man zu der Gewichtsverteilung, die sich ohne Unterscheidung für alle Fälle  $0 \leq R \leq \infty$  als

$$(4.36) \quad h = R\delta + 2R \sum_{k=1}^{\infty} d^k \delta(\cdot - 2kT)$$

darstellen läßt. Hierin ist die »Dämpfungskonstante« oder der *Reflektionsfaktor*  $d$  durch

$$(4.37) \quad d = \frac{R - R_0}{R + R_0}$$

gegeben. Sein Wert liegt zwischen  $-1$  und  $1$ . Der Klemmenstrom läßt sich dann unmittelbar als Funktion der Klemmenspannung angeben:

$$(4.38) \quad u_0(t) = (h * i_0)(t) = R i_0(t) + 2R \sum_{k=1}^{\infty} d^k i_0(t - 2kT)$$

Die Klemmenspannung zur Zeit  $t$  setzt sich aus einem scheinbaren »OHMschen« Anteil und aus Anteilen, die durch Leitungsreflexionen mit entsprechender Dämpfung entstehen, zusammen. Die in (4.38) eingehenden Werte des Stroms  $i_0$  liegen um Vielfache der doppelten Leitungslaufzeit  $T$  zeitlich zurück – die Zeit, die ein Signal braucht, um nach Reflexion wieder zur Eingangsklemme zurück zu gelangen. Für den

Fall der offenen Leitung,  $R = \infty$ , ist  $d = 1$ . Die Signale werden immer wieder an den Leitungsenden ungedämpft reflektiert. Das gleiche tritt bei der kurzgeschlossenen Leitung mit  $R = 0$ ,  $d = -1$  auf, nur daß hier die Reflektion eine Vorzeichenumkehr beinhaltet.  $\square$

### 4.3 Darstellungen positiver Funktionen

Dem Satz (B.87) des Anhangs kann eine Darstellung für positive skalare Funktionen entnommen werden, die auf CAUER [11] zurückgeht. Danach gibt es für  $f_\kappa$  nach (4.3) eine eindeutige Darstellung

$$(4.39) \quad f_\kappa(s) = jQ_\kappa + M_\kappa s + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{j\Omega s - c^2}{j\Omega - s} d\rho_\kappa(\Omega) .$$

Hierin sind  $Q_\kappa, M_\kappa$  reelle Zahlen, wobei

$$(4.40) \quad M_\kappa \geq 0$$

ist. Die reellwertige Funktion  $\rho_\kappa$  ist beschränkt und monoton wachsend. Umgekehrt erzeugt jede Darstellung wie (4.39) mit den genannten Eigenschaften von  $Q_\kappa, M_\kappa$  und  $\rho_\kappa$  eine positive Funktion. Mit der schon bekannten Schlußweise betrachten wir nun  $f_\kappa(s)$  bei beliebigem, aber festgehaltenem  $s$  als Funktion von  $\kappa$ . Die HERMITESche Form (4.3) kann nur erreicht werden, wenn die funktionellen Abhängigkeiten der Konstanten  $Q_\kappa, M_\kappa$  und der Funktion  $\rho_\kappa$  von dem Vektor  $\kappa$  selbst HERMITESche Formen in  $\kappa$  sind. Das führt für die positive Matrixfunktion  $f$  auf die Gesamtdarstellung

$$(4.41) \quad \boxed{f(s) = jQ + Ms + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{j\Omega s - c^2}{j\Omega - s} d\rho(\Omega) .}$$

Jetzt sind  $Q, M$  konstante  $(n \times n)$ -Matrizen und  $\rho$  eine  $(n \times n)$ -Matrixfunktion. Der Zusammenhang zu den Konstanten  $Q_\kappa, M_\kappa$  und der Funktion  $\rho_\kappa$  ist durch

$$(4.42) \quad Q_\kappa = \kappa^\dagger Q \kappa ,$$

$$(4.43) \quad M_\kappa = \kappa^\dagger M \kappa ,$$

$$(4.44) \quad \rho_\kappa = \kappa^\dagger \rho \kappa$$

gegeben. Damit diese Größen reell sind, müssen die Matrizen  $Q, M$  und  $\rho$  HERMITESch sein. Aus (4.40) folgt für  $M$  zusätzlich positive Semidefinitheit. Die Monotonie-eigenschaft der Funktionen  $\rho_\kappa$  überträgt sich auf die Matrix  $\rho$  in direkter Weise zu

$$(4.45) \quad \kappa^\dagger \rho(\omega_1) \kappa \leq \kappa^\dagger \rho(\omega_2) \kappa$$

für  $\omega_1 < \omega_2$ . Die Darstellung (4.41) wird nach YOULA [47] benannt. Sie wird gewöhnlich – wie auch bei ZEMANIAN [49] – nur für *reelle* positive Funktionen angegeben, also solche, bei denen  $f(s)$  für reelle  $s$  selbst reell ist. Dadurch ergeben veränderte Darstellungen.

Für positive, skalare Funktionen gibt es nach (B.89) eine zugehörige Randfunktion. Die Gleichungen (B.93) und (B.94) für den Real- und Imaginärteil dieser Randfunktion gehen im Mehrgrößenfall in die Beziehungen

$$(4.46) \quad \frac{1}{2} \{f_R + f_R^\dagger\} = \pi (c^2 + (\cdot)^2) \rho' ,$$

$$(4.47) \quad \frac{1}{2} \{f_R(\omega) - f_R^\dagger(\omega)\} = j \left\{ Q + \text{v.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c^2 + \Omega \omega}{\Omega - \omega} d\rho(\Omega) \right\}$$

für den HERMITESchen und anti-HERMITESchen Anteil von  $f_R$  über. Diese Rand- $\rightarrow$ Funktion ist eine Distribution aus  $\mathcal{S}'^{n \times n}$ . Ist die positive Funktion  $f$  die Übertragungsfunktion  $\hat{h}$  eines passiven Systems, entspricht der Randfunktion  $f_R$  die FOURIER-Transformierte  $\tilde{h}$  der Gewichtsdistribution. Vergleicht man die Form (4.46) mit der Darstellung (3.61) für den HERMITESchen Anteil der Gewichtsdistribution,

$$(4.48) \quad \tilde{a} = \frac{1}{2} \mathcal{F}(\hat{h} + \hat{h}^*) = \frac{1}{2} (\tilde{h} + \tilde{h}^\dagger) ,$$

so identifiziert man den dortigen Exponenten als  $k = 1$  und zwischen den Maßfunktionen gilt die Beziehung

$$(4.49) \quad \mu' = \pi \rho' .$$

Man könnte meinen, daß das Ergebnis (3.61) überflüssig sei, da ja die Darstellung (4.46) mit

$$(4.50) \quad \boxed{\tilde{a} = \pi (c^2 + (\cdot)^2) \rho'}$$

eine engere Aussage über die FOURIER-Transformierte liefert. Man muß aber daran erinnern, daß es erst der Satz (A.125) gestattete, die FOURIER-Transformation auf  $h$  anzuwenden. Hieraus entsprang auch das Zwischenergebnis (3.61).

Mit diesen Kenntnissen kann auch die Darstellung (3.70) für  $h$  im Zeitbereich konkretisiert werden. Der Kern der Integraldarstellung (4.41) läßt sich wie folgt zerlegen:

$$(4.51) \quad \frac{j\Omega s - c^2}{j\Omega - s} = s + \frac{c^2 - s^2}{s - j\Omega}$$

Damit und mit (4.49) wird aus (4.41)

$$(4.52) \quad \hat{h}(s) = jQ + Ms + (c^2 - s^2) \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu(\Omega)}{d + j(\omega - \Omega)} + \frac{s}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\mu(\Omega) .$$

Mit den Gleichungen (4.49) und (3.64) erhält man

$$\begin{aligned} \hat{h}(s) &= jQ + Ms + (c^2 - s^2) \frac{1}{\pi} \left( \tilde{\nu} * \frac{1}{d + j(\cdot)} \right)(\omega) + 2s \nu(0) \\ &= jQ + Ms + 2(c^2 - s^2) \Im \left( \nu e^{-d(\cdot)} \right)(\omega) + 2s \nu(0) \\ &= jQ + Ms + 2(c^2 - s^2) \Im \left( \nu_+ e^{-d(\cdot)} \right)(\omega) + 2s \nu(0) \\ &= jQ + Ms + 2(c^2 - s^2) \mathcal{L}(\nu_+)(s) + 2s \nu(0) . \end{aligned}$$

Man beachte, daß die Vertauschung der Abschneideoperation  $(\cdot)_+$  zwischen  $\nu$  und der Exponentialfunktion wegen der Stetigkeit der beiden Funktionen möglich ist. Die Transformation in den Zeitbereich liefert jetzt

$$(4.53) \quad h = jQ\delta + M\delta + 2(c^2 - d_t^2)(\nu_+) + 2\delta\nu(0) .$$

Damit identifiziert man die in (3.70) noch unbekannte singuläre Distribution  $r$  mit

$$(4.54) \quad r = jQ\delta + (M + 2\nu(0))\delta .$$

Statt (4.53) kann man alternativ auch

$$(4.55) \quad h = jQ\delta + M\delta + 2c^2\nu_+ - 2d_t^2\{(\nu - \nu(0))_+\}$$

schreiben. Mit der stetigen Funktion

$$(4.56) \quad \eta(t) := 2 \left\{ c^2 \int_0^t (t-\tau)\nu(\tau) d\tau - \nu(t) + \nu_+(0) \right\} ,$$

die für  $t \leq 0$  verschwindet, gelangt man zu der Form

$$(4.57) \quad h = jQ\delta + M\delta + h_0 := jQ\delta + M\delta + \tilde{\eta} .$$

Mit diesem Hilfsmittel soll nun die Übertragung des Arbeitsfunktionals  $W$  in den Bereich der FOURIER-Transformation bewerkstelligt werden. Die gesamte bis zur Zeit  $\infty$  geleistete Arbeit  $W(\infty)$  kann bereits mit den Ergebnissen aus dem 3. Kapitel in der Form

$$(4.58) \quad W(\infty) = (a, v \cdot v^*) = \frac{1}{2\pi} (\tilde{a}, \tilde{v} \cdot \tilde{v}^\dagger)$$

dargestellt werden. Jetzt soll ein gleichartiger Ausdruck für  $W(t)$  mit beliebigem  $t$  gefunden werden. Zur Vereinfachung der Schreibeinheit wird noch eine neue Abschneideoperation eingeführt. Für eine stetige Funktion  $f$  bezeichnen wir mit

$$(4.59) \quad f_t(\tau) := f(\tau)\sigma(t-\tau) = \begin{cases} f(\tau) & \text{für } \tau \leq t \\ 0 & \text{für } \tau > t \end{cases}$$

die rechts von  $t$  abgeschnittene Funktion.

Mit der Darstellung (4.57) erhält man für das Arbeitsfunktional

$$\begin{aligned} (4.60) \quad W(t) &= \text{Re} (h \cdot v, v)_t = \text{Re} (M\delta \cdot v, v)_t + \text{Re} (\tilde{\eta} \cdot v, v)_t \\ &= \text{Re} (M\tilde{v}, v)_t + \text{Re} (\tilde{\eta} \cdot v, v)_t . \end{aligned}$$

Hier geht die Matrix  $Q$  nicht mehr ein. Für den ersten Term ergibt sich

$$\text{Re} (M\tilde{v}, v)_t = \text{Re} \int_{-\infty}^t \tilde{v}^\dagger(\tau) M v(\tau) d\tau = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t (\tilde{v}^\dagger(\tau) M v(\tau))' d\tau ,$$

$$(4.61) \quad \operatorname{Re} (M\dot{v}, v)_t = \frac{1}{2} \dot{v}^\dagger(t) M v(t) .$$

Dies ist eine reelle, positiv semidefinite HERMITESche Form in den generalisierten Geschwindigkeiten  $v$ . Sind die Komponenten von  $v$  tatsächlich massenkinematische generalisierte Geschwindigkeiten, erkennt man in dem Ausdruck die *kinetische Energie* und in  $M$  die *Massenmatrix* wieder. Bei der Beschreibung eines elektrischen Netzwerks mit Hilfe von Ladungskoodinaten  $x$  sind die generalisierten Geschwindigkeiten  $v$  elektrische Ströme, so daß  $M$  hier als Induktivitätsmatrix aufgefaßt werden kann und der Ausdruck (4.61) die magnetische Energie des Netzwerks angibt. Bei Verwendung von magnetischen Flußkoordinaten sind die generalisierten Geschwindigkeiten elektrische Spannungen: die Matrix  $M$  ist die Kapazitätsmatrix und (4.61) gibt die elektrische Energie wieder. Entsprechendes gilt für gemischte Koordinatensätze.

Für den zweiten Term in (4.60) erhält man durch partielle Integration

$$(4.62) \quad (\ddot{\eta} * v, v)_t = - (\eta * \dot{v}, \dot{v})_t + (\eta * \dot{v})^\dagger(t) v(t) .$$

Im Ausdruck  $\eta * \dot{v}(\tau)$  kann für  $\tau \leq t$  die Funktion  $v$  unbeschadet durch die rechtsseitig abgeschnittene Funktion  $v_t$  ersetzt werden, denn es gilt wegen der Stetigkeit und Kausalität von  $\eta$  zunächst

$$(\eta * \dot{v})(\tau) = (\eta * \dot{v}_t)(\tau)$$

für  $\tau < t$ . Weiter gilt

$$(\dot{v}_t)^\dagger = (v(t-\cdot))^\dagger = \dot{v}(t-\cdot) - v\delta(t-\cdot) = \dot{v}_t - v(t)\delta(t-\cdot) ,$$

woraus sich für  $\tau \leq t$

$$\begin{aligned} (\eta * \dot{v})(\tau) &= (\eta * \dot{v}_t)(\tau) = (\eta * (\dot{v}_t)^\dagger)(\tau) + v(t)(\delta(t-\cdot) * \eta)(\tau) \\ &= (\eta * (\dot{v}_t)^\dagger)(\tau) + v(t)\eta(\tau-t) \end{aligned}$$

und wegen  $\eta(\tau) = 0$  für  $\tau \leq 0$

$$\eta * \dot{v}(\tau) = (\eta * (\dot{v}_t)^\dagger)(\tau)$$

ergibt. Für (4.62) erhält man also

$$\begin{aligned} (4.63) \quad (\ddot{\eta} * v, v)_t &= - (\eta * (\dot{v}_t)^\dagger, (\dot{v}_t)^\dagger)_t + (\eta * (\dot{v}_t)^\dagger)^\dagger(t) v(t) \\ &= (\eta * (\dot{v}_t)^\dagger, \dot{v}_t)_t = (\ddot{\eta} * v_t, v_t)_t = (\ddot{\eta} * v_t, v_t)_\infty \\ &= (h_0 * v_t, v_t) = (h_0, v_t * v_t^*) \end{aligned}$$

mit  $h_0$  nach (4.57). Der letzte Ausdruck kann mit Hilfe der PARSEVALSchen Gleichung analog wie (4.58) in den FOURIER-Bereich übertragen werden. Wegen

$$\operatorname{Re} (h_0, v_t * v_t^*) = \frac{1}{2} (h_0 + h_0^*, v_t * v_t^*) = \frac{1}{2} (h + h^*, v_t * v_t^*) = (a, v_t * v_t^*)$$

folgt endlich

$$(4.64) \quad W(t) = \frac{1}{2} \dot{v}^\dagger(t) M v(t) + \frac{1}{2\pi} (\tilde{a}, \tilde{v}_t \tilde{v}_t^\dagger)$$

Diese Gleichung bedarf zusätzlicher Erläuterung. Die Funktion  $v_t$  gehört durch die Anwendung der Abschneideoperation nicht mehr wie  $v$  zum Raum  $\mathcal{S}^n$ . Ein Funktional wie in (4.64) mit einer beliebigen Distribution  $\tilde{a}$  wäre für alle  $v$  gar nicht definiert. Allerdings ist  $\tilde{a}$  ja auch keine völlig freie Distribution, da sie durch die Darstellung (4.50) festgelegt ist, woraus sich auch die bei der Herleitung von (4.64) verwendeten Eigenschaften der Funktion  $\eta$  ergaben. Aus  $v_t = v\sigma(t-\cdot)$  folgt im Fourierbereich

$$(4.65) \quad \tilde{v}_t(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \tilde{v} * \left( \pi\delta - \frac{e^{-j(\cdot)t}}{j(\cdot)} \right) \right\}(\omega) = \frac{1}{2} \tilde{v}(\omega) - \frac{1}{2\pi j} \text{v.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{v}(\Omega)}{\omega - \Omega} e^{-j(\omega - \Omega)t} d\Omega .$$

Die Funktion  $\tilde{v}_t$  ist stetig und strebt, wie man in (4.65) erkennt, für  $\omega \rightarrow \pm \infty$  mit dem Verhalten von  $1/\omega$  gegen Null. Entsprechend strebt  $\tilde{v}_t \tilde{v}_t^\dagger$  mit  $1/\omega^2$  gegen Null. Andererseits besitzt  $\tilde{a}$  wegen (4.50) ein Wachstumsverhalten mit  $\omega^2$ , so daß das Funktional wegen der Beschränktheit von  $\rho$  stets existiert. Man kann sich die Erweiterung auch als LEBESGUE-STIELTJES-Integral in der Form

$$(4.66) \quad (\tilde{a}, \tilde{v}_t \tilde{v}_t^\dagger) = \pi \int_{-\infty}^{\infty} (c^2 + \Omega^2) \tilde{v}_t^\dagger(\Omega) d\rho(\Omega) \tilde{v}_t(\Omega)$$

darstellen. In diesem Sinn soll die Erweiterung des Geltungsbereichs der »Produktklammer« verstanden werden.

Die Darstellung (4.64) kann noch weiter aufgegliedert werden. Nach der Bemerkung (A.128) kann man jede monoton wachsende Funktion wie  $\rho_\pi$  nach (4.44) in einen stetigen, monoton wachsenden Teil und in eine monoton wachsende Treppenfunktion zerlegen. Diese Zerlegung überträgt sich auch auf  $\rho$ .

$$(4.67) \quad \rho = \rho_0 + \rho_s,$$

wobei  $\rho_0$  der stetige Anteil von  $\rho$  ist. Diese Zerlegung impliziert auch eine Zerlegung von

$$(4.68) \quad \tilde{a} = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_s,$$

wobei

$$(4.69) \quad \tilde{a}_0 = \pi (c^2 + (\cdot)^2) \rho'_0,$$

$$(4.70) \quad \tilde{a}_s = \pi (c^2 + (\cdot)^2) \rho'_s.$$

ist. Der Teil  $\tilde{a}_0$  ist als Ableitung einer monotonen, stetigen Funktion lokal absolut integrierbar, während der Anteil  $\tilde{a}_s$  als Distributionsableitung einer Treppenfunktion  $\delta$ -Distributionen an den Sprungstellen  $\omega_i$  der Funktion  $\rho_s$  enthält:

$$(4.71) \quad \tilde{a}_s = \sum_i \alpha_i \delta(\cdot - \omega_i).$$

Die HERMITESchen, positiv definiten Koeffizienten  $\alpha_i$  ergeben sich aus der Sprunghöhe der Treppenstufen durch

$$(4.72) \quad \alpha_i = \pi (c^2 + \omega_i^2) \left\{ \rho(\omega_i + 0) - \rho(\omega_i - 0) \right\}.$$

Damit gewinnen wir für das Arbeitsfunktional neben der Darstellung (4.64) die Form

$$(4.73) \quad W(t) = \frac{1}{2} \mathbf{v}^\dagger(t) \mathbf{M} \mathbf{v}(t) + \frac{1}{2\pi} \sum_i \tilde{\mathbf{v}}_i^\dagger(\omega_i) \alpha_i \tilde{\mathbf{v}}_i(\omega_i) + \frac{1}{2\pi} (\tilde{a}_0, \tilde{\mathbf{v}}_t \tilde{\mathbf{v}}_t^\dagger)$$

an. Da  $\tilde{a}_0$  lokal absolut integrierbar ist, darf man dies auch als Integral schreiben:

$$(4.74) \quad W(t) = \frac{1}{2} \mathbf{v}^\dagger(t) \mathbf{M} \mathbf{v}(t) + \frac{1}{2\pi} \sum_i \tilde{\mathbf{v}}_i^\dagger(\omega_i) \alpha_i \tilde{\mathbf{v}}_i(\omega_i) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbf{v}}_t^\dagger(\Omega) \tilde{a}_0(\Omega) \tilde{\mathbf{v}}_t(\Omega) d\Omega$$

Für den Grenzfall  $t = \infty$  ergibt sich

$$(4.75) \quad W(\infty) = \frac{1}{2\pi} \sum_i \tilde{\mathbf{v}}_i^\dagger(\omega_i) \alpha_i \tilde{\mathbf{v}}_i(\omega_i) + \frac{1}{2\pi} (\tilde{a}_0, \tilde{\mathbf{v}} \tilde{\mathbf{v}}^\dagger)$$

bzw.

$$(4.76) \quad W(\infty) = \frac{1}{2\pi} \sum_i \tilde{\mathbf{v}}_i^\dagger(\omega_i) \alpha_i \tilde{\mathbf{v}}_i(\omega_i) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbf{v}}^\dagger(\Omega) \tilde{a}_0(\Omega) \tilde{\mathbf{v}}(\Omega) d\Omega$$

Da die Koeffizienten  $\alpha_i$  sowie  $\mathbf{M}$  und  $\tilde{a}_0(\Omega)$  wegen der Positivität der Übertragungsmatrix positiv semidefinite Matrizen sind, ist der Ausdruck (4.73) bzw. (4.74) für jede Erregung  $\mathbf{v}$  und jedes  $t$  nicht negativ. Damit ergibt sich unmittelbar die bereits angekündigte Umkehrung des Satzes (4.5) über den Zusammenhang passiver Systeme und positiver Übertragungsfunktionen:

#### (4.77) Satz: Zuordnung passiver Systeme zu positiven Funktionen

Zu einer positiven Funktion gibt es stets ein lineares, stetiges, zeitinvariantes, passives System, dessen Übertragungsfunktion gleich der vorgelegten positiven Funktion ist.

□

Die Linearität, Stetigkeit und Zeitinvarianz wurden hier nicht besonders erwähnt, da sich diese Aussagen durch die Eigenschaften der Faltung mit der zugehörigen Gewichtsverteilung automatisch ergeben. Mit den beiden Sätzen (4.5) und (4.77) haben wir eine *umkehrbar eindeutige Zuordnung positiver Funktionen und linearer, stetiger, zeitinvarianter, passiver Systeme*.

## 4.4 Verknüpfungen positiver Funktionen und passiver Systeme

### 4.4.1 Verknüpfungen positiver Funktionen

Die Eigenschaft der Positivität bleibt unter einer Reihe von Operationen erhalten. Es gilt folgender Satz:

#### (4.78) Satz: Komposition positiver Funktionen

Die Funktionen  $f, g$  seien positiv und von ihrer Dimension  $(n \times n)$  und  $(m \times m)$ -Matrizen. Dann gelten folgende Aussagen:

1. Ist  $T$  eine konstante  $(n \times k)$ -Matrix,  $k$  beliebig, so ist  $T^\dagger f T$  positiv. Dies beinhaltet die Positivität von  $\gamma f$ , wenn  $\gamma$  eine reelle, nicht negative Konstante ist.
2. Die Summe  $f + g$  ist positiv, sofern  $n = m$  ist.
3. Besitzt die Matrix  $f(s)$  für irgendein  $s$  mit  $\text{Re}(s) > 0$  vollen Rang, so existiert die Inverse  $f^{-1}(s)$  für alle  $s$  mit  $\text{Re}(s) > 0$ , welche ebenfalls eine positive Funktion ist.
4. Ist  $g$  skalar, also  $m = 1$ , so ist  $f(g(\cdot))$  eine positive Funktion.  $\square$

#### (4.79) Beweis:

Aus der Positivität von  $f$ ,

$$(4.80) \quad \kappa^\dagger \{f(s) + f^\dagger(s)\} \kappa \geq 0$$

für alle Vektoren  $\kappa$  und alle  $s$  mit  $\text{Re}(s) > 0$  folgt durch die Substitution

$$(4.81) \quad \kappa := T\lambda$$

die Positivität von  $T^\dagger f T$ :

$$(4.82) \quad \begin{aligned} \lambda^\dagger T^\dagger \{f(s) + f^\dagger(s)\} T \lambda &= \lambda^\dagger \{T^\dagger f(s) T + T^\dagger f^\dagger(s) T\} \lambda \\ &= \lambda^\dagger \{T^\dagger f(s) T + (T^\dagger f(s) T)^\dagger\} \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

Die 2. Aussage ist unmittelbar einsichtig. Wir kommen zur 3. Aussage: Hat die Matrix  $f(s)$  für irgendein  $s$  in der rechten Halbebene einen Rangabfall, gibt es einen

konstanten Vektor  $\kappa$ , der im Nullraum von  $f(s)$  liegt, also

$$(4.83) \quad f_\kappa(s) = \kappa^\dagger f(s) \kappa = 0.$$

Nach Bemerkung (B.74) über das Minimumprinzip analytischen Funktion ist dann  $f_\kappa$  in der gesamten Halbebene Null. Es kann daher ein beliebiges  $s$  der rechten Halbebene gewählt werden, um den Rangabfall zu prüfen. Hat  $f(s)$  für irgendein  $s$  vollen Rang, muß dies im gesamten Gebiet  $\text{Re}(s) > 0$  gelten. Daher ist  $f(s)$  für alle  $s$  dieses Gebiets invertierbar und  $f^{-1}$  ist eine analytische Funktion. Aus (4.80) folgt durch die Setzung

$$(4.84) \quad \kappa(s) = f^{-1}(s) \lambda,$$

wobei  $\lambda$  ein beliebiger konstanter Vektor ist,

$$(4.85) \quad \lambda^\dagger f^{-\dagger}(s) \{f(s) + f^\dagger(s)\} f^{-1}(s) \lambda = \lambda^\dagger \{f^{-\dagger}(s) + f^{-1}(s)\} \lambda \geq 0,$$

also die Positivität von  $f^{-1}$ .

Die 4. Aussage ist sehr einfach zu beweisen: Da die positive Funktion  $g$  die rechte Halbebene  $\text{Re}(s) > 0$  in sich abbildet, folgt mit der Positivität der Funktion  $f$  unmittelbar die Positivität der zusammengesetzten Funktion  $f(g(\cdot))$ .  $\square$

Die Aussagen der Satzes (4.78) sind sehr nützlich, wenn es darum geht, die Positivität einer Funktion zu überprüfen. Gelingt es, die Funktionsvorschrift in Einzeloperationen wie die im Satz (4.78) aufgeführten zu zerlegen, kann die Positivität sehr schnell gezeigt werden. Als Beispiel betrachten wir die Funktion

$$(4.86) \quad f(s) = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}.$$

Wir bringen sie in die Form

$$f(s) = \frac{1}{s + \omega_0^2/s}.$$

Man beginnt mit der elementaren positiven Funktion  $s \rightarrow s$  (Identität). Nach Regel 4 ist auch  $1/s$  positiv, nach Regel 1 dann auch  $\omega_0^2/s$ . Die Summe der beiden positiven Funktionen  $s$  und  $\omega_0^2/s$  ist nach Regel 2 ebenfalls positiv. Durch abermalige Anwendung der Regel 4 auf diese Summe gelangt man schließlich zur Positivität der gesamten Funktion  $f$ .

### 4.4.2 Verknüpfungen passiver Systeme

Wegen der eindeutigen Zuordnung von positiven Funktionen und passiven Systemen entsprechen den Operationen 1 bis 4 in Satz (4.78) zwischen positiven Funktionen Verknüpfungen von Systemen. Die 1. Regel kann auf der Systemebene als Transformation der generalisierten Geschwindigkeiten und Kräfte gedeutet werden. Durch die Substitution

$$(4.87) \quad \mathbf{v} := T\tilde{\mathbf{v}}, \quad \tilde{\mathbf{y}} := T^\dagger \mathbf{y}$$

mit einer konstanten, nicht notwendigerweise quadratischen Transformationsmatrix  $T$  geht die Faltungsgleichung

$$(4.88) \quad \mathbf{y} = \mathbf{h} * \mathbf{v}$$

in

$$(4.89) \quad \tilde{\mathbf{y}} = T^\dagger \mathbf{h} T * \tilde{\mathbf{v}} =: \tilde{\mathbf{h}} * \tilde{\mathbf{v}} = \tilde{H} \tilde{\mathbf{v}}$$

über. Das neue System

$$(4.90) \quad \tilde{H} = T^\dagger H T$$

muß dann wegen der Aussagen über die positiven Funktionen ebenfalls passiv sein. Das kann man aber auch unmittelbar an der Invarianz der Leistung erkennen. Es gilt

$$(4.91) \quad \tilde{P} := \operatorname{Re}[\tilde{\mathbf{v}}^\dagger \tilde{\mathbf{y}}] = \operatorname{Re}[\mathbf{v}^\dagger T^\dagger \mathbf{y}] = \operatorname{Re}[\mathbf{v}^\dagger \mathbf{y}] = P$$

Man kann sich eine derartige Transformation rein formal vorstellen. Es ist aber auch eine schaltungstechnische Interpretation möglich. Das ist am Beispiel eines elektrischen Multipols in Bild 4.3 angedeutet. Es ist gleichgültig, ob man die Ströme  $\mathbf{i}$  als Erregungsgrößen  $\mathbf{v}$  und entsprechend die Spannungen  $\mathbf{u}$  als Ausgangsgrößen  $\mathbf{y}$  betrachtet oder umgekehrt. Dem ursprünglichen System  $H$  wird das System  $T$  vorgeschaltet. Schreibt man die Gesamtleistung  $P_T$  an dem vorgeschalteten Systems  $T$  auf, erhält man wegen (4.91)

$$(4.92) \quad P_T = \tilde{P} - P = 0.$$

Ein derartiges System, welches die auf der einen Seite (Primärseite) zugeführte

Leistung auf der anderen (Sekundärseite) wieder vollständig ohne zeitliche Zwischenspeicherung abführt, heißt *idealer Übertrager* oder *Transformator*. Im einfachsten Fall kann ein derartiger Übertrager aus einem simplen Netzwerk von Drähten bestehen; dann sind vielleicht einige der Klemmen der Primärseite direkt mit jeweils einer oder mehrerer der Klemmen der Sekundärseite verbunden, andere sind offen. Genau dies ist der Fall, wenn man nur einen Teil der Eingänge des Systems testen möchte und die anderen offen läßt oder gegen Masse oder untereinander kurzschließt. Auch eine derartige Beschaltung ist ein leistungsinvarianter Übertrager.

Bei mechanischen Systemen kann man sich ideale Übertrager durch masselose Hebelmechanismen realisiert denken.

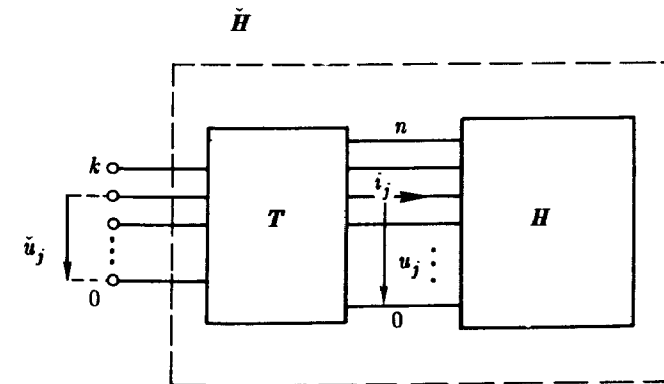


Bild 4.3: Elektrischer Multipol mit Vorschaltung eines idealen Übertragers



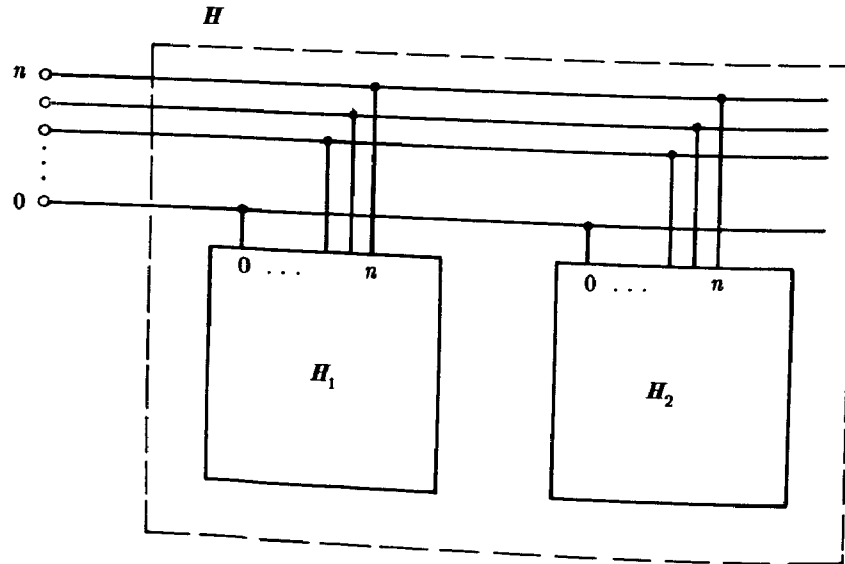


Bild 4.4: Parallelschaltung zweier elektrischer Multipole

Bei einer Zusammenschaltung zweier Systeme  $H_1, H_2$  durch gleichartige Erregung

$$(4.93) \quad v = v_1 = v_2$$

und Addition der Ausgangsgrößen

$$(4.94) \quad y = y_1 + y_2 = h_1 * v_1 + h_2 * v_2 = (h_1 + h_2) * v = h * v.$$

ist aufgrund der Additivität der Leistungen

$$(4.95) \quad P = \operatorname{Re} [v^\dagger y] = \operatorname{Re} [v^\dagger y_1] + \operatorname{Re} [v^\dagger y_2] = P_1 + P_2$$

bei Passivität der Teilsysteme auch die Passivität des Gesamtsystems gewährleistet. Das entspricht der 2. Aussage des Satzes (4.78). Eine schaltungstechnische Interpretation der Addition zweier Übertragungsfunktionen im Fall elektrischer Multipole bietet Bild 4.4. Dies ist aber nur dann richtig, wenn man als Erregungsgröße  $v$  die Spannungen  $v = v_1 = v_2$  benutzt. Dann ist die Übertragungsfunktion  $\hat{h}$  des Gesamtsystems wegen der Knotengleichungen als Summe der Ströme der Teilsysteme  $i = i_1 + i_2$ . Das ist die *Parallelschaltung* von Multipolen. Eine ähnliche

Realisierung für den Fall der Erregung mit gleichen Strömen  $v = i = i_1 = i_2$ , also eine »Reihenschaltung«, existiert im Mehrgrößenfall nicht. Im mechanischen Fall ist die Parallelschaltung, die Erregung mit gleichen Verschiebungen bzw. Geschwindigkeiten, durch geeignete starre Kopplungen zu erreichen. Die äußere Systemreaktion, die Kräfte der Teilsysteme, addieren sich dann. Umgekehrt läßt sich eine Kraft nur in Sonderfällen in gleicher Größe auf zwei verschiedene mechanische Teilsysteme aufbringen.

Der Grund für diese Eigenarten ist darin zu sehen, daß sowohl der elektrische Strom als auch die mechanische Kraft von der physikalischen Natur her extensive Größen sind, das heißt, sie treten in physikalischen Bilanzgleichungen als räumlich verteilte Zuführgrößen auf. Den resultierenden Gesamtwert einer extensiven Größe erhält man durch Addition. Umgekehrt wird eine derartige Größe bei Aufteilung auf verschiedene Teilsysteme auch in ihrem Wert geteilt.

Eine generelle Ausnahme bildet die Reihenschaltung idealer elektrischer Zweipole. Aufgrund der Ladungserhaltung gehorcht der elektrische Strom nämlich einer Bilanzgleichung, so daß der zu- und abfließende Strom an beiden Polen des Zweipols einander gleich ist, wenn Streukapazitäten vernachlässigt werden dürfen. Man findet also an einem idealen Zweipol stets zweimal den gleichen Strom vor – aus diesem Grund ist ein Zweipol ein *Eingrößensystem*. Die eine Klemme kann dann zur Kopplung mit einem weiteren Zweipol benutzt werden. Bei elektrischen Multipolen steht aber jeder Strom im allgemeinen nur einmal zur Verfügung, so daß eine Reihenschaltung nicht möglich ist. Beim mechanischen Analogon eines Zweipols wie etwa beim Längselement ist die Reihenschaltung möglich, wenn es sich um masselose Elemente handelt. Dann sind die äußeren Kräfte an beiden Enden einander gleich wie die Ströme beim idealen elektrischen Zweipol. Bei massebehafteten Längselementen wie auch bei elektrischen Elementen nicht zu vernachlässigender Streukapazität ist eine Reihenschaltung nicht möglich.

Der Inversion der Übertragungsfunktion  $\hat{h}$  wie in der 3. Regel des Satzes (4.78) entspricht einfach die Vertauschung der unabhängigen und abhängigen Systemgrößen. Statt durch

$$(4.96) \quad y = \hat{h} * v$$

wird das System dann durch

$$(4.97) \quad v = \hat{h}^{-1} * y$$

beschrieben. Hierin ist  $\hat{h}^{-1}$  die Rücktransformierte von  $\hat{h}^{-1}$ . Man kann  $\hat{h}^{-1}$  auch im Zeitbereich einfach als Umkehrabbildung von  $h$  im Sinne von

$$(4.98) \quad h * h^{-1} = \delta$$

definieren, ohne die LAPLACE-Transformation zu bemühen. Wegen

$$(4.99) \quad P = \operatorname{Re}[\mathbf{v}^\dagger \mathbf{y}]$$

bleibt die Leistung hierbei selbstverständlich invariant und das »Umkehrsystem« ist ebenfalls passiv. Was aber im Zeitbereich allein nur sehr schwer zu überblicken ist, ist die Existenz von  $\hat{h}^{-1}$ . Durch Transformation in den LAPLACE-Bereich erhält man diese Aussage aber durch die Regel 3 des Satzes (4.78).

Während die Operationen 1 bis 3 von Satz (4.78) unmittelbare Entsprechungen im Zeitbereich finden, gelingt dies für die 4. Regel, die Hintereinanderschaltung zweier Übertragungsfunktionen nicht in allgemeiner Weise. Für ein elektrisches Netzwerk aus den klassischen Zweipolen Widerstand, Spule, Kondensator gibt CAUER in [12<sup>1</sup>, S. 159, eine Interpretation: Ersetzt man in dem Netzwerk  $H_1$  jede Spule durch einen Zweipol mit einem  $\hat{h}_2$  proportionalen Scheinwiderstand und jeden Kondensator durch einen Zweipol mit einem  $\hat{h}_2$  proportionalen Scheinleitwert, so besitzt das neue System die Übertragungsfunktion

$$(4.100) \quad \hat{h} = \hat{h}_1(\hat{h}_2(\cdot)).$$

Sind  $H_1$  und  $H_2$  passiv, so ist es auch das Gesamtsystem. Ein Sonderfall hiervon ist die Substitution mit der positiven Funktion  $h_2(s) = 1/s$ . Die Übertragungsfunktion

$$(4.101) \quad \hat{h}(s) = \hat{h}_1\left(\frac{1}{s}\right)$$

erhält man, wenn man in dem Netzwerk  $H_1$  sämtliche Spulen durch Kondensatoren und alle Kondensatoren durch Spulen entsprechender Größe ersetzt. Ein anderer Spezialfall ergibt sich, wenn die positive Funktion

$$(4.102) \quad h_2(s) = \sqrt{s}$$

gewählt wird. Nach DOETSCH [14], S. 337, gehört dann zu der Übertragungsfunktion  $\hat{h}_1(\hat{h}_2(\cdot))$  die Gewichtsfunktion

$$(4.103) \quad \mathcal{L}^{-1}(\hat{h}_1(\sqrt{\cdot}))(t) = \int_0^\infty \psi(\tau, t) h_1(\tau) d\tau$$

Dabei ist

$$(4.104) \quad \psi(\tau, t) = \frac{\tau}{2\sqrt{\pi} t^{3/2}} e^{-\frac{\tau^2}{4t}}.$$

Diese Funktion tritt in der Theorie der Wärmeleitung auf, wobei dort ihr erstes Funktionsargument jedoch eine Ortskoordinate ist. Ob der Form (4.103) noch weitere physikalische Bedeutung abgerungen werden kann, ist offen.

## 4.5 Rationale positive Funktionen

Wir beschränken uns auf den Fall skalarer rationaler Funktionen. Rationale Funktionen sind als Quotient zweier teilerfremder Polynome  $p, q$  darstellbar:

$$(4.105) \quad f(s) = \frac{p(s)}{q(s)}.$$

Da Polynome in der gesamten komplexen Zahlenebene analytische Funktionen sind, ist auch  $f$  in der gesamten Ebene analytisch mit Ausnahme der Punkte  $s$ , an denen  $q(s)$  verschwindet – die *Polstellen* der Funktion. Analytische Funktionen sind insbesondere stetig; deshalb kann für rationale (skalare) positive Funktionen die ursprüngliche Passivitätsbedingung

$$\operatorname{Re} f(s) \geq 0 \quad \text{für alle } s \text{ mit } \operatorname{Re}(s) > 0$$

durch

$$(4.106) \quad \operatorname{Re} f(s) \geq 0 \quad \text{für fast alle } s \text{ mit } \operatorname{Re}(s) \geq 0$$

ersetzt werden.

**(4.107) Satz: Eigenschaften positiver, rationaler Funktionen**

Für eine positive, rationale Funktion  $f$  gelten folgenden Aussagen:

1. Die Null- und Polstellen von  $f$  liegen im Gebiet  $\operatorname{Re}(s) \leq 0$ .
2. Imaginäre Null- oder Polstellen treten jeweils nur einfach auf. An diesen Pol- bzw. Nullstellen besitzt  $f$  bzw.  $1/f$  positiv reelle Residuen.
3. Der Gradunterschied des Zähler- und des Nennerpolynoms von  $f$  ist höchstens gleich 1. In diesem Fall ist der Quotient der Koeffizienten höchster Ordnung von Zähler- und Nennerpolynom positiv reell.
4. Höchstens einer der beiden Absoluterme von Zähler- und Nennerpolynom ist Null. In diesem Fall ist der entsprechende Koeffizient 1. Ordnung ungleich Null.
5. Ist  $f$  eine reelle rationale Funktion, sind also alle Koeffizienten von Zähler- und Nennerpolynom reell, so sind sie nach eventueller Kürzung der Vorzeichen alle nicht negativ.

**(4.108) Beweis:**

1. Die Polstellen einer positiven, rationalen Funktion können nicht in der rechten Halbebene  $\operatorname{Re}(s) > 0$  liegen, denn andernfalls wäre  $f$  dort nicht analytisch und damit auch nicht positiv. Da auch  $1/f$  eine rationale Funktion ist und diese nach Satz (4.78) ebenfalls positiv ist, gilt die gleiche Schlußweise auch für die Polstellen von  $1/f$ , welche die Nullstellen von  $f$  sind.

2. Es müssen die Aussagen über die imaginären Null- und Polstellen bewiesen werden. Dazu benutzen wir für die rationale Funktion  $f$  ihre faktorierte Form, in der das Zähler- und Nennerpolynom als Produkt ihrer Linearfaktoren ausgedrückt werden:

$$(4.109) \quad f(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = K \frac{\prod_{i=1}^n (s - \alpha_i)^{\gamma_i}}{\prod_{i=1}^m (s - \beta_i)^{\zeta_i}}.$$

Die Zahlen  $\alpha_i$  sind die Nullstellen,  $\beta_i$  die Pole von  $f$ , die Exponenten  $\gamma_i$  und  $\zeta_i$  geben jeweils die Vielfachheit der Null- und Polstellen an. Wegen der Teilerfremdheit ist  $\alpha_i \neq \beta_j$ . Die Anzahlen  $n$  und  $m$  sind bei rationalen Funktionen endlich. Für eine beliebige Polstelle  $\beta_k$  kann die durch

$$(4.110) \quad \Theta_k(s) := (s - \beta_k)^{\zeta_k} f(s)$$

definierte Funktion an der Stelle  $s = \beta_k$  analytisch fortgesetzt werden. Mit

$$(4.111) \quad R_k := \Theta_k(\beta_k) \neq 0,$$

$$(4.112) \quad \vartheta_k(s) := \Theta_k(s) - R_k$$

kann man die Funktion  $f$  durch

$$(4.113) \quad f(s) = (R_k + \vartheta_k(s))(s - \beta_k)^{-\zeta_k}$$

ausdrücken. Die an der Stelle  $s = \beta_k$  stetige Funktion  $\vartheta_k$  strebt für  $s \rightarrow \beta_k$  gegen Null. Für  $f$  gilt nun

$$(4.114) \quad \arg f(s) = \arg(R_k + \vartheta_k(s)) - \zeta_k \arg(s - \beta_k).$$

Ist  $\beta_k = j\omega_k$  eine imaginäre Polstelle, liegen die Punkte

$$(4.115) \quad s = \beta_k + re^{j\phi}$$

für Winkel  $\phi \in (-\pi/2, \pi/2)$  und  $r > 0$  in der rechten Halbebene  $\operatorname{Re}(s) > 0$ . Aus (4.114) wird damit

$$(4.116) \quad \arg f(s) = \arg(R_k + \vartheta_k(s)) - \zeta_k \phi.$$

Beim Grenzübergang  $r \rightarrow 0$  geht  $\vartheta_k(s)$  gegen Null und  $\arg(R_k + \vartheta_k(s))$  nähert sich beliebig genau  $\arg R_k$ . Wäre der Grad der Vielfachheit  $\zeta_k > 1$ , könnte daher im Bereich  $(-\pi/2, \pi/2)$  immer ein Winkel  $\phi$  gefunden werden, so daß der Gesamtwinkel (4.116) außerhalb dieses Intervalls läge. Dann hätte  $f(s)$  negativen Realteil und  $f$  wäre nicht positiv. Es kann für positive Funktionen also nur  $\zeta_k = 1$  gelten. Auch in diesem Fall würde der Realteil von  $f(s)$  negative Werte annehmen, wenn die Konstante  $R_k$  nicht positiv reell wäre und  $\phi \rightarrow \pm\pi/2$  gewählt würde. Die Konstante  $R_k$  ist für den vorliegenden Fall  $\zeta_k = 1$  das Residuum der Funktion  $f$  an der Stelle  $s = \beta_k$ . Damit ist die Aussage über die positiv reellen Residuen von  $f$  bewiesen. Durch Übergang von  $f$  auf  $1/f$  folgt die Aussage über die Einfachheit der Nullstellen von  $f$  bzw. über die Residuen von  $1/f$ .

3. Die Differenz zwischen dem Grad des Zählerpolynoms und des Nennerpolynoms ist die Ordnung der Nullstelle der Funktion  $f$  im Unendlichen  $s = \infty$ , wenn diese Differenz positiv ist, bzw. bei negativem Wert die Ordnung der Polstelle bei  $s = \infty$ . Durch die Abbildung  $s \rightarrow 1/s$  geht der Punkt  $s = \infty$  in den Punkt  $s = 0$  über. Nach Satz (4.78) ist auch die Funktion  $f(1/s)$  positiv, wenn  $f$  positiv ist. Wegen der bereits bewiesenen 2.

Aussage dieses Satzes kann  $f(1/s)$  an der Stelle  $s = 0$  nur eine einfache Null- oder Polstelle besitzen, daß heißt, der Gradunterschied des Zähler- und des Nennerpolynoms von  $f$  ist höchstens 1. Die Positivität des Residuums von  $f(1/s)$  bzw.  $1/f(1/s)$  an der Stelle  $s = 0$  überträgt sich auf das Verhältnis der Koeffizienten höchster Ordnung.

4. Bei der Abbildung  $f(s) \rightarrow f(1/s)$  geht jeweils der Koeffizient kleinster Ordnung, der von Null verschieden ist, in den höchsten Koeffizienten über. Wie bereits bewiesen, darf der Unterschied der höchsten Ordnungen nur kleiner gleich 1 sein. Da der Fall, daß beide Absolutterme gleich Null sind, wegen der Teilerfremdheit der Polynome ausscheidet, kann nur einer der Koeffizienten 0. Ordnung verschwinden und der entsprechende Koeffizient 1. Ordnung muß in diesem Fall ungleich Null sein.

