

GEWICHTETE RÄUME STETIGER VEKTORWERTIGER FUNKTIONEN

UND DAS INJEKTIVE TENSORPRODUKT

D i s s e r t a t i o n

z u r E r l a n g u n g d e s D o k t o r g r a d e s

bei der Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Johannes Gutenberg-Universität

in Mainz

Klaus-Dieter B i e r s t e d t

geb. in Bad Eilsen (Schaumburg-Lippe)

Mainz 1970

Gewichtete Räume stetiger vektorwertiger Funktionen
und das injektive Tensorprodukt

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
bei der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Johannes Gutenberg-Universität
zu Mainz

Klaus-Dieter Bierstedt
geb. in Bad Eilsen

Mainz 1971

Dekan:	Prof.Dr.H.Risler
1. Berichterstatter:	Prof.Dr.B.Gramsch
2. Berichterstatter:	Prof.Dr.H.G.Tillmann

Tag der mündlichen Prüfung: 19.4.1971

Inhaltsverzeichnis:

	Seite
Einleitung und Übersicht	ii
Vorbemerkung	vi
§ 1 Definition gewichteter Räume stetiger vektorwertiger Funktionen	1
§ 2 Beispiele	17
§ 3 Deltafunktionale und ϵ -Produkt	27
§ 4 Tensorprodukt und Approximationssätze	38
§ 5 Die Approximationseigenschaft für gewichtete Räume stetiger Funktionen	50
§ 6 Folgerungen aus der Darstellung als $\tilde{\epsilon}$ -Produkt	60
§ 7 Unterräume	70
§ 8 Algebren und Moduln	79
§ 9 Anwendung auf ein Beispiel	90
Literatur	95

Einleitung und Übersicht

Von W.H. Summers wurden (in den beiden Arbeiten [39] und [40]) gewichtete Räume $CV_0(X)$ stetiger komplexwertiger Funktionen auf vollständig regulären Hausdorffräumen X betrachtet, wobei in [40] auch Systeme V von oben halbstetiger Gewichtsfunktionen zugelassen sind.

Eines der interessantesten Beispiele für einen solchen gewichteten Raum ist die von R.C. Buck in [8] eingeführte strikte Topologie β auf der Algebra $CB(X)$ der stetigen beschränkten Funktionen auf X . H.S. Collins und J.R. Dorroh [9] haben mit einem direkten Beweis gezeigt, daß $(CB(X), \beta)$ stets die bekannte (Grothendiecksche) Approximationseigenschaft besitzt; L.A. Rubel und A.L. Shields [31] betrachteten mit Vorteil die strikte Topologie auf dem Teilraum $H^\infty(G)$ der beschränkten holomorphen Funktionen auf dem Gebiet G der komplexen Ebene \mathbb{C} .

In [2] sind mit Hilfe der Theorie der topologischen Tensorprodukte topologische Vektorräume und Algebren stetiger vektorwertiger Funktionen auf einem kompakten Raum untersucht worden. Als Anwendung ergab sich eine Form des Approximationssatzes von S.N. Mergelyan für Funktionen mit Werten in lokalkonvexen Räumen bzw. Banachalgebren.

Im Anschluß daran hat A.M. Davie mit einer von H.G. Vitushkin stammenden Methode (die bei der rationalen Approximation benutzt wird) gezeigt, daß der Raum $A(K)$ der auf einer kompakten Menge K der komplexen Ebene stetigen und im Innern von K holomorphen Funktionen die Approximationseigenschaft besitzt. Damit wurde ein Satz von L. Eifler [15] verbessert, der - auf dem Beweis des Mergelyanschen Satzes basierend - die Approximationsbedingung für $A(K)$ nachwies, wenn K der Bedingung $\mathbb{C} \setminus K$ zusammenhängend genügt.

Im Hinblick auf diese Ergebnisse erschien es interessant und lohnend, als Ausgangspunkt der Arbeit das folgende zentrale Problem zu betrachten: Definiert man in kanonischer Weise den Räumen $CV_0(X)$ entsprechende Räume $CV_0(X, E)$ E -wertiger Funktionen (E ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum), unter welchen Bedingungen (an V , X und E) gilt dann $CV_0(X, E) = E \otimes CV_0(X) = E \overset{\check{\otimes}}{\otimes} CV_0(X)$ als topologischer Isomorphismus, wenn \otimes das Schwartzsche ϵ -Produkt und $\overset{\check{\otimes}}{\otimes}$ das injektive Tensorprodukt bezeichnet? Mit

einer Verbesserung der Methode aus [3] sollte es gleichzeitig möglich sein, die Frage der Approximationseigenschaft für den Raum $CV_0(X)$ skalarer Funktionen unter diesen Bedingungen positiv zu beantworten und die Betrachtung auch auf Unterräume von $CV_0(X)$ auszudehnen.

Die vorliegende Arbeit, die sich in neun Paragraphen teilt, beschäftigt sich daher mit Approximationsfragen bei topologischen Vektorräumen stetiger (bzw. holomorpher) Funktionen, deren Topologie durch ein System von Gewichtsfunktionen erzeugt wird. Sie zeigt, daß für einen solchen Raum skalarer Funktionen die Approximationseigenschaft äquivalent zu der Approximation gewisser Funktionen mit Werten in lokalkonvexen Räumen E durch solche mit Bild in endlichdimensionalen Unterräumen von E ist (§7, Th. 2 und 4). Damit gelingt es, für eine große Klasse gewichteter Räume stetiger komplexwertiger Funktionen (nämlich für $CV_0(X)$ unter sehr allgemeinen Voraussetzungen an V und X) die Approximationsbedingung nachzuweisen (§5, Th. 3 und 11). Außerdem wird ein Zusammenhang mit der Approximation von stetigen (bzw. holomorphen) Funktionen in zwei Variablen durch Linearkombinationen aus Produkten von Funktionen in je einer Veränderlichen hergestellt (§7, Kor. 12) und dies auf beschränkte holomorphe Funktionen angewandt (§9, Satz 7).

Es ergeben sich neue Ergebnisse (und neue Beweise bekannter Sätze) für vektorwertige Funktionen (z.B. für Funktionen mit Werten in Banachräumen), für skalare Funktionen in mehreren Variablen und für Räume komplexwertiger Funktionen in einer Veränderlichen.

In § 1 der Arbeit sind zunächst die Bezeichnungen und allgemeinen Voraussetzungen einzuführen. Für ein System V von oben halbstetiger Gewichtsfunktionen auf einem vollständig regulären Hausdorffraum X - das gewissen Bedingungen genügt; ein solches System wird nach Summers als Nachbin-Familie bezeichnet - und einen topologischen Vektorraum E werden u.a. die Räume $CV(X,E)$, $CV\Gamma(X,E)$, $CV_0(X,E)$ und $CV_{00}\Gamma(X,E)$ stetiger E -wertiger Funktionen auf X definiert.