5. Im Fall reeller rationaler Funktionen sind Pole und Nullstellen zueinander konjugiert komplex angeordnet. Mit

$$(4.117) \quad \alpha_i = \delta_i + jv_i, \quad \beta_i = \epsilon_i + j\omega_i$$

kann man daher für (4.109) auch

$$(4.118) \quad f(s) = K \frac{\prod_i (s - \alpha_i)^{\gamma_i} \prod_i (s^2 - 2\delta_i s + \delta_i^2 + v_i^2)^{\gamma_i}}{\prod_i (s - \beta_i)^{\zeta_i} \prod_i (s^2 - 2\epsilon_i s + \epsilon_i^2 + \omega_i^2)^{\zeta_i}}$$

schreiben, wobei jeweils die ersten Produkte die reellen Null- und Polstellen enthalten mögen und die zweiten Produkte die restlichen komplexen. Wegen der Aussagen aus Teil 1 ist  $\alpha_i, \beta_i, \delta_i, \epsilon_i \leq 0$ . Die auftretenden Linearfaktoren und quadratischen Glieder sind also Polynome mit reellen, nicht negativen Koeffizienten. Produkte von derartigen Polynomen bringen wiederum nur nicht negative Koeffizienten hervor. Aus der Betrachtung von  $f(s)$  für reelle  $s$  beim Grenzübergang  $s \rightarrow \infty$  folgt nun noch, daß auch die Konstante  $K$  positiv reell sein muß. Damit ist die letzte Aussage bewiesen.  $\square$

#### (4.119) Satz: Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Positivität rationaler Funktionen mit imaginären Null- und Polstellen

Eine rationale Funktion  $f$  mit ausschließlich imaginären Null- und Polstellen ist genau dann positiv, wenn folgende Bedingungen gelten:

1. Die Null- und Polstellen seien jeweils einfach und auf der imaginären Achse abwechselnd angeordnet.
2. Im Fall ungleicher Grade des Zähler- und des Nennerpolynoms sei der Quotient der jeweils höchsten Koeffizienten positiv reell. Im Fall gleicher Grade sei dieser Quotient positiv imaginär, wenn der größte Imaginärteil der Null- und Polstellen zu einer Nullstelle gehört, andernfalls sei der Quotient negativ imaginär.  $\square$

#### (4.120) Bemerkung: Reelle rationale Funktionen mit imaginären Null- und Polstellen

Eine *reelle* Funktion  $f$  kann mit ausschließlich imaginären Polen und Nullstellen bei gleichem Zähler- und Nennergrad niemals positiv sein. In diesem Fall muß der Gradunterschied zwischen Zähler und Nenner genau 1 sein. Da die Nullstellen  $s = jv_i$  und die Pole  $s = j\omega_i$  bei reellen Funktionen konjugiert komplex auftreten, kann  $f$  in diesem Fall in die Form

$$(4.121) \quad f(s) = K s^\nu \frac{\prod_i (s^2 + v_i^2)}{\prod_i (s^2 + \omega_i^2)}$$

gebracht werden. Der Wert  $s = 0$  tritt dabei immer entweder als Nullstelle oder als Pol auf. Es ist also entweder  $\nu = 1$  oder  $\nu = -1$ .  $\square$

#### (4.122) Beweis von Satz (4.119):

Zuerst zum »hinreichenden« Teil der Aussage: Wir gehen von der Darstellung

$$(4.123) \quad f(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = K \frac{\prod_{i=1}^N (s - jv_i)}{\prod_{i=1}^M (s - j\omega_i)}$$

aus. Die Nullstellen  $\alpha_i = jv_i$  und die Polstellen  $\beta_i = j\omega_i$  sind nach Voraussetzung einfach und abwechselnd geordnet:

$$(4.124) \quad \dots < v_i < \omega_i < v_{i+1} < \omega_{i+1} < v_{i+2} < \dots,$$

wobei  $i = i$  oder  $i = i+1$  sein kann. Aus (4.123) folgt

$$(4.125) \quad \arg f(s) = \arg K + \sum_{i=1}^N \arg(s - jv_i) - \sum_{i=1}^M \arg(s - j\omega_i).$$

Wegen der Anordnung (4.124) gilt für die Winkel

$$(4.126) \quad \frac{\pi}{2} > \dots > \arg(s - jv_i) > \arg(s - j\omega_i) > \arg(s - jv_{i+1}) > \dots > -\frac{\pi}{2}$$

in der rechten Halbebene  $\operatorname{Re}(s) > 0$ . Die Summen in (4.125) können in eine alternierende endliche Reihe umsortiert werden, bei der für den Fall einer ungeraden Anzahl der Summanden wegen der Beschränkung (4.126) schnell zu erkennen ist, daß sie für beliebige  $s$  der rechten Halbebene nur Werte aus dem Intervall  $(\pi/2, -\pi/2)$  annehmen kann. Dies entspricht dem Fall ungleicher Grade von Zähler- und Nennerpolynom. Da nach Voraussetzung dann  $K$  positiv reell ist, also  $\arg K = 0$ , ist der Winkel von  $f(s)$  betragsmäßig kleiner als  $\pi/2$ . Somit liegt der Wert  $f(s)$  in der rechten Halbebene. Im Fall einer geraden Anzahl von Summanden (also gleicher Zähler- und Nennergrad) liegt der Summenwert zwischen 0 und  $\pi$ , wenn der größte Wert von  $\{v_i, \omega_i\}$  eine Polstelle ist. Dann ist aber nach Voraussetzung  $\arg K = -\pi/2$ , womit der Gesamtwert von  $\arg f(s)$  wieder im gewünschten Intervall liegt. Entsprechendes gilt für den Fall, daß eine Nullstelle das Maximum der Werte  $\{v_i, \omega_i\}$  bildet.

Nun zum »notwendigen« Teil der Aussage. Wir betrachten Punkte auf der imaginären Achse  $s = j\omega$ , für die wir die modifizierte Positivitätsbedingung (4.106) überprüfen. Auch hier werden die Formeln (4.123) und (4.125) benutzt, wobei allerdings das Ordnungsschema (4.124) erst nachgewiesen werden soll. Dann wird aus (4.125) für  $s = j\omega$ ,  $\omega \notin \{v_i, \omega_i\}$ ,

$$(4.127) \quad \arg f(j\omega) = \arg K + \sum_{i=1}^N \arg j(\omega - v_i) - \sum_{i=1}^M \arg j(\omega - \omega_i).$$

Die Summanden sind jeweils gleich  $\pm\pi/2$ , je nachdem, ob  $\omega$  größer oder kleiner als  $v_i$  bzw.  $\omega_i$  ist. Wir erhalten

$$(4.128) \quad \arg f(j\omega) = \arg K + n \frac{\pi}{2} - (N-n) \frac{\pi}{2} - m \frac{\pi}{2} + (M-m) \frac{\pi}{2} \\ = \arg K + \pi \left( n - m - \frac{N-M}{2} \right).$$

Hierbei ist  $n$  bzw.  $m$  die Anzahl der Nullstellen  $v_i$  bzw. der Pole  $\omega_i$ , die größer als  $\omega$  sind. Durch ein genügend kleines bzw. großes  $\omega$  können immer die Fälle  $n = m = 0$  bzw.  $n = N$ ,  $m = M$  erreicht werden. Daher kann der Wert  $\arg f(j\omega)$  nur dann im Intervall  $[-\pi/2, \pi/2]$  liegen, wenn  $|N-M| \leq 1$  ist.

Für den Fall  $N = M+1$  darf die Differenz  $n-m$  nur die Werte 0 oder 1 annehmen. Das bedeutet aber gerade, daß die Null- und Polstellen abwechselnd in der Art (4.124) angeordnet sind, wobei der größte und der kleinste der Werte  $\{v_i, \omega_i\}$  jeweils eine Nullstelle ist. Weiterhin folgt noch  $\arg K = 0$ , also muß  $K$  eine positiv reelle Konstante sein.

Im Fall  $N = M+1$  kann  $n-m$  nur zwischen den Werten 0 und  $-1$  alternieren, was ebenfalls die wechselnde Anordnung der Null- und Polstellen impliziert. Hier ist jeweils eine Polstelle der größte und kleinste Wert der Menge  $\{v_i, \omega_i\}$ .  $K$  erhält man wieder als positiv reelle Konstante.

Der letzte Fall  $N = M$  impliziert, daß  $\arg K$  den Wert  $+$  oder  $-\pi/2$  annehmen muß, je nachdem, ob eine Pol- oder eine Nullstelle der größte unter den Werten  $\{v_i, \omega_i\}$  ist. Da die Konstante  $K$  das Verhältnis der Koeffizienten jeweils höchster Ordnung der Zähler- und Nennerpolynome von  $f$  ist, sind damit alle Aussagen bewiesen.  $\square$

Die Prüfung der Positivitätsbedingung »für alle  $s$  der rechten Halbebene« ist bei einer willkürlich vorgelegten Funktion oftmals gar nicht einfach durchzuführen. Es wäre daher wünschenswert, wenn es gelänge, die Untersuchung nur auf die normale »Frequenzkennlinie«  $s = j\omega$  zu beschränken. Unter gewissen Vorkenntnissen über die zu untersuchende Funktion ist dies möglich. Dazu dient folgender Satz:

#### (4.129) Satz: Bedingungen für die Positivität rationaler Funktionen

Die rationale Funktion  $f$  besitze im Gebiet  $\operatorname{Re}(s) > 0$  keine Polstellen. Die imaginären Pole seien einfach und haben positiv reelle Residuen. Der Grad des Zählerpolynoms von  $f$  sei um höchstens 1 größer als der des Nenners. In diesem Fall sei der Quotient

der Koeffizienten höchsten Grades von Zähler- und Nennerpolynom positiv reell. Gilt nun

(4.130)

$$\operatorname{Re} f(j\omega) > 0$$

für fast alle  $\omega \in \mathbb{R}$ , ist  $f$  eine positive Funktion.  $\square$

In der angegebenen Form treten die Voraussetzungen des Satzes als hinreichende Bedingungen für die Positivität auf. Nach Satz (4.107) sind diese aber auch notwendig. Offensichtlich ist die Anwendung dieses Satzes am einfachsten, wenn alle Pole im Gebiet  $\operatorname{Re}(s) < 0$  liegen und der Zählergrad nicht größer als der Nennergrad ist. Dann ist nur die Bedingung (4.130) zu überprüfen.

#### (4.131) Beweis:

Die Funktion  $h$  ist nach Voraussetzung im Gebiet  $\operatorname{Re}(s) \geq 0$  mit Ausnahme der imaginären Polstellen analytisch. Wir betrachten nun die in Bild 4.5 dargestellte Kontur  $C$ , die vollständig im Regularitätsgebiet der Funktion  $f$  verläuft. Auf den Stücken von  $C$ , die mit der imaginären Achse zusammenfallen, hat die Funktion  $f$  nach Voraussetzung nicht negativen Realteil. Werden die Halbkreise um einen Pol  $j\omega_k$  von  $h$  mit genügend kleinem Radius gewählt, wird das Verhalten der Funktion  $h$  auf diesem Konturstück allein durch das nach Voraussetzung positive Residuum  $R_k$  der Polstelle bestimmt:

$$(4.132) \quad f(s) \rightarrow \frac{R_k}{s - j\omega_k} \quad \text{für } s \rightarrow j\omega_k.$$

Man vergleiche (4.113). Daher ist  $\operatorname{Re} f(s)$  auf einem genügend klein gewählten Halbkreis nicht negativ. Der Wert der Funktion  $f$  wird auf einem genügend großem Halbkreis um den Nullpunkt allein durch

$$(4.133) \quad f(s) \rightarrow K s^\nu \quad \text{für } s \rightarrow \infty$$

bestimmt. Die Konstante  $K$  ist das Verhältnis der höchsten Koeffizienten von Zähler und Nennerpolynom und  $\nu$  die Differenz von Zähler- und Nennergrad. Nach Voraussetzung darf  $\nu$  höchstens 1 sein. In diesem Fall ist  $K$  wiederum nach Voraussetzung positiv reell, so daß auch auf diesem Halbkreis der Realteil von  $f$  keine negativen Werte annehmen kann. Nach dem Minimumprinzip harmonischer Funktionen – wie der Realteil von  $f$  eine ist – wird der kleinste Wert immer auf dem Rand eines Gebietes angenommen. Im Innern der Kontur  $C$  hat  $f$  daher auf jeden Fall nicht negativen

Realteil. Da die Kontur  $C$  so weit vergrößert werden kann, daß jeder beliebige Punkt  $s$  der Halbebene  $\operatorname{Re}(s) > 0$  umschlossen wird, folgt die Nicht-Negativität des Realteils für alle Punkte  $s$  mit  $\operatorname{Re}(s) > 0$ , womit  $f$  eine positive Funktion ist.

Ist der Exponent  $\nu$  negativ, strebt  $f(s)$  und damit auch der Realteil für  $s \rightarrow \infty$  gegen Null. Auf diese Weise können wir für den Realteil von  $f(s)$  im Innern des Gebietes eine untere Schranke finden, die zwar zunächst negativ sein könnte, aber vom Betrag sich der Null beliebig nähert, je größer der äußere Kreis gewählt wird. Daher kann auch in diesem Fall ein negativer Wert von  $\operatorname{Re} h(s)$  in der rechten Halbebene nicht angenommen werden.

Im Fall  $\nu = 0$  strebt  $\operatorname{Re} f(s)$  für  $s \rightarrow \infty$  gegen eine Konstante, die gleich dem Grenzwert von  $\operatorname{Re} f(j\omega)$  für  $\omega \rightarrow \infty$  ist und nach der Voraussetzung (4.130) nicht negativ sein kann. Ist der Grenzwert positiv, kann man sich der Argumentation für den Fall  $\nu = 1$  anschließen. Ist er Null, kann man nach der Schlußweise für  $\nu < 0$  fortfahren.

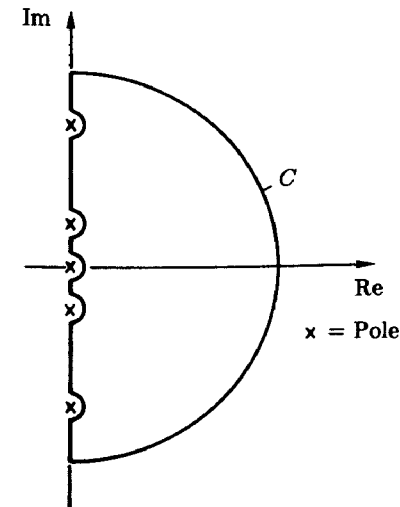


Bild 4.5: Kontur  $C$  (zum Beweis (4.131))

$\square$

**(4.134) Satz: Partialbruchabsplattung bei positiven Funktionen**

Bringt man eine positive, rationale Funktion  $f$  in die Form

$$(4.135) \quad f(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = R_\infty s + \sum_i \frac{R_i}{s - j\omega_i} + \frac{p_0(s)}{q_0(s)},$$

wobei  $s = j\omega_i$  die imaginären Pole der Funktion  $f$  sind und  $R_i$  die zugehörigen Residuen bzw.  $R_\infty$  das Residuum »im Unendlichen«, so ist jeder der Summanden in (4.135) selbst eine positive Funktion.  $\square$

**(4.136) Beweis:**

Die Positivität der Funktionen

$$R_\infty s \quad \text{und} \quad \frac{R_i}{s - j\omega_i}$$

ist bereits den Aussagen des Satzes (4.107) zu entnehmen. Die Positivität des Restes

$$(4.137) \quad f_0(s) := \frac{p_0(s)}{q_0(s)}$$

zeigen wir unter Benutzung des Satzes (4.129). Die Funktion  $f_0$  besitzt wegen der Darstellung (4.135) nur Pole in der linken Halbebene  $\operatorname{Re}(s) < 0$ . Da ein eventueller Zählergradüberschuß der Funktion  $f$  mit  $R_\infty s$  abgespalten ist, ist der Zählergrad von  $f_0$  nicht größer als der Nennergrad. Da

$$(4.138) \quad \operatorname{Re} f_0(j\omega) = \operatorname{Re} f(j\omega) \geq 0$$

ist, sind alle Voraussetzungen des Satzes (4.129) erfüllt und es folgt die Positivität auch für die Funktion  $f_0$ .  $\square$

Für positive Funktionen gibt es nach (B.89) eine Grenz- oder Randfunktion auf der imaginären Achse. In der Darstellung (4.135) ist dies besonders deutlich zu überblicken: Der erste und der letzte Summand sind in der abgeschlossenen rechten Halbebene  $\operatorname{Re}(s) \geq 0$  stetig; bei ihnen erhält man die Randfunktion einfach durch Ersetzen von  $s$  durch  $j\omega$ . Bei den Polen auf der imaginären Achse tritt durch den Grenzübergang, der innerhalb der rechten Halbebene auszuführen ist, jeweils noch eine  $\delta$ -Distribution hinzu, so daß die gesamte Randfunktion

$$(4.139) \quad f_R = jR_\infty(\cdot) + \sum_i R_i \left( \frac{1}{j(\cdot - \omega_i)} + \pi \delta(\cdot - \omega_i) \right) + f_0(j\cdot)$$

lautet. Dies kann man nun wieder zu der Formel

$$(4.140) \quad f_R = f(j\cdot) + \sum_i \pi R_i \delta(\cdot - \omega_i)$$

zusammenfassen. Ist die positive Funktion  $f$  die LAPLACE-Transformierte  $\hat{h}$  einer passiven Gewichtsdistribution, ist die Randfunktion  $f_R$  gleich der FOURIER-Transformierten  $\tilde{h}$ . Für rationale positive Übertragungsfunktionen wird also die FOURIER-Transformierte aus der LAPLACE-Transformierten durch

$$(4.141) \quad \tilde{h} = \hat{h}(j\cdot) + \sum_i \pi R_i \delta(\cdot - \omega_i)$$

bestimmt. Für den wichtigen HERMITESchen Anteil, im skalaren Fall also der Realteil, ergibt sich dann

$$(4.142) \quad \tilde{a} = \operatorname{Re} \hat{h}(j\cdot) + \sum_i \pi R_i \delta(\cdot - \omega_i)$$

Der singuläre Anteil, für den die imaginären Pole verantwortlich sind, ist offensichtlich

$$(4.143) \quad \tilde{a}_s = \sum_i \pi R_i \delta(\cdot - \omega_i)$$

während sich für den lokal integrierbaren Anteil

$$(4.144) \quad \tilde{a}_0(\omega) = \operatorname{Re} \hat{h}(j\omega) = \operatorname{Re} \hat{h}_0(j\omega)$$

ergibt. Hierin ist

$$(4.145) \quad \hat{h}_0 = \frac{p_0(s)}{q_0(s)}$$

entsprechend (4.135) der durch Abspaltung der imaginären Polstellen und eines Zählergradüberschusses von  $\hat{h}$  entstandene Rest, der nur noch Pole in der rechten offenen Halbebene  $\operatorname{Re}(s) > 0$  besitzt. Für den Sonderfall einer reellen Übertragungsfunktion (alle Koeffizienten reell) gilt

$$(4.146) \quad h(\bar{s}) = \overline{h(s)},$$

so daß in diesem Fall der Anteil  $\tilde{a}_0$  durch die Beziehung

$$\begin{aligned} \tilde{a}_0(\omega) &= \frac{1}{2} (\hat{h}(j\omega) + \hat{h}(-j\omega)) \\ &= \frac{1}{2} (\hat{h}(s) + \hat{h}(-s))(s=j\omega) = \frac{1}{2} \left( \frac{p(s)}{q(s)} + \frac{p(-s)}{q(-s)} \right) (s=j\omega), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4.147) \quad \tilde{a}_0(\omega) &= \frac{1}{2} \frac{p(s)q(-s) + p(-s)q(s)}{q(s)q(-s)} (s=j\omega) \\ &= \frac{1}{2} \frac{p_0(s)q_0(-s) + p_0(-s)q_0(s)}{q_0(s)q_0(-s)} (s=j\omega) \end{aligned}$$

zu gewinnen ist.

## 4.6 Ein Algebraisches Kriterium zur Prüfung der Positivität

Bei rationalen Funktionen kann die Überprüfung der Positivität auf ein einfaches endliches algebraisches Rechenschema reduziert werden. Dieses Verfahren geht im Wesentlichen auf das bekannte ROUTH-Kriterium zurück, welches sich letztlich auf die STURMschen Ketten gründet – ein Verfahren zur Bestimmung der Anzahl von Nullstellen eines Polynoms in einem vorgegebenen Intervall.

Als Grundlage benutzen wir den Satz (4.129), der als Voraussetzung

$$(4.148) \quad \operatorname{Re} f(j\omega) > 0$$

für fast alle  $\omega \in \mathbb{R}$  fordert. Zusätzlich gehen wir von reellen rationalen Funktionen aus, also solchen, bei denen das Zähler- und das Nennerpolynom nur reelle Koeffizienten besitzt. Dann schreibt sich  $\operatorname{Re} f(s)$  gemäß (4.147) als

$$(4.149) \quad \operatorname{Re} f(j\omega) = \frac{1}{2} \frac{p(j\omega)q(-j\omega) + p(-j\omega)q(j\omega)}{q(j\omega)q(-j\omega)}.$$

Da der Nenner nicht negativ ist, führt die geforderte Positivität auf

$$(4.150) \quad p(j\omega)q(-j\omega) + p(-j\omega)q(j\omega) > 0.$$

Mit dem Polynom

$$(4.151) \quad R(s) := p(s)q(-s) + p(-s)q(s)$$

läßt sich dies als

$$(4.152) \quad R(j\omega) > 0$$

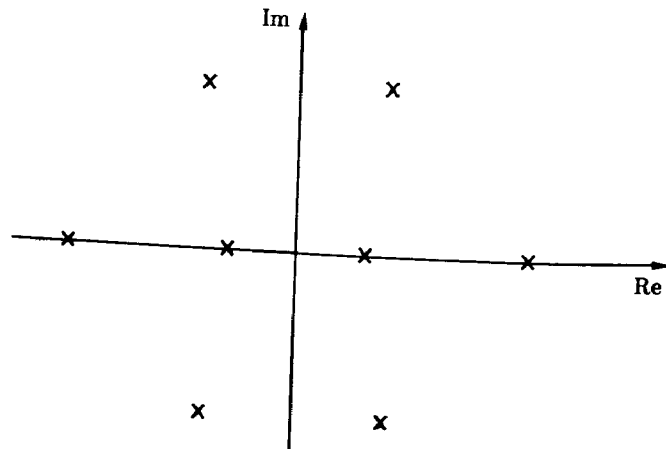
für fast alle  $\omega \in \mathbb{R}$  ausdrücken, denn  $R(s)$  ist für alle imaginären  $s$  reellwertig. Ausnahmestellen dieser Bedingung sind mögliche imaginäre Nullstellen von  $R$ . Damit  $R$  an einer solchen Stelle nicht das Vorzeichen wechselt, darf die Vielfachheit einer solchen Nullstelle nur gerade sein. Da eine Unterscheidung mehrfacher Nullstellen mit dem folgenden Verfahren nicht möglich ist, schließen wir solche imaginären Nullstellen ganz aus. Ist also keine Nullstelle von  $R$  imaginär, kann  $R(j\omega)$  niemals das Vorzeichen wechseln. Zur Prüfung von (4.152) reicht es in diesem Fall aus, das Vorzeichen eines einzelnen Wertes, z. B.  $R(0) > 0$ , zu untersuchen.

Allgemein sind die Nullstellen des reellen Polynoms  $R$  zueinander konjugiert komplex. Wegen  $R(s) = R(-s)$  ist außerdem mit jeder Nullstelle  $s_i$  gleichzeitig auch  $-s_i$  Nullstelle. Daher ergibt sich die in Bild 4.6 skizzierte Nullstellenkonfiguration in der komplexen Ebene. Die Grade  $N$  und  $M$  der Polynome  $p$  und  $q$  differieren wegen der 3. Aussage des Satzes (4.107) um höchstens 1. In diesem Fall heben sich bei der Bildung von  $R$  gemäß (4.151) die höchsten Koeffizienten heraus. Der Grad von  $R$  beträgt also

$$(4.153) \quad \operatorname{grad} R = 2k := 2 \min \{N, M\}.$$

Das Polynom  $R$  besitzt demnach  $2k$  Nullstellen, von denen aufgrund der obigen Überlegungen jeweils genau eine Hälfte in der rechten offenen Halbebene  $\operatorname{Re}(s) > 0$  und die andere Hälfte in der linken offenen Halbebene  $\operatorname{Re}(s) < 0$  liegen muß. Das führt auf den folgenden Satz:



Bild 4.6: Nullstellenkonfiguration des Polynoms  $R$ **(4.154) Satz: Hinreichendes Kriterium für die Positivität reeller rationaler Funktionen**

Die rationale Funktion  $f = p/q$  ist positiv, wenn die folgenden Voraussetzungen erfüllt sind:

1. Die Polynome  $p$  und  $q$  seien reell und für deren Grade  $N, M$  gelte  $|N-M| \leq 1$ .
2. Im Fall  $M-N = 1$  mögen die Nullstellen von  $q$  in der linken offenen Halbebene  $\text{Re}(s) < 0$  liegen bzw. im Fall  $N-M = 1$  die Nullstellen von  $p$ . Ist  $N = M$ , gelte dies wahlweise für die Nullstellen von  $p$  oder die von  $q$ .
3. Das Polynom  $R$  nach (4.151) besitze keine imaginäre Nullstelle und es gelte  $R(0) > 0$ .

□

Die gegenüber dem Satz (4.129) veränderten Voraussetzungen unter 2. erhält man im Falle  $N-M = 0, 1$  durch Übergang auf die reziproke Funktion  $1/f = q/p$ . Imaginäre Null- und Polstellen sind generell auszuschließen, da sie unmittelbar zu imaginären Nullstellen von  $R$  führen, die ausgeschlossen werden sollten.

Sowohl zur Überprüfung der 2. als auch der 3. Voraussetzung kann das Kriterium nach ROUTH (siehe etwa ZURMÜHL [51]) herangezogen werden. Bei Anwendung auf das Polynom  $p$  bzw.  $q$  darf in der ersten Spalte des Schemas kein Zeichenwechsel auftreten,

da alle Nullstellen in der linken offenen Halbebene  $\text{Re}(s) < 0$  liegen müssen. Bei Anwendung auf  $R$  müssen genau  $k$  Zeichenwechsel stattfinden, wenn  $2k$  der Grad von  $R$  ist. Andernfalls würden Nullstellen auf der imaginären Achse liegen, was ausgeschlossen wurde.

**(4.155) Beispiel:**

Die Funktion

$$f(s) = \frac{s^2 + 3s + 2}{s^3 + 7s^2 + 17s + 15}$$

ist auf Positivität zu überprüfen. Der Nennergrad ist größer als der Zählergrad. Deshalb werden die Nullstellen des Nennerpolynoms mit dem ROUTH-Schema untersucht:

1	17
7	15
14,86	
15	

In der ersten Spalte findet kein Vorzeichenwechsel statt. Daher haben alle Nullstellen von  $q$  negativen Realteil. Bildung des Polynoms  $R$ :

$$\begin{aligned} R(s) &:= p(s)q(-s) + p(-s)q(s) \\ &= 8s^4 - 44s^2 + 60. \end{aligned}$$

Üblicherweise werden beim ROUTH-Schema als Startpolynome die geraden und die ungeraden Potenzen des Ausgangspolynoms benutzt. Da  $R$  regelmäßig nur aus geraden Potenzen besteht, ist hier abweichend als zweites Startpolynom die Ableitung

$$R'(s) = 32s^3 - 88s$$

zu benutzen:

8	-44	60
32	-88	
-22	60	
-0,73		
60		

In der ersten Spalte wechselt das Vorzeichen zweimal. Es ist also keine Nullstelle von  $R$  imaginär. Da außerdem  $R(0) = 60 > 0$  ist, haben wir damit die Positivität nachgewiesen.  $\square$

## 5 Reversibilität und Irreversibilität

Die Frage der *Reversibilität* wird gewöhnlich mit Hilfe von *Kreisprozessen* erörtert. Ein Kreisprozeß liegt vor, wenn das System ausgehend von einem Anfangszustand (in der Thermostatik ist dies ein *Gleichgewichtszustand*) nach irgendeiner Steuerung wieder genau in diesen *thermodynamischen* Ausgangszustand zurückgeführt wird (wobei keineswegs sicher ist, ob es überhaupt Kreisprozesse gibt). Dies wirft wiederum die Frage auf, wie der Zustand eines Systems zweifelsfrei erkannt werden kann. Einerseits beurteilt man ihn an den (äußeren mechanischen oder elektrodynamischen) generalisierten Koordinaten oder Arbeitsvariablen und an den zugehörigen generalisierten Kräften. Andererseits treten *innere Zustandsgrößen* hinzu. Die Thermostatik verwendet genau eine zusätzliche unabhängige Zustandsvariable, beispielsweise die *innere Energie*.

Ist der Ausgangs- und der damit übereinstimmende Endzustand eines Kreisprozesses ein thermodynamischer Gleichgewichtszustand, so verschwindet also die Änderung der Energie des Systems durch den Prozeß. Das bedeutet, daß die am System geleistete Arbeit vom System als *Wärme* an die Umgebung abgeführt werden muß. Durch den Energieaustausch des Systems mit der Umgebung können dort Veränderungen *am Ende* des Kreisprozesses eingetreten sein, obwohl das System selbst sich wieder genau in seinem Anfangszustand befindet.

Ein Kreisprozeß wird *reversibel* genannt, wenn die während dieses Prozesses gesamte geleistete Arbeit verschwindet; dann wird insgesamt keine Wärme an die Umgebung abgeführt. Man spricht von *strenger Reversibilität*, wenn auch die *Umgebung* wieder in den Ausgangszustand zurückkehren kann.

Ist das System während des ganzen Kreisprozesses *adiabatisch* (wärmedicht) abgeschlossen, kann also keine Wärme abgeführt werden, muß die gesamte Arbeit – da es sich um einen Kreisprozeß handelt – verschwinden. Daher sind alle Kreisprozesse eines adiabatischen Systems reversibel. Die Erfahrung lehrt aber, daß in realen adiabatisch abgeschlossenen Systemen nur solche Prozesse möglich sind, bei denen zwar die mechanischen oder elektromagnetischen Koordinaten ihre Ausgangswerte erreichen, aber die innere Energie erhöht und damit der Umgebung Arbeit entzogen ist

(Fast-Kreisprozesse). Wegen des PLANCKschen Verbots ist die Umkehrung unmöglich (siehe z. B. FREISE [17], S. 225).

Für die Untersuchung *isothermer* Kreisprozesse bildet man ein adiabatisches Gesamtsystem mit einem Wärmebad, welches dem System die konstante Temperatur aufprägt, aber keine Arbeit mit ihm austauscht. Die zugeführte Gesamtarbeit ist dann auch hier beim reversiblen Prozeß Null, sonst positiv. Die Umgebung des ursprünglichen Systems hat sich dann verändert, da dem Wärmebad Energie zugeführt worden ist.

Wegen der hier verwendeten Systembeschreibung allein durch äußere Größen (Black Box) ist diese übliche thermodynamische Definition der Reversibilität für unsere Zwecke nicht praktikabel, da sich die inneren Zustandsgrößen des Systems unserer Kenntnis entziehen und die Entscheidung, ob ein Prozeß ein Kreisprozeß ist, nicht möglich ist. Die Definition der Reversibilität wird deshalb allein mit Hilfe der äußeren Arbeit  $W(t)$  formuliert: Gibt es zu einer beliebigen Erregung  $v$  im Zeitintervall  $(-\infty, t)$  eine geeignete Fortführung der Steuerung im Intervall  $[t, \infty)$ , so daß die am System geleistete Arbeit wieder vollständig zurückgewonnen werden kann, soll das System *reversibel* genannt werden. Daß diese Begriffsbildung tatsächlich etwas von der vorangegangenen abweicht, wird an einem einfachen Beispiel sichtbar:

Eine reibungsfrei gelagerte Punktmasse, die durch äußere Kräfte beschleunigt werden kann, ist gewiß reversibel. Die an dem System geleistete Arbeit geht vollständig in die kinetische Energie der Masse über und wird bei Zurückführung in den Anfangszustand wieder abgegeben. Bei der Suche nach irgendeiner Steuerung, die nur zum Ziel hat, sämtliche kinetische Energie zurückzugewinnen, ist es überhaupt nicht notwendig, die Masse in ihren Anfangszustand zurückzubringen. Es reicht aus, sie bis zum Stillstand abzubremsten. Ihre *Lage* kann eine ganz andere als die zum Anfangszeitpunkt sein; es handelt sich dann nicht um einen Kreisprozeß. Bei *diesem* Beispiel ist unter der Menge der möglichen Steuerungen auch immer eine solche zu finden, die den Klotz nicht nur abbremst, sondern auch genau in den Anfangslage zurückführt. Die Frage der Reversibilität ist hier nach beiden Begriffen positiv zu beantworten. Bei komplizierteren Systemen ist aber nicht mehr unmittelbar zu übersehen, ob beide Kriterien zum gleichen Ergebnis führen. Insofern ist dieser Begriff der Reversibilität möglicherweise ein schwächerer als der im Sinne der Thermodynamik übliche.

Ein Vorteil dieser Begriffsbildung ist die Möglichkeit einer Einbeziehung irreversibler – also nicht reversibler – Systeme. Während man bei reversiblen Systemen nach einer

Steuerung sucht, die sämtliche am System geleistete Arbeit zurückgewinnt – oder umgekehrt aufgrund des Ergebnisses einer solchen Suche über die Reversibilität entscheidet –, kann bei irreversiblen Systemen die Frage gestellt werden, *wieviel* von der geleisteten Arbeit noch zurückzugewinnen ist. Die qualitative Unterscheidung »reversibel – irreversibel« wird durch eine quantitative ersetzt.

Als Rechengröße eignet sich statt der zurückgewinnbaren Arbeit besser ihr Komplement, die nicht zurückgewinnbare Arbeit oder nach der Terminologie von MEIXNER, KÖNIG und TOBERGTE die *verlorene Energie* an, die aber besser als *verlorene Arbeit* bezeichnet werden sollte. Formal wird sie durch

$$(5.1) \quad V(t) = (Vv)(t) := \inf \{ (W\xi)(\infty) : \xi \in \mathcal{G}^n, \xi_t = v_t \}$$

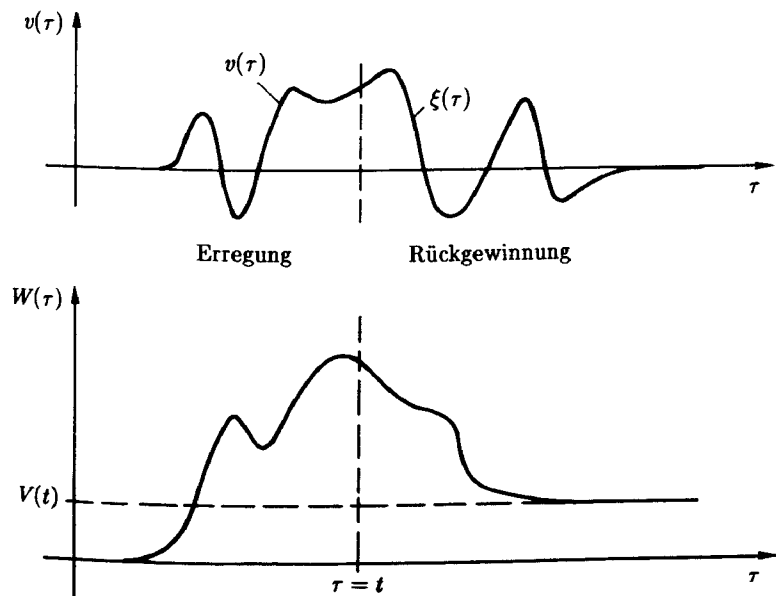


Bild 5.1: Die geleistete Arbeit und ihr verlorener Anteil

definiert. Wegen der Nebenbedingung  $\xi_t = v_t$  muß die Funktion  $\xi$  im Zeitintervall  $(-\infty, t]$  gleich der vorgegeben Erregung  $v$  sein. Diese liegt fest und darf nicht verändert

werden. Nur die »Fortsetzung« im Zeitintervall  $(t, \infty)$  darf frei variiert werden, um die bestmögliche Rückgewinnung zu erreichen. Den prinzipiellen zeitlichen Verlauf einer Rückgewinnung zeigt Bild 5.1.

Mit dem Begriff der verlorenen Arbeit läßt sich der hier verwendete Reversibilitätsbegriff einwandfrei definieren:

### (5.2) Definition: Reversibilität

Ein passives System heißt *reversibel*, wenn für alle Erregungen  $v$  und zu jeder Zeit  $t$  die verlorene Arbeit  $(Vv)(t)$  Null ist.  $\square$

*Irreversibilität* verstehen wir hier als »nicht reversibel«. Das weicht z. B. von der Begriffsbildung bei TOBERGTE [43] ab, wo irreversible Systeme nur eine Teilmenge der nicht-reversiblen bilden.

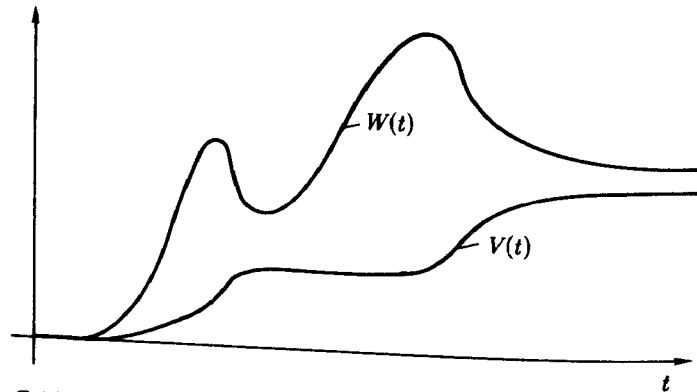


Bild 5.2: Zeitlicher Verlauf der verlorenen Arbeit

Der zeitliche Verlauf der verlorenen Arbeit ist in Bild 5.2 dargestellt. Dabei ist eine feste Erregung  $v$  über dem Zeitintervall  $(-\infty, \infty)$  vorgegeben. Nur der »Umschaltzeitpunkt«  $t$ , bei dem von der Erregung auf die entsprechende »Rückgewinnung« umgeschaltet wird, ist veränderlich. Aus der Definitionsgleichung (5.1) ist bereits ersichtlich, daß  $V(t)$  eine monoton wachsende Funktion ist: Eine Funktion  $\xi$ , die der Nebenbedingung

(5.3)

$$\xi_{t_2} = v_{t_2}$$

genügt, befriedigt auch

(5.4)

$$\xi_{t_1} = v_{t_1},$$

sofern  $t_1 \leq t_2$  ist. Die Menge der Funktionen  $\xi$ , unter denen in (5.1) das Infimum gesucht wird, wird mit größer werdender Zeit immer kleiner, so daß bestenfalls der gleiche Wert, niemals aber einer kleinerer Wert für  $V(t_2)$  als der von  $V(t_1)$  gefunden werden kann:

(5.5)

$$0 \leq V(t_1) \leq V(t_2) \text{ für } t_1 < t_2$$

### (5.6) Beispiel: Ungedämpfter Schwinger

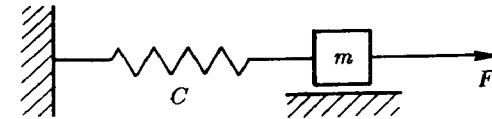


Bild 5.3: Ein-Massen-Schwinger

Ein schwingungsfähiges System ist bei Abwesenheit von Dämpfung konservativ, das heißt, für die äußere Leistung existiert ein Potential: die *innere Energie*. Ist die äußere Leistung Null, gehorcht die innere Energie einer Erhaltungsgleichung. Wir erwarten folglich auch Reversibilität. Die Bewegungsdifferentialgleichung

(5.7)

$$m\ddot{x} = -Cx + F$$

führt durch LAPLACE-Transformation auf

(5.8)

$$\hat{x}(s) = \frac{\hat{F}(s)}{ms^2 + C}$$

Nach Übergang auf die Geschwindigkeit

(5.9)

$$\hat{v}(s) = s \hat{x}(s)$$

erhalten wir die Kraft-Geschwindigkeits-Übertragungsfunktion

$$(5.10) \quad \hat{h}(s) = \frac{s}{ms^2 + C},$$

die in der Tabelle (4.12) der positiven Funktion zu finden ist. Die Bestimmung geeigneter Steuerungen für die Rückgewinnung der Energie des erregten Systems ist recht einfach. Als eine formell gut zu handhabende Methode bietet sich an, die ursprüngliche Erregung nach einer zeitlichen Verzögerung von einem ganzzahligen Vielfachen der Eigenschwingungsdauer mit umgekehrten Vorzeichen nochmals aufzubringen. Wir setzen also

$$(5.11) \quad \xi(\tau) = v(\tau) - v(\tau - kT),$$

wobei

$$(5.12) \quad T := 2\pi/\omega_0 := 2\pi\sqrt{m/C}$$

die Periodendauer der Eigenschwingung ist. Wir nehmen an, daß die Erregung  $v$  zur Zeit  $t = t_0$  begonnen habe. Bei Wahl von

$$(5.13) \quad k > \frac{t - t_0}{T}, \quad k \in \mathbf{N},$$

ist sichergestellt, daß

$$(5.14) \quad \xi(\tau) = v(\tau),$$

für  $\tau \in (-\infty, t]$  gilt und somit die Nebenbedingung  $\xi_t = v_t$  in (5.1) gewährleistet ist. Die Berechnung der Arbeit geschieht zweckmäßigerweise im FOURIER-Bereich. Es ist

$$(5.15) \quad \tilde{\xi} = \tilde{v} \left( 1 - e^{-i(\cdot)kT} \right).$$

Mit (4.142) entnehmen wir der Übertragungsfunktion (5.10)

$$(5.16) \quad \tilde{a} = \frac{\pi}{m} \left( \delta(\cdot - \omega_0) + \delta(\cdot + \omega_0) \right).$$

Wir erhalten mit (5.14)

$$(5.17) \quad \begin{aligned} (W\xi)(\infty) &= (a, \xi * \xi^*) = \frac{1}{2\pi} (\tilde{a}, |\tilde{\xi}|^2) \\ &= \frac{\pi}{m} \left( |\tilde{\xi}(-\omega_0)|^2 + |\tilde{\xi}(\omega_0)|^2 \right) = 0. \end{aligned}$$

Ein kleinerer Wert als Null ist nicht möglich; daher ist die in (5.11) gewählte Funktion  $\xi$  tatsächlich ein minimales Element und für die verlorene Arbeit ergibt sich

$$(5.18) \quad (Vv)(t) = (W\xi)(\infty) = 0.$$

Das System ist reversibel.  $\square$

### (5.19) Bemerkung:

Bei der Betrachtung der Definitionsgleichung für die verlorenen Energie stellen sich zwei Fragen:

Die verlorene Arbeit ist als untere Schranke der Gesamtarbeit  $W(\infty)$  eingeführt, wobei die Fortsetzung der Erregung  $v(\tau)$  für Zeiten  $\tau > t$  zu variieren ist. Ist es zur Rückgewinnung notwendig, immer bis zu unendlichen Zeiten  $t = \infty$  zu warten, bis der maximal mögliche Arbeitsanteil wieder aus dem System herausgezogen ist, oder erreicht man den Endwert schon in endlicher Zeit?

$V(t)$  ist als Infimum, nicht als Minimum von  $W(\infty)$  definiert. Im vorangegangenen Beispiel konnte ein minimales Element direkt angegeben werden. Gibt es aber Systeme oder spezielle Erregungen, bei denen das Minimum gar nicht existiert und der Wert der verlorenen Energie mit keiner Funktion exakt, sondern nur in beliebig guter Approximation erreicht werden kann? Dann wäre die Benutzung des Infimums statt des Minimums nicht nur mathematische Vorsichtsmaßnahme, sondern sie hätte einen konkreten Hintergrund. Entspricht es unserer anschaulichen Vorstellung der Reversibilität, wenn dem Wert  $V(t) = 0$  zwar beliebig nahe gekommen werden kann, wenn er aber selbst unerreichbar bleibt?

Auch von der mathematischen Seite ist es nicht besonders glücklich, wenn unbekannt ist, ob ein minimales Element in dem zugrunde liegenden Funktionenraum existiert. In dieser Beziehung kann aber Abhilfe geschaffen werden:

## 5.1 Erweiterung des Raums der zugelassenen Erregungen

Durch die Definition

$$(5.20) \quad \langle v_1, v_2 \rangle_a := (a, v_1 * v_2^*) = \frac{1}{2\pi} (\tilde{a}, \tilde{v}_1 \tilde{v}_2^\dagger)$$

erhält man ein Funktional für  $v_i \in \mathfrak{S}^n$ , welches bilinear und HERMITESch in seinen Argumenten ist. Für positive Systeme ist dieses Produkt außerdem positiv semidefinit:

$$(5.21) \quad \langle v, v \rangle_{\mathfrak{S}} \geq 0.$$

Diese Eigenschaften entsprechen denen eines *inneren Produkts* in einem HILBERT-Raum. Ein HILBERT-Raum besitzt aber noch zwei andere Eigenschaften:

Das Funktional (5.21) darf nur für die Nullfunktion verschwinden, was aber keineswegs gewährleistet ist. Vielmehr sind ja reversible Systeme gerade dadurch ausgezeichnet, daß das Arbeitsfunktional auch bei von Null verschiedenen Funktionen zu Null gemacht werden kann.

Weiterhin muß bei einem HILBERT-Raum Vollständigkeit vorliegen: Das Grenzelement (Häufungspunkt) jeder CAUCHY-Folge muß in dem Raum enthalten sein. Zwar ist der Grundraum  $\mathfrak{S}$  vollständig, aber das bezieht sich auf die in (A.8) angegebene Topologie. Die Topologie eines HILBERT-Raums ist an der zu dem inneren Produkt gehörenden Norm

$$(5.22) \quad |v|_{\mathfrak{S}}^2 := \langle v, v \rangle_{\mathfrak{S}}$$

zu messen. Bezüglich dieser ist  $\mathfrak{S}$  nicht vollständig. Es ist aber nur eine Formalität, einen Raum um seine Häufungspunkte zu erweitern. Allein dadurch wäre die angeschnittene Problematik der Existenz des minimalen Elementes zu lösen. Um aber die Methoden der HILBERT-Räume ausnutzen zu können, soll noch die Semidefinitheit des Funktional (5.20) beseitigt werden. Das geschieht dadurch, daß Funktionen  $v_i$ , die sich im Sinne der Norm (5.21) nicht unterscheiden, also

$$(5.23) \quad |v_1 - v_2|_{\mathfrak{S}} = 0,$$

zu Klassen zusammengefaßt werden. Die Funktionen  $v_1$  und  $v_2$  gehören zu derselben Klasse, oder anders ausgedrückt, sie sind einander gleich im Sinne der Topologie des HILBERT-Raums  $\mathfrak{S}_{\mathfrak{S}}$ . Durch diesen »Trick« ist sichergestellt, daß die Definitheitsbedingung

$$(5.24) \quad \langle v, v \rangle_{\mathfrak{S}} > 0 \quad \forall v \neq 0$$

erfüllt ist. Das Symbol »0« steht also nicht für die Nullfunktion, sondern für die Nullklasse. Bei reversiblen Systemen gehören alle minimalen Elemente zur Nullklasse.

### (5.25) Der HILBERT-Raum $\mathfrak{S}_{\mathfrak{S}}^n$

Durch die beiden Schritte

1. Erweiterung des Raums  $\mathfrak{S}^n$  um seine Häufungspunkte,
2. Zusammenfassung von Funktionen zu Klassen,

schaffen wir aus dem ursprünglichen Grundraum  $\mathfrak{S}^n$  einen HILBERT-Raum, der mit  $\mathfrak{S}_{\mathfrak{S}}^n$  bezeichnet werden soll, da die Erweiterung und Zusammenfassung maßgeblich von der positiv semidefiniten Distribution  $\mathfrak{a}$  abhängt.  $\square$

Im Gegensatz zu der ersten Erweiterung (3.72) der zulässigen Erregungen vom Raum  $\mathfrak{D}^n$  zum Raum  $\mathfrak{S}^n$  hängt diese Erweiterung spezifisch von dem vorliegenden einzelnen System ab. Man kann das so deuten, daß nach immer genauerer Untersuchung immer besser bekannt wird, was dem vorliegenden System als Belastungen zugemutet werden kann.

### (5.26) Der HILBERT-Raum $\tilde{\mathfrak{S}}_{\mathfrak{S}}^n$

Der Raum  $\tilde{\mathfrak{S}}_{\mathfrak{S}}^n$  entsteht ausgehend von dem inneren Produkt

$$(5.27) \quad \langle \tilde{v}_1, \tilde{v}_2 \rangle_{\tilde{\mathfrak{S}}} := (\tilde{a}, \tilde{v}_1 \tilde{v}_2^{\dagger})$$

analog zu  $\mathfrak{S}_{\mathfrak{S}}^n$  durch Erweiterung und Zusammenfassung der FOURIER-Transformierten  $\tilde{v} \in \tilde{\mathfrak{S}}^n = \mathfrak{S}^n$ . Entsprechend bezeichnet

$$(5.28) \quad |\tilde{v}|_{\tilde{\mathfrak{S}}}^2 := \langle \tilde{v}, \tilde{v} \rangle_{\tilde{\mathfrak{S}}}$$

die Norm in diesem HILBERT-Raum. Wegen (5.20) besteht auch in den erweiterten Räumen die metrische Beziehung

$$(5.29) \quad \langle v_1, v_2 \rangle_{\mathfrak{S}} = \frac{1}{2\pi} \langle \tilde{v}_1, \tilde{v}_2 \rangle_{\tilde{\mathfrak{S}}},$$

die man als verallgemeinerte PARSEVALSche Gleichung bezeichnen kann. Daraus folgt speziell für die Norm

$$(5.30) \quad (W_{\mathfrak{S}})(\infty) = |v|_{\mathfrak{S}}^2 = \frac{1}{2\pi} |\tilde{v}|_{\tilde{\mathfrak{S}}}^2.$$

Nach (4.58) und (4.66) kann diese Norm – zunächst nur für die ursprünglichen Funktionen  $\tilde{v} \in \tilde{\mathfrak{S}}^n$  – auch in der Form

$$(5.31) \quad 2\pi(\mathcal{W}\mathfrak{v})(\infty) = |\tilde{\mathfrak{v}}|_{\tilde{\mathfrak{S}}}^2 = (\tilde{\mathfrak{a}}, \tilde{\mathfrak{v}}\tilde{\mathfrak{v}}^\dagger) = \pi \int_{-\infty}^{\infty} (c^2 + \Omega^2) \tilde{\mathfrak{v}}^\dagger(\Omega) d\rho(\Omega) \mathfrak{v}(\Omega)$$

$$= \sum_i \tilde{\mathfrak{v}}^\dagger(\omega_i) \alpha_i \tilde{\mathfrak{v}}(\omega_i) + \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathfrak{v}}^\dagger(\Omega) \tilde{\mathfrak{a}}_0(\Omega) \tilde{\mathfrak{v}}(\Omega) d\Omega$$

ausgedrückt werden. Entsprechend gilt für das innere Produkt

$$(5.32) \quad \langle \tilde{\mathfrak{v}}_1, \tilde{\mathfrak{v}}_2 \rangle_{\tilde{\mathfrak{S}}} = \sum_i \tilde{\mathfrak{v}}_2^\dagger(\omega_i) \alpha_i \tilde{\mathfrak{v}}_1(\omega_i) + \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathfrak{v}}_2^\dagger(\Omega) \tilde{\mathfrak{a}}_0(\Omega) \tilde{\mathfrak{v}}_1(\Omega) d\Omega.$$

In dieser Integralschreibweise ist besonders deutlich zu erkennen, wohin die Erweiterung führt. Bei der Norm handelt es sich um ein Integral über eine HERMITESche Form in  $\tilde{\mathfrak{v}}(\Omega)$ . Im skalaren Fall steht dort  $|\tilde{\mathfrak{v}}(\Omega)|^2$ . Das ist aber nichts anderes als die Norm eines Raums quadratisch integrierbarer Funktionen, wobei noch die Gewichtung mit dem Maß  $\rho$  hinzukommt; ein gewichteter LEBESGUE-Raum (siehe Anhang (B.1)), den wir im vektorwertigen Fall noch mit dem Dimensionsindex  $n$  belegen:  $L_2^n(\tilde{\mathfrak{a}})$ . Die LEBESGUE-Räume sind vollständig, speziell sind die LEBESGUE-Räume mit dem Potenzindex  $p = 2$  HILBERT-Räume. Wir haben also die Identifizierung

(5.33)

$$\tilde{\mathfrak{S}}_{\tilde{\mathfrak{a}}}^n = L_2^n(\tilde{\mathfrak{a}})$$

gewonnen. Der Raum  $L_2^n(\tilde{\mathfrak{a}})$  ist besser zu interpretieren als der durch rein abstrakte Überlegungen konstruierte Raum  $\tilde{\mathfrak{S}}_{\tilde{\mathfrak{a}}}^n$ . Wir können also die Elemente des Raums  $\tilde{\mathfrak{S}}_{\tilde{\mathfrak{a}}}^n$  als LEBESGUE-integrierbare gewöhnliche *Funktionenklassen* ansehen. Dabei ist der Gewichtung mit  $\tilde{\mathfrak{a}}_0$  Beachtung zu schenken: Verschwindet an einer Stelle oder in einem Intervall  $\omega \in (\Omega_1, \Omega_2)$  die Funktion  $\tilde{\mathfrak{a}}_0(\omega)$ , so ist hier  $\mathfrak{v}(\omega)$  im Sinn der Funktionenklasse  $\mathfrak{v} \in \tilde{\mathfrak{S}}_{\tilde{\mathfrak{a}}}^n$  gar nicht definiert. Auch wenn die Matrix  $\tilde{\mathfrak{a}}_0(\omega)$  nicht vollen Rang besitzt, sind die Komponenten von  $\tilde{\mathfrak{v}} \in \tilde{\mathfrak{S}}_{\tilde{\mathfrak{a}}}^n$ , die im Nullraum von  $\tilde{\mathfrak{a}}_0(\omega)$  liegen, nicht definiert. Das heißt nicht, daß es nicht durchaus einen Vertreter (Funktion) dieser Klasse geben könnte, der für die gesamten reellen Zahlen wohldefiniert ist. Unter Beachtung dieser Eigenarten soll trotzdem von den Formeln (5.31) und (5.32), die oben für Funktionen  $\tilde{\mathfrak{v}} \in \tilde{\mathfrak{S}}$  angegeben wurden auch für die Erweiterung  $\tilde{\mathfrak{v}} \in \tilde{\mathfrak{S}}_{\tilde{\mathfrak{a}}}$  Gebrauch gemacht werden.  $\square$

Durch die Vollständigkeit des HILBERT-Raums  $\tilde{\mathfrak{S}}_{\tilde{\mathfrak{a}}}^n$  existiert in ihm zu jeder Erregung  $\mathfrak{v}$  und zu jedem »Umschaltzeitpunkt«  $t$  eine »minimale Funktion«  $\mathfrak{v}^t$ , mit der der Wert des Infimums angenommen wird:

(5.34)

$$V(t) = (\mathcal{V}\mathfrak{v})(t) = (\mathcal{W}\mathfrak{v}^t)(\infty)$$

Wegen der Definitheit der Norm in einem HILBERT-Raum ist darüber hinaus sichergestellt, daß das minimale Element eindeutig ist. Diese Aussage bezieht sich aber auf Funktionenklassen. Im Sinne der ursprünglichen Funktionen ist eine Eindeutigkeit nicht zwangsläufig gegeben.

## 5.2 Quasistationäre Prozesse

Nach (5.31) kann  $W(\infty)$  auch in der Form

$$(5.35) \quad W(\infty) = \frac{1}{2\pi} |\tilde{\mathfrak{v}}|_{\tilde{\mathfrak{S}}}^2 = \frac{1}{2\pi} \sum_i \tilde{\mathfrak{v}}^\dagger(\omega_i) \alpha_i \tilde{\mathfrak{v}}(\omega_i) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathfrak{v}}^\dagger(\Omega) \tilde{\mathfrak{a}}_0(\Omega) \tilde{\mathfrak{v}}(\Omega) d\Omega$$

geschrieben werden. Während in dem Integral einzelne Werte der Funktion  $\mathfrak{v}$  im Sinne der LEBESGUE-integrierbarkeit stets ohne Belang sind, treten in der Summe noch Werte an diskreten Stellen  $\omega = \omega_i$  hinzu. Hier kommt es tatsächlich auf den konkreten Funktionswert an. Das rührt von den Sprungstellen der Maßfunktion  $\rho$  des ursprünglichen LEBESGUE-STIELTJES-Integrals (4.66) her, welche wiederum auf ungedämpfte Schwinger im System zurückzuführen sind. Treten solche singulären Stellen auf, müssen wir zum Raum  $\tilde{\mathfrak{S}}_{\tilde{\mathfrak{a}}}^n$  auch Funktionen wie

(5.36)

$$\tilde{\zeta}_{\omega_0}(\omega) := \begin{cases} 1 & \text{für } \omega = \omega_0 \\ 0 & \text{für } \omega \neq \omega_0 \end{cases}$$

rechnen, wenn  $\omega_0$  eine solche singuläre Stelle ist. Eine derartige Funktion kann man sich als Grenzfunktion (im Sinne der Norm (5.35)) zum Beispiel der Funktionen

(5.37)

$$\tilde{\zeta}_{\omega_0, T, t_0}(\omega) := \frac{\sin(\omega - \omega_0)T}{(\omega - \omega_0)T} e^{-j(\omega - \omega_0)t_0}$$

vorstellen, wenn  $T$  gegen Unendlich strebt. Das Verhalten der Konstante  $t_0$  während des Grenzübergangs ist frei. Im Zeitbereich gehören dazu die Funktionen

$$(5.38) \quad \zeta_{\omega_0, T, t_0}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2T} e^{j\omega_0 t} & \text{für } |t-t_0| < T \\ 0 & \text{für } |t-t_0| > T \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2T} e^{j\omega_0 t} \sigma(T - |t-t_0|).$$

Das ist eine Schwingung mit der Frequenz  $\omega_0$ , die mit einem Rechtecksignal der Breite  $2T$  moduliert wird. Beim Grenzübergang  $T \rightarrow \infty$  wird die Intervallbreite größer und die Amplitude nimmt dazu umgekehrt proportional ab. Im Grenzfall kann man sich die »Funktion«  $\zeta$  als eine unendlich lang andauernde Schwingung der Frequenz  $\omega_0$  vorstellen, deren Amplitude unermesslich klein ist – eine unendlich vorsichtige stationäre Erregung, deren Amplitude so bemessen ist, daß auch nach unendlich langer Zeit die Amplitude vorhandener ungedämpfter Schwinger nur auf endlichen Wert anwächst. In den Bildern 5.4 und 5.5 wurde versucht, diesen Grenzübergang darzustellen.

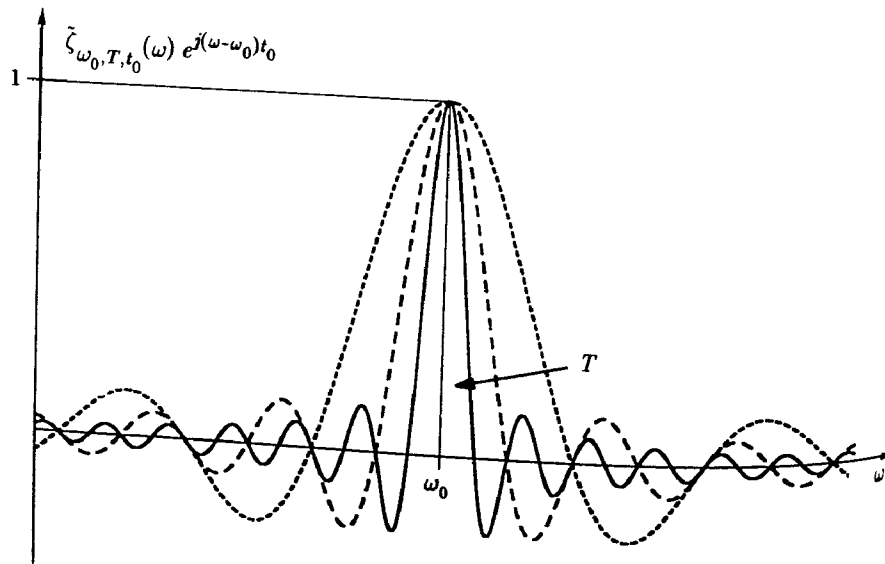


Bild 5.4: Funktionenfolge zur Darstellung der Grenzfunktion  $\tilde{\zeta}_{\omega_0}$

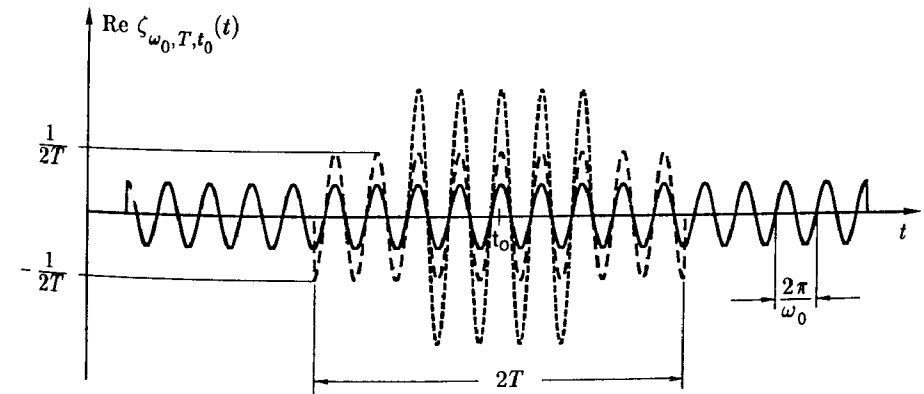


Bild 5.5: Funktionenfolge zur Darstellung der Grenzfunktion  $\zeta_{\omega_0}$

Die hier gewählten Folgenglieder besitzen noch einen »Schönheitsfehler«, dem aber leicht abzuhelfen ist. Die Funktionen (5.37), (5.38) wurden wegen ihrer leicht zu überblickenden Eigenschaften in Zusammenhang mit der FOURIER-Transformation gewählt. Sie besitzen leider den Nachteil, daß sie gar nicht zum ursprünglichen Funktionenraum  $\mathfrak{S}$  gehören, aus dem die angestrebte Erweiterung zum HILBERT-Raum  $\mathfrak{S}_a$  eigentlich vorgenommen werden sollte. Die Funktion (5.37) fällt aber für große  $\omega$  mit  $1/\omega$ . Aus (4.66) ist ersichtlich, daß auch für solche Funktionen das Arbeitsfunktional konvergiert, so daß keine Schwierigkeiten auftauchen. Es macht aber keine große Mühe, auch Funktionenfolgen in  $\mathfrak{S}$  mit  $\zeta$  als Grenz-»Funktion« zu konstruieren. Dazu verwendet man zum Beispiel statt der »harten« Modulation der Schwingung mit einem Rechtecksignal wie in (5.38) ein »weiches« Ein- und Ausblenden mit einer unendlich oft differenzierbaren Funktion, wozu die Funktion  $\chi$  nach (3.73) herangezogen werden kann:

$$(5.39) \quad \zeta_{\omega_0, T, t_0}(t) = \frac{1}{2\pi} e^{j\omega_0 t} \chi(t-t_0+T) \chi(-t+t_0+T).$$

Dann erhält man auch im Frequenzbereich eine ähnliche Funktionenfolge wie (5.37).



Wir wollen die Funktionen  $\zeta$  *quasistationär* nennen, da sie für die Steuerung quasistationärer Prozesse wichtig sind. Quasistationäre Prozesse sind solche, bei dem ein System beim Übergang von einem Gleichgewichts- oder stationären Zustand in einen anderen ausschließlich Gleichgewichts- oder stationären Zustände durchläuft. Dieser in sich widersprüchliche Begriff erweist sich in der Thermodynamik als durchaus nützlich. Wie derartige Prozesse mit den hier betrachteten  $\zeta$ -Funktionen zusammenhängen, wird in dem nachfolgenden Beispiel deutlich:

#### (5.40) Beispiel: Schwinger mit Dämpfung

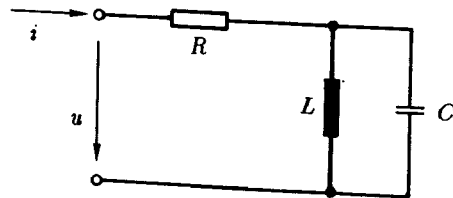


Bild 5.6: Reihenschaltung eines Parallelschwingkreises mit einem Widerstand

Die Strom-Spannungs-Übertragungsfunktion oder der *Scheinwiderstand*  $Z$  der skizzierten Schaltung lautet

$$(5.41) \quad \hat{h}(s) = Z(s) = R + \frac{Ls}{1 + LCs^2}$$

Es ist bereits anschaulich klar, daß das System nicht reversibel sein kann, da ein Teil der äußeren Leistung im Widerstand unwiederbringlich in Wärme umgewandelt wird. Ist der Parallelschwingkreis aber erst einmal angeregt, wird nach abgeschaltetem Klemmenstrom  $i$  (Klemme offen) der Schwingkreis ohne Dämpfung weiterschwingen und seine Energie behalten. Wie kann man es nun anstellen, in einem weiteren Prozeß möglichst viel von dieser Energie wieder herauszuziehen? Durch einen Stromstoß zu versuchen, beim Nulldurchgang des Spulenstroms den Kondensator plötzlich zu entladen, ist der denkbar ungünstigste Weg, da die im Widerstand entstehende JOULEsche Wärme beim idealen Stromstoß sogar unendlich wird. Immerhin erkennt man an dieser Überlegung, daß Eile bei der Entladung fehl am Platz ist, da ohne äußeres Zutun das System von sich aus weiterschwingt und keine Energie vernichtet. Eine äußere harmonische Erregung mit der Eigenfrequenz des Schwingers kann, wenn sie gegenphasig zur Eigenschwingung aufgebracht wird, ebenfalls der Entladung dienen.

Immer wird aber ein Teil der Energie während des Entladungsvorgangs im Widerstand verbraucht. Das Ergebnis wird aber um so günstiger, je mehr Zeit man sich dafür nimmt. Die vernichtete elektrische Leistung im Widerstand hängt nämlich von dem Quadrat des Stromes ab, während die Entladungszeit nur einfach umgekehrt proportional zur Amplitude des Stroms ist. Im Grenzfall unendlicher Entladungszeit ist eine vollständige Rückgewinnung der noch in System befindlichen Energie möglich. Damit sind wir aber genau bei den oben eingeführten  $\zeta$ -Funktionen. Die Entladung beginnt in einem stationären Zustand (Eigenschwingung mit der Ausgangsamplitude) und endet in dem Gleichgewichtszustand mit entladener Spule und Kondensator. Dabei werden ebenfalls nur stationäre Zustände »durchlaufen« (Eigenschwingungen mit kleineren Amplituden). Formal sieht das so aus:

Zur Übertragungsfunktion (5.41) gehört nach (4.142) die Distribution

$$(5.42) \quad \tilde{a} = R + \frac{\pi}{2C} \left( \delta(\cdot - \omega_0) + \delta(\cdot + \omega_0) \right),$$

wobei

$$(5.43) \quad \omega_0 := 1/\sqrt{LC}$$

ist. Die bis zur Zeit  $t$  von der Schaltung aufgenommene Arbeit beträgt nach (4.76)

$$(5.44) \quad W(t) = \frac{1}{4C} \left( |\tilde{i}_t(\omega_0)|^2 + |\tilde{i}_t(-\omega_0)|^2 \right) + \frac{R}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{i}_t(\Omega)|^2 d\Omega.$$

Für die Entladungssteuerung wählen wir unter Benutzung der  $\zeta$ -Funktionen

$$(5.45) \quad i^t = i_t - \tilde{i}_t(\omega_0)\zeta_{\omega_0} - \tilde{i}_t(-\omega_0)\zeta_{-\omega_0}.$$

Dadurch wird an den Stellen  $\omega = \pm\omega_0$  die FOURIER-Transformierte  $i^t$  Null und wir erhalten

$$(5.46) \quad V(t) = \frac{1}{2\pi} (\tilde{a}, |i^t|^2) = \frac{R}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{i}_t(\Omega)|^2 d\Omega = R \int_{-\infty}^t |i(\tau)|^2 d\tau.$$

Der im OHMischen Widerstand vernichtete Anteil ist natürlich verloren. Dies ist aber nur der Teil, der schon vor Beginn der Rückgewinnung vernichtet wurde. Der noch in Spule und Kondensator zur Zeit  $t$  vorhandene Energieanteil wird ohne Verlust wieder abgezogen.  $\square$

**(5.47) Bemerkung: Träger der  $\zeta$ -Funktionen**

In dem obigen Beispiel verstehen wir die  $\zeta$ -Funktionen als Grenzwerte der Funktionenfolge

$$(5.48) \quad \zeta_{\omega_0} = \lim_{T \rightarrow \infty} \zeta_{\omega_0, T, t_0},$$

wobei während des Grenzübergangs der Parameter  $t_0$  in der Form

$$(5.49) \quad t_0 = t + T$$

von  $t$  und  $T$  abhängen möge. Wie oben erwähnt, ist die Abhängigkeit für den Grenzübergang im Sinne der Topologie von  $\mathfrak{S}_a$  unerheblich. Bei dieser Wahl besitzen die Funktionen  $\zeta_{\omega_0, T, t_0}$  nur im Intervall  $(t, \infty)$  von Null verschiedene Werte, so daß auch die Grenz-Funktion  $\zeta$  als »Funktion« mit dieser Eigenschaft interpretiert werden könnte. Jede andere Verfügung über  $t_0$  als (5.49) führt aber zu anderen Interpretationen über den Träger der  $\zeta$ -Funktionen. Es ist daher nicht sinnvoll, einer  $\zeta$ -Funktion einen Träger zuzuordnen zu wollen. In der  $\zeta$ -Funktion selbst kommt nicht mehr zum Ausdruck, welche Funktionenfolge man sich zu ihrer Vorstellung gewählt hat. Es reicht uns aus, daß es immer eine Folge mit der gewünschten Eigenschaft gibt.  $\square$

Durch die Diskussion der  $\zeta$ -Funktionen, die nur einen speziellen Typ neuer »Funktionen« aus dem erweiterten Raum  $\mathfrak{S}_a$  darstellen, sind beide der in der Bemerkung (5.19) aufgeworfenen Fragen zu beantworten: Wie man an dem vorangegangenen Beispiel sieht, kann es notwendig sein, unendliche Zeit zu warten, um die noch verfügbare Energie wieder aus dem System herauszuziehen. Zum anderen sieht man, daß dazu eine gewöhnliche Funktion aus  $\mathfrak{S}$  nicht in der Lage ist. Bei einem praktischen Versuch käme man dem berechneten Wert  $V(t)$  beliebig nahe, könnte ihn tatsächlich nie erreichen.

**5.3 Bestimmung des Minimalelementes**

Wie die bestmögliche Rückgewinnung auszusehen hat, wurde in den Beispielen des vorangegangenen Absatzes durch sehr anschauliche, speziell am vorliegenden System orientierte Überlegungen bestimmt. Da dieses heuristische Verfahren bei zunehmender Komplexität seine Grenzen findet, soll eine allgemeine Bestimmungsgleichung für das minimale Element aufgestellt werden. Dies bildet dann die Grundlage für die Entwicklung eines Kriterium für die Reversibilität eines Systems im darauffolgenden Abschnitt.

Ist  $\mathfrak{v}^t$  das minimale Element bezüglich der Erregung  $\mathfrak{v}$  und des Zeitpunktes  $t$ ,

$$(5.50) \quad (\mathfrak{v}\mathfrak{v})(t) = (\mathfrak{w}\mathfrak{v}^t)(\infty),$$

mit

$$(5.51) \quad (\mathfrak{v}^t)_t = \mathfrak{v}_t,$$

so ist die geleistete Arbeit jeder anderen Erregung

$$(5.52) \quad \xi = \mathfrak{v}^t + \epsilon \mathfrak{v}$$

mit einer Funktion

$$(5.53) \quad \mathfrak{v} \in \mathfrak{S}^n : \text{supp}(\mathfrak{v}) \subset [t, \infty)$$

und  $\epsilon \in \mathbb{R}$ , größer oder gleich derjenigen von  $\mathfrak{v}^t$ :

$$(5.54) \quad (\mathfrak{w}\xi)(\infty) \geq (\mathfrak{w}\mathfrak{v}^t)(\infty).$$

Betrachten wir

$$(5.55) \quad (\mathfrak{w}\xi)(\infty) = |\xi|_a^2 = |\mathfrak{v}^t + \epsilon \mathfrak{v}|_a^2$$

bei festem  $\mathfrak{v}$  als Funktion von  $\epsilon$ , so muß das Minimum unabhängig von der gewählten Funktion  $\mathfrak{v}$  an der Stelle  $\epsilon = 0$  liegen. Das wird durch Untersuchung der 1. Ableitung nach  $\epsilon$ , der GATEAUX-Ableitung, geprüft:

$$(5.56) \quad \begin{aligned} |\mathfrak{v}^t + \epsilon \eta|_a^2 &= \langle \mathfrak{v}^t + \epsilon \eta, \mathfrak{v}^t + \epsilon \eta \rangle_a \\ &= \langle \mathfrak{v}^t, \mathfrak{v}^t \rangle_a + \epsilon \langle \mathfrak{v}^t, \eta \rangle_a + \epsilon \langle \eta, \mathfrak{v}^t \rangle_a + \epsilon^2 \langle \eta, \eta \rangle_a, \end{aligned}$$

$$(5.57) \quad \begin{aligned} \frac{d}{d\epsilon} |\mathfrak{v}^t + \epsilon \eta|_a^2 &= \langle \mathfrak{v}^t, \eta \rangle_a + \langle \eta, \mathfrak{v}^t \rangle_a + 2\epsilon \langle \eta, \eta \rangle_a \\ &= 2 \operatorname{Re} \langle \mathfrak{v}^t, \eta \rangle_a + 2\epsilon \langle \eta, \eta \rangle_a = 0. \end{aligned}$$

Daß die Nullstelle der 1. Ableitung tatsächlich ein Minimum liefert, ergibt sich bereits aus der positiven Definitheit der verwendeten Norm – letztlich eine Folge der Passivität. Die konventionelle Prüfung der 2. Ableitung führt zu demselben Ergebnis. Das Einsetzen von  $\epsilon = 0$  führt für das minimale Element  $\mathfrak{v}^t$  zu der Bedingung

$$(5.58) \quad \operatorname{Re} \langle \mathfrak{v}^t, \eta \rangle_a = 0,$$

die für alle  $\eta$  mit der Nebenbedingung (5.53) erfüllt werden muß. Ersetzen wir die Funktion  $\eta$  durch  $j\eta$ , die ebenfalls der zulässigen Menge angehört, erhalten wir

$$(5.59) \quad \operatorname{Re} \langle \mathfrak{v}^t, j\eta \rangle_a = \operatorname{Re} (-j \langle \mathfrak{v}^t, \eta \rangle_a) = \operatorname{Im} \langle \mathfrak{v}^t, \eta \rangle_a = 0.$$

Wir finden also Minimalitätsbedingung

$$(5.60) \quad \boxed{\langle \mathfrak{v}^t, \eta \rangle_a = 0 \quad \forall \eta \in \mathfrak{S}^n : \operatorname{supp}(\eta) \subset [t, \infty)}$$

#### (5.61) Bemerkung:

Wir haben als Testfunktion  $\eta$  nur solche aus dem Raum  $\mathfrak{S}^n$  zugelassen, obwohl allgemein in dem Raum  $\mathfrak{S}_a^n \supset \mathfrak{S}^n$  gearbeitet wird. Daher ist die abgeleitete Bedingung (5.60) zunächst ein *notwendiges* Kriterium für die Minimalität. Der Raum  $\mathfrak{S}_a^n$  ist aber durch Vervollständigung von  $\mathfrak{S}^n$  entstanden, oder – anders ausgedrückt –  $\mathfrak{S}^n$  ist dicht in  $\mathfrak{S}_a^n$ . Das bedeutet, jedes Element aus  $\mathfrak{S}_a^n$  kann beliebig genau im Sinne der Norm dieses Raums durch eine Funktion aus  $\mathfrak{S}^n$  genähert werden. Die Folge ist, daß die Bedingung (5.60) auch *hinreichend* für die Minimalität von  $\mathfrak{v}^t$  im Raum  $\mathfrak{S}_a^n$  ist. Die Verwendung des Raums  $\mathfrak{S}^n$  für die Testfunktionen  $\eta$  hat den Vorteil, daß es sich um wirkliche Funktionen handelt, mit denen man die Nebenbedingung durch die einfache wertemäßige Gleichung

$$(5.62) \quad \eta(\tau) = 0 \quad \text{für } \tau \leq t,$$

die gleichbedeutend mit  $\operatorname{supp}(\eta) \subset [t, \infty)$  ist, ausdrücken kann.  $\square$

An dieser Stelle sei der folgende nützliche kleine Satz eingeschoben, dessen Aussagen kaum eines Beweises Wert zu sein scheinen:

#### (5.63) Satz: Additivität des minimalen Elementes

Sind  $\mathfrak{v}_1^t$  und  $\mathfrak{v}_2^t$  die zu den Erregungen  $\mathfrak{v}_1$  und  $\mathfrak{v}_2$  gehörigen minimalen Elemente bezüglich des Zeitpunktes  $t$ , so gehört zu der zusammengesetzten Erregung

$$(5.64) \quad \mathfrak{v} = \gamma_1 \mathfrak{v}_1 + \gamma_2 \mathfrak{v}_2,$$

mit beliebigen Konstanten  $\gamma_i \in \mathbb{C}$  das minimale Element

$$(5.65) \quad \mathfrak{v}^t = \gamma_1 \mathfrak{v}_1^t + \gamma_2 \mathfrak{v}_2^t.$$

Ist weiterhin  $(\mathcal{W}\mathfrak{v}_1^t)(\infty)$  und  $(\mathcal{W}\mathfrak{v}_2^t)(\infty)$  gleich Null, so ist es auch  $(\mathcal{W}\mathfrak{v}^t)(\infty)$ .  $\square$

#### (5.66) Beweis:

Es gilt

$$(5.67) \quad \langle \mathfrak{v}^t, \eta \rangle_a = \langle \gamma_1 \mathfrak{v}_1^t + \gamma_2 \mathfrak{v}_2^t, \eta \rangle_a = \gamma_1 \langle \mathfrak{v}_1^t, \eta \rangle_a + \gamma_2 \langle \mathfrak{v}_2^t, \eta \rangle_a = 0,$$

da aus der Minimalität von  $\mathfrak{v}_1^t$  und  $\mathfrak{v}_2^t$  die Gleichung (5.60) als notwendige Bedingung folgt. Nach der Bemerkung (5.61) ist nun die Gleichung (5.67) umgekehrt hinreichend für die Minimalität des zusammengesetzten Elements.

Für die aufgenommene Arbeit gilt

$$(5.68) \quad \begin{aligned} (\mathcal{V}\mathfrak{v})(t) &= (\mathcal{W}\mathfrak{v}^t)(\infty) = \langle \mathfrak{v}^t, \mathfrak{v}^t \rangle_a \\ &= |\gamma_1|^2 \langle \mathfrak{v}_1^t, \mathfrak{v}_1^t \rangle_a + |\gamma_2|^2 \langle \mathfrak{v}_2^t, \mathfrak{v}_2^t \rangle_a + 2 \operatorname{Re} (\gamma_1 \bar{\gamma}_2 \langle \mathfrak{v}_1^t, \mathfrak{v}_2^t \rangle_a) \\ &= |\gamma_1|^2 (\mathcal{W}\mathfrak{v}_1^t)(\infty) + |\gamma_2|^2 (\mathcal{W}\mathfrak{v}_2^t)(\infty) + 2 \operatorname{Re} (\gamma_1 \bar{\gamma}_2 \langle \mathfrak{v}_1^t, \mathfrak{v}_2^t \rangle_a). \end{aligned}$$

Wegen der Passivität kann die Summe nicht negativ sein. Ist aber die von  $\mathfrak{v}_1^t$  und  $\mathfrak{v}_2^t$  geleistete Arbeit Null, darf der letzte Summand nicht negativ werden. Da aber sein

Vorzeichen durch Wahl von  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  beliebig eingestellt werden könnte, bleibt nur die Möglichkeit, daß auch dieser Summand und damit die gesamte Summe Null ist.

Unter Ausnutzung der Eigenschaften des HILBERT-Raums kann dieser Beweis wesentlich schneller geführt werden: Leisten die Erregungen  $\vartheta_1^t, \vartheta_2^t$  die Gesamtarbeit Null, so gehören sie zur Nullklasse, also

$$(5.69) \quad \vartheta_1^t = \vartheta_2^t = 0$$

im Sinne der Topologie des Raums  $\mathfrak{S}_a^n$ . Jede Linearkombination von Nullelementen ist ebenfalls Null.  $\square$

Zur weiteren Auswertung der Minimalitätsbedingung (5.60) gehen wir nach (5.32) in den Frequenzbereich über:

$$(5.70) \quad \begin{aligned} \langle \vartheta^t, \eta \rangle_a &= \frac{1}{2\pi} \langle \vartheta^t, \tilde{\eta} \rangle_a \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_i \tilde{\eta}^\dagger(\omega_i) \alpha_i \vartheta^t(\omega_i) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\eta}^\dagger(\Omega) \tilde{a}_0(\Omega) \vartheta^t(\Omega) d\Omega = 0 \end{aligned}$$

Verwendet man die  $\zeta$ -Funktion\* nach (5.36), die auch durch Grenzübergang einer geeigneten Funktionenfolge mit Trägern aus  $[t, \infty)$  zu erhalten ist, als Testfunktion entsprechend

$$(5.71) \quad \eta = e_k \zeta_{\omega_i}$$

mit beliebigen Einheitsvektoren  $e_k$ , erhält man als erste Auswertung der Gleichung

$$(5.72) \quad \boxed{\alpha_i \vartheta^t(\omega_i) = 0}.$$

Der Vektor  $\vartheta^t(\omega_i)$  muß im Nullraum der Matrix  $\alpha_i$  liegen. Im skalaren Fall folgt, da  $\alpha_i$  stets ungleich Null ist,

$$(5.73) \quad \vartheta^t(\omega_i) = 0.$$

Nun ist noch

$$(5.74) \quad \boxed{\langle \vartheta^t, \tilde{\eta} \rangle_{\tilde{a}_0} = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\eta}^\dagger(\Omega) \tilde{a}_0(\Omega) \vartheta^t(\Omega) d\Omega = 0}$$

zu befriedigen. Bezüglich dieser Bedingung macht es keinen Unterschied, ob wir im Raum  $\mathfrak{S}_a^n$  oder  $\mathfrak{S}_{a_0}^n$  arbeiten, also den singulären Anteil von  $a$  beiseite lassen.

Die Aussage, daß ein Element  $\tilde{\vartheta}$  zum Raum

$$(5.75) \quad \mathfrak{S}_{a_0}^n = L_2^n(\tilde{a}_0)$$

gehört, ist gleichbedeutend mit der absoluten Integrierbarkeit von  $\tilde{\vartheta}^\dagger \tilde{a}_0 \tilde{\vartheta}$ :

$$(5.76) \quad \tilde{\vartheta}^\dagger \tilde{a}_0 \tilde{\vartheta} \in L_1.$$

Bezeichnet  $\sqrt{\tilde{a}_0(\omega)} \in C^{n \times n}$  die positiv semidefinite HERMITESche Wurzel von  $\tilde{a}_0(\omega)$ , die für eine positiv semidefinite HERMITESche Matrix immer existiert und eindeutig bestimmt ist, folgt mit der Umformung

$$(5.77) \quad \tilde{\vartheta}^\dagger \tilde{a}_0 \tilde{\vartheta} = \left( \tilde{\vartheta}^\dagger \sqrt{\tilde{a}_0} \right) \left( \sqrt{\tilde{a}_0} \tilde{\vartheta} \right) = \left| \sqrt{\tilde{a}_0} \tilde{\vartheta} \right|^2 \in L_1$$

die quadratische Integrierbarkeit von  $\sqrt{\tilde{a}_0} \tilde{\vartheta}$ :

$$(5.78) \quad \sqrt{\tilde{a}_0} \tilde{\vartheta} \in L_2^n.$$

Andererseits ist  $\tilde{a}_0$  wegen (4.66) selbst quadratisch integrierbar mit der Gewichtung  $1/(c^2 + (\cdot)^2)$ ,

$$(5.79) \quad \tilde{a}_0 \in L_1^{n \times n} \left( (c^2 + (\cdot)^2)^{-1} \right),$$

so daß für die Wurzel

$$(5.80) \quad \sqrt{\tilde{a}_0} \in L_2^{n \times n} \left( (c^2 + (\cdot)^2)^{-1/2} \right)$$

folgt. Mit Hilfe des Satzes (B.8) über die HÖLDERSche Ungleichung ergibt sich dann die Aussage

$$(5.81) \quad \tilde{a}\tilde{v} = \sqrt{\tilde{a}_0} (\sqrt{\tilde{a}_0} \tilde{v}) \in L_1^n \left( (c^2 + (\cdot)^2)^{-1/2} \right) \in \mathfrak{S}^n.$$

Das Produkt  $\tilde{a}\tilde{v}$  ist eine gewöhnliche, lokal integrierbare Funktion, die zudem wegen ihres Wachstumsverhaltens zu den temperierten Funktionen und damit zu den temperierten Distributionen gehört. Daher ist auch die zugehörige Zeitfunktion

$$(5.82) \quad \mathcal{F}^{-1}(\tilde{a}\tilde{v}) = a * v \in \mathfrak{S}^n.$$

aus diesem Raum. Obwohl zwar  $\tilde{v} \in \tilde{\mathfrak{S}}_a^n$  im Zeitbereich die »Funktion«  $v \in \mathfrak{S}_a^n$  zugeordnet ist, ist eine Faltung mit beliebigen Elementen aus diesem erweiterten Raum nicht definiert. Aus Zweckmäßigkeitsgründen machen wir trotzdem formal von dem Faltungssymbol  $*$  Gebrauch, meinen aber mit  $a*v$  nicht mehr als die zu  $\tilde{a}\tilde{v}$  gehörende Rücktransformierte. Mit diesen Aussagen kann die Gleichung (5.74) in den Zeitbereich übertragen werden:

$$(5.83) \quad \frac{1}{2\pi} \langle \tilde{v}^t, \tilde{\eta} \rangle_{\tilde{a}_0} = \frac{1}{2\pi} \overline{(\tilde{a}_0 \tilde{v}^t, \tilde{\eta})} = \overline{(a_0 * v^t, \eta)} = 0$$

für alle  $\eta \in \mathfrak{S}^n$ , die im Intervall  $(-\infty, t]$  verschwinden.

Obwohl diese Umformung trivial anmutet, ist sie ohne die vorangegangenen Überlegungen nicht möglich: Das innere Produkt  $\langle \cdot, \cdot \rangle_a$  ging durch Verallgemeinerung aus der Produktklammer  $(\cdot, \cdot)$  hervor. Nach der Vervollständigung zum HILBERT-Raum darf man diese Ersetzung aber im allgemeinen nicht mehr rückgängig machen. Durch die obigen Schlüsse wurde gezeigt, daß dies im vorliegenden speziellen Fall dennoch möglich ist.

In der Gestalt (5.83) kann die Minimalitätsbedingung neu interpretiert werden: Da das Funktional für alle Testfunktionen, die im Intervall  $(t, \infty)$  nicht verschwinden, Null sein muß, folgt

$$(5.84) \quad \boxed{a_0 * v^t = 0 \text{ in } (t, \infty)}$$

Für den Träger der Distribution  $a_0 * v^t$  ergibt sich also die Aussage

$$(5.85) \quad \text{supp}(a_0 * v^t) \subset (-\infty, t].$$

Die Bedingung (5.84) ist wie die erste Schlussfolgerung (5.72) eine Implikation aus der notwendigen und hinreichenden Minimalitätsbedingung (5.60). Jede einzelne der

Gleichungen (5.72) und (5.84) ist notwendig für die Minimalität. Beide zusammen ergeben eine hinreichende Bedingung.

Der Vorteil der neuen Formulierung besteht darin, daß sie frei ist von der Verwendung der ursprünglichen Testfunktionen  $\eta$ . Diese Gleichung kann auch direkt zur Berechnung der bestmöglichen Rückgewinnung ausgenutzt werden, sofern sich als Lösung für  $v^t$  eine herkömmliche Funktion oder Distribution ergeben sollte. Nur dann darf das bisher formal als Faltung geschriebene Produkt auch tatsächlich mit den bekannten Rechenregel der Faltung bearbeitet werden. Andernfalls muß man im FOURIER-Bereich bleiben.

(5.86) Beispiel:

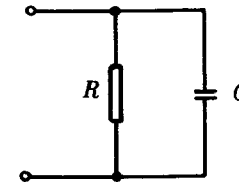


Bild 5.7: RC-Glied

Das dargestellte RC-Glied besitzt den Scheinwiderstand

$$(5.87) \quad \hat{h}(s) = Z(s) = \frac{R}{1 + sRC}.$$

Dazu gehört die Gewichtsfunktion

$$(5.88) \quad h(t) = \frac{1}{C} e^{-t/\tau}, \quad \tau := RC.$$

Der HERMITESche Anteil lautet daher

$$(5.89) \quad a(t) = a_0(t) = \frac{1}{2C} e^{-|t|/\tau}.$$

Ein singulärer Anteil  $a_s$  tritt nicht auf. Auf das System wird irgendeine Stromerregung  $i$  aufgebracht. Zur Zeit  $T$  beendet man diese Erregung (davon unberührt ist die Funktion  $i$  auch für  $t > T$  definiert) und sucht nach der bestmöglichen Fortführung der Steuerung, um die Energie des aufgeladenen Kondensators wieder herauszuziehen. Die gesuchte (minimale) Steuerung können wir in die Form

$$(5.90) \quad i^T = i_T + i_F$$

bringen, wobei  $i_T$  die Erregungsvorgabe im Zeitintervall  $(-\infty, t)$  und  $i_F$  die zu bestimmende Fortsetzung im Zeitintervall  $[t, \infty)$  ist. Die Bedingung (5.72) tritt hier nicht auf, da keine singulären Stellen existieren. Die Auswertung von (5.84) führt zu

$$(5.91) \quad a_0 * i^T = a_0 * i_T + a_0 * i_F.$$

Es ist für  $t \geq T$

$$(5.92) \quad (a_0 * i_T)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a_0(t-\tilde{t}) i_T(\tilde{t}) d\tilde{t} = \frac{1}{2C} \int_{-\infty}^T e^{-(t-\tilde{t})/\tau} i(\tilde{t}) d\tilde{t}$$

$$\frac{1}{2C} e^{-t/\tau} \int_{-\infty}^T e^{\tilde{t}/\tau} i(\tilde{t}) d\tilde{t} =: A e^{-t/\tau}.$$

Für den freien Anteil  $i_F$  lautet also die Bestimmungsgleichung

$$(a_0 * i_F)(t) = \frac{1}{2C} (e^{-|\cdot|/\tau} * i_F)(t) = -A e^{-t/\tau}$$

für  $t > T$ . Bei der Faltung muß die Exponentialfunktion reproduziert werden. Dies leistet die  $\delta$ -Distribution. Da der Träger von  $i_F$  im Intervall  $[T, \infty)$  zu liegen hat, setzen wir

$$(5.93) \quad i_F = B \delta(\cdot - T)$$

als Lösung an:

$$(5.94) \quad (a_0 * i_F)(t) = \frac{B}{2C} e^{-|t-T|/\tau} = \frac{B}{2C} e^{(T-t)/\tau} = -A e^{-t/\tau}$$

für  $t > T$ . Es ergibt sich

$$(5.95) \quad B = -2AC e^{-T/\tau}$$

und

$$(5.96) \quad i^T = i_T - q_0 \delta(\cdot - T),$$

mit

$$(5.97) \quad q_0 := \int_{-\infty}^T e^{(\tilde{t}-T)/\tau} i(\tilde{t}) d\tilde{t}.$$

Der Kondensator wird durch einen plötzlichen Stromstoß entladen. Die dabei abgeführte elektrische Ladung ist die Größe  $q_0$ . Wie man leicht nachprüft, ist dies tatsächlich die Ladung, die der Kondensator zum Zeitpunkt  $t = T-0$  besaß, so daß er danach ladungsfrei ist. In Bild 5.8 ist die »Funktion«  $i^T$  dargestellt.

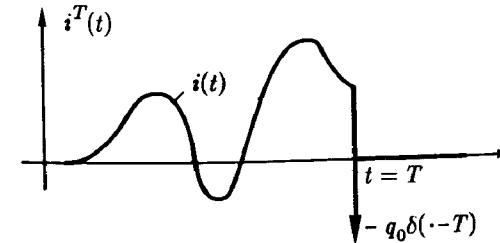


Bild 5.8: Stromführung zur optimalen Entladung des RC-Gliedes

## 5.4 Das Reversibilitätskriterium

Die Bestimmung des minimalen Elementes im vorangegangenen Abschnitt war unabhängig von der Frage nach der Reversibilität. Die weitere Auswertung der Bedingung (5.84) für den Fall der reversiblen Systeme wird uns zu dem Kriterium von PALEY und WIENER führen, welches ursprünglich aus einem ganz anderen Themenkreis stammt, nämlich der Charakterisierung kausaler Funktionen im Frequenzbereich.

Bei reversiblen Systemen gilt definitionsgemäß für alle minimalen »Funktionen«  $v^t$  beliebiger Erregungen

$$(5.98) \quad (w v^t)(\infty) = |v^t|_\infty = 0.$$

Da aus der Bedingung

$$(5.99) \quad (v^t)_t = v_t$$

unmittelbar

$$(5.100) \quad (v^t)_{t_1} = v_{t_1}$$

für jede Zeit  $t_1 < t$  folgt und wegen (5.98) ein besserer Wert als Null nicht erreicht

werden kann, bedeutet dies, daß für die Erregung  $v$  die »Funktion«  $v^t$  nicht nur minimal bezüglich des Zeitpunktes  $t$  sondern auch für jede andere Zeit  $t_1 < t$  ist. Das führt in Bezug auf das Minimalitätskriterium (5.84) zu der Aussage

(5.101)

$$a_0 * v^t = 0$$

auf der gesamten reellen Achse. Die Übertragung in den Frequenzbereich ergibt

(5.102)

$$\tilde{a}_0 \tilde{v}^t = 0;$$

sofern die Funktion  $v^t$  existiert, muß  $v^t(\omega)$  im Nullraum von  $\tilde{a}_0(\omega)$  liegen. Besitzt  $\tilde{a}_0(\omega)$  vollen Rang, bleibt nur  $v^t(\omega) = 0$ .

### 5.4.1 Das Reversibilitätskriterium für Eingrößensysteme

Um zu dem eigentlich angestrebten Reversibilitätskriterium zu gelangen, gehen wir besser von der Gleichung (5.84) aus, wobei wir die eben gewonnen Einblicke noch nicht verarbeiten. Die Reversibilität wird im Folgenden nicht vorausgesetzt. Sie wird sich automatisch als Klassifikation ergeben. Zunächst betrachten wir nur Eingrößensysteme: Nach (5.85) muß die Distribution  $a_0 * v^t$  einen Träger aus dem Intervall  $(-\infty, t]$  besitzen. Um dies zu prüfen, bietet sich das im Anhang B.5 bereitgestellte Kriterium von PALEY und WIENER an. In der Fassung (B.66) erlaubt es die unmittelbare Anwendung auf die Distribution  $a_0 * v^t$  bzw. ihre FOURIER-Transformierte  $\tilde{a}_0 \tilde{v}^t$ . Danach gilt als notwendige Bedingung für (5.85) die Konvergenz des Integrals

(5.103)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln |\tilde{a}_0(\Omega) \tilde{v}^t(\Omega)||}{c^2 + \Omega^2} d\Omega,$$

wenn  $\tilde{a}_0 \tilde{v}^t$  ungleich Null ist. Das drücken wir in Kurzschreibweise durch

(5.104)

$$\ln |\tilde{a}_0 \tilde{v}^t| \in L_1^* := L_1((c^2 + (\cdot)^2)^{-1})$$

aus. Es soll nun gezeigt werden, daß beim Eintreten der Bedingung (5.104) sogar jeder einzelne Summand von

(5.105)

$$\ln |\tilde{a}_0 \tilde{v}^t| = \ln |\tilde{a}_0| + \ln |\tilde{v}^t|$$

zum Raum  $L_1^*$  gehören muß. Dadurch werden wir zu einem von der speziellen »Funktion«  $v^t$  unabhängigen Kriterium an  $\tilde{a}_0$  gelangen.

Wir definieren für positiv reelle Argumente  $x$  die Funktionen

(5.106)

$$\ln^+ x := \begin{cases} \ln x & \text{für } x > 1 \\ 0 & \text{für } 0 < x \leq 1 \end{cases} \geq 0,$$

(5.107)

$$\ln^- x := \begin{cases} 0 & \text{für } x > 1 \\ \ln x & \text{für } 0 < x \leq 1 \end{cases} \leq 0.$$

Damit gilt

(5.108)

$$\ln x = \ln^+ x + \ln^- x$$

und

(5.109)

$$0 \leq \ln^+ x < x.$$

Statt (5.105) kann man damit

(5.110)

$$\ln |\tilde{a}_0 \tilde{v}^t| = \ln^+ \tilde{a}_0 + \ln^- \tilde{a}_0 + \ln^+ |\tilde{v}^t| + \ln^- |\tilde{v}^t|$$

schreiben. Da  $\tilde{a}_0$  eine nicht negative Funktion ist, können bei ihr die Betragsstriche entfallen. Der rechte Teil der Gleichung muß nach (5.104) aus  $L_1^*$  sein. Der Formel (5.79) ist zu entnehmen, daß auch die Funktion  $\tilde{a}_0$  diesem Raum angehört. Wegen der Abschätzung (5.109) ist daher auch  $\ln^+ \tilde{a}_0 \in L_1^*$ . Als Folgerung ergibt sich, daß dann die letzten drei Summanden in (5.110) zusammen ebenfalls eine Funktion aus diesem Raum ergeben müssen:

(5.111)

$$\underbrace{\ln^+ \tilde{a}_0}_{\in L_1^*} + \underbrace{\ln^- \tilde{a}_0}_{\in L_1^*} + \underbrace{\ln^+ |\tilde{v}^t| + \ln^- |\tilde{v}^t|}_{\Rightarrow \in L_1^*} \leq 0 \quad \geq 0 \quad \leq 0$$

Da von den letzten beiden Funktionen in (5.110) an einer Stelle  $\omega$  immer nur eine von Null verschieden sein kann, folgt im nächsten Schritt, daß auch

$$(5.112) \quad \ln^- |\tilde{v}^t| \in L_1^*$$

gilt, denn angenommene Divergenzen dieser Funktion könnten auch durch  $\ln^- \tilde{a}_0$  nicht ausgeglichen werden, da diese Funktion ebenfalls negativ ist. Nun gilt weiter

$$(5.113) \quad \underbrace{\ln^+ |\tilde{a}_0(\tilde{v}^t)^2|}_{\in L_1^*} + \underbrace{\ln^- |\tilde{a}_0(\tilde{v}^t)^2|}_{\leq 0} = \ln |\tilde{a}_0(\tilde{v}^t)^2| = \ln |\tilde{a}_0 \tilde{v}^t| + \ln |\tilde{v}^t|$$

$$= \underbrace{\ln |\tilde{a}_0 \tilde{v}^t|}_{\in L_1^*} + \underbrace{\ln^+ |\tilde{v}^t|}_{\geq 0} + \underbrace{\ln^- |\tilde{v}^t|}_{\in L_1^*}.$$

Die Aussage, daß die links stehende Funktion aus  $L_1^*$  ist, entnehmen wir (5.76) und der Abschätzung (5.109). Mit der gleichen Schlußweise wie oben folgt hieraus

$$(5.114) \quad \ln^+ |\tilde{v}^t| \in L_1^*.$$

Zusammen mit (5.112) ist nun die Zugehörigkeit von  $\ln |\tilde{v}^t|$  zu  $L_1^*$  nachgewiesen und - was das wichtigere Ergebnis darstellt - mit (5.105) auch die der Funktion  $\tilde{a}_0$ :

$$(5.115) \quad \tilde{a}_0 \in L_1^*.$$

#### (5.116) Zusammenfassung:

Aus der Minimalitätsbedingung (5.85) folgt die Aussage (5.115), wenn  $\tilde{a}_0 \tilde{v}^t$  nicht Null ist. Ist (5.115) nicht erfüllt, konvergiert also das Integral

$$(5.117) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln \tilde{a}_0(\Omega)|}{c^2 + \Omega^2} d\Omega,$$

nicht, bleibt nur die Möglichkeit

$$(5.118) \quad \tilde{a}_0 \tilde{v}^t = 0.$$

Für die Funktion  $\tilde{v}^t$  führt das auf die Bedingung

$$(5.119) \quad \boxed{\tilde{v}^t(\omega) = 0 \quad \forall \omega \in \text{supp}(\tilde{a}_0) \cup \{\omega_i\} = \text{supp}(\tilde{a})},$$

worin auch die nicht zu vergessende erste Folgerung (5.72) bzw. (5.73) verarbeitet wurde.  $\square$

Es ist nun zu zeigen, daß das Eintreten der Integrabilitätsbedingung (5.117) die Reversibilität bzw. Irreversibilität des Systems anzeigt. Wird die Bedingung (5.118) für alle Erregungen  $v$  und Zeiten  $t$  erfüllt, ist das System - wie wir bereits oben in Abschnitt 5.4 erkannt haben - reversibel. Wird (5.118) für irgendeine spezielle Erregung verletzt, ist das System irreversibel. Dann muß der Logarithmus von  $\tilde{a}_0$  die Integrabilitätsbedingung (5.117) erfüllen. Die Irreversibilität impliziert also (5.117). Die Umkehrung dieser Aussage wird durch ihre Negation »aus der Verletzung von (5.117) folgt Reversibilität« nachgewiesen:

Ist nämlich (5.117) nicht erfüllt, muß statt dessen (5.118) gelten, und zwar unabhängig von der speziellen Erregung, also für alle Erregungen. Das bedeutet nach dem oben gesagten Reversibilität. Wir fassen diese Aussagen zu einem Satz zusammen:

#### (5.120) Satz: Reversibilitätskriterium für Eingrößensysteme

Ein Eingrößensystem ist genau dann reversibel, wenn das Integral

$$(5.121) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln \tilde{a}_0(\Omega)|}{c^2 + \Omega^2} d\Omega,$$

nicht konvergiert, also

$$(5.122) \quad \ln \tilde{a}_0(\Omega) \notin L_1^*.$$

$\square$

Der singuläre Anteil  $\tilde{a}_s$  ist für die Frage nach der Reversibilität unerheblich. Es entscheidet allein der lokal integrierbare Anteil  $\tilde{a}_0$ .