In § 2 schließt sich eine Sammlung der wichtigsten Beispiele an, die sich in die allgemeine Theorie einordnen lassen, wie $C(X,E)$ (alle stetigen Funktionen mit kompakter Konvergenz),

$(CB(X,E),\beta)$ (stetige beschränkte Funktionen mit strikter Topologie; E lokalkonvex), $C_\bullet(X,E)$ (im Unendlichen verschwindende Funktionen mit gleichmäßiger Konvergenz; in beiden Fällen X lokalkompakt), $C_c(X,E)$ (Funktionen mit kompaktem Träger in der induktiven Limes-Topologie; hier muß X lokalkompakt und im Unendlichen abzählbar und E ein normierter Raum sein).

§ 3 geht als erstes auf die Beziehung zwischen den Punkten des Grundraumes X und den entsprechenden Deltafunktionalen auf $CV(X)$ bzw. $CV_\bullet(X)$ ein. Nach Definition des ϵ - bzw. $\tilde{\epsilon}$ -Produktes (das für lokalkonvexe Räume zuerst von L. Schwartz [36] und für den nicht lokalkonvexen Fall in [2] behandelt wurde und sich bei Übergang auf Unterräume gut verhält) gelingt es dann in vielen Fällen, mittels eines topologischen Isomorphismus $E\epsilon CV(X)$ bzw. $E\epsilon CV_\bullet(X)$ als Teilräume von $CV\Gamma(X,E)$ bzw. $CV_{\bullet\bullet}\Gamma(X,E)$ zu erkennen (Th. 11).

Dies liefert in § 4 nach Definition des injektiven Tensorproduktes - ϵ -Produkt, injektives Tensorprodukt und Approximations-eigenschaft stehen, wie bekannt ist, in enger Beziehung zueinander - unter gewissen Voraussetzungen eine Isomorphie von $E\check{\epsilon} CV(X)$ bzw. $E\check{\epsilon} CV_\bullet(X)$ in $CV\Gamma(X,E)$ bzw. $CV_{\bullet\bullet}\Gamma(X,E)$ (Th. 8). Bei dieser Gelegenheit werden zwei Approximationssätze von A.H. Shuchat [37] verbessert und ihr Zusammenhang mit der vorliegenden Theorie aufgezeigt (Sätze 9 und 10).

Nach Spezialisierung auf lokalkonvexen Bildraum E vereinfachen sich in § 5 die Untersuchungen. Man erhält so (mittels einer Zerlegung der Eins) für vollständig regulären k -Raum X , vollständigen Raum E und jede gewichtete Topologie, die stärker als die Topologie der kompakten Konvergenz auf X ist (so daß $CV_\bullet(X)$ vollständig wird), topologische Isomorphismen zwischen den drei Räumen $E\check{\epsilon} CV_\bullet(X)$, $E\epsilon CV_\bullet(X)$ und $CV_\bullet(X,E)$. Damit kann man beweisen, daß (unter den angegebenen Voraussetzungen) $CV_\bullet(X)$ immer die Approximationseigenschaft besitzt (Th. 3). Diese Sätze umfassen als Spezialfälle u.a. bekannte Ergebnisse von Dietrich [11], Grothendieck [20], Schwartz [34], [35] sowie das zitierte Theorem von Collins und Dorroh [9].

Durch eine modifizierte Beweismethode läßt sich anschließend zeigen, daß für lokalkompaktes X $CV_\bullet(X)$ sogar stets der (i.a. etwas schwächeren) Schwartzschen Approximationsbedingung genügt, wenn nur zu jedem Punkt von X eine Gewichtsfunktion aus V ex-

istiert, die in diesem Punkt von Null verschieden ist (Der Raum $CV_0(X)$ braucht dazu nicht einmal vollständig zu sein; Th. 11.).

§ 6 untersucht das \tilde{E} -Produkt $E\tilde{E}CV(X)$ bzw. $E\tilde{E}CV_0(X)$ als Teilraum von $CV^d(X, E)$ bzw. $CV_0^d(X, E)$ (das sind Räume schwach stetiger Funktionen) genauer, wenn X nur vollständig regulär und E lokal-konvex ist. Eine Frage, die in § 6 gestellt und beantwortet wird, ist, wann sich die Räume $CV_0(X, E)$ "schwach" definieren lassen (wie dies L. Schwartz in [35] für seinen Fall getan hat).

In § 7 werden die Ergebnisse aus § 5 auf Unterräume gewichteter Räume stetiger Funktionen angewandt. Auch für Unterräume von $CV_0(X)$ gilt eine Äquivalenz zwischen der Tensorprodukt-darstellung vektorwertiger Funktionen und der Approximationseigenschaft für den Raum skalarer Funktionen (Th. 2 und 4). Mittels Zerlegung der Eins werden dann Sätze vom Stone-Weierstraß-Typ für $CV_0(X, E)$ bewiesen, was Resultate von Wells [47] und Todd [43] ausdehnt (Th. 7). Die Approximationseigenschaft hängt auch mit einem verallgemeinerten "Slice"-Produkt-Problem bei stetigen Funktionen in mehreren Variablen zusammen, und das Slice-Produkt ist nichts anderes als das Schwartzsche ϵ -Produkt (Satz 11).

In § 8 kann man Sätze für den Fall herleiten, daß $CV_0(X)$ eine topologische Algebra darstellt. Man erhält eine Verallgemeinerung und einen neuen Beweis für ein Theorem von C. Todd [43].

Am Ende der Arbeit ist es in § 9 möglich, die Ergebnisse für den interessanten Fall $(H^\infty(G, E), \beta)$ der beschränkten holomorphen E -wertigen Funktionen auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet G der komplexen Ebene mit der strikten Topologie β zu benutzen: Es läßt sich hier relativ leicht beweisen, daß $(H^\infty(G), \beta)$ die Approximationseigenschaft besitzt (Satz 2). Damit erhält man aus dem vorhergehenden sofort die Tensorprodukt-darstellung $(H^\infty(G, E), \beta) = E \otimes_\epsilon (H^\infty(G), \beta)$ (E vollständig; Satz 3), die dazu benutzt werden kann, einen topologischen Isomorphismus von $(H^\infty(G-G'), \beta)$ auf $(H^\infty(G), \beta) \otimes_\epsilon (H^\infty(G'), \beta)$ herzustellen, falls G einfach zusammenhängend und G' ein beliebiges Gebiet in \mathbb{C} ist (Satz 7). Dieses einfache Beispiel ist etwa für den Fall $G=G'=D$ (Einheitskreis in \mathbb{C}) besonders interessant, weil F. Birtel und E. Dubinsky [4] gezeigt haben, daß sich H^∞ auf dem Polydisk nicht in ein injektives Tensorprodukt $H^\infty(D) \otimes_\epsilon H^\infty(D)$ zerlegen läßt, wenn man auf H^∞ die übliche sup-Norm einführt.