Unter welchen Bedingungen kommt es nun zu einer Divergenz oder Konvergenz des Integrals (5.121)? Da  $\tilde{a}_0$  stets lokal integrierbar ist, folgt aufgrund der Abschätzung (5.109) die Integrierbarkeit der »positiven Werte«  $\ln^+ \tilde{a}_0$  des Logarithmus. Divergenzen des Integrals werden allein durch die »negativen Werte«  $\ln^- \tilde{a}_0$  des Logarithmus hervorgerufen. Mögliche Unendlichkeitsstellen von  $\tilde{a}_0$  sind also für die Integrierbarkeit



ohne Belang, aber an Nullstellen von  $\tilde{a}_0$  können Divergenzen auftreten. Damit das Integral konvergiert, ist zunächst notwendig, daß

$$(5.123) \quad \tilde{a}_0(\omega) \neq 0$$

für fast alle  $\omega \in \mathbf{R}$  gilt, also nur diskrete Nullstellen vorhanden sind. Ist nämlich

$$(5.124) \quad \tilde{a}_0(\omega) = 0$$

in einem Intervall  $\omega \in (\Omega_1, \Omega_2)$  oder sogar für alle  $\omega \in \mathbf{R}$ , so ist das Integral auf jeden Fall divergent, das System damit reversibel. Die Umkehrung ist aber keineswegs richtig. Auch wenn nur diskrete Nullstellen von  $\tilde{a}_0$  vorhanden sein sollten, ist Reversibilität möglich. Sogar wenn  $\tilde{a}_0$  überall von Null verschieden ist, kann das Integral (5.121) divergieren und damit Reversibilität vorliegen.

#### (5.125) Beispiel:

Ein Beispiel in dieser Richtung gibt das System mit der Gewichtsfunktion

$$(5.126) \quad h(t) = e^{-t^2/(2T^2)}.$$

Für  $t \rightarrow \infty$  strebt  $h(t)$  gegen Null, länger zurückliegende Werte der Eingangsfunktion werden also immer schwächer gewichtet, das System »vergißt« die Vorgeschichte mehr und mehr. Das ist schon recht merkwürdig, da man von einem reversiblen System erwartet, daß es die an ihm geleistete Arbeit *nicht* vergißt. Zeigen wir also, daß tatsächlich Reversibilität vorliegt: Zu (5.126) gehört im Frequenzbereich die Funktion

$$(5.127) \quad \tilde{h}(\omega) = \sqrt{\pi/2} T e^{-(\omega T)^2/2} \operatorname{erfc}(j\omega T/\sqrt{2}),$$

wozu man die Korrespondenztabelle von DOETSCH [14] heranziehen kann (siehe auch Tabelle (4.12), Nr. 13. Das Komplement der Fehlerfunktion  $\operatorname{erfc}$  besitzt für imaginäre Argumente den Realteil 1, so daß

$$(5.128) \quad \tilde{a}(\omega) = \sqrt{\pi/2} T e^{-(\omega T)^2/2}$$

folgt. In diesem Fall ist es übersichtlicher, zuerst im Zeitbereich auf

$$(5.129) \quad a(t) = \frac{1}{2} e^{-t^2/(2T^2)}$$

überzugehen und erst dann in den Frequenzbereich zu transformieren. Man erkennt,

daß sich dieser Funktionentyp unter der FOURIER-Transformation reproduziert. Ein singulärer Anteil tritt nicht auf; daher ist  $\tilde{a} = \tilde{a}_0$ . Für den Logarithmus erhält man

$$(5.130) \quad \ln \tilde{a}_0 = \ln \tilde{a} = \frac{1}{2} \ln \frac{\pi}{2} + \ln T - \frac{1}{2} (\omega T)^2.$$

Im Integral (5.121) geht eine Gewichtung mit  $1/\omega^2$  ein. Dann strebt der Integrand für große  $\omega$  gegen eine Konstante, weshalb das Integral mit den uneigentlichen Grenzen  $\pm\infty$  divergiert.

Man muß sich fragen, wie bei einem derartigen System die Rückgewinnungsfunktion, das minimale Element  $v^t$ , auszusehen hat, da doch die Gleichung (5.119) nur die Möglichkeit

$$(5.131) \quad v^t(\omega) = 0 \quad \forall \omega \in \mathbf{R}$$

zuläßt. Das scheint einen Widerspruch darzustellen, da man eine Erregung im Zeitintervall  $(-\infty, t)$  nicht durch eine Fortsetzung im disjunkten Intervall  $[t, \infty)$  kompensieren kann. Hier muß abermals an die zugrunde liegende Topologie des Raums  $\mathfrak{S}_\bullet$  erinnert werden: Man kann Folgen von Polynomen in  $\omega$  zunehmenden Grades konstruieren, die in einem Bereich  $(-\Omega, \Omega)$  immer besser der Nullfunktion angepaßt werden. Außerhalb dieses Bereichs wachsen sie entsprechend ihrem Grad mit einer immer höher werdenden Potenz von  $\omega$ . Läßt man bei einer derartigen Folge auch die Grenze  $\Omega$  immer größer werden, konvergiert sie im Sinne der Norm von  $\mathfrak{S}_\bullet$  gegen die Nullfunktion, da  $\tilde{a}(\omega)$  für  $\omega \rightarrow \infty$  schneller fällt, als jede Potenz von  $\omega$  anwächst. Auch im Sinne einer punktwisen Beschreibung wie (5.131) ergibt sich als Grenzwert die »Nullfunktion«. Derartige Polynomfolgen korrespondieren im Zeitbereich mit Folgen von Stoßfunktionen immer höherer Ordnung, die auch im Sinne von Distributionen nicht zu begreifen sind, sondern nur im Raum  $\mathfrak{S}_\bullet$  ihren Platz finden. Daß derartige komplizierte »Funktionen« zur Nullklasse gehören, entspricht zwar nicht unserer anschaulichen Vorstellungen aber jenen des Raums  $\mathfrak{S}_\bullet$ .

Aus Platzgründen wird darauf verzichtet, mit diesen Überlegungen geeignete Folgen zur Rückgewinnung zu konstruieren. Es sei aber soviel gesagt, daß es tatsächlich möglich ist, die am System geleistete Arbeit im Grenzfall wieder herauszuziehen. Die Konvergenz dieser Folgen verschlechtert sich aber beträchtlich (wenn sie auch immer konvergent bleiben) je mehr Zeit man verstreichen läßt, bevor man mit der Rückgewinnung beginnt. Das ist eine Folge des »vergessenden Gedächtnisses« des Systems. Je länger man wartet, desto größer wird der zu treibende Aufwand, die Arbeit wieder herauszuholen.

Leider ist bisher nicht bekannt, ob und bei welchem physikalischen System eine derartige interessante Gewichtsfunktion auftritt. Man findet diese zwar häufig in Büchern über die LAPLACE- oder FOURIER-Transformation, doch tritt sie dort in der Regel bei einer Lösung einer partiellen Differentialgleichung im *Ortsbereich* auf, während sie hier als Gewichtung in der *Zeit* auftaucht.  $\square$

In der nachfolgenden Tabelle sind einige reversible Systeme zusammengestellt. Sie unterteilen sich in zwei Gruppen, die dadurch ausgezeichnet sind, ob der lokal integrierbarer Anteil Null ist oder nicht. Wir werden im Abschnitt 5.5 auf die unterschiedlichen Eigenschaften dieser beiden Gruppen eingehen. Man vergleiche auch die Tabelle (4.12) Nr. 1, 3, 7, 11, 12 und 13.

(5.132) Tabelle einiger reversibler Systeme

Nr		$h(t)$	$\tilde{a}_0(\omega)$	$\tilde{a}_s$
1	Integrierer	$\sigma(t)$	0	$\pi\delta$
2	Differenzierer	$\delta(t)$	0	0
3	Schwinger	$\cos_+ at$	0	$\frac{\pi}{2}(\delta(\cdot+a)+\delta(\cdot-a))$
4	Leitung	$\delta(t) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \delta(t-2kT)$	0	$\frac{\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\cdot - \frac{k\pi}{T})$
5		$\sin_+ at / t$	$\frac{\pi}{2} \sigma(a -  \omega )$	0
6		$e_+^{-t^2/2T^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} T e^{-(\omega T)^2/2}$	0

### 5.4.2 Reversible Systeme mit rationalen Übertragungsfunktionen

Liegt eine rationale Übertragungsfunktion

$$(5.133) \quad \hat{h}(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$$

vor, erhält man den lokal integrierbaren Anteil  $\tilde{a}_0$  nach (4.144) durch

$$(5.134) \quad \tilde{a}_0(\omega) = \operatorname{Re} \hat{h}(j\omega).$$

Die Funktion  $\tilde{a}_0$  ist dann selbst rational, wegen der Nicht-Negativität von  $\tilde{a}_0$  besitzt sie die Form

$$(5.135) \quad \tilde{a}_0(\omega) = A \frac{\prod_i (\omega^2 + R_i^2)}{\prod_i (\omega^2 + Q_i^2)}.$$

Daraus folgt

$$(5.136) \quad \ln \tilde{a}_0(\omega) = \ln A + \sum_i \ln(\omega^2 + R_i^2) - \sum_i \ln(\omega^2 + Q_i^2).$$

Jedes einzelne Integral

$$(5.137) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(\Omega^2 + R_i^2)}{c^2 + \Omega^2} d\Omega$$

konvergiert wie auch diejenigen mit  $Q_i$ . Daher ist ein derartiges System nach dem Kriterium (5.120) stets irreversibel, es sei denn,  $A$  ist Null und damit die ganze Funktion:

$$(5.138) \quad \tilde{a}_0 = 0.$$

Das ist die einzige Möglichkeit, bei der Reversibilität auftreten kann. Die Übertragungsfunktion kann in diesem Fall nur imaginäre Null- und Polstellen besitzen:

**(5.139) Satz: Reversibilitätskriterium für Systeme mit rationalen Übertragungsfunktionen**

Ein passives Eingrößensystem mit einer rationalen Übertragungsfunktion  $\hat{h}$  ist genau dann reversibel, wenn  $\hat{h}$  nur imaginäre Null- und Polstellen besitzt. Dann ist der

Anteil  $\tilde{a}_0$  identisch Null.

□

### 5.4.3 Das Reversibilitätskriterium für Mehrgrößensysteme

Wir können die Ergebnisse für den Eingrößenfall verwenden, um zu Aussagen über den Mehrgrößenfall zu kommen. Die Zuordnung von Ein- und Mehrgrößensystemen kann in der bekannten Weise

$$(5.140) \quad h_{\kappa} := \kappa^{\dagger} h \kappa,$$

$$(5.141) \quad a_{\kappa} := \kappa^{\dagger} a \kappa$$

mit einem konstanten Vektor  $\kappa$  vorgenommen werden. Ist nun  $h_{\kappa}$  ein reversibles Eingrößensystem, existiert für jedes  $v$  und  $t$  ein minimales Element  $v^t$  mit

$$(5.142) \quad |v^t|_{a_{\kappa}} = |\kappa v^t|_{\kappa} = 0.$$

Vektoriell ausgedrückt heißt dies, daß zu  $\kappa v$  das minimale Element  $\kappa v^t$  gehört. Jede vektorielle Erregung  $v$  des Mehrgrößensystems  $h$  kann in einer Linearkombination

$$(5.143) \quad v = \sum_i \kappa_i v_i$$

mit konstanten Vektoren  $\kappa_i$  und skalaren Funktion  $v_i$  dargestellt werden. Zu jedem einzelnen Summanden  $\kappa_i v_i$  gehört nach den obigen Überlegungen das Minimalelement  $\kappa_i v_i^t$ , die, jedes für sich, nach (5.142) die Gesamtarbeit Null leisten. Nach Satz (5.63) erhält man das minimale Element für die Summe (5.143) durch Summation der einzelnen Minimalelemente

$$(5.144) \quad v^t = \sum_i \kappa_i v_i^t,$$

für das ebenfalls

$$(5.145) \quad (\mathcal{W} v^t)(\infty) = (\nu v)(t) = 0$$

gilt. Das bedeutet, aus der Reversibilität des Eingrößensystems  $h_{\kappa}$  für alle konstanten  $\kappa$  folgt die Reversibilität des Mehrgrößensystems  $h$ . Es ist eigentlich gar nicht notwendig, alle  $\kappa \in C^n$  zu prüfen. Eine Linearkombination (5.143) ist immer möglich, wenn die  $\kappa_i$  eine Basis in dem dem Vektorraum  $C^n$  bilden. Es reicht aus, nur die  $n$  unabhängigen

Vektoren einer beliebigen Basis zu testen:

#### (5.146) Satz: Hinreichendes Reversibilitätskriterium für Mehrgrößensysteme

Ein Mehrgrößensystem ist reversibel, wenn mit einer willkürlich gewählten Basis  $\kappa_i \in C^n$  das Integral

$$(5.147) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln \kappa_i^{\dagger} \tilde{a}_0(\Omega) \kappa_i|}{c^2 + \Omega^2} d\Omega$$

für *kein*  $i$  konvergiert, also

$$(5.148) \quad \ln \kappa_i^{\dagger} \tilde{a}_0 \kappa_i \notin L_1^* \quad \forall i.$$

□

Es sei daran erinnert, daß in der Definition (5.2) der Reversibilität die Forderung  $(\nu v)(t) = 0$  für *alle*  $v$  erhoben wurde. Es ist durchaus möglich, daß bei einem nach dieser Definition irreversiblen System Erregungsteilräume existieren, in denen die verlorene Arbeit stets Null ist. Das ist z. B. der Fall, wenn (5.148) für einige  $i$ , aber nicht für alle erfüllt ist. Man kann das in der Weise deuten, daß es in einem irreversiblen System durchaus reversible Untersysteme geben kann.

Anders als im Eingrößenfall ist der Satz (5.146) nicht umkehrbar; die Bedingungen (5.147) sind also nicht notwendig für die Reversibilität eines Mehrgrößensystems. Bezüglich eines notwendigen Kriteriums sei auf TOBERGTE [43], Satz 10.5, verwiesen.

## 5.5 Weitere Klassifikation reversibler Systeme

### 5.5.1 Strenge und schwache Reversibilität

Es gibt offenbar recht verschiedenartige Vertreter reversibler Systeme, betrachtet man nur die Beispiele (5.6) und (5.125). Reversible Systeme stellt man sich gewöhnlich als *konservative* Systeme vor, also solche, bei denen eine innere Energie existiert, welche zusammen mit der äußeren Leistung einer Bilanzgleichung gehorcht. Die Folge ist, daß das System bei abgeschalteter äußerer Erregung in einer ungedämpften Schwingung,

die nicht unbedingt periodisch sein muß, schwingt. Wie schon angeschnitten, bringt die Erkenntnis, daß auch Systeme wie das in Beispiel (5.125) untersuchte zu der reversiblen Klasse gehören, einige Verunsicherung in diese Vorstellung der Reversibilität. Es soll daher eine Klassifikation dieser verschiedenen reversiblen Systeme versucht werden:

**(5.149) Definition: Strenge Reversibilität**

Ein reversibles System heißt *streng reversibel*, wenn es zu jeder Erregung  $v \in \mathfrak{S}^n$  stets ein minimales Element  $\tilde{v}^t$  aus  $\mathfrak{S}^n$  gibt.  $\square$

**(5.150) Definition: Schwache Reversibilität**

Ein reversibles System, welches nicht streng reversibel ist, heißt *schwach reversibel*.  $\square$

Die Definitionen sind von dem Gedanken geprägt, daß bei Schwingern die innere Energie durch eine »vernünftige« Funktion wieder herausgezogen werden kann, während dies bei dem Beispiel (5.125) nicht möglich ist. Der gewohnte anschauliche Reversibilitätsbegriff entspricht dann der strengen Reversibilität.

**(5.151) Satz: Hinreichendes Kriterium für schwache Reversibilität**

Ist ein System reversibel und gilt  $\tilde{a}_0 \neq 0$ , so ist es *schwach reversibel*.  $\square$

**(5.152) Beweis:**

Bei einem reversiblen System muß nach (5.102) das Minimalelement  $\tilde{v}^t$  – sofern man es sich durch eine gewöhnliche Funktion aus  $\mathfrak{S}^n$  vertreten denkt – im Nullraum von  $\tilde{a}_0$  liegen. Ist  $\lambda_j(\omega)$  eine Basis des Nullraums, dessen Ausrichtung und Dimension  $m$  von  $\omega$  abhängen kann, so können wir damit das Minimalelement  $\tilde{v}^t$ , wenn es eine gewöhnliche Funktion ist und für alle  $\omega \in R$  definiert ist, in die Form

$$(5.153) \quad \tilde{v}^t(\omega) = \sum_{j=1}^{m(\omega)} \tilde{v}_j^t(\omega) \lambda_j(\omega)$$

bringen. Es besteht also aus sovielen skalaren Funktionen  $\tilde{v}_j^t$ , wie die Dimension  $m(\omega)$  des Nullraums an der Stelle  $\omega$  angibt. Da andererseits in

$$(5.154) \quad v^t = \sum_{i=1}^n v_i^t e_i$$

$n$  unabhängig vorgebbare skalare Funktionen enthalten sind, kann ein Widerspruch nur vermieden werden, wenn fast überall  $m(\omega) = n$  ist, das heißt  $\tilde{a}_0 = 0$ . Ist umgekehrt  $\tilde{a}_0 \neq 0$ , ergibt sich als Schlußfolgerung, daß  $v^t(\omega)$  nicht für alle  $\omega \in R$  definiert sein kann bzw. keine gewöhnliche Funktion, also auch nicht aus  $\mathfrak{S}^n$  sein kann. Daher ist nachgewiesen, daß im Fall  $\tilde{a}_0 \neq 0$  die Rückgewinnung nur durch verallgemeinerte Funktionen aus  $\mathfrak{S}_\#^n$  bzw.  $\tilde{\mathfrak{S}}_\#^n$  erreicht werden kann.  $\square$

**(5.155) Satz: Hinreichendes Kriterium für strenge Reversibilität**

Ist ein System reversibel und gilt  $\tilde{a}_0 = 0$ , so ist es *streng reversibel*.  $\square$

**(5.156) Beweis:**

Die dem Beweis zugrunde liegende Idee ist die, daß ein System, bei dem nur der singuläre Anteil  $a_s$  vorhanden ist, welcher auf ungedämpfte Schwingen zurückzuführen ist, durch einen externen Dämpfer vollständig zur Ruhe gebracht werden kann. Der Beweis wird nur für Eingrößensysteme geführt, denn ist erst einmal nachgewiesen, daß beim Eingrößensystem mit

$$\tilde{a}_{sK} := \kappa^\dagger \tilde{a}_s \kappa$$

für alle Erregungen  $v \in \mathfrak{S}$  Rückgewinnungen  $v^t \in \mathfrak{S}$  existieren, erhält man mit der Darstellung

$$v = \sum_i \kappa_i v_i$$

für vektorielle Erregungen des Gesamtsystems mit Hilfe von Satz (5.63) die Aussage

$$v^t = \sum_i \kappa_i v_i^t \in \mathfrak{S}^n.$$

Nun also zum Beweis für Eingrößensysteme. Wir betrachten neben dem eigentlich zu untersuchenden System  $H$  ein weiteres passives externes System  $H_e$  mit den Systemgleichungen

$$y = h * v$$

$$y_e = h_e * v_e$$

Diese werden durch »Parallelschaltung«

$$y_g := y = y_e,$$

$$v_g := v + v_e$$

zu dem neuen Gesamtsystem  $H_g$ ,

$$y_g = h_g * v_g,$$

zusammengefaßt. Zunächst soll die Gewichtsfunktion  $h_g$  bestimmt werden. Die Übertragung der Gleichungen in den LAPLACE-Bereich ergibt

$$\begin{aligned} \hat{h}_g \hat{v}_g &= \hat{y}_g = \hat{h} \hat{v}, & \hat{v} &= \hat{h}^{-1} \hat{y}_g, \\ \hat{h}_g \hat{v}_g &= \hat{y}_g = \hat{h}_e \hat{v}_e, & \hat{v}_e &= \hat{h}_e^{-1} \hat{y}_g, \end{aligned}$$

$$(5.157) \quad \hat{h}_g = \frac{\hat{y}_g}{\hat{v}_g} = \frac{1}{\hat{h}^{-1} + \hat{h}_e^{-1}} = \frac{\hat{h} \hat{h}_e}{\hat{h} + \hat{h}_e}.$$

Als Zusammenhang zwischen der ursprünglichen Eingangsgröße  $v$  und der neuen Eingangsgröße  $v_g$  des Gesamtsystems erhält man

$$(5.158) \quad \hat{v} = \hat{h}^{-1} \hat{y}_g = \frac{\hat{h}_e}{\hat{h} + \hat{h}_e} \hat{v}_g =: \hat{f} \hat{v}_g$$

Nach Voraussetzung soll  $H$  ein reversibles System mit  $\bar{a}_0 = 0$  sein. Für die aufgenommene Arbeit ergibt sich daher nach (5.31)

$$W(\infty) = \frac{1}{2\pi} \sum_i \alpha_i |\bar{v}(\omega_i)|^2.$$

An den Stellen  $s = j\omega_i$  besitzt die Übertragungsfunktion  $\hat{h}$  Polstellen. Ist  $v_g \in \mathfrak{S}$ , bleibt  $\hat{v}_g$  an diesen Stellen mit Sicherheit beschränkt. Wird darüber hinaus ein externes System  $H_e$  so gewählt, daß auch  $\hat{h}_e$  an den Stellen  $s = j\omega_i$  beschränkt bleibt (im einfachsten Fall ist dies durch einen einfachen Dämpfer mit  $\hat{h}_e(s) = \text{const.}$  zu erreichen) verschwindet die Übertragungsfunktion  $\hat{f}$  in (5.158) an diesen Stellen; daher gilt

$$\bar{v}(\omega_i) = 0.$$

Damit ist auch die Gesamtarbeit  $W(\infty)$  Null. Alle Funktionen  $v$ , die sich durch

$$(5.159) \quad v = F v_g := f * v_g$$

aus beliebigen Erregungen  $v_g$  des Gesamtsystems ergeben, gewinnen die geleistete Arbeit wieder vollständig zurück. Es muß aber umgekehrt gezeigt werden, daß für eine beliebige Vorgabe  $v \in \mathfrak{S}$  des Teilsystems  $H$  eine zugehörige Erregung  $v_g$  des Gesamtsystems gefunden werden kann: Es existiert  $f^{-1} = \mathcal{L}^{-1}(1/\hat{f})$  und ist wie  $f$  kausal. Wir setzen im Zeitintervall  $(-\infty, t)$

$$v_g := f^{-1} * v = (f^{-1} * v_t)_t \text{ in } (-\infty, t).$$

Wegen der Kausalität hängt  $v_g$  nur von der Geschichte von  $v$  im Intervall  $(-\infty, t)$  ab. In  $[t, \infty)$  kann aber  $v_g$  geeignet fortgesetzt werden, so daß  $v_g$  zu  $\mathfrak{S}$  gehört, denn die notwendigen Differenzierbarkeitsbedingungen folgen aus (A.81):

$$(5.160) \quad v_g := (f^{-1} * v_t)_t + v_{g0} \in \mathfrak{S} \text{ mit } \text{supp}(v_{g0}) \subset (t, \infty).$$

Die sich dann aus (5.159) ergebende Funktion

$$f * ((f^{-1} * v_t)_t + v_{g0}) \in \mathfrak{S}$$

leistet die Gesamtarbeit Null und ist wegen

$$f * ((f^{-1} * v_t)_t + v_{g0}) = f * (f^{-1} * v_t) = v_t = v \text{ in } (-\infty, t)$$

ein zu  $v$  gehörendes Minimalelement  $v^t \in \mathfrak{S}$ . □

Die Aussagen der letzten beiden Sätze werden in dem folgenden zusammengefaßt:

**(5.161) Satz: Notwendiges und hinreichendes Kriterium für strenge Reversibilität**

Ein reversibles System ist genau dann streng reversibel, wenn  $\bar{a}_0 = 0$  ist. □

Da  $\bar{a}_0 = 0$  nach Satz (5.146) sowieso Reversibilität impliziert, kann die gesonderte Voraussetzung der Reversibilität in Satz (5.161) aufgegeben werden:

**(5.162) Satz: Notwendiges und hinreichendes Kriterium für strenge Reversibilität**

Ein System ist genau dann streng reversibel, wenn  $\bar{a}_0 = 0$  ist. □

### 5.5.2 Relaxation

Unter Relaxation versteht man das zeitliche Abklingen innerer und äußerer Systemgrößen, wenn das System nicht weiter erregt wird. Gewöhnlich verbindet man damit die Vorstellung einer Entwertung noch vorhandener innerer Energien. In dem Beispiel (5.125) haben wir aber bereits ein relaxierendes reversibles System kennengelernt, so daß diese Vorstellung in dieser allgemeinen Art nicht aufrecht erhalten werden kann. Es soll aber untersucht werden, inwieweit die Relaxation mit der strengen bzw. schwachen Reversibilität in Verbindung gebracht werden kann. Zunächst werden die Begriffe definiert:

#### (5.163) Definition: Stabilität

Ein System heißt *stabil*, wenn für jede Erregung  $\mathfrak{v} \in \mathfrak{S}^n$  die Ausgangsgröße  $\mathfrak{y}$  beschränkt bleibt:

$$(5.164) \quad |y_i(t)| = |\mathfrak{e}_i^T \mathfrak{y}(t)| \leq C_i \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Die Konstanten  $C_i$  dürfen von  $\mathfrak{v}$  abhängen.  $\square$

#### (5.165) Definition: Relaxation

Ein System heißt *relaxierend*, wenn für jede Erregung  $\mathfrak{v} \in \mathfrak{S}^n$  die Systemantwort  $\mathfrak{y}$  für  $t \rightarrow \infty$  gegen Null strebt:

$$(5.166) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \mathfrak{y}(t) = \mathbf{0}.$$

Offensichtlich ist ein relaxierendes System stabil.

#### (5.167) Satz: Stabilität passiver Systeme

Ein passives System ist stabil.  $\square$

#### (5.168) Beweis:

Wir benutzen für die Gewichtsdistribution  $\mathbf{h}$  des Systems die Darstellung

$$\mathbf{h} = jQ\delta + M\delta + 2c^2\nu_* - 2d_i^2\{(\nu - \nu(0))_*\}.$$

nach (4.55). Dann ist

$$(5.169) \quad \mathfrak{y} = \mathbf{h} * \mathfrak{v} = jQ\delta * \mathfrak{v} + M\delta * \mathfrak{v} + 2c^2\nu_* * \mathfrak{v} - 2d_i^2\{(\nu - \nu(0))_*\} * \mathfrak{v} \\ = jQ\mathfrak{v} + M\mathfrak{v} + 2c^2\nu_* * \mathfrak{v} - 2(\nu - \nu(0))_* * \mathfrak{v}$$

Die Funktion  $\nu$  ist die Rücktransformierte der Ableitung des beschränkten Maßes  $\rho$ ,

$$\nu(t) = \mathfrak{F}^{-1}(\rho')(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\rho(\omega).$$

Hieraus ergibt sich die Abschätzung

$$(5.170) \quad |\kappa^\dagger \nu(t) \kappa| < \frac{1}{2\pi} \kappa^\dagger (\mu(\infty) - \mu(-\infty)) \kappa.$$

Die Matrizen  $\nu$  und  $\rho$  sind HERMITESCH. Daher sind die Maximalwerte ihrer HERMITESCHEN Formen gleich den HILBERT-Normen. Es ergibt sich

$$(5.171) \quad \|\nu(t)\| < \frac{1}{2\pi} \|\rho(\infty) - \rho(-\infty)\| =: N.$$

Damit erhalten wir aus (5.169) als Abschätzung

$$(5.172) \quad |y_i(t)| \leq |\mathfrak{y}(t)| \leq |\mathbf{Q}| \max_{t \in \mathbb{R}} |\mathfrak{v}(t)| + |\mathbf{M}| \max_{t \in \mathbb{R}} |\dot{\mathfrak{v}}(t)| \\ + 2c^2 N \int_{-\infty}^{\infty} |\mathfrak{v}(\tau)| d\tau + 4N \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{\mathfrak{v}}(\tau)| d\tau.$$

Da  $\mathfrak{v} \in \mathfrak{S}$  ist, konvergieren die beiden letzten Integrale. Die gesamte Abschätzung ist von  $t$  unabhängig. Somit ist das Gewünschte nachgewiesen.  $\square$

#### (5.173) Satz: Relaxation streng reversibler Systeme

Ein System mit  $\tilde{\mathbf{a}}_0 = \mathbf{0}$  und  $\mathbf{a}_s \neq \mathbf{0}$  ist nicht relaxierend.  $\square$

#### (5.174) Beweis:

Es reicht aus, die Aussage für eine Komponente  $y = y_i = \mathfrak{e}_i^T \mathfrak{y}$  und eine spezielle Erregung  $\mathfrak{v} = \mathfrak{e}_i \mathfrak{v}$  zu zeigen. Damit reduziert sich das Problem wieder auf den Eingrößenfall. Der Vektor  $\mathfrak{e}_i$  soll jedoch so gewählt werden, daß

$$(5.175) \quad \mathbf{a} := \mathfrak{e}_i^T \mathbf{a} \mathfrak{e}_i \neq 0$$

gilt, was immer möglich ist, da  $\tilde{\mathbf{a}} = \tilde{\mathbf{a}}_s \neq \mathbf{0}$  vorausgesetzt wurde. Nach (3.68) gilt

$$(5.176) \quad h = 2a \text{ in } (0, \infty),$$

wobei

$$(5.177) \quad h := e_i^T h e_i.$$

Als Erregung wählen wir nun eine Funktion  $v \in \mathcal{D} \subset \mathcal{S}$  ( $v$  finit), wobei das Intervall  $[t_1, t_2]$  der Träger von  $v$  sein möge. Mit (5.176) und unter Ausnutzung der Eigenschaften der Faltung gilt dann

$$(5.178) \quad y = h * v = 2a * v \text{ in } (t_2, \infty).$$

Schreibt man dies als Rücktransformation aus dem FOURIER-Bereich, erhält man

$$(5.179) \quad y(t) = 2 \mathcal{F}^{-1}(\tilde{a}\tilde{v})(t) = 2 \mathcal{F}^{-1}\left(\sum_i \alpha_i \tilde{v}(\omega_i) \delta(\cdot - \omega_i)\right)(t) = \frac{1}{\pi} \sum_i \alpha_i \tilde{v}(\omega_i) e^{j\omega_i t}$$

für  $t > t_2$ . Es sei bemerkt, daß die Reihe aufgrund der Eigenschaften von  $\tilde{a}$  bzw. der  $\alpha_i$  und der von  $\tilde{v}$  gleichmäßig konvergiert und  $y$  darüber hinaus eine Funktion  $C_\infty$  ist. Eine Reihe dieser Gestalt mit Frequenzen  $\omega_i$ , die nicht notwendigerweise in einem rationalen Verhältnis stehen und auch in ihrer Anzahl unbeschränkt sein können, heißt *verallgemeinerte FOURIER-Reihe*. Die durch sie definierte stetige Funktion ist eine sogenannte *fastperiodische Funktion*. Eine Funktion  $f$  heißt fastperiodisch, wenn es für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $L(\epsilon)$  gibt, so daß sich in jedem Intervall der Länge  $L(\epsilon)$  ein  $T$  findet,

$$T \in [\tau, \tau + L(\epsilon)],$$

mit dem

$$|f(t) - f(t+T)| < \epsilon \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

gilt (siehe dazu RIESZ / NAGY [40] Nr. 101, 102)

Die Eingangsfunktion  $\tilde{v}$  soll nun so gewählt werden, daß für zumindest ein  $\omega_i$  gelte:  $\tilde{v}(\omega_i) \neq 0$ . Dann ist sichergestellt, daß es stets ein  $t_0 > t_2$  gibt, für daß  $y(t_0) \neq 0$  ist. Da die Funktion  $y$  für  $t > t_2$  fastperiodisch ist, findet sich für jedes  $\epsilon > 0$  und jedes  $\tau$  ein  $T > \tau$  (*Wiederkehrzeit*), so daß

$$|y(t) - y(t+T)| < \epsilon$$

gilt. Setzen wir nun  $t = t_0$  ein, kann wegen  $y(t_0) \neq 0$  und der beliebigen Vorgabe von  $\tau$  und der dadurch verursachten Unbeschränktheit der möglichen  $T$  die Funktion  $y(t)$  nicht gegen Null streben. Das System relaxiert also nicht.  $\square$

#### (5.180) Satz: Relaxation schwach reversibler oder irreversibler Systeme

Ein System mit  $\tilde{a}_s = 0$  ist relaxierend.  $\square$

#### (5.181) Beweis:

Ist  $\tilde{a}_s = 0$ , so besitzt auch die beschränkte monotone Maßfunktion  $\mu$  keine Sprungstellen bzw.  $\tilde{\nu}$  als Ableitung von  $\mu$  (siehe (3.64)) ist absolut integrierbar:  $\tilde{\nu} \in L_1$ . Daher ist nach dem Satz (A.108) die Zeitfunktion  $\nu$  stetig und strebt für  $t \rightarrow \infty$  gegen Null. Benutzen wir nun die Darstellung (3.70) bzw. (4.53), (4.54) für die Gewichts-distribution  $h$ , erhalten wir für die Ausgangsgröße

$$(5.182) \quad \begin{aligned} y &= r * v + 2(c^2 - d^2)(\nu_+) * v \\ &= r * v + 2c^2 \nu_+ * v - 2\nu_+ * \tilde{v}, \end{aligned}$$

$$y(t) = (r*v)(t) + 2c^2 \int_0^\infty \nu(\tau) v(t-\tau) d\tau + 2 \int_0^\infty \nu(\tau) \tilde{v}(t-\tau) d\tau,$$

$$(5.183) \quad |y(t)| \leq |(r*v)(t)| + 2c^2 \int_0^\infty N(\tau) |v(t-\tau)| d\tau + 2 \int_0^\infty N(\tau) |\tilde{v}(t-\tau)| d\tau,$$

wobei  $N$  eine monoton fallende Funktion sei, die die HILBERT-Norm von  $\nu(t)$  abschätzt:

$$N(t) \geq \|\nu(t)\|.$$

Da  $\nu$  im Unendlichen gegen Null strebt, tut es auch  $N(t)$ . Daher gibt es zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $T(\epsilon)$  mit  $N(t) < \epsilon$  für  $t > T(\epsilon)$ . Das erste Integral läßt sich damit aufteilen in

$$(5.184) \quad \begin{aligned} \int_0^\infty N(\tau) |v(t-\tau)| d\tau &= \left( \int_0^T + \int_T^\infty \right) N(\tau) |v(t-\tau)| d\tau \\ &\leq N(0) \int_0^{T(\epsilon)} |v(t-\tau)| d\tau + \epsilon \int_{-\infty}^\infty |v(\tau)| d\tau. \end{aligned}$$

Da  $v \in \mathcal{S}^*$  ist, konvergieren beide Integrale. Das erste wird weiterhin für jedes feste  $\epsilon$  bzw.  $T(\epsilon)$  für  $t \rightarrow \infty$  beliebig klein. Geben wir also für die gesamte linke Seite von (5.184) eine Schranke  $\tilde{\epsilon} > 0$  vor, wird durch Wahl von

$$\epsilon = \frac{\check{\epsilon}}{2} \left( \int_{-\infty}^{\infty} |\vartheta(\tau)| d\tau \right)^{-1}$$

es immer ein  $\check{T}(\check{\epsilon})$  geben, so daß der erste Term der Abschätzung für  $t > \check{T}(\check{\epsilon})$  kleiner als  $\check{\epsilon}/2$  und somit die gesamte linke Seite von (5.184) kleiner als  $\check{\epsilon}$  wird. Also strebt die linke Seite von (5.184) und damit das erste Integral in (5.183) für  $t \rightarrow \infty$  gegen Null. Entsprechendes gilt für das zweite Integral in (5.183). Das Faltungsprodukt mit der singulären Distribution  $\tau$  strebt sowieso gegen Null, da  $\vartheta$  dies tut. Damit ist der Satz bewiesen.  $\square$

Die beiden letzten Sätze liefern als Zusammenfassung:

**(5.185) Satz: Relaxation passiver Systeme**

Ein System relaxiert genau dann, wenn  $\bar{a}_s = 0$  ist.  $\square$

Die Interpretation dieser Aussagen in Bezug auf reversible System ergibt, daß ein schwach reversibles System, sofern kein singulärer Anteil  $\bar{a}_s$  vorhanden ist, stets relaxiert. Ein streng reversibles System ist niemals relaxierend, sofern man solche mit  $\bar{a}_s = 0$  ausnimmt. Weiterhin kann man dem Beweis (5.174) entnehmen, daß ein streng reversibles System mit  $\bar{a}_s \neq 0$  bei Erregung durch finite Funktion mit einer fastperiodischen Schwingung antwortet. Diese kann – entsprechend der Anzahl der singulären Stellen  $\omega_i$  – aus einer endlichen oder einer unendlichen Zahl harmonischer Schwingungen bestehen. Wir identifizieren also tatsächlich mit den streng reversiblen Systemen solche, die aus ungedämpften Schwingern bestehen.

Auch MEIXNER hat in [34] eine genauere Klassierung reversibler und irreversibler Systeme vorgenommen. Die Benennungen der Begriffe sind dort jedoch anders vorgenommen. Der *schwachen Irreversibilität* nach MEIXNER entspricht hier die *Relaxation* während die *starke Irreversibilität* nach MEIXNER hier einfach *Irreversibilität* heißt. Den hiesigen *schwach reversiblen* Systemen gleichen bei MEIXNER also die *schwach, aber nicht stark irreversiblen* (also *reversiblen*) Systeme. Die *streng reversiblen* Systeme heißen bei MEIXNER demnach *nicht schwach irreversibel*.

### 5.5.3 Verknüpfungen reversibler Systeme

Es soll untersucht werden, inwieweit die Reversibilität bei einer Zusammenschaltung mehrerer Systeme erhalten bleibt. Als erstes sei folgender Satz angegeben, der nicht schwer zu beweisen ist:

**(5.186) Satz: Reversibilität des Umkehrsystems**

Beim Wechsel der Eingangs- und Ausgangsgrößen  $\vartheta \leftrightarrow \mathbf{y}$  eines passiven Systems  $H$  – also Übergang auf das »Umkehrsystem«  $H^{-1}$  – bleibt die Eigenschaft der Irreversibilität bzw. der strengen bzw. der schwachen Reversibilität erhalten. Ebenso bleibt der Wert der verlorenen Arbeit gleich:

$$(5.187) \quad \nu_{\vartheta} = \nu^{-1}_{\mathbf{y}} \quad \square$$

Bei der Verknüpfung zweier Systeme ergibt sich eine Aussage über die Reversibilität des entstehenden Gesamtsystem durch die Eigenschaften der Teilsysteme. Es gilt folgender Satz:

**(5.188) Satz: Reversibilität einer Parallelschaltung**

Sind  $H_1$  und  $H_2$  zwei  $n$ -Größensysteme, so ergibt sich die Reversibilitätseigenschaft der »Parallelschaltung«  $H = H_1 + H_2$  aufgrund der Eigenschaften der Teilsysteme nach folgender Tabelle:



$H_1$	$H_2$	$H$
streng reversibel	streng reversibel	streng reversibel
streng reversibel	schwach reversibel	schwach reversibel
streng reversibel	irreversibel	irreversibel
schwach reversibel	schwach reversibel	*
schwach reversibel	irreversibel	irreversibel
irreversibel	irreversibel	irreversibel

Im Fall (\*) ist das Gesamtsystem  $H$  entweder schwach reversibel oder irreversibel.  $\square$

**(5.189) Beweis:**

1.  $H_1$  und  $H_2$  streng reversibel: Unter Zuhilfenahme des Satzes (5.162) folgt aus  $\tilde{a}_{10} = \tilde{a}_{20} = 0$  und  $\tilde{a}_0 = \tilde{a}_{10} + \tilde{a}_{20} = 0$  die strenge Reversibilität des Gesamtsystems.

2.  $H_1$  streng reversibel,  $H_2$  schwach reversibel: Die Frage der Reversibilität entscheidet sich allein durch den lokal integrierbaren Anteil  $\tilde{a}_0$  (siehe (5.101)). Da  $\tilde{a}_{10} = 0$ ,  $\tilde{a}_0 = \tilde{a}_{10} + \tilde{a}_{20} = \tilde{a}_{20}$  und das System  $H_2$  nach Voraussetzung reversibel ist, muß es auch das Gesamtsystem sein. Wegen  $\tilde{a}_0 \neq 0$  kann es aber nur schwach reversibel sein.

4.  $H_1$  und  $H_2$  schwach reversibel: Es gilt  $\tilde{a}_{10} \neq 0$ ,  $\tilde{a}_{20} \neq 0$ . Da für jedes  $\omega$  die Funktionswerte  $\tilde{a}_{i0}(\omega)$  positiv semidefinite Matrizen sind, ist  $\tilde{a}_0(\omega) = \tilde{a}_{10}(\omega) + \tilde{a}_{20}(\omega)$  ungleich Null, wenn nur ein Summand ungleich Null ist. Daher kann  $\tilde{a}_0$  nicht Null sein; also ist  $H$  nicht streng reversibel. Es bleiben nur die Möglichkeiten der schwachen Reversibilität oder der Irreversibilität, unter denen allgemein nicht entschieden werden kann.

3., 5. und 6.  $H_1$  beliebig,  $H_2$  irreversibel: Da bereits ein Teilsystem – zumindest bei einigen Erregungen – einen Teil der aufgenommenen Arbeit nicht wieder abgibt, gilt dies auch für das Gesamtsystem.  $\square$

Die am Gesamtsystem geleistete Arbeit  $W$  ergibt sich als Summe der Arbeiten an den Teilsystemen:

$$(5.190) \quad W = W_1 + W_2.$$

Diese Additivität gilt für den verlorenen Anteil der Arbeit im allgemeinen *nicht*. Wir haben

$$(\nu_{\vartheta})(t) = (\mathcal{W}_{\vartheta^f})(\infty) = (\mathcal{W}_1 \vartheta^f)(\infty) + (\mathcal{W}_2 \vartheta^f)(\infty).$$

Im allgemeinen darf man nicht davon ausgehen, daß das Minimalelement  $\vartheta^f$  für das Gesamtsystem gleich den Minimalelementen  $\vartheta_1^f$ ,  $\vartheta_2^f$  für die Teilsysteme ist. Die rechts stehenden Ausdrücke stellen also nicht unbedingt die verlorene Arbeit der Teilsysteme dar. Vielmehr gilt

$$(\nu_{\vartheta})(t) = (\mathcal{W}_{\vartheta^f})(\infty) \leq (\mathcal{W}_{\vartheta^f})(\infty)$$

und daher

(5.191)

$$(\nu_{\vartheta})(t) \geq (\nu_1 \vartheta)(t) + (\nu_2 \vartheta)(t).$$

Auf diese *Nicht-Additivität* der verlorenen Arbeit weist auch KERN [23], S. 75f, bei der Diskussion verschiedener Entropiefunktionale hin. Die Folgen dieser Eigenschaft werden im nächsten Kapitel diskutiert, wo es um die Frage der Identifikation der Dissipationsleistung geht.

## 6 Dissipation

Nur bei reversiblen Systemen ist für jede beliebige Erregung die zugeführte Arbeit wieder vollständig zurückzugewinnen. Bei irreversiblen Systemen wird ein Teil der zugeführten Arbeit vernichtet oder ist zumindest nicht mehr zugänglich. Ist es möglich, diese Energieentwertung *zeitlich zu lokalisieren*? Beim Blick *in* die Black Box wird man diese Frage ohne zu zögern bejahen, braucht man doch etwa bei einem elektrischen Netzwerk nur die an den Widerständen anfallende Wärmeleistung, die in ihrem Momentanwert eindeutig von den momentanen Strömen bzw. Spannungen abhängt, in Ansatz zu bringen. Kann man aber auch ohne Kenntnis der inneren Struktur allein durch die Untersuchung des äußeren Verhaltens die Rate dieser Energieentwertung, die *Dissipationsleistung*, eindeutig identifizieren?

### 6.1 Eigenschaften der Dissipationsleistung

Bevor wir hierzu weitere Überlegungen anstellen, soll diskutiert werden, welche Vorstellungen überhaupt mit der Dissipationsleistung  $P_d$  verbunden werden. Im Hinblick auf CLAUSIUS-DUHEM-Ungleichung der Thermodynamik wird man als wichtigste Eigenschaft die *Nicht-Negativität* fordern (siehe (2.24), (2.32)):

$$(6.1) \quad \boxed{P_d \geq 0}.$$

Daneben muß die Dissipationsleistung *konsistent zur äußeren Leistung* sein. Darunter verstehen wir, daß die bis zur Zeit  $t$  dissipierte Arbeit

$$(6.2) \quad \boxed{D(t) := \int_{-\infty}^t P_d(\tau) \, d\tau}$$

nicht größer als die äußere Arbeit sein kann:

$$(6.3) \quad \boxed{D(t) \leq W(t)}$$

Die dissipierte Arbeit  $D$  ist wegen der angenommenen Nicht-Negativität von  $P_d$  eine

monoton wachsende Funktion. Da bei reversiblen Systemen immer  $W(t) = 0$  erreicht werden kann (mindestens im Grenzfall  $t \rightarrow \infty$ ), folgt bei diesem zwingend  $D = 0$  und damit auch  $P_d = \dot{D} = 0$ , wie man es bei einem reversiblen System erwartet.

Diese Bedingungen charakterisieren die Dissipation noch nicht hinreichend – würde doch der Ansatz  $P_d = 0$  auch bei irreversiblen Systemen diesen Forderungen gerecht. Man muß auch eine untere Schranke für die dissipierte Arbeit angeben. Das einzige Maß, was uns zur Abschätzung der dissipierten Arbeit zur Verfügung steht, ist die verlorene Arbeit. Wir wollen die Abschätzung in einer möglichst vorsichtigen Form aufstellen. Wir treffen die Annahme, daß *die verlorene Arbeit tatsächlich dissipiert wird* – legen uns aber nicht fest, in welchem zeitlichen Ablauf das geschieht:

$$(6.4) \quad (\nu_{\mathfrak{v}})(t) = (\mathcal{W}_{\mathfrak{v}})(\infty) \leq (\mathcal{D}_{\mathfrak{v}})(\infty).$$

( $\mathcal{D}$  bezeichnet die Abbildung  $\mathfrak{v} \rightarrow D$ ) Dies stellt tatsächlich die kleinste mit den Mitteln einer Black-Box-Beschreibung angebbare untere Schranke für die dissipierte Arbeit dar. Andererseits kann die Ungleichheit gar nicht eintreten, da sonst ein Widerspruch zu (6.3) entstehen würde. Es muß also gelten:

$$(6.5) \quad (\mathcal{D}_{\mathfrak{v}})(\infty) = (\nu_{\mathfrak{v}})(t)$$

Weiterhin versteht man die Dissipationsleistung als *extensive Größe* – also als eine *räumlich verteilte Größe*, deren Gesamtwert in einem Raumbereich sich als Summe über die Werte der Teilbereiche ergibt. Bei unserer örtlichen diskreten Systemmodellierung führt das zu einer *Additivität* der Dissipationsleistung: Sind  $H_1$  und  $H_2$  zwei passive Systeme mit den Dissipationsleistungen  $\mathcal{P}_{d_1}$  und  $\mathcal{P}_{d_2}$ , so soll das zusammengesetzte System  $H := H_1 + H_2$  die Dissipationsleistung

$$(6.6) \quad \boxed{(\mathcal{P}_d \mathfrak{v})(t) = (\mathcal{P}_{d_1} \mathfrak{v})(t) + (\mathcal{P}_{d_2} \mathfrak{v})(t)}$$

besitzen.

Als letztes ist von dem der Dissipationsleistung zugeordnetem Operator  $\mathcal{P}_d$  Kausalität zu fordern.

Inwieweit können die aufgeführten Anforderungen an eine gesuchte Dissipationsleistung überhaupt befriedigt werden? Sind sie vielleicht bereits in sich widersprüchlich?

In (5.191) haben wir gesehen, daß bei einer Zusammenschaltung  $H = H_1 + H_2$  sich die verlorenen Arbeiten an den Teilsystemen zum Gesamtsystem im allgemeinen *nicht additiv* verhalten. Es gilt

$$(6.7) \quad (\nu \vartheta)(t) \geq (\nu_1 \vartheta_1)(t) + (\nu_2 \vartheta_2)(t),$$

wobei die Gleichheit nur in Sonderfällen eintritt. Dieser Umstand allein ist noch kein Widerspruch zu der angenommenen Additivität der Dissipationsleistung. Mit (6.5) folgt nämlich aus (6.7)

$$(6.8) \quad (\mathcal{D}\vartheta^t)(\infty) \geq (\mathcal{D}_1\vartheta_1^t)(\infty) + (\mathcal{D}_2\vartheta_2^t)(\infty).$$

Hierbei ist  $\vartheta^t$  das Minimalelement bezüglich der Erregung  $\vartheta$  und des Zeitpunktes  $t$  für das Gesamtsystem. Die »Funktionen«  $\vartheta_i^t$  sind die jeweiligen Minimalelemente für die Teilsysteme. Aus der Zusammenschaltung  $\vartheta = \vartheta_1 = \vartheta_2$  folgt natürlich  $\vartheta_t = (\vartheta_1)_t = (\vartheta_2)_t$  aber im allgemeinen nicht die Gleichheit der Minimalelemente auch im Zeitintervall  $(t, \infty)$ . Daher stellt (6.8) auch keinen Widerspruch zu (6.6) dar.

Eine spezielle Systemklasse fügt sich in diese Vorstellungen der Dissipation aber kaum ein: die schwach reversiblen Systeme. Reversible Systeme haben allgemein die Dissipationsleistung  $P_d = 0$ . Ist bei der Zusammenschaltung zweier reversibler Systeme zumindest eines streng reversibel, muß nach Satz (5.188) auch die Zusammenschaltung reversibel sein, die daher auch keine Dissipation besitzt. Anders sieht der Sachverhalt bei der Zusammenschaltung zweier schwach reversibler Systeme aus. Das Gesamtsystem kann in Einzelfällen auch irreversibel sein. Während beide Teilsysteme verschwindende Dissipationsleistungen aufweisen, ist dem Gesamtsystem nach (6.5) eine Dissipationsleistung größer als Null zuzuweisen. Dazu ein Beispiel:

Wir betrachten die Systeme mit den Gewichtsfunktionen

$$h_1(t) = \frac{2R}{\pi} \frac{\sin \omega_0 t}{t},$$

$$h_2(t) = R \left( \delta(t) - \frac{2}{\pi} \frac{\sin \omega_0 t}{t} \right).$$

Die Übertragungsfunktion  $\hat{h}_1$  lautet

$$\hat{h}_1(s) = \frac{2R}{\pi} \arctan \frac{\omega_0}{s} = \frac{jR}{\pi} \ln \frac{s - j\omega_0}{s + j\omega_0}.$$

Man erhält daraus für die FOURIER-Transformierten

$$\tilde{h}_1(\omega) = R \sigma(\omega_0 - |\omega|) + \frac{jR}{\pi} \ln \left| \frac{\omega - \omega_0}{\omega + \omega_0} \right|$$

bzw. für ihren Realteil

$$\tilde{a}_1(\omega) = \tilde{a}_{10}(\omega) = R \sigma(\omega_0 - |\omega|)$$

wie in Tabelle (5.132) angegeben ist. Analog erhält man

$$\tilde{a}_2(\omega) = \tilde{a}_{20}(\omega) = R \sigma(|\omega| - \omega_0).$$

Die Funktion  $\tilde{a}_1$  verschwindet im Intervall  $(\omega_0, \infty)$  und in  $(-\infty, \omega_0)$ ,  $\tilde{a}_2$  ist Null in  $(-\omega_0, \omega_0)$ . Hier wird  $\ln \tilde{a}_1$  bzw.  $\ln \tilde{a}_2$  uneigentlich und das Integral (5.121) divergiert. Beide Systeme sind also reversibel, wegen  $\tilde{a}_i \neq 0$  aber nur schwach reversibel. Bildet man nun die Summe, erhält man

$$h = R \delta$$

bzw.

$$a(\omega) = a_0(\omega) = R.$$

Das Integral (5.121) konvergiert, das Gesamtsystem ist also irreversibel. Sein Verhalten gleicht beim elektrischen Analogon einem OHmschen Widerstand mit dem Wert  $R$ . Ohne zu Zögern würde man einem derartigen Übertragungsverhalten die Dissipationsleistung

$$(6.9) \quad P_d = R i^2$$

zuweisen, was aber nicht mit der angenommenen Additivität der Dissipationsleistung zu vereinbaren ist.

Wir stellen also fest, daß die plausibel klingenden Annahmen über die Eigenschaften der Dissipationsleistung sich (zumindest für die Klasse der schwach reversiblen Systeme) nicht miteinander vereinbaren lassen. Man kommt nicht umhin, die Forderungen entsprechend abzuschwächen.

Die Frage stellt sich, an welcher der Forderungen Abstriche gemacht werden müssen. Hält man an der Additivität der Dissipationsleistung fest, muß in dem vorangegangenen Beispiel der Zusammenschaltung der beiden schwach reversiblen Systeme die Dissipationsleistung Null zugewiesen werden. Es ließe sich dann die Anbindung der

Dissipation an die verlorene Arbeit (6.5) nicht mehr aufrecht erhalten. Das würde gleichzeitig bedeuten, daß es durch eine reine Black-Box-Beschreibung nicht möglich ist, den dissipierten Anteil der Arbeit zu erkennen. Die vorangegangene Zusammenschaltung läßt sich von einem Widerstand nicht unterscheiden.

Hält man umgekehrt an der Anbindung der Dissipation an der verlorenen Leistung fest – die einzige Möglichkeit, die Dissipation mit einer Black-Box-Beschreibung zu erörtern –, kann die Additivität nicht aufrecht erhalten werden. Dann muß man akzeptieren, daß die Dissipation *örtlich nicht lokalisiert werden kann*: In der vorangegangenen Zusammenschaltung hatte nur das Gesamtsystem dissipative Eigenschaften. Man ist jedoch nicht in der Lage, die Dissipation in irgendeiner Weise den Teilsystemen zuzuordnen, da beide für sich (schwach) reversibel und damit nicht dissipativ sind.

An dieser Stelle sei auch auf das Beispiel (4.13) der elektrischen Doppelleitung hingewiesen. Diese ist im Grenzfall unendlicher Länge von einem OHMSchen Widerstand mit dem Wert des Wellenwiderstandes der Leitung nicht zu unterscheiden. Vom physikalischen Gesichtspunkt her kann man nicht behaupten, daß hier Arbeit *vernichtet* würde. Die Energie befindet sich in einer längs der Leitung fortschreitenden elektromagnetischen Welle. Richtig ist allerdings, daß diese Arbeit *verloren* ist (und zwar sofort nach Einspeisung in die Leitung), wenn neben der Eingangsklemme nicht noch weitere Anzapfungen der Leitung, die das Wellenpaket noch nicht passiert hat, zur Verfügung stehen.

Unabhängig davon, in welcher Richtung man die Forderungen abschwächen würde, erscheint es fast so, als wäre die Black-Box-Beschreibung eines Systems prinzipiell ungeeignet, die Frage der Dissipation zu klären, wenn so verschiedene physikalische Sachverhalte wie ein OHMScher Widerstand und eine elektrische Leitung von außen nicht unterschieden werden können. Man muß aber daran denken, daß das Aufstellen physikalischer Gesetze (Empirereme) eigentlich nichts anderes darstellt, als die Erkundung der Eigenschaften einer Black-Box. Wenn auch viele physikalische Gesetze deduktiv von anderen, in der Hierarchie höher stehenden Gesetzen abgeleitet werden können, so bleibt letztendlich auf einer höchsten Stufe immer die empirische Untersuchung einer »Black-Box«.

Liegen die auftretenden Widersprüchlichkeiten vielleicht daran, daß der Begriff der Black-Box zu weit gefaßt ist? Sind wir bei einem System noch in der Lage, zur

Kontrolle einmal den Deckel des Kastens zu öffnen, um die aus dem äußeren Verhalten gewonnenen Vorstellungen über das »Innenleben« zu überprüfen, liegt in einem strengen Sinn gar keine »Black-Box« vor. Sind wir vielleicht verpflichtet, nicht nur die Arbeits- und Kraftvariablen in Ansatz zu bringen, die im konkreten Fall in Wechselwirkung mit der Umgebung treten, sondern auch alle diejenigen, auf die wir prinzipiell Einfluß nehmen *könnten*? Das hätte bei der unendlich langen Leitung zur Folge, daß man neben den Einspeisungsklemmen auch unendlich viele Anzapfstellen in die Systembeschreibung mit aufnehmen müßte. Das würde zwar die hier zur Verfügung gestellten Hilfsmittel übersteigen, wo nur eine örtlich diskrete, endlich dimensionale Modellierung möglich ist, doch wäre hierbei zweifelsfrei auch für die unendliche Leitung Reversibilität zu erwarten.

Bei der diskutierten Zusammenschaltung zweier Systeme würde dann die Frage aufgeworfen, ob sie in dieser Form eigentlich statthaft ist, weil dadurch die Zugriffsmöglichkeiten auf die Teilsysteme verschleiert werden. Dann müßte man zuerst aus den Teilsystemen  $H_1$  und  $H_2$  ein Gesamtsystem in der Form

$$(6.10) \quad H = \begin{bmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{bmatrix}$$

aufstellen und könnte durch eine Transformation nach (4.90) mit einer regulären Matrix

$$(6.11) \quad T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & I \end{bmatrix}$$

( $I$  ist die Einheitsmatrix) auf das transformierte System

$$(6.12) \quad \tilde{H} = T^\dagger H T = \begin{bmatrix} H_1 + H_2 & H_2 \\ 0 & H_2 \end{bmatrix}$$

übergehen. Hier würde man dann von dem vollständigen Satz der generalisierten Geschwindigkeiten

$$(6.13) \quad \tilde{u} = [\tilde{u}_1^T, \tilde{u}_2^T]^T$$

nur den Teil  $\tilde{u}_1$  benutzen und den Teil  $\tilde{u}_2$  Null setzen. Zur Bestimmung der Dissipation muß dann aber auch  $\tilde{u}_2$  berücksichtigt werden. Bei einer derartigen Systemzusammenschaltung ist bei reversiblen Teilsystemen auch das Gesamtsystem reversibel, so daß hierbei die Additivität der (verschwindenden) Dissipationsleistung gewährleistet ist.

Kann jedoch aus physikalischen Gründen auf die Teilsysteme innerhalb des Gesamtsystems prinzipiell kein Einfluß ausgeübt werden kann, ist möglicherweise der Wert der Untersuchung eines Teilsystems grundsätzlich in Frage zu stellen. Die korrekte Systembeschreibung wäre in diesem Fall immer das vollständige Gesamtsystem; die Frage nach der Dissipation der Teilsysteme wäre ohne Sinn.

Diese Diskussion soll aufzeigen, daß die »Mängel« des hier gewählten Zugangs zur Dissipation mit Hilfe der Black-Box-Beschreibung möglicherweise durch eine zu weitgehende Interpretation der Systembeschreibung entstehen und daß eine entsprechend vorsichtige Auslegung mit den anschaulichen Vorstellungen in Einklang stehen könnte. Aus diesem Grund scheint es gerechtfertigt, diesen Ansatz weiter zu verfolgen.

## 6.2 Ansatz für die Dissipationsleistung mit Hilfe der verlorenen Arbeit

Die verlorene Arbeit wurde bisher in der Abschätzung (6.5) als untere Schranke für die dissipierte Arbeit verwendet. Eine zeitliche Zuordnung wurde nicht vorgenommen. Es folgt jedoch mit den Eigenschaften der verlorenen Energie und der Monotonie der dissipierten Leistung aus (6.5) die Abschätzung

$$(\mathcal{D}_\Psi)(t) = (\mathcal{D}_\Psi^f)(t) \leq (\mathcal{D}_\Psi^f)(\infty) = (\mathcal{V}_\Psi)(t),$$

(6.14)

$$D(t) \leq V(t)$$

Die dissipierte Arbeit kann demnach nicht größer als die verlorene Arbeit sein. Da die verlorene Arbeit  $V$  die für  $D$  geforderte Monotonieeigenschaft besitzt, welche äquivalent zur Nicht-Negativität der Dissipationsleistung ist, ist man geneigt, als Ansatz für die dissipierte Arbeit direkt die verlorene Arbeit zu verwenden:

(6.15)

$$D(t) = V(t)$$

bzw.

(6.16)

$$P_d = \dot{V}$$

Natürlich kann dieser spezielle Ansatz nicht die im Abschnitt 6.1 festgestellten allgemeinen Unzulänglichkeiten vermeiden. So wird auch hier der unendlich langen Doppelleitung die Dissipation wie bei einem OHMschen Widerstand zugewiesen. Ein anderes Beispiel, welches zur Kritik dieses Ansatzes vorgebracht wird (siehe MEIXNER [33]), bieten die sogenannten BOUCHEROT-Schaltungen, die in Bild 6.1 dargestellt sind (siehe auch CAUER [12], S. 53).

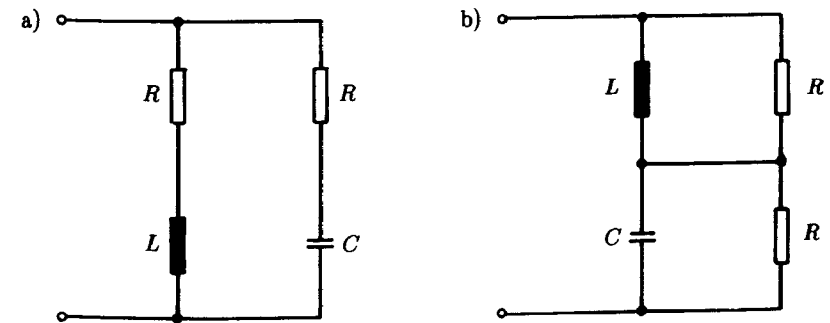


Bild 6.1: Zweipole mit konstantem Scheinwiderstand  $R$  (BOUCHEROT-Schaltungen)

Werden in den Schaltungen der Kondensator und die Spule nach der Anpassung

(6.17)

$$R = \sqrt{L/C}$$

gewählt, ergibt sich in beiden Fällen wie beim reinen OHMschen Widerstand der konstante Scheinwiderstand  $R$ . Zum Beispiel für die Schaltung nach Bild 6.1.a:

$$Z(s) = \left(R + \frac{1}{sC}\right) \parallel (R + sL) = \frac{R + s(L + R^2 C) + s^2 RLC}{1 + 2sRC + s^2 LC}$$

Wird  $L = R^2 C$  eingesetzt, erhält man

$$Z(s) = \frac{R + 2sR^2 C + s^2 R^3 C}{1 + 2sRC + s^2 R^2 C} = R.$$

Anders als bei der oben diskutierten Doppelleitung tritt hier tatsächlich eine Dissipation in den Widerständen des Netzwerks auf. Sämtliche äußere Arbeit wird im

Grenzfall  $t \rightarrow \infty$  in den Widerständen des Netzwerks vernichtet, so daß im diesem Grenzfall die dissipierte Arbeit  $D(t)$  mit der verlorenen Arbeit

$$(6.19) \quad V(t) = W(t) = R \int_{-\infty}^t i^2(\tau) d\tau$$

übereinstimmt. Der Momentanwert der tatsächlich dissipierten Arbeit ist aber kleiner als die verlorene Arbeit, da von der bis zum Zeitpunkt  $t$  am System geleisteten Arbeit  $W(t)$  immer noch ein Teil in der magnetischen und elektrischen Energie von Spule und Kondensator gespeichert ist. Erst für  $t \rightarrow \infty$  wird auch dieser Teil vernichtet.

In diesem Beispiel ist zwar die Hypothese, daß die verlorene Arbeit auch dissipiert wird, richtig; die zeitliche Zuordnung durch den Ansatz (6.16) stimmt aber nicht. Nach dem in Abschnitt 6.1 Gesagten sollte sich nun dieses Problem vermeiden lassen, wenn neben den tatsächlichen Eingangs- und Ausgangsgrößen auch alle bekannten inneren Arbeits- und Kraftvariablen aufgeführt werden – ein im Einzelfall ohne Frage sehr umständliches Verfahren. Aus der Systemtheorie ist jedoch bekannt, daß unter gewissen Voraussetzungen der vollständige Satz innerer Zustandsgrößen durch die zur Verfügung stehenden Eingangsgrößen manipuliert werden kann und das ebenso die zugehörigen generalisierten inneren Kräfte durch Kenntnis der Ausgangsgröße (äußere generalisierte Kräfte) zu gewinnen sind. Die dazu notwendigen Voraussetzungen sind die *vollständige Steuerbarkeit* und die *vollständige Beobachtbarkeit* (siehe z. B. HARTMANN [19]).

Vollständige Steuerbarkeit bedeutet bei linearen zeitinvarianten Systemen, daß jeder beliebige Zustand des Systems durch geeignete Wahl der Steuergröße  $\vartheta$  in endlicher Zeit aus einem Anfangszustand heraus erreicht werden kann.

Vollständige Beobachtbarkeit heißt, daß allein aus Kenntnis der Eingangs- und Ausgangsfunktion  $\vartheta$  und  $y$  über einem endlichen Zeitintervall  $(t_0, t)$  der Zustand des Systems zum Zeitpunkt  $t_0$  eindeutig bestimmt werden kann.

Bei Systemen mit rationalen Übertragungsfunktionen zeigt sich vollständige Beobachtbarkeit und vollständige Steuerbarkeit schon dadurch, daß beim Aufstellen der Übertragungsfunktion keine Kürzungen in Zähler- und Nennerpolynom auftreten. Genau dies ist aber bei den Scheinwiderständen der BOUCHEROT-Schaltungen der Fall. Auch die unendlich lange Doppelleitung ist offensichtlich nicht vollständig beobachtbar. Zwar ist aus der Kenntnis der vollständigen Eingangsfunktion  $\vartheta(t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  auch der Zustand der Leitung, daß heißt Strom- und Spannung an jedem Ort der Leitung, bekannt (sofern für  $t \rightarrow -\infty$  als Anfangszustand die nicht erregte Leitung vorausgesetzt wird), doch kann aus der Kenntnis der Eingangsfunktion über einem

endlichen Zeitintervall höchstens auf den Zustand eines endlichen Leitungsabschnitts geschlossen werden.

Da sich gerade diese problematischen Beispiele durch Nicht-Beobachtbarkeit auszeichnen, wird die Hoffnung geweckt, daß gerade in den Fällen vollständiger Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit ohne Erweiterung der Variablensätze der generalisierten Geschwindigkeiten und Kräfte zu einem Ergebnis über die Dissipationsleistung zu gelangen ist, welches der Vorstellung entspricht. Wir wollen daher den Dissipationsansatz

$$(6.20) \quad P_d = P_V = \dot{V}$$

näher untersuchen.

### 6.2.1 Die verlorene Leistung für Eingrößensysteme

Die der verlorenen Arbeit zugeordnete Leistung

$$(6.21) \quad P_V := \dot{V}$$

soll nur für den Fall von Eingrößensystemen weiter untersucht werden, da bereits hier die wesentlichen Eigenschaften deutlich werden. Für den Mehrgrößenfall wird auf TOBERGTE [43], Satz 10.5 verwiesen.

Nach (5.34), (5.35) und (5.72) gilt für die verlorene Arbeit

$$(6.22) \quad (V\vartheta)(t) = (W\vartheta)(\infty) = (\mathbf{a}, \tilde{\vartheta}^t \tilde{\vartheta}^{\dagger}) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\vartheta}^{\dagger}(\Omega) \mathbf{a}_0(\Omega) \tilde{\vartheta}^t(\Omega) d\Omega = (\mathbf{a}_0, \tilde{\vartheta}^t \tilde{\vartheta}^{\dagger}),$$

wobei bei einem irreversiblen Eingrößensystem nach Satz (5.120)

$$\ln \bar{a}_0 \in L_1^*$$

gilt. Wegen

$$\ln \sqrt{\bar{a}_0} = \frac{1}{2} \ln \bar{a}_0$$

erfüllt auch  $\sqrt{\bar{a}_0}$  dieses Kriterium. Nach dem Satz von PALEY und WIENER kann man

das so deuten, daß es eine kausale Zeitdistribution  $b$  gibt, deren FOURIER-Transformierte  $\tilde{b}$  vom Betrag gleich der Wurzel aus  $\tilde{a}_0$  ist:

$$(6.23) \quad |\tilde{b}| = \sqrt{\tilde{a}_0}.$$

Nach (B.54) ist eine spezielle kausale Funktion mit dieser Eigenschaft durch

(6.24)

$$\tilde{b}(\omega) = \sqrt{\tilde{a}_0(\omega)} \exp \left\{ \frac{j}{2\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Omega \omega + c^2}{(\Omega - \omega)(c^2 + \Omega^2)} \ln \tilde{a}_0(\Omega) d\Omega \right\}$$

zu erhalten. Es gilt also

$$(6.25) \quad \tilde{a}_0 = \tilde{b} \bar{\tilde{b}}$$

bzw.

$$(6.26) \quad a_0 = b * b^*,$$

so daß wir für die verlorene Arbeit auch

$$(\nu v)(t) = (a_0, v^t * v^t) = (b * b^*, v^t * v^t) = (b * v^t, b * v^t)$$

schreiben können. Die Distribution  $b$  nach (6.24) ist gegenüber anderen kausalen Distributionen mit der Eigenschaft (6.23) dadurch ausgezeichnet, daß ihr Inverses  $b^{-1} \in \mathcal{D}'$  existiert (die der reziproken LAPLACE-Transformierten zugeordnete Zeitdistribution) und selbst kausal ist (siehe Bemerkung (B.52)). Die Folge ist, daß die Distribution

$$b * v^t = b^{-*} * (b^* * b) * v^t = b^{-*} * a_0 * v^t$$

wie  $a_0 * v^t$  nach (5.85) einen Träger aus  $(-\infty, t]$  besitzt, da  $\text{supp}(b^{-*}) \subset (-\infty, 0]$ :

$$(6.27) \quad b * v^t = 0 \quad \text{in } (t, \infty).$$

Weiterhin ist wegen  $\tilde{a}_0 |\tilde{v}^t|^2 \in L_1$  das Produkt  $\tilde{b} \tilde{v}^t$  aus  $L_2 \subset \mathcal{S}'$ . Da der Raum  $L_2$  unter der FOURIER-Transformation in sich selbst abgebildet wird, ist auch  $b * v^t$  im Zeitbereich eine gewöhnliche Funktion aus  $L_2$ , auf die man die Abschneideoperation  $(\cdot)_t$  anwenden darf, und für die wegen ihrer Eigenschaft (6.27)

$$(6.28) \quad b * v^t = (b * v^t)_t = (b * (v^t)_t)_t = (b * v)_t$$

gilt. Wir erhalten daher für die verlorene Arbeit

$$(\nu v)(t) = ((b * v)_t, (b * v)_t) = (b * v, b * v)_t$$

(6.29)

$$(\nu v)(t) = \int_{-\infty}^t |b * v|^2(\tau) d\tau$$

Als zugehörige Leistung ergibt sich offensichtlich

(6.30)

$$(\mathcal{P}_\nu v)(t) = |b * v|^2(t)$$

Mit diesen Beziehungen sind wir jetzt sogar in der Lage, daß minimale Element  $v^t$  explizit anzugeben, indem wir die Gleichung (6.28) auflösen:

(6.31)

$$v^t = b^{-1} * (b * v)_t.$$

Dies ist aber nur in der Topologie des Raums  $\mathcal{S}_{a_0}$  richtig. In  $\mathcal{S}_a$  muß noch die Bedingung (5.73) beachtet werden, die mit

(6.32)

$$v^t = b^{-1} * (b * v)_t - \sum_i \tilde{v}_t(\omega_i) \zeta_{\omega_i}$$

befriedigt wird. Im FOURIER-Bereich (genauer: im Raum  $\tilde{\mathcal{S}}_a$ ) geht diese Gleichung in

(6.33)

$$\tilde{v}^t = \frac{1}{\tilde{b}} \mathfrak{F} \left( \mathfrak{F}^{-1}(\tilde{b} \tilde{v}) \right)_t - \tilde{v}_t \sum_i \zeta_{\omega_i}$$

über. Es sei angemerkt, daß diese Gleichungen unter der Voraussetzung der Irreversibilität hergeleitet wurden. Im reversiblen Fall ist die »kausale Wurzel«  $b$  gar nicht definiert, weshalb für diesen Fall leider keine explizite Gleichung für das Minimalelement angebar ist. Der Grund liegt darin, daß bei Reversibilität dieses gar nicht eindeutig bestimmt ist (im Sinne »normaler« Funktionen und Distributionen).

### 6.2.2 Die verlorene Leistung im Fall rationaler Übertragungsfunktionen

Beschränken wir uns auf rationale Übertragungsfunktionen

$$(6.34) \quad \hat{h}(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$$

mit reellen Koeffizienten, hat  $\tilde{a}_0$  nach (4.147) die Gestalt

$$(6.35) \quad \tilde{a}_0(\omega) = \frac{1}{2} \frac{p(s)q(-s) + p(-s)q(s)}{q(s)q(-s)} (s=j\omega).$$

Die Nullstellen des Zählerpolynoms

$$(6.36) \quad R(s) := p(s)q(-s) + p(-s)q(s)$$

sind neben der Symmetrie zur reellen Achse wie jedes Polynoms mit reellen Koeffizienten auch symmetrisch zum Ursprung der komplexen Ebene: Ist  $s_i$  eine Nullstelle von  $R$ ,  $R(s_i) = 0$ , so gilt auch  $R(-s_i) = 0$  (siehe Abschnitt 4.6, Bild 4.6). Als Folge der Positivität von  $\hat{h}$  treten darüber hinaus alle imaginären Nullstellen doppelt auf.  $R$  läßt sich also durch ein Produkt

$$(6.37) \quad R(s) = K \prod_i (s-s_i)(s+s_i)$$

darstellen, wobei nur die Nullstellen mit negativem Realteil  $\operatorname{Re}(s_i) < 0$  aufgeführt sind, und die doppelt auftretenden imaginären Nullstellen  $\operatorname{Re}(s_i) = 0$  sind jeweils nur einfach berücksichtigt. Wegen der Positivität ist  $K > 0$ . Daher ist eine *Faktorisierung* des Polynoms  $R$  in der Form

$$(6.38) \quad R(s) = r(s) r(-s),$$

möglich, wobei

$$(6.39) \quad r(s) := \sqrt{K} \prod_i (s-s_i)$$

wiederum ein Polynom mit reellen Koeffizienten ist, dessen Nullstellen ausschließlich in der Halbebene  $\operatorname{Re}(s) \leq 0$  liegen. Damit läßt sich die »kausale Wurzel«  $\tilde{b}$  als Lösung der Gleichung (6.25) sofort angeben:

$$(6.40) \quad \tilde{b}(\omega) = \frac{r(j\omega)}{q(j\omega)}$$

bzw.

$$(6.41) \quad \hat{b}(s) = \frac{r(s)}{q(s)}.$$

Die zu einer rationalen Funktion gehörende Zeitdistribution ist genau dann kausal, wenn der (gewählte) Konvergenzstreifen, in dem keine Pole liegen dürfen, eine rechte Halbebene ist. Nach Aussage des Satzes (4.107) besitzt das Nennerpolynom  $q$ , welches das gleiche wie das der positiven Übertragungsfunktion  $\hat{h}$  ist, keine Nullstellen mit positivem Realteil. Daher ist die Grenze dieser Konvergenzhalbebene die imaginäre Achse, und (6.40) definiert tatsächlich die FOURIER-Transformierte einer kausalen Distribution. Andererseits besitzt die Distribution  $\tilde{b}$  die vorausgesetzte Eigenschaft, daß auch ihr Inverses  $\tilde{b}^{-1}$  kausal ist, denn die angeführten Argumente treffen genauso auf  $1/\tilde{b}(s) = q(s)/r(s)$  zu. Die Funktion  $\tilde{b}$  zeichnet sich also dadurch aus, daß sie in der rechten, offenen Halbebene  $\operatorname{Re}(s) > 0$  weder Pol- noch Nullstellen besitzt.

### 6.2.3 LAPLACE- und FOURIER-Transformation quadratischer und bilinearer Funktionen

Bevor an der Dissipationsleistung weitergearbeitet wird, sollen geeignete Hilfsmittel für die Behandlung quadratischer Ausdrücke geschaffen werden, die sich im Folgenden als nützlich erweisen werden.

Die FOURIER-Transformierte des Produkts

$$(6.42) \quad X(t) := x_1(t) x_2(t)$$

ist

$$(6.43) \quad \mathfrak{F}(x_1 x_2) = \tilde{X} = \frac{1}{2\pi} \tilde{x}_1 * \tilde{x}_2.$$

Der Zusammenhang mit der FOURIER-Transformierten der Funktionen  $x_1$  und  $x_2$  wird über die Faltung hergestellt; eine Operation, die im Einzelfall gar nicht so leicht zu überblicken ist. Eine Vereinfachung wird erzielt, wenn man bei derartigen Funktionen



zunächst auf das *dyadische Produkt*

$$(6.44) \quad \Xi(t_1, t_2) := x_1(t_1) x_2(t_2)$$

übergeht. Das ursprüngliche Produkt  $X$  erhält man durch

$$(6.45) \quad X(t) = \Xi(t, t)$$

aus der neuen Funktion  $\Xi$ . Diese Darstellung hat den Vorteil, daß jede der unabhängigen Variablen  $t_1, t_2$  für sich der FOURIER- oder LAPLACE-Transformation unterworfen werden kann (zweidimensionale Transformation):

$$\mathfrak{F}(\Xi) = \mathfrak{F}_1(\mathfrak{F}_2(\Xi)) = \mathfrak{F}_1(\mathfrak{F}_2(x_1 x_2)) = \mathfrak{F}_1(x_1 \mathfrak{F}_2(x_2)) = \mathfrak{F}_1(x_1) \mathfrak{F}_2(x_2) = \tilde{x}_1 \tilde{x}_2$$

$$(6.46) \quad \tilde{\Xi}(\omega_1, \omega_2) = \tilde{x}_1(\omega_1) \tilde{x}_2(\omega_2).$$

$\mathfrak{F}$  bezeichne die vollständige FOURIER-Transformation der beiden unabhängigen Variablen, während  $\mathfrak{F}_1$  und  $\mathfrak{F}_2$  die Transformation jeweils einer Variablen kennzeichnen. Die zweidimensionale FOURIER-Transformierte des dyadischen Produktes  $x_1(t_1)x_2(t_2)$  ist wiederum das dyadische Produkt der FOURIER-Transformierten  $\tilde{x}_1(\omega_1)$  und  $\tilde{x}_2(\omega_2)$ . Eine Faltung tritt nicht auf. Genauso kann man die Funktion  $\tilde{\Xi}(s_1, s_2)$  durch Verwendung der LAPLACE-Transformation einführen.

Der zeitlichen Ableitung der Funktion  $X$ ,

$$(6.47) \quad \dot{X}(t) = \dot{x}_1(t)x_2(t) + x_1(t)\dot{x}_2(t),$$

ist entsprechend den Regeln der FOURIER- bzw. LAPLACE-Transformation die Funktion

$$(6.48) \quad j(\omega_1 + \omega_2) \tilde{\Xi}(\omega_1, \omega_2)$$

bzw.

$$(6.49) \quad (s_1 + s_2) \hat{\Xi}(s_1, s_2)$$

zuzuordnen. Durch die Umkehrung dieser Regel erhält man zu  $X$  eine Stammfunktion, und zwar entspricht wegen der Eigenschaften der LAPLACE-Transformation die Funktion

$$(6.50) \quad \frac{\hat{\Xi}(s_1, s_2)}{s_1 + s_2}$$

dem Integral

$$(6.51) \quad \int_{-\infty}^t x_1(\tau) x_2(\tau) d\tau,$$

wenn man in rechten offenen Konvergenzhalbebenen  $\text{Re}(s_i) > d_i$  arbeitet. Darüber hinaus ist das Produkt  $X$  gegenüber Symmetrierungen der Funktion  $\Xi$

$$(6.52) \quad \tilde{\Xi}(t_1, t_2) := \frac{1}{2} \left\{ \Xi(t_1, t_2) + \Xi(t_2, t_1) \right\}$$

invariant. Das überträgt sich unmittelbar auf die Funktionen  $\tilde{\Xi}(\omega_1, \omega_2)$  und  $\hat{\Xi}(s_1, s_2)$ .

Obwohl die FOURIER- und LAPLACE-Transformation ohne Schwierigkeiten auch für Distributionen mehrdimensionaler »unabhängiger Variablen« formuliert werden kann (siehe etwa JANTSCHER [22]), macht der Übergang von der Funktion  $\Xi$  zweier unabhängiger Variablen auf die Funktion  $X$  mit einer unabhängigen Variablen und deren Interpretation als normales *Produkt* zweier Funktionen nur dann einen Sinn, wenn es sich hierbei um gewöhnliche Funktionen handelt, etwa  $x_i \in L_2$ .

## 6.2.4 Die verlorene Arbeit und die zugehörige LJAPUNOW-Funktion

Die Voraussetzung der reellen Übertragungsfunktion soll weiter aufrecht erhalten werden. Passend dazu nehmen wir jetzt auch alle Zeitfunktionen als reellwertig an. Diese Einschränkungen sind nicht zwingend; sie werden lediglich der etwas besseren Übersichtlichkeit wegen vorgenommen.

Mit den Hilfsmittel des Abschnitts 6.2.3 kann man den Leistungs Ausdruck  $P_V$  in den LAPLACE-Bereich transformieren:

$$(6.53) \quad \hat{P}_V(s_1, s_2) = \hat{v}(s_1) \hat{b}(s_1) \hat{b}(s_2) \hat{v}(s_2).$$

Eine gesonderte Bezeichnung für  $P_V(t_1, t_2)$  bzw.  $\hat{P}_V(s_1, s_2)$  unterbleibt aus Übersichtlichkeitsgründen, da sich die Unterscheidung zu  $P_V(t)$  bereits durch die Zahl der

Argumente ergibt. Im LAPLACE-Bereich wird  $\hat{P}_V(s)$  gar nicht verwendet. Entsprechendes möge für die noch einzuführenden Funktionen gelten. Die Funktion

$$(6.54) \quad \hat{B}(s_1, s_2) := \hat{b}(s_1) \hat{b}(s_2) = \frac{r(s_1) r(s_2)}{q(s_1) q(s_2)}$$

soll *quadratische Übertragungsfunktion* der Leistung  $P_V$  genannt werden. Ebenso können wir die Übertragungsfunktion der Gesamtleistung aus

$$\hat{P}(s_1, s_2) = \hat{v}(s_1) \hat{y}(s_2) = \hat{v}(s_1) \hat{h}(s_2) \hat{v}(s_2) = \frac{p(s_2)}{q(s_2)} \hat{v}(s_1) \hat{v}(s_2)$$

mit

$$(6.55) \quad \hat{H}(s_1, s_2) = \frac{p(s_1)q(s_2) + p(s_2)q(s_1)}{q(s_1)q(s_2)}$$

angeben, wobei noch eine Symmetrierung nach (6.52) durchgeführt wurde. Mit der Integrationsregel (6.50), (6.51) ergibt sich hieraus die Übertragungsfunktion der gesamten Arbeit  $W$  zu

$$(6.56) \quad \hat{\Psi}(s_1, s_2) = \frac{p(s_1)q(s_2) + p(s_2)q(s_1)}{(s_1 + s_2) q(s_1)q(s_2)}$$

und die der verlorenen Arbeit  $V$  zu

$$(6.57) \quad \hat{T}(s_1, s_2) = \frac{r(s_1)r(s_2)}{(s_1 + s_2) q(s_1)q(s_2)}.$$

Die Übertragungsfunktion der wiedergewinnbaren Arbeit

$$(6.58) \quad E_V := W - V$$

kann mit

$$(6.59) \quad \hat{\Phi}(s_1, s_2) = \frac{p(s_1)q(s_2) + p(s_2)q(s_1) - r(s_1)r(s_2)}{(s_1 + s_2) q(s_1)q(s_2)}.$$

angegeben werden. Nach den Definitionen (6.36), (6.38) der Polynome  $R$  und  $r$  wird das Zählerpolynom von  $\Phi$  Null, wenn  $s_1 = -s_2$  gesetzt wird. Daher ist  $(s_1 + s_2)$  Linearfaktor des Zählerpolynoms von  $\Phi$ , weshalb sich dieser Faktor mit dem Nenner kürzt:

$$(6.60) \quad \hat{\Phi}(s_1, s_2) = \frac{F(s_1, s_2)}{q(s_1) q(s_2)},$$

wobei  $F$  ein Polynom in  $s_1$  und  $s_2$  ist. Das Nennerpolynom bleibt unverändert. Daraus ergibt sich eine wichtige Folgerung. Das Nennerpolynom der Übertragungsfunktion  $\hat{h}$  bestimmt die dynamische Abhängigkeit des inneren Zustands des Systems von der Eingangsgröße. Definieren wir

$$(6.61) \quad \hat{z}(s) := \hat{v}(s)/q(s),$$

wobei  $z$  die zugehörige Zeitfunktion ist, so legt der Vektor

$$(6.62) \quad \mathbf{z} := [z_0, z_1, z_2, \dots, z_k]^T := [z, \dot{z}, \ddot{z}, \dots, z^{(k)}]^T$$

den inneren Zustand des Systems eindeutig fest, wenn das System vollständig steuerbar und beobachtbar ist. Bei diesem Zustandsmodell handelt es sich um die sogenannte *Regelungs-Normalform* (siehe HARTMANN [19], FÖLLINGER [16], 11.2.1). Die Ordnung der höchsten Ableitung in  $\mathbf{z}$  soll hier

$$(6.63) \quad k = \max \{\text{grad } q, \text{grad } p\}$$

gesetzt werden. Damit besteht der Zustandsvektor aus  $k+1$  Komponenten. Die *eigentlichen* Zustandsvariablen sind aber nur die ersten  $k$  Komponenten. Die höchste Ableitung wird nicht mehr als Zustandsvariable bezeichnet, da sie als Funktion der anderen Zustandsvariablen  $z_i$ ,  $i < k$ , und der Eingangsgröße ausgedrückt werden kann. Die Schreibarbeit vereinfacht sich aber, wenn auch die Ableitung  $z^{(k)}$  formal im Zustandsvektor mitgeführt wird. Abweichend von (6.63) wird als Zahl der unabhängigen Zustandsvariablen auch der Grad des Nennerpolynoms  $q$  verstanden. Bei dieser Definition kann sich aber bei Vertauschung von Erregung und Systemantwort  $y \mapsto v$  die Zahl der Zustandsvariablen ändern. Das ist nach (6.63) nicht der Fall; jedoch wird dadurch auch einem Differenzier im System ( $p = q+1$ ) eine Zustandsgröße zugewiesen. Durch LAPLACE-Transformation geht der Zustandsvektor (6.62) in

$$(6.64) \quad \hat{\mathbf{z}}(s) = \hat{z}(s) [1, s, s^2, \dots, s^k]^T$$

über. Faßt man die Koeffizienten der Polynome

$$p(s) = p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + \dots,$$

$$q(s) = q_0 + q_1 s + q_2 s^2 + \dots,$$

in den Vektoren

$$(6.65) \quad \mathbf{p} := [p_0, p_1, p_2, \dots, p_k]^T,$$

$$(6.66) \quad \mathbf{q} := [q_0, q_1, q_2, \dots, q_k]^T$$

zusammen, kann man damit die Abbildungen des Zustandsvektors auf Ein- und Ausgangsgröße durch

$$(6.67) \quad \hat{y} = \mathbf{p}^T \hat{\mathbf{z}},$$

$$(6.68) \quad \hat{v} = \mathbf{q}^T \hat{\mathbf{z}}$$

ausdrücken. In diesen Gleichungen kommt die prinzipielle Gleichberechtigung der Ein- und Ausgangsgröße besonders gut zum Ausdruck. In den Zeitbereich zurückgebracht, ergibt sich aus (6.67)

$$(6.69) \quad y(t) = \mathbf{p}^T \mathbf{z}(t),$$

das heißt, die Ausgangsgröße ist eine *Zustandsfunktion*: der Wert von  $y$  zum Zeitpunkt  $t$  hängt nur vom Zustandsvektor zum Zeitpunkt  $t$  ab. Genauso erweisen sich alle anderen rationalen Übertragungsfunktionen, die den Nenner  $q$  besitzen, als Repräsentationen von Zustandsfunktionen, sofern der Grad des jeweiligen Zählers  $k$  nicht übersteigt.

Bezüglich der quadratischen Übertragungsfunktion  $\Phi$  der wiedergewinnbaren Arbeit führt das mit

$$(6.70) \quad \hat{E}_V(s_1, s_2) = \Phi(s_1, s_2) \hat{v}(s_1) \hat{v}(s_2) = F(s_1, s_2) \hat{z}(s_1) \hat{z}(s_2)$$

im Zeitbereich sofort auf die Darstellung

$$(6.71) \quad E_V(t) = \mathbf{z}^T(t) \mathbf{F} \mathbf{z}(t),$$

wobei die Komponenten der Matrix  $\mathbf{F} := [F_{ij}]$  die Koeffizienten des Polynoms

$$F(s_1, s_2) = \sum_i \sum_j F_{ij} s_1^i s_2^j$$

sind. Der Arbeitsanteil  $E_V$  ist also eine quadratische Zustandsfunktion! Wegen  $W \geq V$  ist  $E_V$  stets nicht negativ. Daher ist  $\mathbf{F}$  eine positiv semidefinite Matrix, weil jeder Zustand  $\mathbf{z}(t)$  wegen der vollständigen Steuerbarkeit angenommen werden kann. Da das

Polynom  $F$  durch Kürzung mit  $(s_1 + s_2)$  aus dem Zähler von (6.59) hervorging, treten in  $F$  höchstens Potenzen von  $s_1$  und  $s_2$  bis zur Ordnung  $k-1$  auf. Die Matrix  $\mathbf{F}$  hat also in der  $k$ -ten Zeile und Spalte nur Nullen, so daß sie im wesentlichen durch die  $(k \times k)$ -Untermatrix der ersten  $k$  Zeilen und Spalten (beginnend mit der 0. Zeile und Spalte) wiedergegeben wird. Dadurch hängt die Funktion  $E_V$  tatsächlich nur von den eigentlichen Zustandsvariablen, den ersten  $k$  Komponenten des Zustandsvektors, ab.

Genauso können wir die Leistung  $P_V$  darstellen: Es folgt aus (6.54)

$$(6.72) \quad P_V(t) = \mathbf{z}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{z}(t),$$

wobei die Matrix

$$(6.73) \quad \mathbf{R} := \mathbf{r} \mathbf{r}^T$$

mit  $\mathbf{r} := [r_i]^T$  aus den Koeffizienten des Polynoms

$$r(s) = \sum_i r_i s^i$$

hervorgeht. Wie  $E_V$  erweist sich also auch  $P_V$  als quadratische Zustandsfunktion (wenn auch nicht zwangsläufig als Funktion der eigentlichen Zustandsvariablen), wobei auch hier wegen  $P_V > 0$  die Matrix  $\mathbf{R}$  positiv semidefinit ist.

Man vergleiche hierzu auch BROCKETT / WILLEMS [6], BROCKETT / LEE [7], wo Stabilitätskriterien nichtlinearer Regelkreise entwickelt werden: Die betrachteten Regelkreise bestehen aus einem linearen und einem nichtlinearen Teilsystem. Bei der Untersuchung des linearen Teilsystems treten dort Wegintegrale durch den Zustandsraum auf, die unserer Gesamtarbeit entsprechen. Es wird dann gezeigt, daß sich dieses Wegintegral in einen wegunabhängigen und in einen nicht negativen wegababhängigen Anteil aufspalten läßt, in dem wir die verlorene Arbeit wiedererkennen.

Es *nicht* möglich, für die verlorene Arbeit eine Zustandsdarstellung zu finden. Auch die gesamte Arbeit ist nur im reversiblen Fall wegen  $W = E_V$  eine Zustandsfunktion. Mit diesen Ergebnissen können wir die äußere Leistung in Form einer Bilanzgleichung schreiben:

$$(6.74) \quad P = P_V + \dot{E}_V,$$

$$P(t) = \mathbf{z}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{z}(t) + \{\mathbf{z}^T(t) \mathbf{F} \mathbf{z}(t)\}'.$$

Setzt man von einem gewissen Zeitpunkt  $t_0$  an die Erregung  $v$  gleich Null, folgt ebenfalls  $P$  gleich Null und es ergibt sich für  $t > t_0$

$$(6.75) \quad \dot{E}_V(t) = \{\mathbf{z}^T(t) \mathbf{F} \mathbf{z}(t)\}' = -\mathbf{z}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{z}(t) \leq 0$$

wegen der positiven Semidefinitheit der Matrix  $\mathbf{R}$ . Der Wert von  $E_V$  kann also nur fallen, höchstens gleichbleiben.

Hier ist nun zu erkennen, daß die Matrix  $\mathbf{F}$  stets den größtmöglichen Rang  $k$  besitzt. Wäre  $\text{rang } \mathbf{F} < k$ , gäbe es einen Teilraum des Zustandsraumes, in dem  $E_V = 0$  sein müßte. Wegen der vollständigen Steuerbarkeit ist jeder beliebige Zustand  $\mathbf{z}$  dieses Nullraumes durch eine geeignete Steuerung zum Zeitpunkt  $t_0$  auch zu erreichen. Nach (6.75) kann  $E_V$  nach Abschaltung der Erregung aber nicht mehr wachsen, das heißt, der Zustand  $\mathbf{z}(t)$  muß auch für  $t > t_0$  im Nullraum bleiben. Wäre nun die Ausgangsgröße  $y(t)$  für  $t > t_0$  nicht Null, könnte man immer noch Arbeit aus dem System herausziehen, was aber der Passivität widersprechen würde. Also kann nur  $y(t) = 0$  gelten, woraus mit der vollständigen Beobachtbarkeit auch  $\mathbf{z}(t) = 0$  für  $t > t_0$  folgt. Der Nullraum der Matrix  $\mathbf{F}$  kann also nur aus dem Nullvektor bestehen, also hat  $\mathbf{F}$  den vollen Rang  $k$  und ist im eigentlichen  $k$ -dimensionalen Zustandsraum daher sogar positiv definit (nicht nur semidefinit).

Wegen dieser Eigenschaft der Matrix  $\mathbf{F}$  folgt direkt eine Aussage über den Zustandsvektor  $\mathbf{z}$ . Dieser bleibt für alle Zeiten beschränkt. Es sei an dieser Stelle erwähnt, daß unter einer etwas strengeren Voraussetzung, der *strengen Positivität* der Übertragungsfunktion, bei der die Bedingung der positiven Definitheit der Übertragungsmatrix im Gebiet  $\text{Re}(s) \geq 0$  (im Gegensatz zur Semidefinitheit im Gebiet  $\text{Re}(s) > 0$ ) gestellt wird, stets  $\mathbf{z}(t) \rightarrow 0$  folgt (siehe z. B. LANDAU [28]). Funktionen wie  $E_V$ , die eine Schranke für den Zustandsvektor bilden und eine nicht positive Zeitableitung besitzen, sind sogenannte *LJAPUNOW-Funktionen*. Bei den Problemen der Systemtheorie und Regelungstechnik hat man mit der Konstruktion einer derartigen LJAPUNOW-Funktion und der daraus resultierenden Beschränktheits- oder Stabilitätsaussage meist sein Ziel erreicht.

Hier ist aber weiter zu prüfen, ob hinter den Funktionen  $P_V$  und  $E_V$  physikalische Größen stehen. Von der Form der Bilanzgleichung (6.74) her könnte die wiedergewinnbare Arbeit  $E_V$  als Zustandsfunktion die *innere Energie* des Systems darstellen und  $P_V$  wäre – wie angestrebt – die Dissipationsleistung. Betrachten wir

aber die quadratische Form (6.72) der Leistung  $P_V$ : Da sich die Matrix nach (6.73) als dyadisches Matrixprodukt aus dem Vektor  $\mathbf{r}$  ergibt, kann  $\mathbf{R}$  nur den Rang 1 besitzen. Das würde bedeuten, die Dissipation fände nur in einem eindimensionalen Unterraum des vollständigen  $k$ -dimensionalen Zustandsraumes statt! Obwohl das bei einigen Systemen wie etwa elektrischen Netzwerken mit nur einem einzigen Widerstand zutreffen mag, lassen sich doch beliebige Gegenbeispiele konstruieren, bei denen die Dissipationsleistung von mehreren oder auch allen unabhängigen Zustandsvariablen abhängt. Diese Erkenntnis wird auch nicht von der vollständigen Steuerbarkeit oder Beobachtbarkeit beeinflusst (wie zunächst angenommen), da diese hier vorausgesetzt wurde.