Zum Schluß möchte ich den Herren Dr. L. Eifler, Dr. J. Garnett, Dr. H. Shuchat und besonders Herrn Dr. W.H. Summers für die Übersendung von Vorabdrucken ihrer im Literaturverzeichnis aufgeführten Arbeiten danken.

Herrn Privatdozent Dr. B. Gramsch und Herrn Dr. D. Vogt danke ich für ihr Interesse und einige Bemerkungen zu der vorliegenden Arbeit (insbesondere auch für Hinweise zu Lemma 5. von § 3 und Satz 1. von § 9).

Vorbemerkung:

Alle betrachteten Vektorräume und Algebren sind lineare Räume über dem Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen. Ein großer Teil der Sätze bleibt auch richtig, wenn \mathbb{C} durch den Körper \mathbb{R} der reellen Zahlen ersetzt wird. Topologische Räume und topologische Vektorräume werden stets (nichtleer und) separiert vorausgesetzt.

Verweise auf Literatur sind (i.a. durch den Namen des Autors und) durch eine Nummer in eckigen Klammern gegeben, die sich auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit bezieht. Es wird durchweg die Terminologie von [2] benutzt.

§ 1 Definition gewichteter Räume stetiger vektorwertiger Funktionen

Im folgenden seien stets X ein vollständig regulärer (Hausdorff-) Raum und $E \neq \{0\}$ ein (separierter) topologischer Vektorraum über \mathbb{C} , nicht notwendig lokalkonvex. Die Topologie von E werde o.B.d.A. durch das gerichtete System $\{q_\alpha; \alpha \in A\}$ von (F) -Halbnormen gegeben (s. Kelley, Namioka [23], Ch.2, Sec.6, Problem C).

$B(X, E)$ sei der lineare Raum über \mathbb{C} (bzgl. punktweiser Definition der linearen Operationen) aller beschränkten E -wertigen Funktionen auf X , d.h. aller Funktionen $f: X \rightarrow E$, für die $f(X)$ eine beschränkte Menge in E ist. Setze $B(X) := B(X, \mathbb{C})$.

$BT(X, E)$ bezeichne die Teilmenge derjenigen E -wertigen Funktionen f auf X , für die die absolutkonvexe Hülle $\Gamma(f(X))$ des Wertebereiches $f(X)$ von f noch beschränkt in E ist. Auf Grund elementarer Eigenschaften ist $BT(X, E)$ linearer Teilraum von $B(X, E)$. Da in einem lokalkonvexen Raum die absolutkonvexe Hülle jeder beschränkten Menge beschränkt ist (was bekanntlich in beliebigen topologischen Vektorräumen nicht mehr richtig bleibt), gilt für lokalkonvexe E immer $B(X, E) = BT(X, E)$.

Unter der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf X ist $B(X, E)$ ein topologischer Vektorraum und vollständig, falls E vollständig ist (s. [23], Ch.2, 8.1 und 8.6). Die Topologie auf $B(X, E)$ kann durch das System $\{b_\alpha; \alpha \in A\}$ von (F) -Halbnormen gegeben werden, wobei $b_\alpha(f) = \sup_{x \in X} q_\alpha(f(x))$ für

alle $f \in B(X, E)$. Ist E metrisierbar (lokalkonvex, normiert), so ist auch $B(X, E)$ metrisierbar (lokalkonvex, normiert).

$BT(X, E)$ versehen wir mit einer Topologie, die im lokalkonvexen Fall mit der von $B(X, E)$ zusammenfällt, i.a. aber echt stärker ist. Es ist dies die sog. Topologie der gleichmäßigen Konvergenz bzgl. der absolutkonvexen Hülle des Wertebereiches, die durch das gerichtete System $\{b_{\gamma_\alpha}; \alpha \in A\}$ von (F) -Halbnormen gegeben wird: Für $f \in BT(X, E)$ sei

$$b_{\gamma_\alpha}(f) = \sup \{q_\alpha(e); e \in \Gamma(f(X))\} =$$

$$\sup \left\{ q_\alpha \left(\sum_{i=1}^n \varrho_i f(x_i) \right); \varrho_i \in \mathbb{C}, x_i \in X (i=1, \dots, n), \sum_{i=1}^n |\varrho_i| \leq 1, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Dabei ist $b_{\gamma_\alpha}(f) \geq b_\alpha(f)$ für alle $\alpha \in A$ klar und $b_{\gamma_\alpha}(f) = b_\alpha(f)$, falls q_α eine Halbnorm ist, d.h. $q_\alpha(\lambda e) = |\lambda| q_\alpha(e)$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$, $e \in E$.

Von den Eigenschaften einer (F)-Halbnorm für b_{γ_α} ($\alpha \in A$ bel.):
 $\infty \rightarrow b_{\gamma_\alpha}(f) \geq 0$, $b_{\gamma_\alpha}(f+g) \leq b_{\gamma_\alpha}(f) + b_{\gamma_\alpha}(g)$, $b_{\gamma_\alpha}(\lambda f) \leq b_{\gamma_\alpha}(f)$
für $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| \leq 1$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_{\gamma_\alpha}(\frac{1}{n}f) = 0$ für beliebige f und $g \in B\Gamma(X, E)$ zeigen wir nur die letzte:

Wäre für $\alpha \in A$, $f \in B\Gamma(X, E)$ nicht $\lim_{n \rightarrow \infty} b_{\gamma_\alpha}(\frac{1}{n}f) = 0$, so müßte $\varepsilon > 0$

existieren, derart daß es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $k_n \geq n$ gibt mit $b_{\gamma_\alpha}(\frac{1}{k_n}f) \geq 2\varepsilon$. Dabei ist $b_{\gamma_\alpha}(\frac{1}{k_n}f) = \sup \{q_\alpha(e); e \in \Gamma(\frac{1}{k_n}f(X))\} = \sup \{q_\alpha(e); e \in \frac{1}{k_n}\Gamma(f(X))\} = \sup \{q_\alpha(\frac{1}{k_n}e); e \in \Gamma(f(X))\}$,

und man findet für jedes solche k_n ein $e_n \in \Gamma(f(X))$ mit $q_\alpha(\frac{1}{k_n}e_n) \geq \varepsilon$. Dann geht aber die Folge $\frac{1}{k_n}e_n$ in E nicht gegen 0 im Widerspruch zur Beschränktheit von $\Gamma(f(X))$, s. Köthe [24], §15, 6.(3).

$B\Gamma(X, E)$ ist also mit der angegebenen Topologie ein topologischer Vektorraum und metrisierbar, wenn E es ist. $B\Gamma(X, E)$ ist vollständig, wenn E vollständig ist; zum Beweis benötigen wir das folgende Resultat:

1. Lemma: Sei $\{f_\beta; \beta \in B\}$ ein gerichtetes System von Funktionen aus $B\Gamma(X, E)$, so daß für jedes $x \in X$ $\{f_\beta(x); \beta \in B\}$ in E gegen $f(x) \in E$ konvergiert. Ist dann $\{f_\beta; \beta \in B\}$ ein Cauchysystem in $B\Gamma(X, E)$, so konvergiert $\{f_\beta; \beta \in B\}$ gegen f in der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz bzgl. der absolutkonvexen Hülle des Wertebereiches.

Beweis: Konvergiert für $x \in X$ das System $\{f_\beta(x); \beta \in B\}$ in E gegen $f(x)$, so konvergiert wegen der Stetigkeit der Addition und der Multiplikation mit Skalaren in E für bel. $\varrho_i \in \mathbb{C}$,

$x_i \in X$ ($i=1, \dots, n; n \in \mathbb{N}$) das System $\{\sum_{i=1}^n \varrho_i f_\beta(x_i); \beta \in B\}$ in E gegen $\sum_{i=1}^n \varrho_i f(x_i)$. Da $\{f_\beta; \beta \in B\}$ ein Cauchysystem in $B\Gamma(X, E)$

ist, gibt es für jedes $\alpha \in A$ und jedes $\varepsilon > 0$ ein $\beta_\varepsilon \in B$ mit

$$q_\alpha \left(\sum_{i=1}^n \varrho_i (f_\beta(x_i) - f_{\beta'}(x_i)) \right) < \varepsilon \quad \text{für alle } \varrho_i \in \mathbb{C}, x_i \in X$$

($i=1, \dots, n$), $\sum_{i=1}^n |\varrho_i| \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$ und $\beta, \beta' \geq \beta_0$. (β_0 hängt nur von α und ε ab). Aus dem vorhergehenden folgt, daß

$$q_\alpha \left(\sum_{i=1}^n \varrho_i (f_\beta(x_i) - f(x_i)) \right) \leq \varepsilon \quad \text{für } \beta \geq \beta_0, \text{ d.h. es gilt auch}$$

$$b_{\mathcal{A}}(f_\beta - f) = \sup \left\{ q_\alpha \left(\sum_{i=1}^n \varrho_i (f_\beta(x_i) - f(x_i)) \right); \varrho_i \in \mathbb{C}, x_i \in X \right.$$

$$\left. (i=1, \dots, n), \sum_{i=1}^n |\varrho_i| \leq 1, n \in \mathbb{N} \right\} \leq \varepsilon$$

für alle $\beta \geq \beta_0$. w.z.b.w.

Ist nun $\{f_\beta; \beta \in B\}$ ein Cauchysystem in $B\Gamma(X, E)$, so ist $\{f_\beta\}$ erst recht Cauchysystem in $B(X, E)$ und konvergiert als solches, wenn E vollständig ist, gegen eine Funktion $f \in B(X, E)$. Nach 1. konvergiert $\{f_\beta\}$ dann in der Topologie von $B\Gamma(X, E)$ gegen f . Es bleibt noch zu zeigen, daß $f \in B\Gamma(X, E)$, d.h. daß $\Gamma(f(X))$ beschränkt in E ist; dann ist die Vollständigkeit von $B\Gamma(X, E)$ bewiesen.

Sei dazu U beliebige Nullumgebung in E . Es gibt eine kreisförmige Nullumgebung V in E mit $V+V \subset U$. Nach dem Beweis von 1. gibt es weiter zu jedem $\alpha \in A$ und $\varepsilon > 0$ ein $\beta = \beta(\alpha, \varepsilon) \in B$, so daß $\Gamma((f - f_\beta)(X)) \subset U_{\alpha, \varepsilon} = \{e \in E; q_\alpha(e) < \varepsilon\}$. Da $\{U_{\alpha, \varepsilon}; \alpha \in A, \varepsilon > 0\}$ eine Nullumgebungsbasis in E bildet, existiert $\beta_0 \in B$, derart daß $\Gamma((f - f_{\beta_0})(X)) \subset V$. Wegen der Beschränktheit von $\Gamma(f_{\beta_0}(X))$ existiert $\varrho > 0$ mit $\Gamma(f_{\beta_0}(X)) \subset \varrho V$. Dann gilt $\Gamma(f(X)) = \Gamma(((f - f_{\beta_0}) + f_{\beta_0})(X)) \subset \Gamma((f - f_{\beta_0})(X)) + \Gamma(f_{\beta_0}(X)) \subset V + \varrho V \subset \max(1, \varrho)U$, d.h. $\Gamma(f(X))$ ist in E beschränkt.

Sei $f \in B(X, E)$. Jetzt sagt man, f verschwindet im Unendlichen, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes $\alpha \in A$ eine kompakte Menge $K = K(f, \varepsilon, \alpha) \subset X$ existiert mit $q_\alpha(f(x)) < \varepsilon$ für alle $x \in X \setminus K$. Die Menge aller im Unendlichen verschwindenden Funktionen $f \in B(X, E)$ bildet den linearen Teilraum $B_0(X, E)$ von $B(X, E)$. Als Träger $\text{Tr } f$ einer Funktion $f \in B(X, E)$ bezeichnet man die abgeschlossene Hülle aller Punkte $x \in X$ mit $f(x) \neq 0$. Die Menge der Funktionen $f \in B(X, E)$ mit kompaktem Träger bildet den linearen Unterraum $B_c(X, E)$ von $B_0(X, E)$. Man definiert $B_0(X) := B_0(X, \mathbb{C})$ und $B_c(X) := B_c(X, \mathbb{C})$.

Bemerkung: Eine Funktion aus $B_0(X)$ verschwindet außerhalb einer δ -kompakten Menge, d.h. für $f \in B_0(X)$ exis-

tiert $S_f = \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m$ mit $K_m = K_m(f)$ kompakt in X ($X \setminus K_m \subset \{x \in X; |f(x)| < \frac{1}{m}\}$),

so daß $f(x) = 0$ für $x \notin S_f$. Dies bleibt ebenfalls noch für $f \in B_0(X, E)$ richtig, falls E metrisierbarer Raum ist.