Zur Verdeutlichung kann nochmals die Zusammenschaltung zweier Systeme herangezogen werden: Für jedes Teilsystem erhält man eine Matrix  $\mathbf{R}$  vom Rang 1. Schaltet man die beiden Systeme parallel, wird der gemeinsame Zustandsvektor aus der entsprechend höher dimensionalen Zusammenfügung der Zustandsvektoren der Teilsysteme entstehen. Die zum Gesamtsystem gehörende Matrix  $\mathbf{R}$  baut sich aber keinesfalls aus den Matrizen der Teilsysteme auf, die dann den Rang 2 besitzen würde, sondern besitzt – wie *jedes* System – wieder nur den Rang 1. Dieses Ergebnis konkurriert mit der Erwartung eines zweidimensionalen »dissipativen Unterraums«, der aus der direkten Summe der »dissipativen Unterräume« der Teilsysteme entstehen müßte. Wir kommen also zu der Aussage:

Die Leistung der verlorenen Energie  $P_V$  kann im allgemeinen *nicht* unseren Anforderungen an die Dissipationsleistung gerecht werden.

### 6.3 Weitere Ansätze für die Dissipationsleistung

Trotz des negativen Ergebnisses des letzten Abschnitts sind die Untersuchungen nicht ohne Wert. Es läßt sich erkennen, welche Abänderungen nötig sind, um die Voraussetzung der Additivität zu erfüllen. Auch KERN weist bei der Frage nach Nichtgleichgewichtsentropieen einer Kontinuumsmechanik [23], S. 76f, darauf hin, daß es geeignete additive Funktionale gibt. Durch die vorangegangene Diskussion haben wir gesehen, daß bei Konstruktion der Matrix  $\mathbf{R}$  aus der verlorenen Leistung deren stets gleichbleibender Rang von 1 der Additivität in jedem Fall widerspricht.

Es ist aber ersichtlich, daß bei einer Erweiterung dieser Überlegungen auf Mehrgrößensysteme der Rang der Matrix  $R$  auf die Zahl der unabhängigen Eingangsgrößen  $n$  steigen kann. Das würde uns auf den Gedanken zurückführen, so viele Eingangsgrößen aufzuführen, wie das a-priori-Wissen über die Black Box ermöglicht.

Es ist aber noch ein anderer Weg möglich: Man könnte versuchen, unter Beibehaltung der Zahl der Eingangsgrößen eine Matrix  $R$  mit *maximalem Rang* zu konstruieren. Welche Eigenschaften müssen dann die Matrizen  $R$  und  $F$  besitzen? Als erstes ist weiterhin die Bilanzgleichung

$$(6.76) \quad P = \dot{E} + P_d$$

zu befriedigen. Die daraus resultierende Bedingung formuliert sich am einfachsten mit den den Matrizen zugeordneten Polynomen:

$$(6.77) \quad U(s_1, s_2) = R(s_1, s_2) + (s_1 + s_2) F(s_1, s_2).$$

Hierbei ist

$$(6.78) \quad U(s_1, s_2) := p(s_1)q(s_2) + p(s_2)q(s_1)$$

das Zählerpolynom der Übertragungsfunktion  $\hat{H}$  der Gesamtleistung  $W$  nach (6.55). Um die gewünschte Nicht-Negativität der Größen  $E$  und  $P_d$  zu gewährleisten, müssen die zugeordneten Matrizen  $F$  und  $R$  positiv semidefinit sein.  $E$  soll weiterhin eine Funktion der eigentlichen Zustandsvariablen sein. Daher darf  $F$  in der  $k$ -ten Zeile und Spalte nur Nullen enthalten und wegen der angenommenen vollständigen Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit soll  $F$  den Rang  $k$  besitzen.

Man kann nun die Lösungsmenge dieser Aufgabe bei vorgegebenem Polynom  $U$  untersuchen und die Lösungspaare  $(F, R)$  herausuchen, die sich gegenüber dem Rest durch größtmöglichen Rang von  $R$  auszeichnen. Die Lösungsmenge ist auf keinen Fall leer, da mindestens das Lösungspaar nach Abschnitt 6.2.4 mit dem Ansatz der verlorenen Leistung existiert. Weiterhin muß aber auch die »richtige« Dissipationsleistung, die man aus Kenntnis der inneren Struktur heraus aufstellen würde, unter der Voraussetzung vollständiger Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit in der Lösungsmenge enthalten sein muß. Es ergibt sich die Frage: Gibt es womöglich nur eine einzige Lösung mit maximalem Rang von  $R$ ? Diese Frage muß im allgemeinen – unter Verzicht auf die Darstellung eines Gegenbeispiels – mit *Nein* beantwortet werden. Man kann leider auch auf diesem Weg nicht zu einer Identifikation der inneren Energie und der Dissipationsleistung gelangen.

Durch Untersuchung verschiedener Realisierungen ein- und derselben Übertragungsfunktion muß man sogar feststellen, daß die innere Energie und die Dissipationsleistung je nach Realisierung anders ausfällt. Als Argument reichen hierfür aber die in Bild 6.1 angegebenen BOUCHEROT-Schaltungen nicht aus, da dort – wie schon erwähnt – die vollständige Beobachtbarkeit verletzt ist. Man muß dazu andere Vergleiche anstellen, bei denen vollständige Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit vorliegt, wie etwa die in Bild 6.2 skizzierten Schaltungen, die bei entsprechender Anpassung gleiche Scheinwiderstände, aber unterschiedliche innere Energien und Dissipationsleistungen besitzen und dennoch beide vollständig steuerbar und beobachtbar sind, wenn man für die Schaltung 6.2.a den Fall (6.17) ausnimmt.

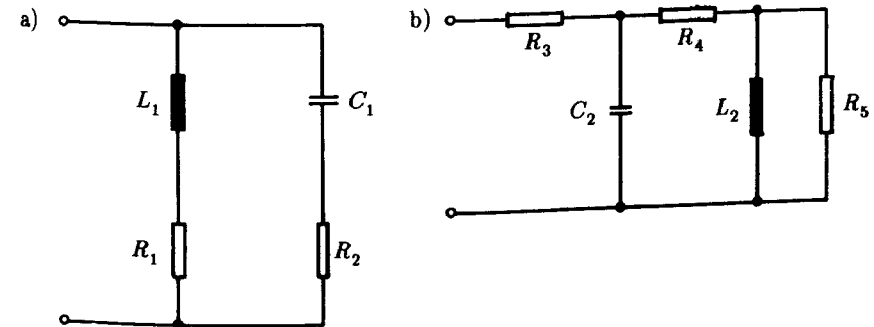


Bild 6.2: Schaltungen mit gleichem Scheinwiderstand

Es bleibt die Idee, ob es unter der ausgewählten Lösungsteilmenge wenigstens gegenüber anderen ausgezeichnete Lösungen gibt, z. B. durch kleinst- oder größtmögliche innere Energie oder Dissipationsleistung. Wir stellen jedoch zunächst fest, daß die mögliche Lösungsmenge durch eine weitere Restriktion verkleinert werden kann:

## 6.4 Die LAGRANGE-Funktion

TELLEGEN [42] und MEIXNER [32] haben nachgewiesen, daß die innere Energie *nicht* aus dem äußeren Systemverhalten zu ermitteln ist. Sie zeigten aber, daß die LAGRANGE-Funktion des Systems aus dem äußeren Verhalten zu bestimmen ist und diese für alle möglichen Realisierungen den gleichen Wert besitzt. Beim elektrischen Netzwerk ist die LAGRANGE-Funktion die Differenz von magnetischer und elektrischer Energie:

$$(6.79) \quad \mathcal{L} = E_{\text{magn}} - E_{\text{el}}.$$

Sie ist wie die elektrische und die magnetische Energie eine Zustandsfunktion. Die folgende Herleitung orientiert sich an MEIXNER [32], verwendet jedoch die in Abschnitt 6.2.3 bereitgestellten Hilfsmittel. Obwohl die Herleitung ein elektrisches Netzwerk als Grundlage betrachtet, bedeutet dies keineswegs eine Festlegung auf elektrische Systeme, da die Struktur der Differentialgleichungen auch beim mechanischen Analogon gewahrt bleibt. Ein elektrisches Netzwerk mit linearen Bauelementen kann unter Verwendung von Ladungskoodinaten  $q$  stets durch das Differentialgleichungssystem

$$(6.80) \quad L \ddot{q} + R \dot{q} + D q = u$$

beschreiben werden. Der Vektor  $q$  bestehe aus  $m$  unabhängigen Ladungskoodinaten, die den Zustand des Netzwerks eindeutig festlegen.  $L$  ist die *Induktivitätsmatrix*,  $R$  die *Widerstandsmatrix* und  $D$  die *Inverse der Kapazitätsmatrix*. Alle Matrizen sind aus Gründen der Netzwerktheorie symmetrisch und positiv semidefinit. Jede Zeile der Matrixgleichung gibt die der zugehörigen Ladungskoodinate entsprechende Maschengleichung an. Auf der rechten Seite stehen die Beiträge der äußeren Spannungen. Dieser Vektor hat die gleiche Dimension wie  $q$ . Treten nur  $n < m$  äußere Spannungen auf, kann der Zusammenhang durch die konstante  $(m \times n)$ -Matrix  $T$  hergestellt werden:

$$(6.81) \quad u = T u_e.$$

Durch

$$(6.82) \quad i_e = T^T \dot{i}$$

erhält man die äußeren Ströme  $i_e$  aus den Schleifenströmen  $\dot{i}$ , die sich wiederum als generalisierte Geschwindigkeiten aus den Ladungskoodinaten ergeben:

$$(6.83) \quad \dot{i} := \dot{q}.$$

Die LAPLACE-Transformation der Differentialgleichung (6.82) und der Übergang auf generalisierte Geschwindigkeiten ergibt

$$(6.84) \quad s L \hat{i}(s) + R \hat{i}(s) + \frac{1}{s} D \hat{i}(s) = \hat{u}(s).$$

Diese Gleichung wird nun je einmal mit der unabhängigen Variablen  $s = s_1$  und mit  $s = s_2$  angeschrieben und sodann das Skalarprodukt mit  $\hat{i}(s_2)$  bzw.  $\hat{i}(s_1)$  gebildet:

$$s_1 \hat{i}^T(s_2) L \hat{i}(s_1) + \hat{i}^T(s_2) R \hat{i}(s_1) + \frac{1}{s_1} \hat{i}^T(s_2) D \hat{i}(s_1) = \hat{i}^T(s_2) \hat{u}(s_1).$$

$$s_2 \hat{i}^T(s_1) L \hat{i}(s_2) + \hat{i}^T(s_1) R \hat{i}(s_2) + \frac{1}{s_2} \hat{i}^T(s_1) D \hat{i}(s_2) = \hat{i}^T(s_1) \hat{u}(s_2).$$

Bei Subtraktion dieser Gleichungen fallen wegen der Symmetrie der Matrizen die Terme mit  $R$  weg:

$$(s_1 - s_2) \hat{i}^T(s_1) L \hat{i}(s_2) + \left( \frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_2} \right) \hat{i}^T(s_1) D \hat{i}(s_2) = \hat{i}^T(s_2) \hat{u}(s_1) - \hat{i}^T(s_1) \hat{u}(s_2).$$

Nach Division durch  $s_1 - s_2$  entsteht

$$(6.85) \quad \hat{i}^T(s_1) L \hat{i}(s_2) - \frac{\hat{i}^T(s_1)}{s_1} D \frac{\hat{i}^T(s_2)}{s_2} = \frac{\hat{i}^T(s_2) \hat{u}(s_1) - \hat{i}^T(s_1) \hat{u}(s_2)}{s_1 - s_2},$$

$$\hat{i}^T(s_1) L \hat{i}(s_2) - \hat{q}^T(s_1) D \hat{q}(s_2) = \frac{\hat{i}^T(s_2) \hat{u}(s_1) - \hat{i}^T(s_1) \hat{u}(s_2)}{s_1 - s_2}$$

Auf der linken Seite stehen die quadratischen LAPLACE-Transformierten der magnetischen und der elektrischen Energie

$$W_{\text{magn}} = \hat{i}^T L \hat{i},$$

$$W_{\text{el}} = \hat{q}^T D \hat{q}.$$

Wir erhalten tatsächlich die quadratische Transformierte der LAGRANGE-Funktion

$$(6.86) \quad \hat{\mathcal{L}}(s_1, s_2) = \hat{\mathbf{i}}^T(s_1) \mathbf{L} \hat{\mathbf{i}}(s_2) - \hat{\mathbf{q}}^T(s_1) \mathbf{D} \hat{\mathbf{q}}(s_2).$$

Die rechte Seite der Gleichung (6.85) ist wegen

$$\hat{\mathbf{i}}^T(s_2) \hat{\mathbf{u}}(s_1) = \hat{\mathbf{i}}^T(s_2) \mathbf{T} \hat{\mathbf{u}}_e(s_1) = \hat{\mathbf{i}}_e^T(s_2) \hat{\mathbf{u}}_e(s_1)$$

allein durch das äußere Verhalten bestimmt. Im Fall eines Eingrößensystems ( $n = 1$ , dann ist  $\mathbf{T}$  ist eine  $(m \times 1)$ -Matrix, also ein Vektor) erhalten wir bei Wahl des Stromes  $\hat{\mathbf{i}}_e$  als Erregung  $v$  die Übertragungsfunktion (Scheinwiderstand)

$$(6.87) \quad \hat{h}(s) = Z(s) = \frac{\hat{u}_e(s)}{\hat{i}_e(s)} = \mathbf{T}^T \left( s\mathbf{L} + \mathbf{R} + \frac{1}{s}\mathbf{D} \right) \mathbf{T} = \frac{p(s)}{q(s)}.$$

Damit wird aus (6.85)

$$(6.88) \quad \hat{\mathcal{L}}(s_1, s_2) = \frac{p(s_1)q(s_2) - p(s_2)q(s_1)}{(s_1 - s_2) q(s_1)q(s_2)} \hat{v}(s_1) \hat{v}(s_2).$$

Da der Zähler für  $s_1 = s_2$  verschwindet, muß der Linearfaktor  $(s_1 - s_2)$  im Zähler enthalten sein und sich mit dem Nenner kürzen lassen. Die LAGRANGE-Übertragungsfunktion hat daher die Form

$$(6.89) \quad \hat{\lambda}(s_1, s_2) = \frac{M(s_1, s_2)}{q(s_1)q(s_2)},$$

was die LAGRANGE-Funktion  $\mathcal{L}$  selbstverständlich als Zustandsfunktion ausweist. Die dem Zählerpolynom  $M$  zugeordnete Koeffizientenmatrix wird mit dem Symbol  $\mathbf{M}$  bezeichnet.

Die LAGRANGE-Funktion ist als Differenz von Energien vom Betrag stets kleiner oder gleich der gesamten inneren Energie

$$(6.90) \quad E := E_{\text{magn}} + E_{\text{el}}:$$

$$|\mathcal{L}| \leq E.$$

Daher muß die gesuchte Matrix  $\mathbf{F}$ , die der inneren Energie  $E$  zugeordnet sein soll, der Restriktion

(6.91)

$$\mathbf{z}^T \mathbf{F} \mathbf{z} \geq |\mathbf{z}^T \mathbf{M} \mathbf{z}|$$

genügen. Dadurch wird die ursprüngliche Lösungsmenge der Überlegungen aus Abschnitt 6.3 eingeschränkt, jedoch auch nicht soweit, daß im allgemeinen nur eine einzige Lösung übrig bleibt. In Einzelfällen kann aber zusammen mit der Bedingung des »maximalen Ranges« von  $\mathbf{R}$  die Lösungsmenge auf eine einzige Lösung eingeengt werden, die dann die gewünschte Dissipationsleistung und die zugehörige innere Energie liefert.

Im allgemeinen müßte aber noch untersucht werden, ob unter den vorhandenen Möglichkeiten der Lösungspaare  $(\mathbf{F}, \mathbf{R})$  nicht gewisse ausgezeichnete zu finden sind, deren physikalische Eigenschaften eine Charakterisierung der gesamten Klasse von Systemen mit gleichen Übertragungsfunktionen, die sie vertreten, erlauben.

# A Aus der Theorie der Distributionen

Mittlererweile hat in vielen technischen Disziplinen die DIRACsche Stoßfunktion ( $\delta$ -Distribution) Verwendung gefunden. Als mathematische »Grundlage« dient aber noch oft die ursprüngliche Einführung der  $\delta$ -Distribution durch DIRAC (1926) mit Hilfe einer widersprüchlichen Integraldefinition. Dabei wird manchmal schon allein der Umgang mit dieser Distribution als »Distributionentheorie« mißverstanden. Daß es der Mathematik schon vor etlichen Jahren gelungen ist, die Distributionentheorie, in der nicht nur die  $\delta$ -Distribution einen Platz erhält, auf ein sicheres Fundament zu stellen, wird in der technischen Literatur kaum gewürdigt. Aus diesem Grund soll ein kurzer Abriss der Theorie gegeben werden, wobei entsprechend den hier vorliegenden Bedürfnissen bereits die Begriffsbildung gegenüber den Quellen vereinfacht durchgeführt wird.

So werden die Distributionen als »verallgemeinerte Funktionen« nur über der reellen Achse eingeführt, während allgemein mehrdimensionale Definitionsbereiche zugelassen sind. Diesem Umstand folgend, ist insbesondere die Einführung der Faltung im Abschnitt A.8 gegenüber der Literatur stark verkürzt, wobei modifizierte Definitionen benutzt werden.

Als Literatur sind zu diesem Anhangkapitel besonders die Werke von SCHWARTZ [41], JANTSCHER [22], GELFAND / SCHILOW / WILENKIN [18] und YOSHIDA [46] zu nennen, die im folgenden nicht mehr explizit erwähnt werden.

## A.1 Grundfunktionen

### (A.1) Definition: Träger einer Funktion

Der Träger  $T = \text{supp}(\phi)$  (englisch *support*) einer in  $\mathbb{R}$  definierten Funktion  $\phi$  ist die kleinste abgeschlossene Menge, für die

$$(A.2) \quad \phi(u) \neq 0$$

für fast alle  $u \in T$  gilt. □

### (A.3) Definition: Finite Funktionen

Eine in  $\mathbb{R}$  definierte Funktion  $\phi$  heißt *finit*, wenn ihr Träger  $\text{supp}(\phi)$  beschränkt ist. Eine Funktion heißt *links-* bzw. *rechtsseitig finit*, wenn der Träger eine untere bzw. obere Schranke besitzt. □

### (A.4) Der Grundraum $\mathcal{D}$

Der Grundraum  $\mathcal{D}$  ist der Raum aller unendlich oft differenzierbaren, finiten Funktionen,

$$(A.5) \quad \mathcal{D} := \{ \phi : \phi \in C_\infty \text{ und } \phi \text{ finit} \}.$$

Durch die gewöhnliche Addition von Funktionen und durch die Multiplikation von Funktionen mit reellen oder komplexen Zahlen wird  $\mathcal{D}$  zu einem *linearen Raum*. Eine Metrik oder Norm ist im Raum  $\mathcal{D}$  jedoch nicht erklärt. Es wird aber eine *Topologie* durch die Angabe von *Nullfolgen* definiert: Eine Folge  $\{\phi_k\}$  ist genau dann Nullfolge in  $\mathcal{D}$ , wenn für die Träger  $\text{supp}(\phi_k)$  der Funktionen  $\phi_k$  eine gemeinsame Schranke existiert und die Funktionen und jede ihrer Ableitungen gleichmäßig gegen Null konvergieren:

$$(A.6) \quad \phi_k^{(j)}(u) \longrightarrow 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}_0, u \in \mathbb{R}.$$

Die Bedingung der Gleichmäßigkeit bezieht sich nur auf die unabhängige Variable  $u$ , nicht auf den Ableitungsindex  $j$ . Damit ist die Konvergenz jeder anderen Folge geklärt: Die Folge  $\{\phi_k\}$  konvergiert genau dann gegen den Grenzwert  $\phi \in \mathcal{D}$ , wenn  $\{\phi_k - \phi\}$  Nullfolge ist.

Eine wichtige Eigenschaft des Raums  $\mathcal{D}$  ist die Möglichkeit des uneingeschränkten Differenzierens; zu jeder Funktion aus  $\mathcal{D}$  sind auch alle ihre Ableitungen in  $\mathcal{D}$  enthalten:

$$(A.7) \quad \phi \in \mathcal{D} \Rightarrow \phi' \in \mathcal{D}.$$

□



(A.8) Der Grundraum  $\mathcal{S}$ 

Der Grundraum  $\mathcal{S}$  oder der Raum der *schnell fallenden Funktionen* ist

$$(A.9) \quad \mathcal{S} := \{ \phi : \phi \in C_\infty, \sup |u^i \phi^{(j)}(u)| < \infty \quad \forall i, j \in \mathbb{N}_0 \}$$

Damit eine Funktion  $\phi \in C_\infty$  zum Raum  $\mathcal{S}$  gehört, muß sie und jede ihrer Ableitungen für  $u \rightarrow \infty$  schneller fallen als jede reziproke Potenz von  $u$ . In dem linearen Raum  $\mathcal{S}$  wird eine Topologie wiederum über Nullfolgen eingeführt: Eine Folge  $\{\phi_k\}$  ist genau dann Nullfolge in  $\mathcal{S}$ , wenn die Funktionen und jede ihrer Ableitungen gleichmäßig gegen Null konvergieren,

$$(A.10) \quad \phi_k^{(j)}(u) \rightarrow 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}_0, u \in \mathbb{R}$$

Auch in diesem Grundraum kann ohne Einschränkung differenziert werden:

$$(A.11) \quad \phi \in \mathcal{S} \Rightarrow \phi' \in \mathcal{S} \quad \square$$

Die Menge der Elemente des Raums  $\mathcal{D}$  ist in  $\mathcal{S}$  enthalten. Da außerdem die Topologie des Raums  $\mathcal{D}$  dicht in jener von  $\mathcal{S}$  ist (eine Nullfolge in  $\mathcal{D}$  ist stets auch Nullfolge in  $\mathcal{S}$ ), können wir

$$(A.12) \quad \mathcal{D} \subset \mathcal{S}$$

schreiben.

## A.2 Distributionen als lineare stetige Funktionale

(A.13) Der Raum  $\mathcal{D}'$ 

Wir betrachten die linearen, stetigen Funktionale auf dem Raum  $\mathcal{D}$ . Ein derartiges Funktional auf  $\mathcal{D}$  vermittelt für alle Funktionen  $\phi$  aus  $\mathcal{D}$  eine lineare, stetige Abbildung auf die reellen – oder bei komplexwertigen Grundfunktionen auf die komplexen – Zahlen. Diese Funktionale werden ihrerseits zu Räumen zusammengefaßt. Einen derartigen Raum nennt man *Dualraum* und bezeichnet ihn mit  $\mathcal{D}'$ . Formal läßt sich für ein Funktional  $f$  aus  $\mathcal{D}'$  dann

$$(A.14) \quad f \in \mathcal{D}' : \phi \in \mathcal{D} \rightarrow f[\phi] = (f, \phi) \in \mathbb{C}$$

schreiben, wobei sowohl die Schreibweise  $f[\phi]$  als auch  $(f, \phi)$  für den Wert des Funktionalen üblich ist. Wir werden aber die letzte Schreibweise bevorzugen. Die Linearität der Funktionale aus  $\mathcal{D}'$  führt nun für  $f \in \mathcal{D}'$ ,  $\phi_i \in \mathcal{D}$ ,  $\alpha_i \in \mathbb{C}$  zu dem 1. Distributivgesetz

$$(A.15) \quad (f, \alpha_1 \phi_1 + \alpha_2 \phi_2) = \alpha_1 (f, \phi_1) + \alpha_2 (f, \phi_2)$$

Da  $\mathcal{D}'$  wiederum ein linearer Raum sein soll, definiert man

$$(A.16) \quad (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, \phi) := \bar{\alpha}_1 (f_1, \phi) + \bar{\alpha}_2 (f_2, \phi)$$

als 2. Distributivgesetz. Die Stetigkeit der Funktionale aus  $\mathcal{D}'$  bedeutet, daß für jede konvergente Funktionenfolge  $\{\phi_j\}$  aus  $\mathcal{D}$  die Folge der Funktionale konvergent sein muß:

$$(A.17) \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \phi_j = \Phi \Rightarrow \lim_{j \rightarrow \infty} (f, \phi_j) = (f, \Phi)$$

Die Topologie des Raums  $\mathcal{D}'$  wird auch hier über die Definition einer Nullfolge beschreiben: Eine Folge  $\{f_i\}$  von Funktionalen aus  $\mathcal{D}'$  ist genau dann eine Nullfolge, wenn

$$(A.18) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} (f_i, \phi) = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{D}$$

gilt.

Die Funktionale aus dem Dualraum  $\mathcal{D}'$  nennt man synonym auch *Distributionen* oder *verallgemeinerte Funktionen*. Um zu erkennen, was hierbei eine »Verallgemeinerung« ist, wird in Abschnitt A.3 die Einbettung »gewöhnlicher« Funktionen in den Raum der Funktionale angegeben. □

(A.19) Die DIRACsche  $\delta$ -Distribution

Ein wichtiges Beispiel für eine Distribution aus  $\mathcal{D}'$  wird durch das Funktional

$$(A.20) \quad (\delta, \phi) := \phi(0)$$

welches jeder Grundfunktion aus  $\mathcal{D}$  ihren Wert an der Stelle Null zuordnet, definiert. Durch diese einfache Definitionsgleichung wird die *DIRACsche  $\delta$ -Distribution* eingeführt.  $\square$

### (A.21) Der Raum $\mathcal{S}'$

Völlig analog zum Dualraum  $\mathcal{D}'$  wird der Raum  $\mathcal{S}'$  als linearer Raum der linearen, stetigen Funktionalen auf Funktionen aus  $\mathcal{S}$  eingeführt. Auch diese Funktionalen werden als verallgemeinerte Funktionen oder Distributionen bezeichnet.

Da  $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$  ist, definieren alle Funktionalen auf dem Raum  $\mathcal{S}$  (Distributionen aus  $\mathcal{S}'$ ) auch Funktionalen auf dem Raum  $\mathcal{D}$  (Distributionen aus  $\mathcal{D}'$ ). In diesem Sinne gilt

$$(A.22) \quad \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'. \quad \square$$

## A.3 Einbettung gewöhnlicher Funktionen in die Räume der Distributionen

Durch das Integral

$$(A.23) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \bar{g}(u) \phi(u) du$$

wird ein lineares, stetiges Funktional für alle  $\phi \in \mathcal{D}$  definiert, sofern die Funktion  $g$  lokal absolut LEBESGUE-integrierbar ist:  $g \in L_1^{\text{loc}}$  (die LEBESGUE-Räume  $L_p$  werden im Abschnitt B.1 erklärt). Dann gilt nämlich nach der HÖLDERschen Ungleichung (B.8)

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \bar{g}(u) \phi(u) du \right| = \left| \int_{\text{supp}(\phi)} \bar{g}(u) \phi(u) du \right| \leq \|g\|_{L_1(\text{supp}(\phi))} \|\phi\|_{L_\infty}.$$

Wir bezeichnen das auf diese Weise durch die Funktion  $g$  definierte Funktional (Distribution) ebenfalls mit dem Buchstaben  $g$ :

$$(A.24) \quad (g, \phi) := \int_{-\infty}^{\infty} \bar{g}(u) \phi(u) du.$$

In diesem Sinne werden die gewöhnlichen Funktionen aus  $L_1^{\text{loc}}$  als Distributionen aus  $\mathcal{D}'$  aufgefaßt und man kann schreiben

(A.25)

$$L_1^{\text{loc}} \subset \mathcal{D}'.$$

Insbesondere gilt  $\mathcal{D} \subset L_1 \subset L_1^{\text{loc}}$  und daher  $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}'$ . Im Hinblick auf die Darstellung (A.24) kann man die Distributionen aus  $\mathcal{D}'$  als Verallgemeinerung für die Fälle auffassen, in denen ein RIEMANNscher oder LEBESGUEScher Integralbegriff nicht mehr ausreicht (man denke an die DIRACsche Definition der  $\delta$ -Distribution, die mit keinem dieser Integralbegriffe widerspruchsfrei zu bewältigen ist).

Ebenso wie in (A.24) kann ein Funktional über  $\mathcal{S}$  definiert werden, wenn man die Funktion  $g$  zusätzlich einer Wachstumsbeschränkung unterwirft: Gehört die Funktion  $g$  zu der Menge

(A.26)

$$\mathcal{D}_{L_1} := \left\{ g = (c^2 + (\cdot)^2)^k G : G \in L_1, k \in \mathbb{N}_0 \right\} = \mathcal{S}' \cap L_1^{\text{loc}},$$

ist das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \bar{g}(u) \phi(u) du = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{G}(u) (c^2 + u^2)^k \phi(u) du$$

wegen

$$|(g, \phi)| \leq \|G\|_{L_1} \|(c^2 + (\cdot)^2)^k \phi\|_{L_\infty}$$

konvergent und es definiert ein lineares, stetiges Funktional für alle  $\phi \in \mathcal{S}$ , da  $u^j \phi(u)$  für jedes  $j$  beschränkt bleibt. Es gilt also

(A.27)

$$\mathcal{D}_{L_1} \subset \mathcal{S}'.$$

Wegen  $\mathcal{S} \subset L_1 \subset \mathcal{D}_{L_1}$  folgt auch  $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$ . Die gegenseitigen Einschließungen der Grund- und Dualräume lassen sich in dem Schema

(A.28)

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \subset & \mathcal{S} \\ \cap & & \cap \\ \mathcal{D}' & \supset & \mathcal{S}' \end{array}$$

zusammenfassen.

## A.4 Äquivalenzrelation zwischen Distributionen

Um mit Distributionen rechnen zu können, ist als erstes zu klären, wann zwei Distributionen einander *gleich* sind:  $G \subset \mathbb{R}$  sei ein offenes Gebiet auf der reellen Achse. Wir nennen zwei Distributionen  $f, g \in \mathcal{D}'$  einander *gleich in  $G$* ,

$$(A.29) \quad f = g \text{ in } G,$$

wenn

$$(A.30) \quad (f, \phi) = (g, \phi) \quad \forall \phi \in \mathcal{D} : \text{supp}(\phi) \subset G.$$

Ist  $G = \mathbb{R}$ , nennen wir  $f$  und  $g$  *gleich auf  $\mathcal{D}$*  und schreiben

$$(A.31) \quad f = g \text{ auf } \mathcal{D}.$$

Sind zwei Distributionen  $f, g \in \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$  gleich auf  $\mathcal{D}$ , so sind sie auch *gleich auf  $\mathcal{S}$* , d.h.

$$(A.32) \quad (f, \phi) = (g, \phi) \quad \forall \phi \in \mathcal{S},$$

da die Topologie von  $\mathcal{D}$  dicht in jener von  $\mathcal{S}$  ist. Daher kann auf den Zusatz »auf  $\mathcal{D}$ « bzw. »auf  $\mathcal{S}$ « verzichtet werden.

Nur mittels der hier definierten Gleichheit ist es erlaubt, die lokale Struktur von Distributionen zu beschreiben (z. B.  $\delta = 0$  in  $\mathbb{R}_+$ ). Es ist im allgemeinen nicht gestattet, vom Wert einer Distribution an einer bestimmten Stelle zu sprechen. Dies ist nur in den speziellen Fällen möglich, in denen die Distribution eine gewöhnliche Funktion ist.

### (A.33) Definition: Träger einer Distribution

Der *Träger*  $T = \text{supp}(f)$  einer Distribution  $f \in \mathcal{D}'$  ist die kleinste abgeschlossene Menge, für die

$$(A.34) \quad f = 0 \text{ in } \mathbb{R} - T$$

gilt.

□

### (A.35) Definition: Finite Distributionen

Eine Distribution  $f \in \mathcal{D}'$  heißt *finit*, wenn ihr Träger  $\text{supp}(f)$  beschränkt ist. Wir nennen  $f$  *links-* bzw. *rechtsseitig finit*, wenn der Träger eine untere bzw. obere Schranke besitzt. □

Mit Hilfe dieser Begriffe definieren wir die Räume

$$(A.36) \quad \mathcal{D}'_k := \{ f \in \mathcal{D}' : f \text{ finit} \},$$

$$(A.37) \quad \mathcal{D}'_+ := \{ f \in \mathcal{D}' : f \text{ linksseitig finit} \},$$

$$(A.38) \quad \mathcal{D}'_- := \{ f \in \mathcal{D}' : f \text{ rechtsseitig finit} \}.$$

## A.5 Multiplikation von Distributionen mit Funktionen

Eine Multiplikation zwischen beliebigen Distributionen existiert *nicht*. Es kann aber eine Multiplikation zwischen Distributionen aus  $\mathcal{D}'$  und Funktionen aus  $C_\infty$  erklärt werden: Die Multiplikation

$$(A.39) \quad f \in \mathcal{D}', h \in C_\infty \longrightarrow fh \in \mathcal{D}'$$

wird durch das Funktional

$$(A.40) \quad (fh, \phi) := (f, \phi h) \quad \forall \phi \in \mathcal{D}$$

definiert, denn aus  $\phi \in \mathcal{D}$ ,  $h \in C_\infty$  folgt  $\phi h \in \mathcal{D}$ . Daher steht auf der rechten Seite der Definitionsgleichung ein gültiges Funktional.

Eine Multiplikation zwischen  $f \in \mathcal{S}'$  und  $h \in C_\infty$  läßt sich auf diese Weise bereits nicht mehr definieren, da für  $\phi \in \mathcal{S}$  das Produkt  $\phi h$  im allgemeinen nicht mehr im Grundraum  $\mathcal{S}$  liegt. Es ist notwendig, zusätzlich das Wachstum der Funktion  $h$  zu beschränken: Wir definieren die Menge der unendlich oft differenzierbaren Funktionen von *langsamem Wachstum*

$$\mathcal{D}_{C_\infty} := \left\{ h = (c^2 + (\cdot)^2)^k H : k \in \mathbb{N}_0, H \in C_\infty : |H^{(j)}| \leq C_j \ \forall j \in \mathbb{N}_0 \right\},$$

(A.41)

$$\mathcal{D}_{C_\infty} = C_\infty \cap \mathfrak{S}'.$$

Für  $h \in \mathcal{D}_{C_\infty}$ ,  $\phi \in \mathfrak{S}$  ist damit sichergestellt, daß  $\phi \bar{h}$  wiederum Funktion aus  $\mathfrak{S}$  ist. Dann kann die Multiplikation

(A.42)

$$f \in \mathfrak{S}', h \in \mathcal{D}_{C_\infty} \longrightarrow fh \in \mathfrak{S}'$$

durch

(A.43)

$$(fh, \phi) := (f, \phi \bar{h}) \quad \forall \phi \in \mathfrak{S}$$

definiert werden.

## A.6 Lineare Substitution und komplexe Konjugation

Betrachtet man in dem Integral (A.23) statt der Funktion  $g$  die substituierte Funktion  $g(w(\cdot))$  mit der linearen Funktion

(A.44)

$$v = w(u) := a + bu,$$

wobei  $a$  und  $b$  reelle Konstanten seien und  $b \neq 0$  gelte, erhält man

(A.45)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{g}(w(u)) \phi(u) du &= \int_{v=-\infty}^{\infty} \bar{g}(v) \phi(w^{-1}(v)) w^{-1'}(v) dv \\ &= \frac{1}{|b|} \int_{v=-\infty}^{\infty} \bar{g}(v) \phi\left(\frac{v-a}{b}\right) dv. \end{aligned}$$

Ist  $\phi$  eine Grundfunktion aus  $\mathcal{D}$  bzw.  $\mathfrak{S}$ , gehört auch  $\phi\left(\frac{\cdot-a}{b}\right)$  dazu. Daher darf man diese Substitutionsregel in der Funktionalschreibweise ausdrücken:

$$(g(a+b(\cdot)), \phi) = \frac{1}{|b|} (g, \phi\left(\frac{\cdot-a}{b}\right)).$$

Dies nehmen wir als Ausgangspunkt für die Verallgemeinerung der *linearen Substitution von Distributionen*. Durch

(A.46)

$$(f(a+b\cdot), \phi) := \frac{1}{|b|} (f, \phi\left(\frac{\cdot-a}{b}\right)) \quad \forall \phi \in \mathcal{D}$$

wird für eine Distribution  $f$  aus  $\mathcal{D}'$  bzw.  $\mathfrak{S}'$  die linear substituierte Distribution  $f(a+b\cdot)$  definiert. Insbesondere erhält man mit  $a = -u_0$ ,  $b = 1$  die *Verschiebung* oder *Translation*

(A.47)

$$(f(\cdot - u_0), \phi) = (f, \phi(\cdot + u_0))$$

und mit  $a = 0$ ,  $b = -1$  die *Spiegelung* der unabhängigen Variablen

(A.48)

$$(f(-\cdot), \phi) = (f, \phi(-\cdot)).$$

Unter der zu  $f$  *konjugiert komplexen Distribution*  $\bar{f}$  verstehen wir das durch

(A.49)

$$(\bar{f}, \phi) := \overline{(f, \bar{\phi})} \quad \forall \phi \in \mathcal{D}$$

definierte Funktional. Die Spiegelung der unabhängigen Variablen in Zusammenhang mit der komplexen Konjugation soll *totale Konjugation* genannt werden, wofür die Bezeichnung

(A.50)

$$\phi^*(u) := \bar{\phi}(-u)$$

bzw.

(A.51)

$$f^*(\cdot) := \bar{f}(-\cdot)$$

eingeführt wird. Damit gelangt man zu der Rechenregel

(A.52)

$$(f^*, \phi) = \overline{(f, \phi^*)}.$$

## A.7 Verallgemeinerte Differentiation

Die Verallgemeinerung der Differentiation ist ein zentraler Punkt in der Theorie der Distributionen. Bemerkenswerterweise werden dazu keine Überlegungen angestellt, welche Ableitungswerte einer Funktion etwa an ihren Sprungstellen zugeordnet werden muß, sondern man zieht sich zunächst auf die unendlich oft differenzierbaren Grundfunktionen zurück; bewegt sich also scheinbar genau in entgegengesetzter Richtung zu einer Verallgemeinerung. Wie aber auch alle vorangegangenen Operationen mit Distributionen durch Abwälzung dieser Operationen auf die Grundfunktionen definiert wurden, ergibt sich auch die Ableitung von Distributionen ganz zwanglos aus der wohlbekannten Differentiation der Grundfunktionen. Als Motivation dient die Produktregel für »gewöhnliche« Funktionen:

$$(A.53) \quad \int_a^b \bar{g}'(u) \phi(u) du = [\bar{g}(u) \phi(u)]_a^b - \int_a^b \bar{g}(u) \phi'(u) du$$

Im Fall  $\phi \in \mathcal{D}$  verschwinden wegen der Finitheit für  $a \rightarrow -\infty$ ,  $b \rightarrow \infty$  die Randterme. Auch im Fall  $\phi \in \mathcal{S}$  sind diese im Fall uneigentlicher Integrationsgrenzen gleich Null. In der Gestalt der Funktionele entsprechend (A.24) wird dann daraus

$$(A.54) \quad (g', \phi) = - (g, \phi').$$

Analog zu dieser Formel wird nun die Ableitung für Distributionen  $f$  aus  $\mathcal{D}'$  oder  $\mathcal{S}'$  durch

$$(A.55) \quad (f', \phi) := - (f, \phi')$$

definiert. In den Räumen  $\mathcal{D}'$  oder  $\mathcal{S}'$  ist also die Differentiation uneingeschränkt ausführbar:

$$(A.56) \quad f \in \mathcal{D}' \Rightarrow f' \in \mathcal{D}'$$

$$(A.57) \quad f \in \mathcal{S}' \Rightarrow f' \in \mathcal{S}'$$

### (A.58) Ableitungen der $\delta$ -Distribution und der Sprungfunktion

Für die Ableitung der in (A.19) definierten  $\delta$ -Distribution ergibt sich

$$(A.59) \quad (\delta', \phi) = - (\delta, \phi') = - \phi'(0).$$

Die  $\delta'$ -Distribution ordnet als Funktional jeder Grundfunktion den negativen Wert ihrer Ableitung an der Stelle Null zu. Durch mehrfache Anwendung von (A.55) erhält man für die höheren Ableitungen

$$(A.60) \quad (\delta^{(k)}, \phi) = (-1)^k \phi^{(k)}(0).$$

Das der Sprungfunktion

$$(A.61) \quad \sigma(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

zugeordnete Funktional lautet

$$(A.62) \quad (\sigma, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t) \phi(t) dt = \int_0^{\infty} \phi(t) dt.$$

Für die Ableitung  $\sigma'$  gilt demnach

$$(A.63) \quad (\sigma', \phi) = - (\sigma, \phi') = - \int_0^{\infty} \phi'(t) dt = \phi(0) = (\delta, \phi).$$

Folglich ist die Ableitung der Sprungfunktion die  $\delta$ -Distribution:

$$(A.64) \quad \sigma' = \delta$$

### (A.65) Differentiationsregeln für zusammengesetzte Distributionen

Soweit möglich, werden die bekannten Differentiationsregeln für gewöhnliche Funktionen nun auch für die Ableitung von Distributionen hergeleitet: Für  $\alpha_i \in \mathbb{C}$ ,  $f_i \in \mathcal{D}'$  gilt

$$\begin{aligned} ((\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)', \phi) &= - (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, \phi') = - \bar{\alpha}_1 (f_1, \phi') - \bar{\alpha}_2 (f_2, \phi') \\ &= \bar{\alpha}_1 (f_1', \phi) + \bar{\alpha}_2 (f_2', \phi) = (\alpha_1 f_1' + \alpha_2 f_2', \phi) \quad \forall \phi \in \mathcal{D}, \end{aligned}$$

so daß wir die *Summenregel*

$$(A.66) \quad (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)' = \alpha_1 f_1' + \alpha_2 f_2'$$

erhalten. Für  $f \in \mathcal{D}'$ ,  $h \in C_\infty$  bzw.  $f \in \mathcal{S}'$ ,  $h \in \mathcal{D}_{C_\infty}$  gilt

$$\begin{aligned} ((fh)', \phi) &= -(fh, \phi') = -(f, \phi' \bar{h}) = -(f, (\phi \bar{h})' - \phi \bar{h}') \\ &= -(f, (\phi \bar{h})') + (f, \phi \bar{h}') = (f', \phi \bar{h}) + (fh', \phi) \\ &= (f'h, \phi) + (fh', \phi) = (f'h + fh', \phi); \end{aligned}$$

daraus ergibt sich die *Produktregel*

$$(A.67) \quad (fh)' = f'h + fh'$$

Die *Kettenregel* kann nur für den Fall linearer Substitution nach (A.46) formuliert werden. Es gilt

$$\begin{aligned} (\{f(g(\cdot))\}', \phi) &= (\{f(a+b\cdot)\}', \phi) = -(f(a+b\cdot), \phi') = -\frac{1}{|b|} (f, \phi'(\frac{\cdot-a}{b})) \\ &= -\operatorname{sgn}(b) (f, \{\phi(\frac{\cdot-a}{b})\}') = \operatorname{sgn}(b) (f', \phi(\frac{\cdot-a}{b})) = b (f'(a+b\cdot), \phi) \\ &= (f'(g(\cdot)) g'(\cdot), \phi) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$(A.68) \quad (f(g(\cdot)))' = f'(g(\cdot)) g'(\cdot)$$

**(A.69) Satz: Darstellung von Distributionen aus  $\mathcal{D}'$**

Für jede Distribution  $f \in \mathcal{D}'$  und für jedes beschränkte Gebiet  $G \subset \mathbb{R}$  existiert eine gewöhnliche Funktion  $h \in L_1$  und eine Ableitungsordnung  $k \in \mathbb{N}_0$ , mit der  $f$  durch die  $k$ -te Distributionsableitung der Funktion  $h$  im Gebiet  $G$  darstellbar ist:

$$(A.70) \quad f = h^{(k)} \quad \text{in } G$$

Die Ableitungsordnung  $k$  und damit auch die Funktion  $h$  hängt im allgemeinen vom gewählten Gebiet  $G$  ab. Es ist möglich, daß beim Grenzübergang  $G \rightarrow \mathbb{R}$  die Ordnung  $k$  gegen Unendlich strebt. Eine Darstellung wie (A.70) braucht für  $G = \mathbb{R}$  keineswegs zu existieren.

**(A.71) Satz: Darstellung von Distributionen aus  $\mathcal{S}'$**

Für jede Distribution  $f \in \mathcal{S}'$  existiert eine gewöhnliche Funktion  $h \in \mathcal{D}_{L_1}$  und eine Ableitungsordnung  $k$ , mit der

$$(A.72) \quad f = h^{(k)}$$

gilt. □

Wegen dieses Darstellungssatzes und dem Wachstumsverhalten der Funktionen aus  $\mathcal{D}_{L_1}$  nennt man die Distributionen aus  $\mathcal{S}'$  auch von *langsamem Wachstum* oder *temperiert*.

**(A.73) Bemerkung:**

Man kann die Distributionen auch als Ableitung von stetigen Funktionen darstellen. Dazu wählt man lediglich zu der Funktion  $h$  in der Darstellung (A.70) bzw. (A.72) eine Stammfunktion  $H$ , welche wegen der lokalen Integrierbarkeit von  $h$  stetig ist, und schreibt

$$(A.74) \quad f = H^{(k+1)}$$

## A.8 Faltung

**(A.75) Faltung von Grundfunktionen**

Für zwei Funktionen  $\phi, \psi \in \mathcal{D}$  wird durch

$$(A.76) \quad (\phi * \psi)(u) := \int_{-\infty}^{\infty} \phi(u-\xi) \psi(\xi) d\xi = (\bar{\phi}(u-\cdot), \psi)$$

das Faltungsprodukt definiert. Wie man leicht nachweist, ist  $\phi * \psi \in \mathcal{D}$ . Ebenso kann durch (A.76) das Faltungsprodukt für zwei Grundfunktionen  $\phi, \psi \in \mathcal{S}$  definiert werden. In diesem Fall ist  $\phi * \psi \in \mathcal{S}$ .

Für die Faltung zwischen Grundfunktionen  $\phi, \psi, \chi \in \mathcal{D}$  (bzw.  $\in \mathcal{S}$ ) gilt das *Kommutativgesetz*

$$(A.77) \quad \phi * \psi = \psi * \phi,$$

das *Assoziativgesetz*

$$(A.78) \quad (\phi * \psi) * \chi = \phi * (\psi * \chi),$$

zusammen mit komplexen Zahlen  $\alpha_i \in \mathbb{C}$  das *Distributivgesetz*

$$(A.79) \quad (\alpha_1 \phi_1 + \alpha_2 \phi_2) * \psi = \alpha_1 \phi_1 * \psi + \alpha_2 \phi_2 * \psi,$$

sowie die *Differentiationsregel*

$$(A.80) \quad (\phi * \psi)' = \phi' * \psi = \phi * \psi'.$$

Wir nehmen die rechte Darstellung der Faltung in (A.76) als Ausgangspunkt für eine Verallgemeinerung:

### (A.81) Faltung von Grundfunktionen mit Distributionen

Die Faltung einer Distribution  $f \in \mathcal{D}'$  (bzw.  $\in \mathcal{S}'$ ) mit einer Grundfunktion  $\phi \in \mathcal{D}$  (bzw.  $\in \mathcal{S}$ ) definieren wir durch

$$(A.82) \quad (f * \phi)(u) := \bar{f}(u-\cdot, \phi) = (\bar{f}, \phi(u-\cdot)).$$

Es gilt wiederum die Differentiationsregel

$$(A.83) \quad (f * \phi)' = f' * \phi = f * \phi'.$$

Durch Ausnutzung der Stetigkeit des Funktional zeigt man, daß das Faltungsprodukt eine stetige Funktion ist, was wegen der Differentiationsregel dann auch für jede Ableitung gilt; die Funktion  $f * \phi$  ist also aus  $C_{\infty} \subset \mathcal{D}'$ . Im Fall  $f \in \mathcal{S}'$ ,  $\phi \in \mathcal{S}$  gilt darüber hinaus  $f * \phi \in \mathcal{D}_{C_{\infty}} = C_{\infty} \cap \mathcal{S}' \subset \mathcal{S}'$  und für  $f \in \mathcal{D}'_k$ ,  $\phi \in \mathcal{D}$  folgt  $f * \phi \in \mathcal{D}$ . Für  $f \in \mathcal{D}'_+$  (bzw.  $\in \mathcal{D}'_-$ ) und  $\phi \in \mathcal{D}$  ist die Funktion  $f * \phi$  linksseitig (bzw. rechtsseitig) finit. An diesen Fällen sieht man bereits, daß es nicht möglich ist, ein Assoziativgesetz für den allgemeinen Fall anzugeben. Nur für Spezialfälle wie z.B.  $f \in \mathcal{D}'_k$ ,  $\phi, \psi \in \mathcal{D}$  gilt

$$(A.84) \quad (f * \phi) * \psi = f * (\phi * \psi) = f * (\psi * \phi) = (f * \psi) * \phi.$$

In Zusammenhang mit der totalen Konjugation  $(\cdot)^*$  nach (A.50) kann für  $f \in \mathcal{D}'$ ,  $\phi, \psi \in \mathcal{D}$  (bzw.  $f \in \mathcal{S}'$ ,  $\phi, \psi \in \mathcal{S}$ ) die Rechenregel

$$(A.85) \quad (f * \phi, \psi) = (f, \psi * \phi^*)$$

formuliert werden.