$B_0(X, E)$ ist in der von $B(X, E)$ induzierten Topologie abgeschlossen (also vollständig für vollständiges E) und enthält $B_c(X, E)$ als dichten Unterraum.

Wir definieren noch $B_0\Gamma(X, E) = B_0(X, E) \cap B\Gamma(X, E)$,

$B_c\Gamma(X, E) = B_c(X, E) \cap B\Gamma(X, E)$ und versehen diese Räume mit der von $B\Gamma(X, E)$ induzierten Topologie. Für lokalkonvexe E gilt wieder $B_0\Gamma(X, E) = B_0(X, E)$ und $B_c\Gamma(X, E) = B_c(X, E)$, wobei auch die kanonischen Topologien der Räume übereinstimmen.

Außerdem sei $B_{\bullet\bullet}\Gamma(X, E)$ die Menge der Funktionen $f \in B\Gamma(X, E)$, für die zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem $\alpha \in A$ eine kompakte Menge $K = K(f, \varepsilon, \alpha) \subset X$ existiert mit $q_\alpha(e) < \varepsilon$ für alle $e \in \Gamma(f(X \setminus K))$. $B_{\bullet\bullet}\Gamma(X, E)$ ist linearer Teilraum von $B_0\Gamma(X, E)$. Für lokalkonvexe E fallen $B_{\bullet\bullet}\Gamma(X, E)$ und $B_0(X, E)$ zusammen. Weiterhin gilt: $B_0\Gamma(X, E)$ und $B_{\bullet\bullet}\Gamma(X, E)$ sind abgeschlossen in $B\Gamma(X, E)$ (daher vollständig für vollständiges E); $B_c\Gamma(X, E)$ ist dicht in $B_{\bullet\bullet}\Gamma(X, E)$.

$C(X, E)$ sei der lineare Raum aller stetigen E -wertigen Funktionen auf X , auch $C(X, \mathbb{R})$ wird eingeführt; $C(X) = C(X, \mathbb{C})$.

Definiere $CB(X, E) := C(X, E) \cap B(X, E)$ und $CB\Gamma(X, E) := C(X, E) \cap B\Gamma(X, E)$ sowie $CB(X) := CB(X, \mathbb{C})$. In den von $B(X, E)$ bzw. $B\Gamma(X, E)$ induzierten Topologien sind $CB(X, E)$ und $CB\Gamma(X, E)$ abgeschlossene lineare Unterräume von $B(X, E)$ bzw. $B\Gamma(X, E)$ (vgl. [23], Ch.2, 8.10).

Bemerkung: An dieser Stelle sollen zwei Beispiele dafür notiert werden, daß für nicht lokalkonvexe E

i.a. $CB\Gamma(X, E)$ ein echter Teilraum von $CB(X, E)$ ist.

1. Sei $E = l^p$ ($0 < p < 1$) und $X = \{x \in l^p; \|x\|_p \leq 1\}$, versehen mit der von l^p induzierten Topologie, so daß X zu einem vollständig regulären Raum wird. Die Einschränkung der Identität von l^p auf X ist dann ein Element von $CB(X, E)$, das nicht zu $CB\Gamma(X, E)$ gehört, weil $\{x \in l^p; \|x\|_p \leq 1\}$ in l^p zwar beschränkt, aber die konvexe Hülle unbeschränkt ist (vgl. [17], B.2.3.).

2. Es wurden verschiedene Beispiele von stetigen Funktionen auf kompakten Räumen mit Werten in einem nicht lokalkonvexen topologischen Vektorraum angegeben, die nicht im Riemannsches Sinne integrierbar sind. Betrachtet man etwa das einfache Beispiel von Gramsch [17], 2.7.3. einer stetigen Funktion auf dem Intervall $[0, \frac{\pi^2}{6}] \subset \mathbb{R}$ mit Werten in $l^{1/3}$, deren Riemannsche Zwischensummen divergieren, so stellt man fest, daß $f([0, \frac{\pi^2}{6}])$ zwar kompakt, aber dennoch $\Gamma(f([0, \frac{\pi^2}{6}]))$ unbeschränkt in $l^{1/3}$ ist. Es gibt also sogar kompakte Mengen in nicht lokalkonvexen Räumen, deren absolutkonvexe Hüllen nicht beschränkt sind; die angegebene Funktion f gehört zu $C([0, \frac{\pi^2}{6}], l^{1/3}) = CB([0, \frac{\pi^2}{6}], l^{1/3})$, aber nicht zu $CB\Gamma([0, \frac{\pi^2}{6}], l^{1/3})$.

Eine Funktion $f \in CB(X, E)$ verschwindet genau dann im Unendlichen, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes $\alpha \in A$ die abgeschlossene Menge $A_{\varepsilon, \alpha}(f) = \{x \in X; q_{\alpha}(f(x)) \geq \varepsilon\}$ kompakt in X ist. Man definiert $C_{\circ}(X, E) := C(X, E) \cap B_{\circ}(X, E)$ und $C_{\circ}(X) := C_{\circ}(X, \mathbb{C})$.

Hinweise: (1) Ist $f \in C_{\circ}(X)$, so verschwindet f außerhalb einer regulär δ -kompakten Menge (vgl. Buck [8], Lemma 1): $f(x) = 0$ für $x \notin S_f = \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m$ mit $K_m = \{x \in X; |f(x)| \geq \frac{1}{m}\}$ kompakt in X , $K_m \subset \overset{\circ}{K}_{m+1}$ ($m=1, 2, \dots$).

(2) Es kann der Fall eintreten, daß $C_{\circ}(X) = \{0\}$. Z.B. verschwindet jede Funktion aus $C_{\circ}(X)$ identisch für $X =$ rationale Zahlen des Intervalls $[0, 1]$ mit der von \mathbb{R} induzierten Topologie. Jedoch trennt für lokalkompaktes X bereits der Unterraum der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger die Punkte.

$C_{\circ}(X, E)$ ist abgeschlossener linearer Unterraum von $CB(X, E)$. Setze $C_{\circ}\Gamma(X, E) := C_{\circ}(X, E) \cap B\Gamma(X, E)$. Dies ist ein abgeschlossener linearer Unterraum von $CB\Gamma(X, E)$, der für lokalkonvexes E mit $C_{\circ}(X, E)$ zusammenfällt. In analoger Weise werden die Räume $C_{\circ\circ}\Gamma(X, E) = C(X, E) \cap B_{\circ\circ}\Gamma(X, E)$, $C_c(X, E) = C(X, E) \cap B_c(X, E)$, $C_c(X) = C_c(X, \mathbb{C})$ und $C_c\Gamma(X, E) = C(X, E) \cap B_c\Gamma(X, E)$ eingeführt. $C_{\circ\circ}\Gamma(X, E)$ ist abgeschlossener linearer Unterraum von $C_{\circ}\Gamma(X, E)$ und für lokalkonvexes E gleich $C_{\circ}(X, E)$.

$C_c(X, E)$ liegt in $C_o(X, E)$ dicht: Sei $f \in C_o(X, E)$ beliebig, $\varepsilon > 0$ und $\alpha \in A$ vorgegeben. Dann ist die Menge $K = \{x \in X; q_\alpha(f(x)) \geq \varepsilon\}$ genauso wie die abgeschlossene Hülle der offenen Umgebung $G = \{x \in X; q_\alpha(f(x)) > \frac{\varepsilon}{2}\}$ von K kompakt in X . Nach Kelley [22], Ch.5, Theorem 11 gibt es eine Funktion $\phi \in C(X, \mathbb{R})$ mit $0 \leq \phi(x) \leq 1$ für alle $x \in X$, $\phi(x) = 1$ auf K und $\phi(x) = 0$ außerhalb G . Setze $g(x) = \phi(x)f(x)$. Wegen der Stetigkeit der Multiplikation mit Skalaren in E ist g stetig auf X mit Werten in E , $g \in C_c(X, E)$, und es gilt $f(x) - g(x) = (1 - \phi(x))f(x)$, also $b_\alpha(f - g) = \sup_{x \in X} q_\alpha((1 - \phi(x))f(x)) = \sup_{x \in X \setminus K} q_\alpha((1 - \phi(x))f(x)) \leq \sup_{x \in X \setminus K} q_\alpha(f(x)) \leq \varepsilon$.

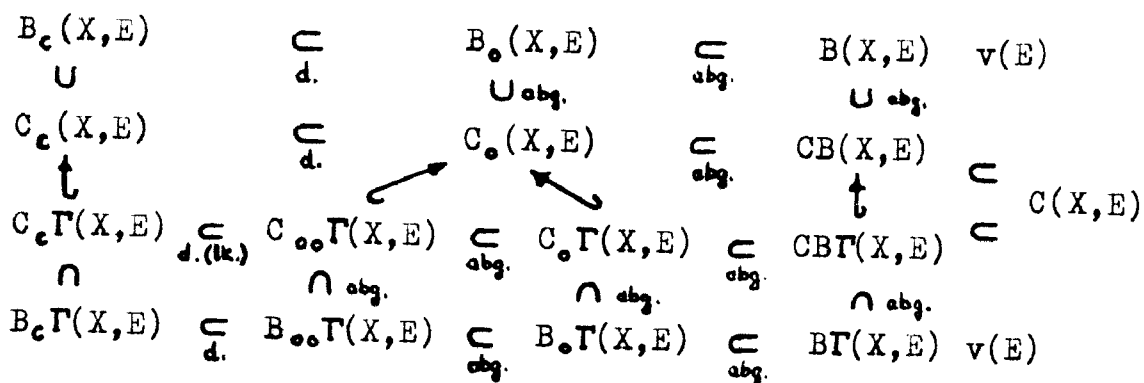
Ähnlich ist $C_c\Gamma(X, E)$ dichter linearer Unterraum von $C_{..}\Gamma(X, E)$, wenn X lokalkompakt ist: Sei $f \in C_{..}\Gamma(X, E)$ beliebig, $\varepsilon > 0$ und $\alpha \in A$ vorgegeben. Dann existiert eine kompakte Menge $K \subset X$ mit $q_\alpha(e) < \varepsilon$ für alle $e \in \Gamma(f(X \setminus K))$. Da X lokalkompakt ist, gibt es eine offene relativkompakte Umgebung G von K . Sei ϕ zu K und G wie oben gewählt und setze wieder $g(x) = \phi(x)f(x)$, $g \in C_c(X, E)$, wegen $\Gamma(g(X)) \subset \Gamma(f(X))$ sogar $g \in C_c\Gamma(X, E)$, und $b_\alpha(f - g) = \sup \{q_\alpha(e); e \in \Gamma((f - g)(X))\} = \sup \{q_\alpha(e); e \in \Gamma(((1 - \phi)f)(X \setminus K))\} \leq \sup \{q_\alpha(e); e \in \Gamma(f(X \setminus K))\} \leq \varepsilon$.

Was bisher bewiesen wurde, sei nun zusammengefaßt:

2. Satz: Das folgende Diagramm zeigt die Beziehungen zwischen den oben eingeführten Funktionenräumen.

Dabei bedeutet:

- $A \subset B$ A ist linearer Teilraum von B .
- $A \overset{a.b.}{\subset} B$ A ist abgeschlossener linearer Teilraum von B und trägt in kanonischer Weise die von B induzierte Topologie.
- $A \overset{c.}{\subset} B$ $A \subset B$ und A dicht
- $A \overset{d.(lk)}{\subset} B$ $A \subset B$ und A dicht, wenn X lokalkompakt ist
- $A \hookrightarrow B$ A ist linearer Teilraum von B mit stärkerer Topologie als der von B induzierten; im Falle eines lokalkonvexen E ist hier $A = B$ als topologischer Vektorraum.
- $A \vee(E)$ A ist vollständig, wenn E vollständig ist (analog für metrisierbar, lokalkonvex bzw. normiert).



Gewichtete Räume stetiger skalarer Funktionen wurden von Nachbin [26], 22. und Summers [39] eingeführt. Wir definieren im folgenden entsprechende Räume stetiger E-wertiger Funktionen auf X.

Sei V ein (nichtleeres) System reellwertiger, nichtnegativer, von oben halbstetiger (i.a. nicht identisch verschwindender) Funktionen auf X, das in dem Sinne gerichtet ist, daß zu $v_1, v_2 \in V$ und $\lambda \geq 0$ stets ein $v \in V$ existiert mit $\lambda v_1, \lambda v_2 \leq v$ (punktweise auf X). Dann heißt V eine Nachbin-Familie auf X.

Sind U und V zwei Nachbin-Familien auf X und existiert zu jedem $u \in U$ ein $v \in V$, derart daß $u \leq v$, dann schreibt man $U \leq V$. Dies ist eine reflexive und transitive Relation auf der Klasse aller Nachbin-Familien. Gilt $U \leq V$ und $V \leq U$, so wollen wir $U \approx V$ schreiben; \approx ist eine Äquivalenzrelation (vgl. Summers [39]).