### (A.86) Faltung von Distributionen

Eine Faltung zwischen beliebigen Distributionen aus  $\mathcal{D}'$  kann leider nicht definiert werden. Um zu klären, ob das Faltungsprodukt zwischen zwei Distributionen existiert, wird normalerweise die sogenannte »Streifenbedingung« herangezogen. Wir definieren etwas knapper und spezieller eine Faltung für Distributionen aus  $\mathcal{D}'_+ \subset \mathcal{D}'$  durch

$$(A.87) \quad (f_1 * f_2, \phi) := (f_1, f_2^* * \phi) \quad \forall \phi \in \mathcal{D}$$

Da  $f_2 \in \mathcal{D}'_+$ , ist  $f_2^* \in \mathcal{D}'_-$  und die Funktion  $f_2^* * \phi$  ist rechtsseitig finit. Ursprünglich ist das Funktional nur für Funktionen aus  $\mathcal{D}$  definiert. Da jedoch  $f_1$  linksseitig finit ist, kann eine Erweiterung des Funktional auf rechtsseitig finite Funktion aus  $C_{\infty}$  vorgenommen werden, weshalb auf der rechten Seite der Gleichung (A.87) ein wohldefiniertes Funktional steht. Für die auf diese Weise definierte Faltung gilt das Kommutativgesetz, das Assoziativgesetz und die Differentiationsregel analog zu den Regeln (A.77) bis (A.80). Genauso läßt sich auch eine Faltung für Distributionen aus  $\mathcal{D}'_-$  definieren, für die wieder die genannten Regeln

gelten. Keinesfalls darf man aber davon ausgehen, daß etwa das Assoziativgesetz zwischen verschiedenen Distributionen aus  $\mathcal{D}'_+$  und  $\mathcal{D}'_-$  gültig ist, auch wenn die Faltungsprodukte sogar im einzelnen existieren.  $\square$

### (A.88) Faltung mit Ableitungen der $\delta$ -Distribution

Wegen

$$(A.89) \quad (\delta * \phi)(u) = (\delta, \phi(u - \cdot)) = \phi(u)$$

wird bei Faltung der  $\delta$ -Distribution mit einer Grundfunktion diese genau reproduziert. Die  $\delta$ -Distribution ist das Eins-Element der Faltung. Dies gilt auch für die Faltung mit Distributionen:

$$(f * \delta, \phi) = (f, \delta * \phi) = (f, \delta * \phi) = (f, \phi) \quad \forall \phi \in \mathcal{D} \Rightarrow$$

(A.90)

$$f * \delta = f.$$

Für Faltungen einer beliebigen Distribution mit Ableitungen der  $\delta$ -Distribution gilt wegen der Differentiationsregel

(A.91)

$$f * \delta^{(k)} = f^{(k)} * \delta = f^{(k)}.$$

## A.9 FOURIER-Transformation

Gewöhnlich wird die FOURIER-Transformation als Transformation von Funktionen eingeführt. Dabei ist man bemüht, möglichst schwache Voraussetzungen an die zu transformierenden Funktionen zu stellen, um eine möglichst große Klasse zu erfassen: In der Regel ist dies die absolute Integrierbarkeit, doch ist zur Anwendung bestimmter Rechenregeln (z. B. Faltung) die zusätzliche Beschränkung auf quadratisch integrierbare Funktionen notwendig. Da mit diesen Einschränkungen einige Klassen technisch wichtiger Funktionen (wie z. B. die Sprungfunktion) gar nicht zu bearbeiten sind, werden die zugrundeliegenden RIEMANNschen oder LEBESGUESchen Integralbegriffe zumindest um den CAUCHYschen Hauptwert erweitert, wenn nicht sogar die Transformation der  $\delta$ -Distribution versucht wird, wofür es aber – wie bereits erwähnt – keinen

brauchbaren Integralbegriff gibt. Daher erscheint die folgende Beschränkung der FOURIER-Transformation auf den Raum  $\mathcal{S}$  sehr einschneidend, da er doch »bedeutend weniger« Funktionen als immerhin die Menge der absolut und quadratisch integrierbaren Funktionen  $L_1 \cap L_2$  umfaßt. Diese Beschränkung zahlt sich aber mehr als aus, da es gerade dadurch gelingt, die FOURIER-Transformation auch für den Raum  $\mathcal{S}'$ , der wiederum  $L_1 \cap L_2$  beinhaltet, zu definieren.

### (A.92) FOURIER-Transformation in $\mathcal{S}$

Für Grundfunktionen  $\phi \in \mathcal{S}$  wird in bekannter Weise die FOURIER-Transformierte  $\tilde{\phi} = \mathcal{F}\phi$  durch das Integral

$$(A.93) \quad \tilde{\phi}(\omega) = (\mathcal{F}\phi)(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) e^{-j\omega t} dt = (e^{j\omega(\cdot)}, \phi)$$

erklärt. Eine Eigenart des Raums  $\mathcal{S}$  besteht nun darin, daß die FOURIER-Transformierten der Funktionen aus  $\mathcal{S}$  wiederum im Raum  $\mathcal{S}$  liegen:

(A.94)

$$\mathcal{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S} = \mathcal{S}.$$

Darüber hinaus ist diese Abbildung linear und stetig im Sinne der Topologie von  $\mathcal{S}$  sowie als bekannte Eigenschaft der FOURIER-Transformation umkehrbar eindeutig. Die FOURIER-Transformation ist also auf dem Raum  $\mathcal{S}$  ein *Homomorphismus*. Die Rücktransformation  $\mathcal{F}^{-1}$  hat die gleiche Gestalt wie die FOURIER-Transformierte selbst und lautet

(A.95)

$$\phi(t) = (\mathcal{F}^{-1}\tilde{\phi})(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

In der technischen Literatur wird der Faktor  $1/2\pi$  – wie auch hier – bevorzugt der Rücktransformation zugeschlagen; insbesondere in mathematischen Werken wird meist sowohl die Hin- als auch die Rücktransformation jeweils mit  $1/\sqrt{2\pi}$  versehen.  $\square$  Manchmal sind auch  $j$  und  $-j$  in (A.93) und (A.95) vertauscht.



**(A.96) Satz: PARSEVALsche Gleichung**

Für zwei Funktionen  $\phi, \psi \in \mathcal{S}$  gilt die *PARSEVALsche Gleichung*

$$(A.97) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\phi}(t) \psi(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\phi}(\omega) \tilde{\psi}(\omega) d\omega,$$

die in der Funktionalschreibweise die Form

$$(A.98) \quad (\phi, \psi) = \frac{1}{2\pi} (\bar{\phi}, \tilde{\psi})$$

erhält.

**(A.99) FOURIER-Transformation in  $\mathcal{S}'$** 

In bekannter Weise werden Operationen von Distributionen durch Abwälzung auf die Grundfunktionen definiert. Als Ausgangspunkt zur Definition der FOURIER-Transformation im Distributionenraum  $\mathcal{S}'$  dient hier die PARSEVALsche Gleichung, die nun als *Definitionsgleichung* der FOURIER-Transformierten  $\tilde{f} = \mathfrak{F}f$  auftritt:

$$(A.100) \quad (\tilde{f}, \bar{\phi}) := 2\pi (f, \phi).$$

Da aus  $\bar{\phi} \in \mathcal{S}$  wieder  $\phi \in \mathcal{S}$  folgt, steht auf der rechten Seite ein Funktional auf dem Raum  $\mathcal{S}$ , also eine Distribution aus  $\mathcal{S}'$ . Folglich muß auch das Funktional auf der linken Seite der Definitionsgleichung eines auf  $\mathcal{S}$  sein, womit die FOURIER-Transformierte  $\tilde{f}$  wieder im Raum  $\mathcal{S}'$  liegt. Die FOURIER-Transformation ist also auch ein Homomorphismus auf  $\mathcal{S}'$ :

$$(A.101) \quad \mathfrak{F} : \mathcal{S}' \rightarrow \tilde{\mathcal{S}}' = \mathcal{S}'.$$

Da der Raum  $\mathcal{S}'$  den Raum  $L_1 \cap L_2$  umfaßt, hat man auf diese Weise die FOURIER-Transformation für eine viel umfangreichere Klasse von »Funktionen« definiert, als dies auf klassische Art in Form einer *Integral-Transformation* zu erreichen ist. Für Funktionen  $f \in L_1$  ist aber die gewohnte FOURIER-Transformation

$$(A.102) \quad \tilde{f}(\omega) = (\mathfrak{F}f)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

als Integral-Transformation konsistent mit der Definition (A.100).

**(A.103) Die Faltung im Bereich der FOURIER-Transformation**

Die Faltung geht unter der FOURIER-Transformation in eine Multiplikation der Bildfunktionen über. Für zwei Grundfunktionen  $\phi, \psi \in \mathcal{S}$  gilt

$$(A.104) \quad \mathfrak{F}(\phi * \psi) = \tilde{\phi} \tilde{\psi} \in \mathcal{S}.$$

Ebenso gilt für die Faltung von  $f \in \mathcal{S}'$ ,  $\phi \in \mathcal{S}$

$$(A.105) \quad \mathfrak{F}(f * \phi) = \tilde{f} \tilde{\phi} \in \mathcal{S}'.$$

Die Übertragung der Faltung von Distributionen in den FOURIER-Bereich führt in Einzelfällen sogar dann zu Schwierigkeiten, wenn die Zeitdistributionen und auch das Faltungsprodukt in  $\mathcal{S}'$  existieren. Als Beispiel sei die Sprungfunktion  $\sigma$  genannt. Es ist

$$(\sigma * \sigma)(t) = t \sigma(t),$$

$$\bar{\sigma}(\omega) = \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

und es existiert

$$\mathfrak{F}(\sigma * \sigma)(\omega) = \pi \delta'(\omega) - \frac{1}{\omega^2}.$$

Das Produkt  $\bar{\sigma} \bar{\sigma}$  ist aber nicht definiert und kann daher auch nicht die FOURIER-Transformierte von  $\sigma * \sigma$  liefern.

Als Einschränkung für die Transformation der Faltung kann z. B. folgendes formuliert werden: Existiert für  $f, g \in \mathcal{S}'$  das Faltungsprodukt  $f * g$  und ist entweder  $\tilde{g} \in C_\infty$  oder  $\tilde{f} \in L_p^{loc}$  und  $\tilde{g} \in L_q^{loc}$  mit  $1/p + 1/q = 1$ , so ist

$$(A.106) \quad \mathfrak{F}(f * g) = \tilde{f} \tilde{g}.$$

**(A.107) Rechenregeln der FOURIER-Transformation:**

Ohne weiteren Nachweis sind im folgenden einige Rechenregeln für FOURIER-Transformierte von Distributionen aus  $\mathcal{S}'$  zusammengestellt. Wegen  $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$  gelten diese natürlich auch für Grundfunktionen. Insbesondere bei der Faltung ist die Zulässigkeit der Operation entsprechend der Aussagen in (A.103) zu überprüfen.

Nr	Operation	$f$	$\tilde{f} = \mathfrak{F}f$
1	Superposition	$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$	$\alpha_1 \tilde{f}_1 + \alpha_2 \tilde{f}_2$
2	komplexe Konjugation	$\bar{f}$	$\tilde{f}^*$
3	totale Konjugation	$f^*$	$\bar{\tilde{f}}$
4	Renormierung	$f(a \cdot)$	$\frac{1}{ a } \tilde{f}\left(\frac{\cdot}{a}\right)$
5	Verschiebung	$f(\cdot - t_0)$	$e^{-j(\cdot)t_0} \tilde{f}$
6	Modulation	$e^{j\omega_0(\cdot)} f$	$\tilde{f}(\cdot - \omega_0)$
7	Differentiation	$f^{(k)}$	$(j \cdot)^k \tilde{f}$
8	Faltung	$f_1 * f_2$	$\tilde{f}_1 \tilde{f}_2$
9	Multiplikation	$f_1 f_2$	$\frac{1}{2\pi} \tilde{f}_1 * \tilde{f}_2$

Für die in dieser Tabelle auftretenden Konstanten gilt  $\alpha_i \in \mathbb{C}$ ;  $a, \omega_0 \in \mathbb{R}$ .  $\square$

Der folgende Satz nach RIEMANN und LEBESGUE beschreibt die Eigenschaften der FOURIER-Transformierten von Funktionen aus  $L_1$ :

**(A.108) Satz: FOURIER-Transformierte von Funktionen aus  $L_1$**

Ist die Funktion  $f$  aus  $L_1$ , so ist deren FOURIER-Transformierte  $\tilde{f}$  gleichmäßig stetig und sie strebt für  $|\omega| \rightarrow \infty$  gegen Null.  $\square$

**(A.109) Bemerkung:**

Die gleiche Aussage gilt natürlich auch, wenn man die Rollen von Zeit- und Frequenzbereich vertauscht.  $\square$

**(A.110) Beweis:**

Zunächst soll die Stetigkeit nachgewiesen werden: Wegen  $f \in L_1$  kann die FOURIER-Transformation als LEBESGUE-Integral

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

geschrieben werden. Es ist

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\omega) - \tilde{f}(\omega + \Delta\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \{e^{-j\omega t} - e^{-j(\omega + \Delta\omega)t}\} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} \{1 - e^{-j\Delta\omega t}\} dt \\ &= \int_{-T}^T f(t) e^{-j\omega t} \{1 - e^{-j\Delta\omega t}\} dt + \left( \int_{-\infty}^{-T} + \int_T^{\infty} \right) f(t) e^{-j\omega t} \{1 - e^{-j\Delta\omega t}\} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\tilde{f}(\omega) - \tilde{f}(\omega + \Delta\omega)| &\leq \int_{-T}^T |f(t)| dt \sup_{-T \leq t \leq T} |1 - e^{-j\Delta\omega t}| + 2 \left( \int_{-\infty}^{-T} + \int_T^{\infty} \right) |f(t)| dt \\ &\leq \|f\|_1 |\Delta\omega| T + 2C(T), \end{aligned}$$

wobei

$$C(T) := \left( \int_{-\infty}^{-T} + \int_T^{\infty} \right) |f(t)| dt$$

für  $T \rightarrow \infty$  monoton fallend gegen Null strebt, womit auch die Umkehrfunktion  $C^{-1}$  existiert. Gibt man nun ein  $\epsilon > 0$  vor, so ist

$$|\tilde{f}(\omega) - \tilde{f}(\omega + \Delta\omega)| \leq \epsilon$$

gewährleistet, wenn

$$T \geq C^{-1}(\epsilon/4)$$

(dann ist  $2C(T) \leq \epsilon/2$ ) und wenn

$$|\Delta\omega| \leq \frac{\epsilon}{2 \|f\|_1 T} \leq \frac{\epsilon}{2 \|f\|_1 C^{-1}(\epsilon/4)} =: \delta(\epsilon).$$

Da diese Abschätzung unabhängig von  $\omega$  ist, ist damit auch die gleichmäßige Stetigkeit gezeigt.

Wir kommen zur zweiten Aussage des Satzes. Es ist

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j(\omega t - \pi)} dt = - \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t + \frac{\pi}{\omega}\right) e^{-j\omega t} dt$$

$$2\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(f(t) - f\left(t + \frac{\pi}{\omega}\right)\right) e^{-j\omega t} dt$$

$$|\tilde{f}(\omega)| \leq \frac{1}{2} \left\| f - f\left(\cdot + \frac{\pi}{\omega}\right) \right\|_1$$

Die  $L_1$ -Norm strebt für  $|\omega| \rightarrow \infty$  gegen Null, woraus sich die gewünschte Aussage ergibt.  $\square$

## A.10 LAPLACE-Transformation

### (A.111) LAPLACE-Transformation in $C_\infty$

Die LAPLACE-Transformation kann auf die FOURIER-Transformation zurückgeführt werden. Existiert für  $\phi \in C_\infty$  ein offenes Intervall  $\Delta = (d_1, d_2)$ , so daß die Funktion  $\phi e^{-d(\cdot)}$  für alle  $d \in \Delta$  eine Grundfunktion aus  $\mathfrak{S}$  ist, nennen wir  $\phi$  LAPLACE-transformierbar. Die LAPLACE-Transformierte wird durch

$$(A.112) \quad \hat{\phi}(s) = (\mathcal{L}\phi)(s) := \mathfrak{F}(\phi e^{-d(\cdot)})(\omega)$$

mit  $s := d + j\omega$  in dem Konvergenzstreifen  $\{s : \operatorname{Re}(s) \in \Delta\}$  definiert, wofür man auch

$$(A.113) \quad \hat{\phi}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) e^{-st} dt$$

mit  $\operatorname{Re}(s) \in \Delta$  schreiben kann. Die wichtigste Eigenschaft, durch die sich die LAPLACE-Transformierte gegenüber der FOURIER-Transformierten auszeichnet, ist nicht nur die Abhängigkeit von einer komplexen Variablen gegenüber einer reellen, sondern die Regularität der LAPLACE-Transformierten in ihrem Konvergenzgebiet, was die Anwendung funktionentheoretischer Methoden gestattet: Oftmals setzt man die LAPLACE-Transformierte auch außerhalb ihres Konvergenzgebietes analytisch fort und beschreibt sie durch ihre Residuen, welche gerade außerhalb des Konvergenzstreifens liegen. Dieser Vorteil bedeutet nicht etwa eine generelle Überlegenheit der

LAPLACE-Transformation gegenüber der FOURIER-Transformation. Existiert (A.112) nur für einen einzigen Wert  $d = d_1 = d_2$ , gibt es gar keinen offenen Konvergenzstreifen mehr; die LAPLACE-Transformierte existiert also nicht, während mit der FOURIER-Transformierten der Funktion  $\phi e^{-d(\cdot)}$  noch gearbeitet werden kann.  $\square$

### (A.114) LAPLACE-Transformation in $\mathcal{D}'$

Völlig analog zu (A.111) wird die LAPLACE-Transformation von Distributionen aus  $\mathcal{D}'$  auf die FOURIER-Transformation in  $\mathfrak{S}'$  zurückgeführt: Gibt es für eine Distribution  $f \in \mathcal{D}'$  ein offenes Intervall  $\Delta = (d_1, d_2)$ , so daß  $f e^{-d(\cdot)} \in \mathfrak{S}'$  für alle  $d \in \Delta$  ist, heißt  $f$  LAPLACE-transformierbar und die Transformierte wird durch

$$(A.115) \quad \hat{f}(s) = (\mathcal{L}f)(s) := \mathfrak{F}(f e^{-d(\cdot)})(\omega)$$

mit  $s := d + j\omega$  im Konvergenzstreifen  $\operatorname{Re}(s) \in \Delta$  definiert. Auch die LAPLACE-Transformierten von Distributionen sind in ihrem Konvergenzgebiet analytische Funktionen.  $\square$

### (A.116) Zusammenhang zwischen LAPLACE- und FOURIER-Transformation

Es ist möglich, aber keineswegs zwingend, daß die FOURIER-Transformierte in (A.115) auch für die Intervallgrenzen  $d = d_1, d_2$  existiert. Aus der LAPLACE-Transformierten  $\hat{f}$  erhält man die FOURIER-Transformierte  $\tilde{f}$  durch die Beziehung

$$(A.117) \quad \tilde{f}(\omega) = \hat{f}(j\omega)$$

für  $\omega \in \mathbb{R}$  im allgemeinen nur dann, wenn die imaginäre Achse im Konvergenzgebiet liegt, das heißt  $0 \in \Delta$ . Da in diesem Fall die LAPLACE-Transformierte auf der imaginären Achse  $\operatorname{Re}(s) = 0$  eine analytische Funktion ist, ist auch die FOURIER-Transformierte eine gewöhnliche Funktion, weshalb es statthaft ist, für die FOURIER-Transformierte, die ja im allgemeinen eine Distribution ist, eine punktweise Gleichung wie (A.117) anzuschreiben.

Ist die imaginäre Achse Rand des Konvergenzgebietes,  $d_1 = 0$  oder  $d_2 = 0$ , und ist  $f$  und damit  $\hat{f}$  aus  $\mathfrak{S}'$ , so erhält man durch

$$(A.118) \quad \tilde{f} = \lim_{d \rightarrow 0} \hat{f}(d + j\cdot)$$

aus der LAPLACE-Transformierten die FOURIER-Transformierte. Der Grenzübergang darf aber keinesfalls als punktweise mißverstanden werden sondern er gilt nur im Sinne von Funktionen- bzw. Distributionenfolgen entsprechend der Topologie des Raums  $\mathcal{S}'$ . Nur wenn  $\tilde{f}$  eine gewöhnliche Funktion aus  $\mathcal{S}'$  ist, also  $\tilde{f} \in \mathcal{S}' \cap \mathcal{D}_{L_1}$ , führt der punktweise Grenzübergang

$$(A.119) \quad \tilde{f}(\omega) = \lim_{d \rightarrow 0} \hat{f}(d+j\omega)$$

zum gleichen Ergebnis wie (A.118).

Für linksseitig finite Funktionen und Distributionen aus  $\mathcal{D}'_+$  ist die rechte Intervallgrenze  $d_2$  stets gleich  $\infty$ , so daß das Konvergenzgebiet der LAPLACE-Transformierten eine rechte, offene Halbebene  $\operatorname{Re}(s) > d_1$  ist.  $\square$

#### (A.120) Rechenregeln der LAPLACE-Transformation:

Ohne weitere Herleitung sind im folgenden einige Rechenregeln für LAPLACE-Transformierte von Distributionen aus  $\mathcal{D}'$  zusammengestellt. Die Regeln an sich beeinhalteten keine Aussage über die Zulässigkeit der Rechenoperationen. Dies ist stets gesondert zu überprüfen: Der Gültigkeitsbereich einer Verknüpfung (Addition, Multiplikation) von zwei LAPLACE-Transformierten ist stets die Schnittmenge  $\operatorname{Re}(s) \in \Delta = \Delta_1 \cap \Delta_2$  der Konvergenzstreifen  $\Delta_1, \Delta_2$  der einzelnen LAPLACE-Transformierten. Dies kann auch die leere Menge sein. Sind die Distributionen aber aus  $\mathcal{D}'_+$ , so besitzen sie, sofern sie LAPLACE-transformierbar sind, als Konvergenzgebiete stets rechte, offene Halbebenen  $\operatorname{Re}(s) > d_i$ . Der Schnitt zweier derartiger rechter Halbebenen ist dann wieder eine rechte offene Halbebene  $\operatorname{Re}(s) > d = \max \{d_1, d_2\}$ . In diesem Fall können die Operationen ohne Einschränkung im LAPLACE-Bereich ausgeführt werden.

Nr	Operation	$f$	$\hat{f}(s) = (\mathcal{L}f)(s)$
1	Superposition	$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$	$\alpha_1 \hat{f}_1(s) + \alpha_2 \hat{f}_2(s)$
2	komplexe Konjugation	$\bar{f}$	$\bar{\hat{f}}(\bar{s})$
3	totale Konjugation	$f^*$	$\bar{\hat{f}}(-\bar{s})$
4	Renormierung	$f(a \cdot)$	$\frac{1}{ a } \hat{f}\left(\frac{s}{a}\right)$
5	Verschiebung	$f(\cdot - t_0)$	$e^{-s t_0} \hat{f}(s)$
6	Dämpfung	$e^{s_0(\cdot)} f$	$\hat{f}(s - s_0)$
7	Differentiation	$f^{(k)}$	$s^k \hat{f}(s)$
8	Faltung	$f_1 * f_2$	$\hat{f}_1(s) \hat{f}_2(s)$
9	Multiplikation	$f_1 f_2$	$\frac{1}{2\pi} \tilde{f}_1 * \tilde{f}_2$

Für die in dieser Tabelle auftretenden Konstanten gilt  $\alpha_i, s_0 \in \mathbb{C}$ ;  $a \in \mathbb{R}$ .  $\square$

## A.11 Positiv semidefinite Distributionen

### (A.121) Definition: HERMITESche Distributionen

Ein Distribution  $f \in \mathcal{D}'$  heißt HERMITESch, wenn

$$(A.122) \quad f = f^*$$

gilt.  $\square$

**(A.123) Definition: Positiv definite Distributionen**

Eine HERMITESche Distribution  $f \in \mathcal{D}'$  heißt *positiv definit*, wenn

$$(A.124) \quad (f, \phi * \phi^*) > 0$$

für alle  $\phi \in \mathcal{D}$ ,  $\phi \neq 0$ , gilt. Sie heißt *positiv semidefinit*, wenn das Funktional für  $\phi \neq 0$  auch den Wert Null annehmen darf.  $\square$

Der folgende Darstellungssatz nach BOCHNER und SCHWARTZ über positiv semidefinite Distributionen kann bei GELFAND / SCHILOW / WILENKIN [18], Band IV, S. 148ff, und für den Spezialfall  $k = 0$  bei BOCHNER [4], §§ 18, 20 nachgelesen werden:

**(A.125) Satz: Darstellung positiv semidefiniter Distributionen**

Sei  $f \in \mathcal{D}'$  eine positiv semidefinite Distribution. Dann ist  $f$  sogar aus dem Teilraum  $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$  und für die damit existierende FOURIER-Transformierte gibt es eine Darstellung

$$(A.126) \quad \tilde{f} = (c^2 + (\cdot)^2)^k \mu'$$

wobei  $c \in \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$  und  $\mu$  eine reellwertige, beschränkte, monoton wachsende Funktion ist und  $\mu'$  die Distributions-Ableitung dieser Funktion bezeichnet. Im Zeitbereich ergibt sich daher die Form

$$(A.127) \quad f = (c^2 - d_t^2)^k \nu$$

Hierbei bezeichnet  $d_t = d/dt$  die Differentiation nach der Zeit. Die Funktion  $\nu := \mathcal{L}^{-1} \mu'$  ist eine stetige, beschränkte, positiv semidefinite Funktion (Distribution).  $\square$

**(A.128) Bemerkung:**

Jede beschränkte, monoton wachsende Funktion  $\mu$  läßt sich in eine beschränkte, stetige, monoton wachsende Funktion  $\mu_0$  und in eine beschränkte, monoton wachsende Treppenfunktion  $\mu_s$ ,

$$(A.129) \quad \mu = \mu_0 + \mu_s,$$

zerlegen. Damit besteht die Ableitung

$$(A.130) \quad \mu' = \mu'_0 + \mu'_s$$

aus einem LEBESGUE-integrierbaren Anteil  $\mu'_0 \in L_1$  und einem singulären Anteil  $\mu'_s$ , der als Ableitung einer Treppenfunktion nur aus  $\delta$ -Distributionen besteht. Folglich läßt sich auch die FOURIER-Transformierte

$$(A.131) \quad \tilde{f} = (c^2 + (\cdot)^2)^k \mu'_0 + (c^2 + (\cdot)^2)^k \mu'_s =: \tilde{f}_0 + \tilde{f}_s$$

in einen lokal integrierbaren Anteil  $\tilde{f}_0 \in L_1^{\text{loc}}$  und einen singulären Anteil

$$(A.132) \quad \tilde{f} = \sum_i \alpha_i \delta(\cdot - \omega_i),$$

zerlegen. Hierbei sind die Werte  $\omega_i$  die Sprungstellen der Funktion  $\mu_s$ . Die positiven Koeffizienten

$$(A.133) \quad \alpha_i := (c^2 + \omega_i^2)^k \left\{ \mu(\omega_i + 0) - \mu(\omega_i - 0) \right\} > 0$$

gehen aus der Höhe der Sprünge an den Stellen  $\omega_i$  hervor.  $\square$

## B Analytische Funktionen im Einheitskreis und in der rechten Halbebene

In diesem Anhangkapitel werden insbesondere die HARDY-LEBESGUE-Räume  $H_p$  vorgestellt, die gewisse Klassen von Funktionen der komplexen Ebene umfassen, welche im Einheitskreis, aber nicht unbedingt auf dessen Rand analytisch sind. Dies dient als Grundlage für das wichtige Kriterium von PALEY und WIENER, welches eine Charakterisierung »kausaler« Zeitfunktionen in FOURIER-Bereich gestattet. Dieses wird hier in einer allgemeineren Form als in der Literatur angegeben.

### B.1 Die LEBESGUE-Räume

Als Literatur zu den LEBESGUE-Räumen ist z. B. YOSHIDA [46] oder LJUSTERNIK / SOBOLEW [29] zu nennen.

#### (B.1) Der LEBESGUE-Raum $L_p(G, \mu)$

Der lineare Raum  $L_p(G, \mu)$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) besteht aus im Gebiet  $G \subset \mathbb{R}$  definierten reell- oder komplexwertigen Funktionen, für die im Fall  $1 \leq p < \infty$  das LEBESGUE-STIELTJES-Integral

$$\int_G |f(u)|^p d\mu(u)$$

konvergiert. Darin ist  $\mu$  ein positives, im allgemeinen unbeschränktes Maß auf  $G$ . Genaugenommen sind die Elemente des Raums  $L_p(G, \mu)$  nicht Funktionen, sondern Funktionenklassen, die jeweils solche Funktionen zusammenfassen, die sich nur auf Mengen vom Maß Null unterscheiden. Durch die Definition

(B.2)

$$\|f\|_p := \left\{ \int_G |f(u)|^p d\mu(u) \right\}^{1/p}$$

wird eine Norm in  $L_p(G, \mu)$  eingeführt, die zu Unterscheidungszwecken mit  $p$  indiziert wird.

Im Fall  $p = \infty$  gehören zum Raum  $L_\infty(G, \mu)$  Funktionen, die im wesentlichen beschränkt sind. Die Norm wird hier durch die kleinste wesentliche Schranke

(B.3)

$$\|f\|_\infty := \text{ess sup}_{u \in G} |f(u)|$$

definiert. Eine wesentliche Schranke liegt vor, wenn nur Funktionswerte auf einer Menge vom Maß Null diese überschreiten. Auch hier werden wieder Funktionen, die sich nur auf Mengen vom Maß Null unterscheiden, zu Funktionenklassen zusammengefaßt.

Der Raum  $L_p(G, \mu)$  ist für alle Fälle  $1 \leq p \leq \infty$  vollständig, d.h. für jede im Sinne der Norm konvergente Funktionenfolge liegt der Grenzwert in  $L_p(G, \mu)$ . Damit ist  $L_p(G, \mu)$  ein BANACH-Raum.

Ist das Maß  $\mu$  konstant,  $d\mu(u) = du$ , schreiben wir auch kurz  $L_p(G)$ . Der Raum  $L_p(\mathbb{R}, \mu)$  wird auch mit  $L_p(\mu)$  bezeichnet und  $L_p(\mathbb{R})$  heißt kurz  $L_p$ .  $\square$

#### (B.4) Der HILBERT-Raum $L_2(G, \mu)$

Der Raum  $L_2(G, \mu)$  wird mit dem durch

(B.5)

$$(f, g)_\mu := \int_G f(u) \bar{g}(u) d\mu(u)$$

definierten inneren Produkt, welches wegen

(B.6)

$$\|f\|^2 = (f, f)_\mu$$

zur Norm kompatibel ist, zu einem HILBERT-Raum.

#### (B.7) Der Raum $L_p^{\text{loc}}(\mu)$

Eine auf  $\mathbb{R}$  definierte Funktion  $f$  gehört genau dann zu  $L_p^{\text{loc}}(\mu)$ , wenn für jedes beschränkte Gebiet  $G \subset \mathbb{R}$  die Funktion  $f$  aus  $L_p(G, \mu)$  ist. Die Funktion  $f$  muß also im Endlichen (das heißt lokal) integrierbar bzw. beschränkt sein. Im Unendlichen darf sie unbeschränkt wachsen. Im Raum  $L_p^{\text{loc}}(\mu)$  gibt es keine Norm.  $\square$

**(B.8) Satz: HÖLDERSche Ungleichung**

Die Funktion  $f$  sei aus  $L_p(G, \mu)$ ,  $g$  aus  $L_q(G, \mu)$  mit  $p, q \in [1, \infty]$  und

$$(B.9) \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Dann ist die Funktion  $fg$  aus  $L_1(G, \mu)$ , für deren Norm die Abschätzung

$$(B.10) \quad \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

gilt. Im Spezialfall  $p = q = 2$  wird daraus die CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung

$$(B.11) \quad \|fg\|_1 = (f, g)_\mu \leq \|f\|_2 \|g\|_2.$$

□

**B.2 Das Poissonsche Integral**

Die POISSONSchen Integralformeln gehen auf den CAUCHYSchen Residuensatz zurück. Dies kann bei NEVANLINNA / PAATERO [37], ACHIESER / GLASMANN [1], oder HURWITZ / COURANT [21] nachgelesen werden.

Die Funktion  $f$  sei im Kreis und auf dem Rand  $|z| \leq R$  der komplexen Ebene eine analytische Funktion. Dann lassen sich durch die Werte der Randfunktion

$$(B.12) \quad f_R(\phi) := f(Re^{j\phi})$$

alle Funktionswerte  $f(z)$  im Inneren des Kreises  $|z| < R$  durch das *Poissonsche Integral*

$$(B.13) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \frac{Re^{j\psi} + z}{Re^{j\psi} - z} \right\} f_R(\psi) d\psi,$$

oder mit  $z = r e^{j\phi}$

$$(B.14) \quad f(re^{j\phi}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\psi - \phi) + r^2} f_R(\psi) d\psi,$$

gewinnen. Es reicht dazu sogar die Kenntnis des Realteils der Randfunktion aus, wenn der Imaginärteil der Funktion  $f$  für einen Punkt (z. B.  $z = 0$ ) bekannt ist:

$$(B.15) \quad f(z) = j \operatorname{Im} f(0) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{Re^{j\psi} + z}{Re^{j\psi} - z} \operatorname{Re} f_R(\psi) d\psi,$$

Ist die Funktion  $f$  zwar im Inneren des Kreises  $|z| < R$  analytisch, aber nicht mehr auf dem Rand  $|z| = R$ , dürfen die Formeln (B.13), (B.14), (B.15) nicht mehr bedenkenlos angewendet werden. Um die Erweiterungen der Voraussetzungen des POISSONSchen Integrals sauber zu beschreiben, werden die Räume  $H_p$  eingeführt:

**B.3 Die HARDY-LEBESGUE-Räume**

Als Quelle für diesen Abschnitt dient die Monografie von HOFFMAN [20].

**(B.16) Der Raum  $H_p$** 

Der HARDY-LEBESGUE-Raum  $H_p$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) besteht aus Funktionen  $f(z)$ , die im Einheitskreis  $|z| < 1$  der komplexen Ebene analytisch sind, und für die die Funktionen

$$(B.17) \quad f_r(\phi) := f(re^{j\phi})$$

für alle  $r \in (0, 1)$  im Sinne der Norm des Raums  $L_p(-\pi, \pi)$  beschränkt bleiben:

$$(B.18) \quad \|f_r\|_p = \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |f_r(\phi)|^p d\phi \right\}^{1/p} \leq C \quad \forall r < 1$$

für die Fälle  $1 \leq p < \infty$  bzw. für  $p = \infty$

$$(B.19) \quad \|f_r\|_\infty = \max_{-\pi \leq \phi \leq \pi} |f_r(\phi)| \leq C \quad \forall r < 1.$$

Durch

(B.20)

$$\|f\|_p := \sup_{0 < r < 1} \|f_r\|_p$$

wird der Raum  $H_p$  zu einem normierten Raum. Die Räume  $H_p$  schließen sich gegenseitig ein; es gilt

(B.21)

$$H_q \subset H_p \quad \text{für} \quad 1 \leq p < q \leq \infty.$$

Der umfassendste Raum ist folglich  $H_1$ .  $\square$

**(B.22) Satz: HÖLDERSche Ungleichung in  $H_p$**

Sei  $f \in H_p, g \in H_q$  mit  $p, q \in [1, \infty]$  und  $1/p + 1/q = 1$ . Dann ist  $fg \in H_1$  und es gilt

(B.23)

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

**(B.24) Randverhalten von Funktionen aus  $H_p$**

Für Funktionen  $f$  aus  $H_p$  existiert der Grenzwert

(B.25)

$$f_R(\phi) := \lim_{r \rightarrow 1} f_r(\phi) = \lim_{r \rightarrow 1} f(re^{j\phi})$$

für fast alle  $\phi \in [-\pi, \pi]$ . Die derartig definierte *Randfunktion*  $f_R$  ist eine Funktion aus  $L_p(-\pi, \pi)$ . Als Folge des Minimumprinzips analytischer Funktionen gilt

(B.26)

$$\|f\|_p = \|f_R\|_p.$$

Wegen der Existenz der Randfunktion  $f_R$  kann man den ursprünglichen Definitionsbereich  $|z| < 1$  der Funktion  $f \in H_p$  um den Rand des Einheitskreises  $|z| = 1$  erweitern, indem man

(B.27)

$$f(e^{j\phi}) := f_R(\phi)$$

setzt. Umgekehrt erhält man aus der Randfunktion  $f_R$  durch das POISSON-Integral in der Form (B.13), (B.14) oder (B.15) wieder die zugehörige Funktion  $f$ . Im Sinne dieser eindeutigen Zuordnung zwischen  $f$  und ihrer Randfunktion  $f_R$  darf man den Raum  $H_p$

als Teilraum von  $L_p(-\pi, \pi)$  auffassen:

(B.28)

$$H_p \subset L_p(-\pi, \pi).$$

Man kann zeigen, daß die Funktionen aus diesem Teilraum durch das Verschwinden ihrer FOURIER-Koeffizienten mit positiven Indizes

(B.29)

$$f_k := \int_{-\pi}^{\pi} e^{jk\psi} f_R(\psi) d\psi = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

charakterisiert werden können.

Eine weitere Eigenschaft der Funktionen aus  $H_p$  ist dadurch gegeben, daß der Logarithmus des Betrags ihrer Randfunktionen absolut integrierbar ist, sofern es sich nicht um die Nullfunktion handelt:

(B.30)

$$f \in H_p, f \neq 0 \Rightarrow \ln|f_R| \in L_1(-\pi, \pi).$$

Umgekehrt gibt es aber zu einer Funktion  $F \in L_p(-\pi, \pi)$  mit  $\ln|F| \in L_1(-\pi, \pi)$  nicht unbedingt eine Funktion  $f \in H_p$  mit  $f_R = F$ . Immerhin läßt sich aber stets eine Funktion aus  $H_p$  finden, deren Randfunktion vom Betrag gleich der vorgegebenen Funktion  $F$  ist:

(B.31)

$$|f_R| = |F|$$

Eine spezielle Funktion  $f \in H_p$  mit dieser Eigenschaft läßt sich durch

(B.32)

$$f(z) = \epsilon \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{j\psi} + z}{e^{j\psi} - z} \ln|F(\psi)| d\psi \right\}$$

für  $|z| < 1$  finden, die dadurch entsteht, daß man die POISSON-Formel (B.15) auf  $\operatorname{Re} [\ln F] = \ln |F|$  anwendet. Die komplexe Konstante  $\epsilon$  ist nur mit ihrem Betrag zu  $|\epsilon| = 1$  festgelegt. Durch Grenzübergang erhält man dann auch eine Darstellung für die Randfunktion:



$$\begin{aligned}
 f_R(\phi) &= \lim_{r \rightarrow 1} f(re^{j\phi}) \\
 &= \epsilon \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{r \rightarrow 1} \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\pi}^{\phi-\delta} + \int_{\phi+\delta}^{\pi} \right\} \frac{e^{j\psi} + re^{j\phi}}{e^{j\psi} - re^{j\phi}} \ln |F(\psi)| d\psi \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2\pi} \int_{\phi-\delta}^{\phi+\delta} \frac{e^{j\psi} + re^{j\phi}}{e^{j\psi} - re^{j\phi}} \ln |F(\psi)| d\psi \right\} \\
 &= \epsilon \lim_{\delta \rightarrow 0} \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\pi}^{\phi-\delta} + \int_{\phi+\delta}^{\pi} \right\} \frac{e^{j\psi} + re^{j\phi}}{e^{j\psi} - re^{j\phi}} \ln |F(\psi)| d\psi \right\} \\
 &\quad \cdot \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{r \rightarrow 1} \exp \left\{ \frac{2e^{j\phi} \ln |F(\phi)|}{2\pi e^{j\phi}} \int_{\phi-\delta}^{\phi+\delta} \frac{d\psi}{e^{j(\psi-\phi)} - r} \right\}.
 \end{aligned}$$

Für das Grenzverhalten des letzten Integrals gilt

$$\begin{aligned}
 \int_{\phi-\delta}^{\phi+\delta} \frac{d\psi}{e^{j(\psi-\phi)} - r} &\longrightarrow \int_{\phi-\delta}^{\phi+\delta} \frac{d\psi}{1 - r + j(\psi-\phi)} \\
 &= \frac{1}{j} \left[ \ln (1 - r + j(\psi-\phi)) \right]_{\phi-\delta}^{\phi+\delta} \longrightarrow \pi.
 \end{aligned}$$

Daher folgt als Darstellung für die Randfunktion

$$(B.33) \quad f_R(\phi) = |F(\phi)| \epsilon \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \text{V.P.} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{j\psi} + e^{j\phi}}{e^{j\psi} - e^{j\phi}} \ln |F(\psi)| d\psi \right\},$$

$$(B.34) \quad f_R(\phi) = \underbrace{|F(\phi)|}_{\text{Betrag}} \underbrace{\epsilon \exp \left\{ \frac{1}{2\pi j} \text{V.P.} \int_{-\pi}^{\pi} \cot \frac{\psi-\phi}{2} \ln |F(\psi)| d\psi \right\}}_{\text{Phase}},$$

wodurch gleichzeitig nachgewiesen ist, daß die Funktion  $f$  nach (B.32) die gewünschte Eigenschaft (B.31) besitzt.

Die durch (B.32) definierten Funktionen  $f$  haben gegenüber allen anderen Funktionen  $g \in H_p$ , die  $|g_R| = |F|$  befriedigen, die Eigenschaft

$$(B.35) \quad |f(z)| \geq |g(z)| \quad \text{für } |z| < 1.$$

Man nennt derartige Funktionen  $f$  *äußere Funktionen*.

## B.4 Das Poissonsche Integral der rechten Halbebene

Um die Ergebnisse auf LAPLACE- und FOURIER-Transformierte von „kausalen“ Zeitfunktionen anwenden zu können, die in einer rechten komplexen Halbebene definiert sind, benötigen wir eine Transformation zwischen dem Einheitskreis und der rechten Halbebene:

### (B.36) Transformation zwischen dem Einheitskreis und der rechten Halbebene

Wir wählen als Transformation die konforme Abbildung

$$(B.37) \quad s = \gamma(z) := c \frac{1-z}{1+z} \quad \Leftrightarrow \quad z = \gamma^{-1}(s) = \frac{c-s}{c+s}.$$

Dadurch wird die rechte offene Halbebene  $\text{Re}(s) > 0$  auf das Innere des Einheitskreises  $|z| < 1$  abgebildet. Insbesondere wird der Punkt  $s = 0$  auf  $z = 1$ , der Punkt  $s = \infty$  auf  $z = -1$  und  $s = c$  auf  $z = 0$  abgebildet (siehe Bild B.1). Aus (B.37) ergibt sich für die Transformation der imaginären Achse  $s = j\omega$  auf den Einheitskreis  $z = e^{j\theta}$

$$\begin{aligned}
 j\omega &= c \frac{1 - e^{j\theta}}{1 + e^{j\theta}} = c \frac{e^{-j\theta/2} - e^{j\theta/2}}{e^{-j\theta/2} + e^{j\theta/2}} \\
 &= c \frac{-j \sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} = -jc \tan \frac{\theta}{2} \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$(B.38) \quad \boxed{\omega = \gamma_R(\phi) := -c \tan \frac{\phi}{2}} \quad \Leftrightarrow$$

$$(B.39) \quad \boxed{\phi = \gamma_R^{-1}(\omega) = -2 \arctan \frac{\omega}{c}}.$$

Für die Differentiale ergibt sich daraus

$$(B.40) \quad \boxed{d\omega = -\frac{c}{2 \cos^2 \frac{\phi}{2}} d\phi \quad \Leftrightarrow \quad d\phi = -\frac{2c}{c^2 + \omega^2} d\omega}.$$

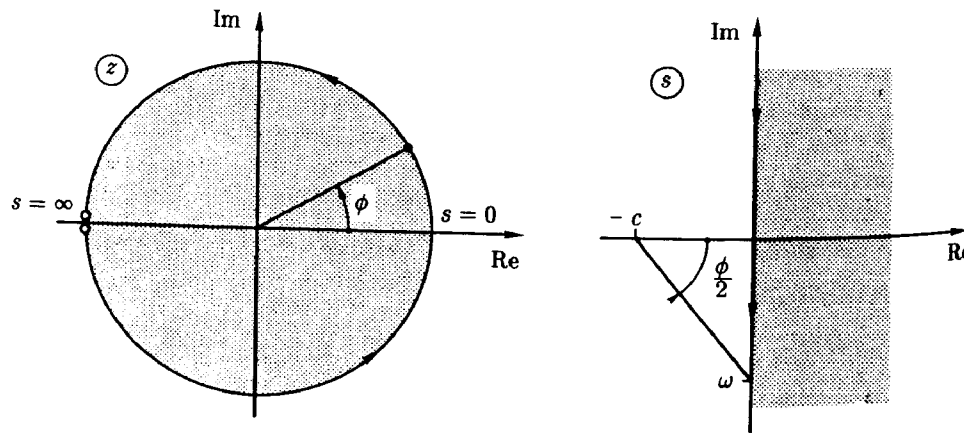


Bild B.1: Abbildung des Einheitskreises auf die rechte Halbebene

Unter dieser Abbildung soll die Transformation des POISSON-Kerns

$$(B.41) \quad \frac{\zeta+z}{\zeta-z} \quad \text{mit} \quad \zeta = e^{j\psi}$$

in die rechte Halbebene bestimmt werden. Mit

$$(B.42) \quad s := \gamma(z), \quad \sigma := \gamma(\zeta)$$

ergibt sich

$$\frac{\zeta+z}{\zeta-z} = \frac{\frac{c-\sigma}{c+\sigma} + \frac{c-s}{c+s}}{\frac{c-s}{c+s} - \frac{c-\sigma}{c+\sigma}} = \frac{(c-\sigma)(c+s) + (c+\sigma)(c-s)}{(c-\sigma)(c+s) - (c+\sigma)(c-s)} = \frac{-2\sigma s + 2c^2}{-2c\sigma + 2cs},$$

$$(B.43) \quad \boxed{\frac{\zeta+z}{\zeta-z} = \frac{\sigma s - c^2}{c(\sigma - s)}}.$$

Mit

$$(B.44) \quad \zeta = e^{j\psi}, \quad \sigma = j\Omega, \quad \Omega = \gamma_R(\psi)$$

folgt daraus

$$(B.45) \quad \boxed{\frac{e^{j\psi} + z}{e^{j\psi} - z} = \frac{j\Omega s - c^2}{c(j\Omega - s)}} \quad \square$$

## B.5 Das Kriterium von PALEY-WIENER

Bei dem Kriterium vom PALEY-WIENER geht es um die Frage, ob es zu einem vorgegebenen Verlauf des Betrags einer Funktion im FOURIER-Bereich eine zugehörige kausale Zeitfunktion geben kann. Für eine gewisse Klasse von Funktionen kann zur Beantwortung dieser Frage ein notwendiges und hinreichendes Kriterium aufgestellt werden. In der Literatur (siehe z. B. PAPOULIS [38], S. 215) wird dieses Kriterium gewöhnlich nur für Funktionen aus  $L_1 \cap L_2$  angegeben, weshalb hier der folgenden allgemeineren Formulierung breiterer Raum geschenkt wird. Der erste Satz ist zunächst der »hinreichende« Teil des vollständigen Kriteriums:

**(B.46) Satz: Das Kriterium von PALEY-WIENER (hinreichende Bedingung)**

Erfüllt eine reellwertige, nicht negative Funktion  $F \in L_1$  die Bedingung

$$(B.47) \quad \boxed{\ln F \in L_1((c^2 + \cdot^2)^{-1}) =: L_1^*},$$

so gibt es eine stetige Funktion  $f \in \mathcal{G}'$  mit

$$(B.48) \quad \boxed{f = 0 \quad \text{in } (-\infty, 0)},$$

deren FOURIER-Transformierte vom Betrag gleich der vorgegebenen Funktion  $F$  ist:

$$(B.49) \quad \boxed{|\tilde{f}| = F} \quad \square$$

Die Voraussetzung (B.47) bedeutet ausgeschrieben, daß das Integral

$$(B.50) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln F(\omega)|}{c^2 + \omega^2} d\omega$$

konvergiert.

**(B.51) Beweis:**

Wegen  $L_1 \subset \mathfrak{S}'$  ist zunächst gesichert, daß es zu jeder Funktion  $\tilde{f}$  mit  $|\tilde{f}| = F \in L_1$  überhaupt eine Zeitdistribution  $f$  gibt. Diese ist wegen Satz (A.108) zudem noch gleichmäßig stetig.