3. Definition: Ist V Nachbin-Familie auf X, so bezeichnet man als zugehörige gewichtete Räume stetiger

E-wertiger Funktionen auf X die linearen Räume

$$CV(X,E) := \{f \in C(X,E); vf \in B(X,E) \text{ für alle } v \in V\},$$

$$CV\Gamma(X,E) := \{f \in C(X,E); vf \in B\Gamma(X,E) \text{ für alle } v \in V\} \subset CV(X,E),$$

die zusammenfallen, wenn E lokalkonvex ist. vf bezeichnet dabei die Funktion $(vf)(x) = v(x)f(x)$ von X in E.

4. Lemma: Die Systeme $\{bv_\alpha; \alpha \in A, v \in V\}$ und $\{bv_\alpha v; \alpha \in A, v \in V\}$:

$$bv_\alpha(f) = \sup_{x \in X} q_\alpha(v(x)f(x)) \text{ für alle } f \in CV(X,E),$$

$$bv_\alpha v(f) = \sup \{q_\alpha(e); e \in \Gamma((vf)(X))\} \text{ für alle}$$

$f \in CV\Gamma(X,E)$ sind gerichtete Systeme von (F)-Halbnormen auf $CV(X,E)$ bzw. $CV\Gamma(X,E)$. Sie geben auf diesen Räumen Topologien, die mit den linearen Strukturen verträglich sind und über-

einstimmen, wenn E lokalkonvex ist. Es ist für alle $v \in V$ und $\alpha \in A$: $b_{\gamma} v_{\alpha}(f) \geq b_{v_{\alpha}}(f)$ ($f \in CV\Gamma(X, E)$ beliebig), und $=$ gilt für $\alpha \in A$, wenn q_{α} (und damit $b_{v_{\alpha}}$) Halbnorm ist.

Beweis: Z.B. ist das System $\{b_{\gamma} v_{\alpha}; \alpha \in A, v \in V\}$ gerichtet, weil für $\alpha_1, \alpha_2 \in A$ und $v_1, v_2 \in V$ ein $\alpha \in A$ und $v \in V$ existieren mit $q_{\alpha_1}(e), q_{\alpha_2}(e) \leq q_{\alpha}(e)$ für alle $e \in E$ und $v_1, v_2 \leq v$. Aus $\Gamma((v_1 f)(X)), \Gamma((v_2 f)(X)) \subset \Gamma((v f)(X))$ folgt dann $b_{\gamma}(v_1)_{\alpha_1}(f), b_{\gamma}(v_2)_{\alpha_2}(f) \leq b_{\gamma} v_{\alpha}(f)$ für beliebige $f \in CV\Gamma(X, E)$. Daß etwa $\{b_{\gamma} v_{\alpha}; \alpha \in A, v \in V\}$ ein System von (F) -Halbnormen auf $CV\Gamma(X, E)$ ist, folgt daraus, daß das System $\{b_{\gamma}; \alpha \in A\}$ ein System von (F) -Halbnormen auf $B\Gamma(X, E)$ war und daß für jedes $v \in V$ und jedes $f \in CV\Gamma(X, E)$ gilt $b_{\gamma} v_{\alpha}(f) = b_{\gamma} v_{\alpha}(v f)$. w.z.b.w.

Hinweis: Ist $f \in CV\Gamma(X, E)$ und $v \in V$, so ist $\Gamma(v f(X))$ beschränkt in E . Die abgeschlossene Hülle $\Gamma = \Gamma_{f, v} = \overline{\Gamma(v f)(X)}$ ist wieder absolutkonvex und beschränkt in E ; das Minkowski-Funktional von Γ ist eine Norm auf der linearen Hülle $L = L_{f, v} = LH(\Gamma_{f, v}) \subset E$, mit der L normierter Raum - sogar Banachraum, wenn E quasivollständig ist - wird, dessen Topologie τ stärker als die von E induzierte ist (vgl. Horváth [21], 3, §5, Prop.6; diese gilt auch für beliebige - nicht notwendig lokalkonvexe - topologische Vektorräume). Für quasivollständiges E ist also jedem $f \in CV\Gamma(X, E)$ und jedem $v \in V$ ein Unterraum $L_{f, v}$ von E , Banachraum unter stärkerer Topologie τ , zugeordnet, so daß $v f$ eine beschränkte Funktion von X in $(L_{f, v}, \tau)$ ist.

Ist umgekehrt $f \in C(X, E)$ und existiert für jedes $v \in V$ ein Unterraum $L_{f, v}$ von E , der unter einer stärkeren Topologie τ als der von E induzierten zu einem normierten Raum wird, und mit der Eigenschaft, daß $v f$ eine beschränkte Funktion auf X mit Werten in $(L_{f, v}, \tau)$ ist, so zeigt man leicht $v f \in B\Gamma(X, E)$, d.h. $f \in CV\Gamma(X, E)$ (vgl. in diesem Zusammenhang Gramsch, Vogt [18], 1.).

Bemerkungen: 1. $CV(X, E)$ und $CV\Gamma(X, E)$ sind Moduln über $CB(X)$, d.h. für $f \in CV(X, E)$ (bzw. $g \in CV\Gamma(X, E)$) und $u \in CB(X)$ gilt $u f \in CV(X, E)$ (bzw. $u g \in CV\Gamma(X, E)$).

2. Ein System $\{f_{\beta}; \beta \in B\} \subset CV(X, E)$ konvergiert genau dann (in $CV(X, E)$) gegen $f \in CV(X, E)$, wenn für jedes $v \in V$ das System $\{v f_{\beta}\}$ in $B(X, E)$ gegen $v f$ konvergiert; analog für $CV\Gamma(X, E)$.

Die Topologie von $CV(X,E)$ bzw. $CV\Gamma(X,E)$ ist i.a. nicht Hausdorffsch. Sie ist aber bestimmt separiert (die Räume sind dann topologische Vektorräume und lokalkonvex, wenn E lokalkonvex ist), wenn zu jedem $x \in X$ ein $v \in V$ existiert mit $v(x) > 0$ (man schreibt nach Nachbin $V > 0$). Das folgende Lemma gibt eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $CV(X,E)$ bzw. $CV\Gamma(X,E)$ separiert ist (vgl. Summers [39]).

5. Lemma: Die Topologie von $CV(X,E)$ (bzw. $CV\Gamma(X,E)$) ist genau dann separiert, wenn es für jede offene Menge $U \subset X$, $U \neq \emptyset$, ein $v \in V$ gibt, dessen Restriktion auf U nicht identisch Null ist.

Beweis: 1. Sei $f \in CV(X,E)$ von 0 verschieden. Wir zeigen, daß $\alpha \in A$ und $v \in V$ existieren mit $bv_\alpha(f) \neq 0$. Da f von 0 verschieden ist, gibt es $x \in X$ mit $f(x) \neq 0$. Da f stetig auf X ist, gibt es eine offene Umgebung U von x mit $f(y) \neq 0$ für alle $y \in U$. Nach Voraussetzung existiert dann $v \in V$, das auf U nicht identisch 0 ist, d.h. für gewisses $y \in U$ $v(y) \neq 0$ und damit auch $v(y)f(y) \neq 0$. Daher gilt erst recht $bv_\alpha(f) \neq 0$ für gewisses $\alpha \in A$.