Entsprechend der in (B.36) gegebenen Transformation bilden wir die Funktion

$$G(\phi) := (c^2 + \omega^2) F(\omega),$$

welche wegen

$$\int_{-\pi}^{\pi} |G(\phi)| d\phi = 2c \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)| d\omega$$

aus  $L_1(-\pi, \pi)$  ist, da nach Voraussetzung die Funktion  $F$  aus  $L_1(\mathbb{R}) = L_1$  ist. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |\ln G(\phi)| d\phi &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \ln \{(c^2 + \omega^2) F(\omega)\} \right| \frac{2c}{c^2 + \omega^2} d\omega \\ &\leq 2c \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln F(\omega)|}{c^2 + \omega^2} d\omega + 2c \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln(c^2 + \omega^2)|}{c^2 + \omega^2} d\omega. \end{aligned}$$

Das letzte Integral konvergiert und liefert eine von der Funktion  $F$  unabhängige reelle Zahl. Da nach der Voraussetzung (B.47) auch das erste Integral der rechten Seite der

Abschätzung konvergiert, folgt für die Funktion  $G$

$$\ln G \in L_1(-\pi, \pi).$$

Wir verschaffen uns nun eine zu  $G$  betragsgleiche Funktion  $g_0 \in H_1$ ,

$$|g_0(e^{j\phi})| = G(\phi),$$

nach (B.32) durch

$$g_0(z) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{j\psi} + z}{e^{j\psi} - z} \ln G(\psi) d\psi \right\} \quad \text{für } |z| < 1.$$

Nach (B.33) lautet die zugehörige Randfunktion

$$g_0(e^{j\phi}) = g_{0R}(\phi) = G(\phi) \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \text{v.P.} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{j\psi} + e^{j\phi}}{e^{j\psi} - e^{j\phi}} \ln G(\psi) d\psi \right\}.$$

Wir wählen nun aber die Funktion

$$g(z) := z g_0(z)$$

mit der Randfunktion

$$g_R(\phi) = e^{j\phi} g_{0R}(\phi),$$

die nach dem Satz über die HÖLDERSche Ungleichung (B.22) wegen  $z \in H_{\infty}$  auch zu  $H_1$  gehört und wie  $g_0$  betragsgleich zu  $G$  ist. Diese Funktion wird mit der Abbildung (B.37) in die Funktion

$$\hat{f}(s) := \frac{g(z)}{c^2 - s^2} = \frac{z g_0(z)}{c^2 - s^2} = \frac{g_0(z)}{(s+c)^2} \quad \text{für } \text{Re}(s) > 0$$

überführt. Entsprechend wird die Randfunktion  $g_R$  in die Funktion

$$\tilde{f}(\omega) := \frac{g(e^{j\phi})}{c^2 + \omega^2} = \frac{g_0(e^{j\phi})}{(j\omega + c)^2}$$

transformiert. Wegen

$$(c^2 + \omega^2) F(\omega) = G(\phi) = |g_R(\phi)| = (c^2 + \omega^2) |\tilde{f}(\omega)|.$$

ist die auf diese Weise konstruierte Funktion  $\tilde{f}$  betragsgleich zu der vorgegebenen Funktion  $F$ . Da  $\tilde{f}$  die Grenzfunktion von  $\hat{f}$  auf der imaginären Achse ist, verhalten sich  $\tilde{f}$  und  $\hat{f}$  wie die FOURIER- und LAPLACE-Transformierte einer Zeitfunktion  $f$ . Nun ist nachzuweisen, daß die derart konstruierte Funktion  $f$  eine kausale Funktion ist, das heißt  $f = 0$  in  $(-\infty, 0)$ : Wir bilden die Funktion

$$g_t(z) := g(z) \exp \left\{ ct \frac{1-z}{1+z} \right\} = g(z) e^{st}.$$

Für  $t < 0$  ist diese Exponentialfunktion im Einheitskreis  $|z| < 1$  analytisch und beschränkt, so daß sie zum Raum  $H_\infty$  gehört. Nach dem HÖLDERSchen Satz (B.22) gehört daher auch die Funktion  $g_t$  zum Raum  $H_1$ . Wegen  $g(0) = g_t(0) = 0$  folgt daher aus dem POISSON-Integral (B.13)

$$\begin{aligned} 0 = g_t(0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g_{tR}(\psi) d\psi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g_R(\psi) \exp \left\{ ct \frac{1-e^{j\psi}}{1+e^{j\psi}} \right\} d\psi \\ &= \frac{c}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\Omega) (c^2 + \omega^2) e^{j\Omega t} \frac{d\Omega}{c^2 + \omega^2} \\ &= \frac{c}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega = 2c f(t) \quad \text{für } t < 0. \end{aligned}$$

Damit ist nachgewiesen, daß  $f$  eine kausale Zeitfunktion ist. Wegen  $\tilde{f} \in L_1$  ist es auch gestattet, die FOURIER-Rücktransformation wie hier als Integraltransformation zu schreiben.  $\square$

#### (B.52) Bemerkung:

Der Beweis wurde im Prinzip dadurch geführt, daß eine spezielle betragsgleiche Funktion im Frequenzbereich konstruiert wurde. Die LAPLACE-Transformierte dieser Funktion lautet im Gebiet  $\operatorname{Re}(s) > 0$

$$(5.53) \quad \tilde{f}(s) = \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{j\Omega s - c^2}{(j\Omega - s)(c^2 + \Omega^2)} \ln F(\Omega) d\Omega \right\}.$$

Durch Grenzübergang ergibt sich die FOURIER-Transformierte

$$(B.54) \quad \tilde{f}(\omega) = F(\omega) \exp \left\{ \frac{i}{\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Omega \omega + c^2}{(\Omega - \omega)(c^2 + \Omega^2)} \ln F(\Omega) d\Omega \right\}.$$

Diese Funktion ist gegenüber allen anderen Funktionen mit den Eigenschaften (B.47), (B.48) ausgezeichnet. Es existiert nämlich  $1/\tilde{f}(s)$  in der gesamten Halbebene  $\operatorname{Re}(s) > 0$  und die zugehörige Zeitdistribution ist aus  $\mathcal{D}'$ , welche ebenfalls im Intervall  $(-\infty, 0)$  gleich Null ist. Zwar existiert auch  $1/\tilde{f}(\omega)$  für fast alle  $\omega$ , doch ist im allgemeinen  $\tilde{f} \in \mathcal{S}'$  nicht gesichert, so daß die FOURIER-Rücktransformation nicht anwendbar ist. Zum Nachweis dieses Sachverhalts kann man sich trotzdem der FOURIER-Transformation und des Satzes (B.46) bedienen, den man nun auf eine Folge  $\{F_k\}$  aus  $\mathcal{S}'$  anwendet. Diese soll gegen  $F$  im Sinne der Topologie des Raum  $\mathcal{S}'$  konvergieren und darüber hinaus so angelegt sein, daß auch  $1/F_k \in \mathcal{S}'$  für alle  $k$  gilt. Dies erreicht man durch geeignete Abänderungen der Funktion  $F$  in der Umgebung ihrer Nullstellen. Setzt man die Folge  $\{1/F_k\}$  statt  $F$  in (B.53) bzw. (B.54) ein, konvergiert die entstehende Folge  $\{\tilde{f}^{-1}\}$  bzw.  $\{\tilde{f}^{-1}\}$  gegen  $1/\tilde{f}$  bzw.  $1/\tilde{f}$ , wenn man als zugrunde liegende Topologie etwa die des Raum  $\mathcal{D}'$  im Zeitbereich heranzieht (im Sinne der strengeren Topologie des Raums  $\mathcal{S}'$  konvergiert die Folge im allgemeinen nicht). Die Grenzdistribution  $f^{-1} \in \mathcal{D}'$  als Folge von Distributionen mit Trägern aus  $[0, \infty)$  besitzt selbst wieder nur einen Träger aus diesem Intervall.  $\square$

Im folgenden Satz wird die »Notwendigkeit« der Bedingung (B.47) des Kriteriums von PALEY-WIENER dargestellt, indem gezeigt wird, daß der Logarithmus der FOURIER-Transformierten kausaler Distributionen stets integrierbar ist.

#### (B.55) Satz: Das Kriterium von PALEY-WIENER (notwendige Bedingung)

Es sei  $f \neq 0$  eine kausale Distribution aus  $\mathcal{S}'$ , das heißt es gilt

$$(B.56) \quad \boxed{f = 0 \quad \text{in } (-\infty, 0)},$$

und die FOURIER-Transformierte  $\tilde{f}$  sei aus  $L_1$ . Dann gilt

$$(B.57) \quad \boxed{\ln |\tilde{f}| \in L_1^*},$$

das heißt, das Integral

$$(B.58) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln |\tilde{f}(\omega)||}{c^2 + \omega^2} d\omega$$

konvergiert.

□

### (B.59) Beweis:

Wir bilden die Funktion

$$g_R(\phi) := (c^2 + \omega^2) \tilde{f}(\omega).$$

Da

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(\omega)| d\omega = \frac{1}{2c} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|g_R(\phi)|}{c^2 + \omega^2} (c^2 + \omega^2) d\phi = \frac{1}{2c} \int_{-\pi}^{\pi} |g_R(\phi)| d\phi,$$

ist  $g_R \in L_1(\pi, -\pi)$ . Es soll nun nachgewiesen werden, daß die FOURIER-Koeffizienten von  $g_R$  mit positiven Indizes verschwinden. Nach (B.29) ist dann nämlich gezeigt, daß  $g_R$  Randfunktion einer Funktion aus  $H_1$  ist:

$$g_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{jk\psi} g_R(\psi) d\psi = 2c \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{c-j\omega}{c+j\omega} \right\}^k \tilde{f}(\omega) d\omega$$

Die zu

$$\tilde{\vartheta}_k(\omega) := \left\{ \frac{c-j\omega}{c+j\omega} \right\}^k$$

gehörende Zeitfunktion  $\vartheta_k$  ist für  $k \geq 1$  kausal und beschränkt, wie man geeigneten Korrespondenztabelle entnehmen kann. Wegen  $\tilde{f} \in L_1$  ist  $f$  aufgrund von Satz (A.108) und Bemerkung (A.109) stetig. Da  $f$  kausal ist, gilt also

$$f(0) = 0.$$

Damit folgt

$$g_k = 2c \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\vartheta}_k(\omega) \tilde{f}(\omega) d\omega = 4c\pi \int_{-\infty}^{\infty} \vartheta_k(t) \tilde{f}(-t) dt = 0$$

wegen der Kausalität von  $f$  und  $\vartheta_k$ ,  $k \geq 1$ . Die Funktion  $g_R$  ist also Randfunktion einer Funktion aus  $H_1$ , für die daher nach (B.30)

$$\ln |g_R| \in L_1(\pi, -\pi)$$

gilt. Durch Anwendung der »Dreiecksungleichung« erhält man die Abschätzung

$$\begin{aligned} 2c \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln |\tilde{f}(\omega)||}{c^2 + \omega^2} d\omega &\leq 2c \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln |\tilde{f}(\omega)(c^2 + \omega^2)||}{c^2 + \omega^2} d\omega + 2c \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln (c^2 + \omega^2)|}{c^2 + \omega^2} d\omega \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} |\ln |g_R(\psi)|| d\psi + 2c \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln (c^2 + \omega^2)|}{c^2 + \omega^2} d\omega \end{aligned}$$

Nach obiger Überlegung konvergiert das erste Integral der rechten Ungleichungsseite. Auch das zweite Integral ist konvergent und liefert eine von  $\tilde{f}$  unabhängige Zahl. Deshalb muß auch das links stehende Integral konvergieren. Wir erhalten mit

$$\ln |\tilde{f}| \in L_1^*$$

das gewünschte Ergebnis. □

### (B.60) Bemerkung:

Da sich bei einer Zeitverschiebung oder bei einer Zeitspiegelung der Betrag der FOURIER-Transformierten nicht ändert (siehe Tabelle (A.107), Nr. 4, 5), gelten die Aussagen der Sätze (B.46) und (B.55) nicht nur für kausale Funktionen, die auf dem Intervall  $(-\infty, 0)$  verschwinden, sondern auch für solche, deren Träger in einem Intervall  $(-\infty, t_0)$  oder  $(t_0, \infty)$  liegen. □

Die beiden vorangegangenen Sätze lassen sich nun zu dem eigentlichen Kriterium zusammenfassen:

### (B.61) Satz: Das Kriterium von PALEY-WIENER

Zu einer reellwertigen, nicht negativen Funktion  $F \in L_1$ ,  $F \neq 0$ , und einem  $t_0 \in \mathbb{R}$  gibt es eine stetige Funktion  $f$ , für die

$$(B.62) \quad f(t) = 0 \quad \text{für } t < t_0 \quad \text{bzw. für } t > t_0$$

gilt, und deren FOURIER-Transformierte vom Betrag gleich der Funktion  $F$  ist,

$$(B.63) \quad \boxed{|\tilde{f}| = F},$$

genau dann, wenn

(B.64)

$$\ln F \in L_1^*$$

ist.

□

**(B.65) Bemerkung:**

Wegen

$$|\ln |F(\omega)|| < |F(\omega)| \quad \text{für } |F(\omega)| > 1$$

und  $F \in L_1$  konvergiert das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln |F(\omega)||}{c^2 + \omega^2} d\omega$$

an allen Unendlichkeitsstellen von  $F$ . Divergenzen dieses Integrals können nur durch Integration über Nullstellen von  $F$  auftreten. □Im folgenden Satz sollen die Voraussetzungen des Kriteriums von PALEY-WIENER gelockert werden; es wird nur noch die lokale Integrierbarkeit der Funktion  $F$  gefordert:**(B.66) Satz: Das Kriterium von PALEY-WIENER (erweiterte Voraussetzungen)**Zu einer nicht negativen Funktion  $F \in \mathcal{D}_{L_1} = L_1^{\text{loc}} \cap \mathfrak{S}'$ ,  $F \neq 0$ , und einem  $t_0 \in \mathbb{R}$  gibt es eine Distribution  $f$  mit

(B.67)

$$\text{supp}(f) \subset (-\infty, t_0) \quad \text{bzw.} \quad \text{supp}(f) \subset (t_0, \infty),$$

deren FOURIER-Transformierte vom Betrag gleich der Funktion  $F$  ist,

(B.68)

$$|f| = F,$$

genau dann, wenn

(B.69)

$$\ln F \in L_1^*$$

ist.

□

**(B.70) Beweis:**Nach (A.26) besitzen die Funktionen aus  $\mathcal{D}_{L_1}$  eine Darstellung

$$F = (c^2 + (\cdot)^2)^k G$$

mit einer Funktion  $G \in L_1$ . Wegen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln |G(\omega)||}{c^2 + \omega^2} d\omega \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln |F(\omega)||}{c^2 + \omega^2} d\omega + k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln (c^2 + \omega^2)|}{c^2 + \omega^2} d\omega$$

ist die Voraussetzung (B.69) äquivalent zu

$$\ln G \in L_1^*.$$

Auf die Funktion  $G$  ist nun das ursprüngliche PALEY-WIENER-Kriterium (B.61) anwendbar. Dieses liefert die Existenz einer Zeitfunktion  $g$  mit  $\text{supp}(g) \subset (-\infty, t_0)$  bzw.  $\text{supp}(g) \subset (t_0, \infty)$  und

$$|\bar{g}| = G.$$

Damit wird die Funktion

$$f := (c^2 + (\cdot)^2)^k g$$

gebildet. Diese besitzt den gleichen Träger wie  $g$  und hat die FOURIER-Transformierte

$$\bar{f} = (c^2 + (\cdot)^2)^k \bar{g},$$

welche wegen

$$|\bar{f}| = (c^2 + (\cdot)^2)^k |\bar{g}| = (c^2 + (\cdot)^2)^k G = F$$

vom Betrag gleich  $F$  ist.Damit ist der »notwendige« Teil des Beweises geführt. Nun wird gezeigt, daß für jede kausale Distribution  $f \in \mathfrak{S}'$  mit  $\bar{f} \in \mathcal{D}_{L_1}$  die Aussage (B.69) folgt. Wegen  $\bar{f} \in \mathcal{D}_{L_1}$  gibt es eine Darstellung

$$\bar{f} = (c^2 + (\cdot)^2)^k \bar{g}$$

mit  $\bar{g} \in L_1$ . Wir bilden nun die Funktion

$$\tilde{g}(\omega) := \frac{\tilde{f}(\omega)}{(c+j\omega)^{2k}} = \left\{ \frac{c-j\omega}{c+j\omega} \right\}^k \tilde{g}(\omega) \in L_1.$$

Die zu

$$\tilde{h}_k(\omega) := (c+j\omega)^{-2k}$$

gehörende Zeitfunktion  $h_k$  ist kausal. Daher ist auch

$$g = h_k * f$$

kausal, da  $f$  ebenfalls kausal ist. Auf  $g$  bzw.  $\tilde{g}$  kann nun wieder das ursprüngliche Kriterium von PALEY-WIENER (B.61) angewendet werden, was

$$\ln |\tilde{g}| \in L_1^*$$

liefert. Mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln |\tilde{f}(\omega)||}{c^2 + \omega^2} d\omega \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln |\tilde{g}(\omega)||}{c^2 + \omega^2} d\omega + k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln |c+j\omega|^2|}{c^2 + \omega^2} d\omega$$

folgt

$$\ln |\tilde{f}| \in L_1^*.$$

Da sich die FOURIER-Transformierte bei einer bei Zeitspiegelung und -verschiebung vom Betrag nicht ändert, gilt diese Aussage auch für Distributionen, deren Träger entweder in  $(-\infty, t_0)$  oder in  $(t_0, \infty)$  liegt, womit der Satz bewiesen ist.  $\square$

#### (B.71) Bemerkung:

Um eine spezielle Distribution  $f$  mit einem Träger aus  $[0, \infty)$  zu erhalten, die der Anforderung (B.68) gerecht wird, können weiterhin die Formeln (B.53), (B.54) verwendet werden. Diese bleiben auch unter den erweiterten Voraussetzungen gültig. Ebenso behalten die in der Bemerkung (B.52) gemachten Aussagen über die inverse Distribution  $f^{-1}$  Gültigkeit.  $\square$

## B.6 Positive Funktionen

Der Problematik der HARDY-LEBESGUE-Räume sehr ähnlich, aber doch in eine etwas andere Richtung gehend, ist die Frage nach Funktionen, die im Einheitskreis  $|z| < 1$  analytisch sind und dort einen nicht negativen Realteil besitzen (positive Funktionen). Dies ist eigentlich nur die Frage nach dem Verhalten des Realteils, welcher eine harmonische Funktion ist. Das Randverhalten von harmonischen Funktionen, die einer gewissen Beschränkung unterliegen, unterscheidet sich aber etwas von dem der analytischen Funktionen aus  $H_p$ , bei denen Real- und Imaginärteil stets zusammen betrachtet werden müssen. Zunächst wird der Begriff der positiven Funktion definiert:

#### (B.72) Definition: Positive Funktionen

Eine in einem offenen Gebiet  $G$  der komplexen Ebene analytische Funktion  $f$  heißt positiv in  $G$ , wenn

(B.73)

$$\operatorname{Re} f(z) \geq 0 \quad \forall \quad z \in G$$

gilt.  $\square$

#### (B.74) Bemerkung:

Aufgrund des Minimumprinzips harmonischer Funktionen kann der Realteil der Funktion  $f$  nur dann sein Minimum im Inneren des Gebiets  $G$  annehmen, wenn die Funktion konstant ist. Nimmt man also die Nullfunktion und konstante imaginäre Funktionen aus, kann die Ungleichung (B.73) durch

(B.75)

$$\operatorname{Re} f(z) > 0 \quad \forall \quad z \in G$$

ersetzt werden, weshalb der Begriff der positiven Funktion gerechtfertigt ist, obwohl es nach der Definition so aussieht, als könne der Realteil auch den Wert Null annehmen.  $\square$

Für positive Funktionen im Einheitskreis entnehmen wir z.B. ACHESER / GLASMANN [1], S. 188 den folgenden Darstellungssatz:

**(B.76) Satz: Darstellung von im Einheitskreis positiven Funktionen**

Eine im Einheitskreis  $|z| < 1$  analytische Funktion  $f$  läßt sich genau dann durch das LEBESGUE-STIELTJES-Integral

$$(B.77) \quad f(z) = j\alpha + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{j\psi} + z}{e^{j\psi} - z} d\mu(\psi),$$

mit einer beschränkten, monoton wachsenden Funktion  $\mu$  und einer reellen Zahl  $\alpha$  darstellen, wenn  $f$  im Einheitskreis positiv ist. Diese Darstellung ist sogar eindeutig im Sinne von Funktionenklassen, deren Elemente sich nur auf Mengen vom Maß Null unterscheiden, wenn die Funktion  $\mu$  durch die Normierung

$$(B.78) \quad \mu(-\pi) = \mu(-\pi+0) = 0$$

festgelegt wird. □

**(B.79) Bemerkung:**

Spaltet man die Funktion  $\mu$  in einen stetigen, monoton wachsenden Anteil  $\mu_0$  und in einen singulären Anteil  $\mu_s$  auf, der eine stückweise konstante, monoton wachsende Funktion (Treppenfunktion) ist,

$$(B.80) \quad \mu = \mu_0 + \mu_s,$$

so erhält man durch

$$(B.81) \quad f_0(z) := \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{j\psi} + z}{e^{j\psi} - z} d\mu_0(\psi)$$

eine Funktion aus  $H_1$ . □

**(B.82) Beweis von Satz (B.76):**

Zuerst wird gezeigt, daß die Darstellung (B.77) für die Positivität der Funktion  $f$  hinreichend ist. Dazu bildet man einfach

$$\operatorname{Re} f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{j\psi} + z}{e^{j\psi} - z} \right\} d\mu(\psi),$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} f(re^{j\phi}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\psi - \phi) + r^2} d\mu(\psi) \\ &\geq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - r^2}{(1 + r)^2} d\mu(\psi) = \frac{1-r}{2\pi} \frac{1}{1+r} \mu(\pi) \geq 0, \end{aligned}$$

wobei das Gleichheitszeichen nur mit  $\mu(\pi) = 0$  erreicht wird. Das bedeutet, daß die monotone Funktion  $\mu$  im gesamten Intervall  $[-\pi, \pi]$  Null sein muß, woraus  $f(z) = 0$  im Einheitskreis folgt.

Die Notwendigkeit der Form (B.77) für die Positivität der Funktion  $f$  sei nur kurz skizziert: Man definiert die Funktion  $\mu_r$  durch das Integral

$$\mu_r(\phi) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\phi} \operatorname{Re} f(re^{j\psi}) d\psi, \quad r < 1,$$

die wegen der Nicht-Negativität des Realteils von  $f$  monoton wachsend ist. Nach dem POISSONSchen Integral (B.15) gilt

$$\begin{aligned} f(z) &= j \operatorname{Im} f(0) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{re^{j\psi} + z}{re^{j\psi} - z} \operatorname{Re} f(re^{j\psi}) d\psi, \\ &= j \operatorname{Im} f(0) + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{re^{j\psi} + z}{re^{j\psi} - z} d\mu_r(\psi). \end{aligned}$$

Aus

$$\operatorname{Re} f(0) = \int_{-\pi}^{\pi} d\mu_r(\psi) = \mu_r(\pi)$$

erkennt man, daß die Funktion  $\mu_r$  unabhängig von  $r$  beschränkt ist. Mit Hilfe des HELLYschen Auswahlprinzips gelingt es dann, beim Grenzübergang  $r \rightarrow 1$  aus der Folge der monoton wachsenden, gleichmäßig beschränkten Funktionen  $\mu_r$  eine konvergente Teilfolge auszuwählen, deren Grenzfunktion  $\mu$  die gewünschte Eigenschaft (B.77) besitzt. Diese ist bis auf Werte auf Mengen vom Maß Null sogar eindeutig. Wie man sofort sieht, bestimmt sich dann noch die Konstante  $\alpha$  zu



$$\alpha = \operatorname{Im} f(0) .$$

□

Mit der Transformation des Einheitskreises auf die rechte Halbebene nach (B.36) kann man nun unmittelbar einen Darstellungssatz für Funktionen formulieren, die in der rechten Halbebene positiv sind. Zunächst wird aber in der Darstellung (B.77) ein möglicher Sprung der Funktion  $\mu$  an der Stelle  $\psi = \pi$  abgespalten, da dieser Punkt bei der Transformation in  $s = \infty$  übergeht. Wegen der Normierung (B.78) springt die Funktion  $\mu$  an der Stelle  $\psi = -\pi$  nicht.

$$(B.83) \quad f(z) = j\alpha + \beta c \frac{1-z}{1+z} + \int_{-\pi+0}^{\pi-0} \frac{e^{j\psi} + z}{e^{j\psi} - z} d\mu(\psi) ,$$

mit

$$(B.84) \quad \beta := \frac{1}{c} \{ \mu(\pi) - \mu(\pi-0) \} .$$

Die Transformation des POISSON-Kerns entnehmen wir (B.45) und mit der Abbildung  $\Omega = \gamma_R(\psi)$  nach (B.38) wird  $\mu$  in die Funktion

$$(B.85) \quad \rho(\Omega) := \mu(\psi)$$

transformiert, die auf dem unbeschränkten offenen Intervall  $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$  definiert ist, aber wie  $\mu$  beschränkt und monoton wachsend ist.

**(B.86) Satz: Darstellung von in der rechten Halbebene positiven Funktionen**

Eine in der rechten Halbebene  $\operatorname{Re}(s) > 0$  analytische Funktion  $f$  läßt sich genau dann in der Form

$$(B.87) \quad f(s) = j\alpha + \beta s + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{j\Omega s - c^2}{j\Omega - s} d\rho(\Omega) ,$$

mit einer beschränkten, monoton wachsenden Funktion  $\rho$  und reellen Zahlen  $\alpha, \beta$ , wobei  $\beta \geq 0$ , darstellen, wenn  $f$  in der rechten Halbebene positiv ist. Diese Darstellung ist eindeutig im Sinne von Funktionenklassen, wenn die Funktion  $\rho$  durch die Normierung

$$(B.88) \quad \rho(-\infty) = 0$$

festgelegt wird. □

**(B.89) Bemerkung: Randfunktionen positiver Funktionen**

Definiert man die Funktion

$$(B.90) \quad f_d(\omega) := f(d+j\omega) = f(s)$$

mit den Werten der Funktion  $f$  auf einer der imaginären Achse parallelen Geraden, kann man die Frage stellen, ob für den Grenzübergang  $d \rightarrow 0$ , also bei Annäherung an die imaginäre Achse, eine Grenzfunktion

$$(B.91) \quad f_R = \lim_{d \rightarrow 0} f_d$$

existiert. Man muß diese Frage verneinen, wenn man den Grenzübergang als punktweise, das heißt für jedes einzelne  $\omega$ , oder im Sinne gewöhnlicher Funktionen betrachtet. Geht man aber zu Distributionen über, kann durch (B.91) eine Grenzfunktion – besser Grenzdistribution – erklärt werden. Man betrachtet zweckmäßigerweise Real- und Imaginärteil getrennt. Aus (B.87) ergibt sich

$$(B.92) \quad \begin{aligned} \operatorname{Re} f(s) &= \operatorname{Re} f(d+j\omega) = \beta d + \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} \left\{ \frac{j\Omega s - c^2}{j\Omega - s} \right\} d\rho(\Omega) \\ &= \beta d + d \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Omega^2 + c^2}{(\Omega - \omega)^2 + d^2} d\rho(\Omega) . \end{aligned}$$

Der Grenzübergang führt dann zu

$$(B.93) \quad \operatorname{Re} f_R = \pi (c^2 + (\cdot)^2) \rho' ,$$

wobei  $\rho'$  die Distributionsableitung von  $\rho$  angibt. Der Realteil der Randfunktion wird also unmittelbar durch die Maßfunktion  $\rho$  bestimmt. Für den Imaginärteil erhält man punktweise

(B.94)

$$\operatorname{Im} f_R(\omega) = \alpha + \text{v.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c^2 + \Omega\omega}{\Omega - \omega} d\rho(\Omega).$$

Dieser ist eine gewöhnliche Funktion. Die gesamte Distribution  $f_R$  ist aus dem Raum  $\mathfrak{S}'$ .  $\square$

## Symbolverzeichnis

Aufgeführt sind die verwendeten Symbole, die über ihre lokale Verwendung hinaus Kapitel-übergreifende Bedeutung besitzen. Verwiesen wird jeweils auf die Definitionen oder die wichtigsten Verwendungen. Symbole mit allgemein üblicher Bedeutung wie etwa  $\mathbf{R}$  für die *Menge der reellen Zahlen* sind zwar aufgeführt, tragen aber keinen Verweis.

Symbol	Bedeutung	Verweis
$\mathbf{a}$	HERMITEScher Anteil von $\mathbf{h}$	(3.51)
$a_{\kappa}$		(3.55)
$\tilde{\mathbf{a}}_0$	lokal integrierbarer Anteil von $\tilde{\mathbf{a}}$	(4.69)
$\tilde{\mathbf{a}}_s$	singulärer Anteil von $\tilde{\mathbf{a}}$	(4.70)
$\mathbf{b}$	kausale Wurzel von $\mathbf{a}$ , Kern des Funktional $\mathcal{P}_V$	(6.26)
$\tilde{\mathbf{b}}$		(6.23)
$c$	positive Konstante	(B.37)
$\mathbf{C}$	Menge der komplexen Zahlen	
$\mathbf{C}_{\infty}$	Raum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen	
$d$	Realteil von $s$	
$\mathbf{d}$	Differentialoperator	
$\mathbf{d}_t$	Differentiation nach der Zeit	(6.2)
$D$	dissipierte Arbeit	(6.5)
$\mathcal{D}$	Operator der Abbildung $\mathbf{y} \rightarrow D$	(6.80)
$\mathbf{D}$	Inverse der Kapazitätsmatrix	(A.4)
$\mathfrak{D}$	Raum der finiten Grundfunktionen	(A.13)
$\mathfrak{D}'$	Raum der Distributionen	(A.36)
$\mathfrak{D}'_k$	Raum der finiten Distributionen	(A.37)
$\mathfrak{D}'_+$	Raum der linksseitig finiten Distributionen	(A.38)
$\mathfrak{D}'_-$	Raum der rechtsseitig finiten Distributionen	
$e$	Basis des natürlichen Logarithmus	(3.1)
$\mathbf{e}_i$	$i$ -ter Einheitsvektor	(2.22)
$E$	innere Energie	(6.59)
$E_V$	wiedergewinnbare Arbeit	

$f$	Distribution	
$f$	analytische Funktion, rationale Funktion	
$f$	Matrix rationaler Funktionen	(4.1)
$f_\kappa$		(4.3)
$f_r$		(B.17)
$f_R$	Randfunktion	(B.25)
$F$	Zählerpolynom von $\hat{\phi}$	(6.60)
$F$	Koeffizientenmatrix von $F$	(6.71)
$\mathfrak{F}$	FOURIER-Transformation	(A.92), (A.99)
$G$	Gebiet	
$G$	Systemoperator der Abbildung $x \rightarrow y$	(2.3)
$g$	Gewichts- oder Nachwirkungsdistribution des Operators $G$	(3.10), (3.15)
$H$	Systemoperator der Abbildung $v \rightarrow y$	(3.36)
$h$	Gewichts- oder Nachwirkungsdistribution des Operators $H$	(3.35)
$H_p$	HARDY-LEBESGUE-Raum	(B.16)
$\text{Im}$	Imaginärteil	
$j$	imaginäre Einheit	
$L$	Induktivitätsmatrix	(6.80)
$\mathcal{L}$	LAGRANGE-Funktion	(6.79)
$\mathcal{L}$	LAPLACE-Transformation	(A.111), (A.114)
$L_1$	Raum der absolut integrierbaren Funktionen	(B.1)
$L_1^{\text{loc}}$	Raum der lokal absolut integrierbaren Funktionen	(B.7)
$L_1^*$	Raum der lokal absolut integrierbaren Funktionen quadratischen Wachstumsverhalten	(5.104), (B.47)
$L_p$	LEBESGUE-Raum	(B.1)
$L_p(G, \mu)$	mit dem Maß $\mu$ gewichteter LEBESGUE-Raum über dem Gebiet $G$	(B.1)
$\ln^+$	positive Werte der Logarithmus-Funktion	(5.106)
$\ln^-$	negative Werte der Logarithmus-Funktion	(5.107)
$M$	Zählerpolynom von $\hat{A}$	(6.89)
$M$	Massenmatrix	(4.41)
$M$	Koeffizientenmatrix von $M$	(6.89)
$n$	Zahl der (äußeren) generalisierten Koordinaten und Kräfte (Zahl der Eingangs- und Ausgangsgrößen)	(2.1)
$N$	Menge der natürlichen Zahlen	
$N_0$	Menge der natürlichen Zahlen einschließlich Null	
$\mathcal{D}_{C_\infty}$	Menge der langsam wachsenden, unendlich oft differenzierbaren Funktionen	(A.41)

$\mathcal{D}_{L_1}$	Menge der langsam wachsenden, lokal absolut integrierbaren Funktionen	(A.26)
$p$	Zählerpolynom einer rationalen Übertragungsfunktion	(4.104)
$p_0$		(4.137)
$p$	Koeffizientenvektor von $p$	(6.65)
$P$	äußere Leistung	(2.16)
$\mathcal{P}$	Operator der Abbildung $v \rightarrow P$	(6.1)
$P_d$	Dissipationsleistung	
$\mathcal{P}_d$	Operator der Abbildung $v \rightarrow P_d$	(2.22)
$P_q$	Wärmeleistung	(6.21)
$P_V$	verlorene Leistung	
$\mathcal{P}_V$	Operator der Abbildung $v \rightarrow P_V$	(4.104)
$q$	Nennerpolynom einer rationalen Übertragungsfunktion	(4.137)
$q_0$		(6.66)
$q$	Koeffizientenvektor von $q$	(4.41)
$Q$	Durchgriffsmatrix	(6.38)
$r$		(6.73)
$r$	Koeffizientenvektor von $r$	(4.151), (6.36)
$R$		
$R$	Menge der reellen Zahlen	
$R_+$	Menge der positiven reellen Zahlen	(6.80)
$R$	Widerstandsmatrix	(6.73)
$R$		(4.111)
$R_i$	Residuum	
$\text{Re}$	Realteil	
$s$	komplexe unabhängige Variable im Bereich der LAPLACE-Transformation	(2.23)
$S$	Entropie	(A.8)
$\mathcal{S}$	Raum der schnell fallenden Grundfunktionen	(A.21)
$\mathcal{S}'$	Raum der temperierten Distributionen	(5.25)
$\mathcal{S}_\epsilon^n$	erweiterter Raum zulässiger Erregungen	(5.26)
$\tilde{\mathcal{S}}_\epsilon^n$	erweiterter Raum zulässiger Erregungen des FOURIER-Bereichs	(A.1)
$\text{supp}$	Träger	
$t$	Zeit	(4.87)
$T$	konstante Transformationsmatrix	
$u$	allgemeine unabhängige Variable	(3.34)
$v$	Vektor der generalisierten Geschwindigkeiten	(5.34)
$v^*$	optimales Element bezüglich des Zeitpunkts $t$	

$V$	verlorene Arbeit	(5.1)
$\mathcal{V}$	Operator der Abbildung $\mathfrak{v} \rightarrow V$	(5.1)
V.P.	CAUCHYScher Hauptwert eines uneigentlichen Integrals	
$W$	gesamte Arbeit	(2.18)
$\mathcal{W}$	Operator der Abbildung $\mathfrak{v} \rightarrow W$	(2.18)
$\mathbf{z}$	Vektor der generalisierten Koordinaten oder Arbeitsvariablen	(2.1)
$\mathbf{y}$	Vektor der generalisierten Kräfte	(2.2)
$z$	komplexe unabhängige Variable	
$\mathbf{z}$	Zustandsvektor	(6.62)
$Z$	Scheinwiderstand	
$\alpha_i$	positiv definite HERMITESche Matrix	(4.72)
$\alpha_i$	Nullstelle	(4.109)
$\beta_i$	Polstelle	(4.109)
$\gamma$	Abbildungsfunktion des Inneren des Einheitskreises in die rechte komplexe Halbebene	(B.37)
$\gamma_R$	Abbildungsfunktion des Einheitskreises auf die imaginäre Achse	(B.38)
$\delta$	DIRACSche Stoßfunktion	(A.19)
$\delta_i$	Realteil von $\alpha_i$	(4.117)
$\epsilon_i$	Realteil von $\beta_i$	(4.117)
$\zeta$	komplexe unabhängige Variable	
$\zeta_{\omega_0}$	quasistationäre Funktion	(5.36)
$\eta$	stetige Funktion	(4.56)
$\Theta$	Temperatur	(2.23)
$\kappa$	konstanter Vektor aus $\mathcal{C}^n$	
$\hat{\lambda}$	Übertragungsfunktion der LAGRANGE-Funktion	(6.89)
$\mu$		(A.126), (B.77)
$\mu$		(3.61), (4.49)
$\nu$		(A.127)
$\nu$		(3.64)
$\pi$	Kreiszahl	
$\rho$		(B.87)
$\rho$		(4.41)
$\rho_0$	stetiger Anteil von $\rho$	(4.67)
$\rho_s$	Treppenteil von $\rho$	(4.67)
$\sigma$	Sprung- oder HEAVYSIDE-Funktion	(A.64)
$\Sigma$	Entropieproduktion	(2.23)
$\tau$	Zeit	

$v_i$	Imaginärteil von $\alpha_i$	(4.117)
$\phi$	Grundfunktion	(A.4)
$\phi$	Winkel	(B.39)
$\Phi$	freie Energie	(2.26)
$\hat{\Phi}$	Übertragungsfunktion der wiedergewinnbaren Arbeit $E_V$	(6.59)
$\chi$	unendlich oft differenzierbare Ausblendungsfunktion	(3.73)
$\psi$	Grundfunktion	(A.4)
$\omega$	Frequenz	
$\Omega$	Frequenz	
$\omega_i$	singuläre Stellen von $\tilde{\mathbf{a}}$ , Imaginärteil von $\beta_i$	(4.117)
$(\bar{\cdot})$	komplexe Konjugation	(A.49)
$(\cdot)^T$	Transposition	
$(\cdot)^\dagger$	Transposition und komplexe Konjugation	(4.41), (A.51)
$(\cdot)^*$	totale Konjugation	(4.59)
$(\cdot)_t$	rechtsseitige Abschneideoperation bei $t$	(3.40)
$(\cdot)_+$	linksseitige Abschneideoperation bei 0	(A.92), (A.99)
$(\dot{\cdot})$	FOURIER-Transformierte	(A.111), (A.114)
$(\ddot{\cdot})$	LAPLACE-Transformierte	
$(\cdot)'$	Differentiation nach der unabhängigen Variablen	
$(\cdot)^\cdot$	Differentiation nach der Zeit	
$(\cdot)^n$	bei Räumen: $n$ -faches kartesisches Produkt mit sich selbst (Vektorraum)	
$(\cdot)^{n \times m}$	bei Räumen: $m$ -faches kartesisches Produkt von $(\cdot)^n$ mit sich selbst (Matrizenraum)	
$(\cdot, \cdot)$	Produktfunktional zwischen Distributionen und Grundfunktionen	(3.45), (A.14)
$(\cdot, \cdot)_t$	abgeschnittenes Produktfunktional	(2.20)
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{a}}$	inneres Produkt im Raum $\mathfrak{S}_{\mathbf{a}}^n$	(5.20)
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\tilde{\mathbf{a}}}$	inneres Produkt im Raum $\tilde{\mathfrak{S}}_{\tilde{\mathbf{a}}}^n$	(5.27)
$ \cdot $	Betrag einer reellen oder komplexen Zahl, EUKLIDISCHE Norm eines Vektors	
$\ \cdot\ $	HILBERTSche Matrixnorm	(5.22)
$\ \cdot\ _{\mathbf{a}}$	Norm im Raum $\mathfrak{S}_{\mathbf{a}}^n$	(5.28)
$\ \cdot\ _{\tilde{\mathbf{a}}}$	Norm im Raum $\tilde{\mathfrak{S}}_{\tilde{\mathbf{a}}}^n$	(B.2), (B.20)
$\ \cdot\ _p$	Norm im Raum $L_p$ oder $H_p$	(3.46), (A.76)
$*$	Faltung	

# Literatur

- [1] N. I. ACHESER / I. M. GLASMANN:  
Theorie der linearen Operatoren im Hilbert-Raum  
Akademie-Verlag, Berlin, 5. Aufl., 1968
- [2] H. BALKE / H. BERGANDER:  
Zum Potential der Materialfunktionen nichtlinear-viskoelastischer Stoffe  
Acta Mechanica, Bd. 40, 1981, S. 169-180
- [3] E. BECKER / W. BÜRGER:  
Kontinuumsmechanik  
Teubner, Stuttgart, 1975
- [4] S. BOCHNER:  
Vorlesungen über Fouriersche Integrale  
Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1932
- [5] J. BÖCKER / I. HARTMANN / C. ZWANZIG:  
Nichtlineare und adaptive Regelungssysteme  
Springer-Verlag, Berlin, 1986
- [6] R. W. BROCKETT / J. L. WILLEMS:  
Frequency Domain Stability Criteria, Part I, II  
IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-10, Part I: July 1965, pp. 255-261,  
Part II: Oct. 1965, pp. 407-413
- [7] R. W. BROCKETT / H. B. LEE:  
Frequency-Domain Instability Criteria for Time-Varying and Nonlinear  
Systems  
Proc. IEEE, Vol. 55, May 1967, pp. 604-619
- [8] G. BRUNK:  
Fluctuations in Non-linear Viscoelastic Systems  
Recent Developments in Nonequilibrium Thermodynamics, Proceedings 1983,  
Lecture Notes in Physics 199, Springer-Verlag, 1984
- [9] G. BRUNK:  
On a Few-Degree-of-Freedom-Model of the Josephson Tunneling Junction  
SQUID '85 - Superconducting Quantum Interference Devices and their  
Applications, de Gruyter, Berlin, 1985
- [10] W. CAUER:  
Die Verwirklichung von Wechselstromwiderständen vorgeschriebener  
Frequenzabhängigkeit  
Springer-Verlag, Dissertation, TH Berlin, 1926
- [11] W. CAUER:  
The Poisson Integral for Functions with Positive Real Part  
Bull. Am. Math. Soc., Vol. 38, Oct. 1932, pp. 713-717
- [12] W. CAUER:  
Theorie der linearen Wechselstromschaltungen  
Akademie-Verlag, Berlin, 2. Aufl., 1954
- [13] B. D. COLEMAN:  
Thermodynamics of Materials with Memory  
Springer-Verlag, Wien - New York, 1971
- [14] G. DOETSCH:  
Einführung in Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation  
Birkhäuser Verlag, Basel, 3. Aufl., 1976
- [15] A. C. ERINGEN:  
Mechanics of Continua  
John Wiley & Sons, New York, 1967

- [16] O. FÖLLINGER:  
Regelungstechnik  
AEG-Telefunken, Berlin, 1979
- [17] V. FREISE:  
Chemische Thermodynamik  
Bibliographisches Institut, Mannheim / Zürich, 1969
- [18] I. M. GELFAND / G. E. SCHILOW / N. J. WILENKIN:  
Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen), Bde. I – IV  
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, Bd. I 1960, Bd. II 1962,  
Bd. III 1964, Bd. IV 1964
- [19] I. HARTMANN:  
Lineare Systeme  
Springer-Verlag, Berlin, 1976
- [20] K. HOFFMAN:  
Banach Spaces of Analytic Functions  
Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1962
- [21] A. HURWITZ / R. COURANT:  
Funktionentheorie  
Springer-Verlag, Berlin, 4. Aufl., 1964
- [22] L. JANTSCHER:  
Distributionen  
De Gruyter, Berlin, 1971
- [23] W. KERN:  
Zur Vieldeutigkeit der Nichtgleichgewichtsentropie in kontinuierlichen Medien  
Dissertation, TH Aachen, 1972
- [24] H. KÖNIG:  
Zur Theorie der linearen dissipativen Transformationen  
Arch. Math., Vol X, 1959, S. 447–451

- [25] H. KÖNIG:  
Lineare dissipative Systeme  
Colloque sur l'analyse fonctionnelle, Louvain 1960  
Librairie universitaire, Louvain, 1961, S. 71–79
- [26] H. KÖNIG / J. MEIXNER:  
Lineare Systeme und lineare Transformationen  
Mathematische Nachrichten, Bd. 19, 1959, S. 265–322
- [27] H. KÖNIG / J. TOBERGTE:  
Reversibilität und Irreversibilität von linearen dissipativen Systemen  
J. Reine Angew. Math., Bd. 13, 1963, S. 104–108
- [28] Y. D. LANDAU:  
Adaptive Control  
Marcel Dekker, New York, 1979
- [29] L. A. LJUSTERNIK / W. I. SOBOLEW:  
Elemente der Funktionalanalysis  
Verlag Harri Deutsch, Thun, 6. Aufl., 1979
- [30] A. G. J. MACFARLANE (Hrsgb.):  
Frequency-Response Methods in Control Systems  
IEEE Press, New York, 1979
- [31] J. MEIXNER:  
Thermodynamische Erweiterung der Nachwirkungstheorie  
Zeitschrift für Physik, Band 139, 1954, S. 30–43
- [32] J. MEIXNER:  
Impedanz und Lagrange-Funktion linearer dissipativer Systeme  
Zeitschrift für Physik, Band 156, 1959, S. 200–210
- [33] J. MEIXNER:  
Network Theory and Its Relation to the Theory of Linear Systems  
IRE Trans. on Antennas and Propagation, Vol. AP-7, Dec. 1959, pp. S435–439

- [34] J. MEIXNER:  
Reversibilität und Irreversibilität in linearen passiven Systemen  
Zeitschrift für Naturforschung, Band 16a, Heft 8, 1961, S. 721–726
- [35] J. MEIXNER:  
On the Theory of Linear Passive Systems  
Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol. 17, 1964, pp. 278–296
- [36] I. MÜLLER:  
Thermodynamik  
Bertelsmann Universitätsverlag, Düsseldorf, 1973
- [37] R. NEVANLINNA / V. PAATERO:  
Einführung in die Funktionentheorie  
Birkhäuser Verlag, Basel, 1965
- [38] A. PAPOULIS:  
The Fourier Integral and Its Applications  
McGraw-Hill Book Company, New York, 1962
- [39] V. M. POPOV:  
Hyperstability of Control Systems  
Springer-Verlag, Berlin, 1973
- [40] F. RIESZ / B. SZ. NAGY:  
Vorlesungen über Funktionalanalysis  
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1956
- [41] L. SCHWARTZ:  
Théorie des Distributions  
Hermann, Paris, nouvelle edition, 1966
- [42] B. D. H. TELLEGEN:  
A General Network Theorem, with Applications  
Philips Research Reports, Vol. 7, 1952, pp. 259–269

- [43] J. TOBERGTE:  
Invariante Teilräume und die verlorene Energie linearer passiver Transformationen  
Dissertation, Universität Köln, 1965
- [44] C. TRUESDELL / W. NOLL:  
The Nonlinear Field Theories of Mechanics  
Handbuch der Physik, Bd. III/3, Springer-Verlag, Berlin, 1965
- [45] J. C. WILLEMS:  
Dissipative Dynamical Systems  
Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol. 45, 1972, pp. 321–393
- [46] K. YOSIDA:  
Functional Analysis  
Springer-Verlag, Berlin, 6. Aufl., 1980
- [47] D. C. YOULA:  
Representation Theory of Linear Passive Networks  
Microwave Research Inst., Polytechnic Inst. of Brooklyn, N. Y., 1958
- [48] A. H. ZEMANIAN:  
An N-Port Realizability Theory Based on the Theory of Distributions  
IEEE Transactions on Circuit Theory, June 1963, pp. 265–274
- [49] A. H. ZEMANIAN:  
Distribution Theory and Transform Analysis  
McGraw-Hill Book Company, New York, 1965
- [50] R. ZURMÜHL:  
Matrizen  
Springer-Verlag, Berlin, 4. Aufl., 1964
- [51] R. ZURMÜHL:  
Praktische Mathematik  
Springer-Verlag, Berlin, 5. Aufl., 1965

## FORTSCHRITT-BERICHTE VDI

### Bereits veröffentlicht wurden in der Reihe 8 „Meß-, Steuerungs- und Regelungstechnik“ u.a.

	DM
Nr. 157 H. ROMBACH: Entwicklung und Aufbau eines universellen, automatischen DLTS-Meßplatzes. 1988. ISBN 3-18-145708-6	118,00
Nr. 156 U. KONIGORSKI: Ein direktes Verfahren zum Entwurf strukturbeschränkter Zustandsrückführungen durch Polvorgabe. 1988. ISBN 3-18-145608-X	84,00
Nr. 155 U. DIETZ: Nichtlineare Zustandsregler für elektro-hydraulische Servoantriebe. 1988. ISBN 3-18-145508-3	79,00
Nr. 154 H. STEGEMANN †: Entwurf simultan stabilisierender Regler für Systeme mit maximal zwei instabilen Polen. 1988. ISBN 3-18-145408-7	74,00
Nr. 153 G. TEBRAKE: Berührungslose Geschwindigkeitsmessung an Textilfäden mit künstlicher Markierung. 1988. ISBN 3-18-145308-0	90,00
Nr. 152 H.-H. KOTHE: Beobachtbarkeitsanalyse zeitvarianter Systeme und deren Anwendung bei der Optimalfilterung gestützter Trägheitsnavigationssysteme. 1988. ISBN 3-18-145208-4	101,00
Nr. 151 B. VOGT: Entwicklung und Optimierung eines kapazitiven Differential-Beschleunigungsaufnehmers mit Hilfe der Fehleranalyse. 1988. ISBN 3-18-145108-8	112,00
Nr. 150 N. WIESNER: Zur adaptiven prädiktiven Dreipunktregelung mit unterschiedlich wirkenden schaltenden Stellgliedern. 1988. ISBN 3-18-145008-1	105,00
Nr. 149 MIN-HA NGO: Ein Beitrag zur automatisierten Specklebild-Auswertung. 1988. ISBN 3-18-144908-3	84,00
Nr. 148 D. SCHEITHAUER: Parameterschätzung mit einem modifizierten Maximum-Likelihood-Verfahren bei Systemen mit Prozeß- und Meßrauschen. 1988. ISBN 3-18-144808-7	86,00
Nr. 147 K. HOFER: Binäre Beobachter in elektrischen Antrieben. 1988. ISBN 3-18-144708-0	125,00
Nr. 146 A. OTTO: Infrarotspektroskopie mit diffus reflektierter Strahlung: In-situ Messungen an schwach streuenden Proben. 1987. ISBN 3-18-144608-4	95,00
Nr. 145 R. HÖFLING: Digitale Specklemusterinterferometrie mit einem parallelen Bildprozessor. 1987. ISBN 3-18-144508-8	68,00
Nr. 144 M. ULM: Zur graphentheoretischen Ermittlung der dezentralen Stabilisierbarkeit dynamischer Systeme. 1987. ISBN 3-18-144408-1	86,00
Nr. 143 P. BEATER: Zur Regelung nichtlinearer Systeme mit Hilfe bilinearer Modelle. 1987. ISBN 3-18-144308-5	80,00
Nr. 142 D. ABEL: Modellbildung und Analyse ereignisorientierter Systeme mit Petri-Netzen. 1987. ISBN 3-18-144208-9	96,00
Nr. 141 K.-G. MENG: Laser-Scan-Mikroskop mit integriert-optischer Einseitenbanddetektion und digitaler Bildverarbeitung. 1987. ISBN 3-18-144108-2	83,00

Auf Anfrage erhalten Sie von uns das vollständige Verzeichnis aller Reihen.

**VDI VERLAG** Postfach 8228  
4000 Düsseldorf 1