2. Ist die Topologie von $CV(X,E)$ bzw. $CV\Gamma(X,E)$ separiert und $U \neq \emptyset$ offen in X , so ist die Existenz von $v \in V$ mit $v \neq 0$ auf U zu zeigen. Seien $e \in E$, $e \neq 0$, und $x \in U$, dann gibt es wegen der vollständigen Regularität von X ein $\phi \in C(X, \mathbb{R})$ mit $0 \leq \phi \leq 1$, $\phi(x) = 1$ und $\phi(y) = 0$ für alle $y \in X \setminus U$. $g: x \rightarrow \phi(x)e$ gehört zu $C(X,E)$, $g \neq 0$, aber 0 außerhalb U . Ist $g \in CV(X,E)$ bzw. $CV\Gamma(X,E)$, so muß für gewisses $v \in V$ $vg \in B(X,E)$ bzw. $B\Gamma(X,E)$ gelten, d.h. $v \neq 0$ auf U . Wenn andererseits $g \in CV(X,E)$ bzw. $CV\Gamma(X,E)$, so kann ebenfalls nicht für jedes $v \in V$ die Gleichung $v \equiv 0$ auf U erfüllt sein; sonst wäre für jedes v die Funktion $vg \equiv 0$ auf ganz X , $bv_\alpha(g)$ bzw. $bv_\alpha(g) = 0$ für alle $\alpha \in A$ und alle $v \in V$: Dann wäre $CV(X,E)$ bzw. $CV\Gamma(X,E)$ nicht separiert. w.z.b.w.

In Zukunft werden wir nur noch solche Nachbin-Familien V betrachten, für die $CV(X,E)$ (bzw. $CV\Gamma(X,E)$) separierte Topologie besitzt, und setzen daher (nach 6.) voraus, daß V stets den Voraussetzungen von 5. genügt.

Sind andererseits gewisse Nachbin-Familien V fest vorgegeben, so bedeutet die Separiertheit von $CV(X,E)$ eine Ein-

schränkung an X und ist der Bedingung, daß X lokalkompakt sein soll, recht nahe (wie 6. zeigt). Ist U linearer Unterraum von $C(X)$, so ist die Familie U^+ der nichtnegativen Funktionen $\neq 0$ aus U (sofern diese nichtleer ist; ansonsten $U^+ = \{0\}$) eine Nachbin-Familie auf X ; dies trifft insbesondere auf $C_c^+(X)$, $C_0^+(X)$ und $CB^+(X)$ zu. Es gilt:

6. Satz: Ist V Nachbin-Familie auf X mit $C_c^+(X) \leq V \subset C_0^+(X)$, so ist $CV(X,E)$ bzw. $CV\Gamma(X,E)$ genau dann Hausdorffsch, wenn X einen dichten lokalkompakten topologischen Unterraum Y enthält (der daher offen in X ist). Der Beweis ist ähnlich wie im skalaren Fall bei Summers [40], Theorem 2.1.

Das folgende Lemma zeigt den Zusammenhang zwischen $CU(X,E)$ und $CV(X,E)$ (bzw. $CU\Gamma(X,E)$ und $CV\Gamma(X,E)$) für zwei verschiedene Nachbin-Familien U und V (vgl. Summers [39], Theorem 3.1 und Cor. 3.2).

7. Lemma: Seien U, V Nachbin-Familien auf X , und es gelte $U \leq V$. Dann ist:

- (1) $CV(X,E) \subset CU(X,E)$ und $CV\Gamma(X,E) \subset CU\Gamma(X,E)$,
- (2) die vom größeren auf dem kleineren Raum induzierte Topologie ist jeweils schwächer als die kanonische Topologie auf dem Unterraum.

Ist sogar $U \approx V$, erhält man $CU(X,E) = CV(X,E)$ und $CU\Gamma(X,E) = CV\Gamma(X,E)$ (Gleichheit als topologische Vektorräume). $CV(X,E)$ bzw. $CV\Gamma(X,E)$ ist metrisierbar, wenn E metrisierbar ist und zu V eine abzählbare Nachbin-Familie U existiert mit $U \approx V$.

Dies ist unmittelbar klar. Für die von ihm betrachteten Räume hat Summers [39], Theorem 3.3 (bei skalaren Funktionen) eine teilweise Umkehrung von 7. gezeigt.

wir wenden uns nun dem Problem zu, hinreichende Bedingungen für die Vollständigkeit der Räume $CV(X,E)$ und $CV\Gamma(X,E)$ herzuleiten. Es gilt ein analoges Vergleichskriterium wie in [39], Theorem 3.6:

8. Satz: Sei V Nachbin-Familie auf X . Dann ist $CV(X,E)$ bzw. $CV\Gamma(X,E)$ vollständig, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (1) E ist vollständig,
 - (2) es existiert eine Nachbin-Familie U auf X mit
- (a) $U \leq V$, $U > 0$, (b) $CU(X,E)$ bzw. $CUT(X,E)$ ist vollständig.

Beweis: Sei $\{f_\beta; \beta \in B\}$ ein Cauchysystem in $CV(X,E)$ bzw. $CV\Gamma(X,E)$. Nach 7.(2) ist $\{f_\beta\}$ erst recht Cauchysystem in $CU(X,E)$ bzw. $CUT(X,E)$. Wegen (2)(b) gibt es also eine Funktion $f \in CU(X,E)$ bzw. $CUT(X,E)$ - f ist insbesondere stetig -, so daß f_β in $CU(X,E)$ bzw. $CUT(X,E)$ gegen f konvergiert. Sei nun $v \in V$ beliebig; dann ist $\{vf_\beta; \beta \in B\}$ nach Definition der Topologie von $CV(X,E)$ bzw. $CV\Gamma(X,E)$ ein Cauchysystem in $B(X,E)$ bzw. $B\Gamma(X,E)$. Wegen der Vollständigkeit von E konvergiert vf_β gleichmäßig auf X bzw. gleichmäßig bzgl. der absolutkonvexen Hülle des Wertebereiches gegen eine Funktion $f_v \in B(X,E)$ bzw. $B\Gamma(X,E)$. Insbesondere konvergiert für beliebiges $x \in X$ das System $\{v(x)f_\beta(x); \beta \in B\}$ in E gegen $f_v(x)$. Zu $x \in X$ existiert nach (2)(a) ein $u \in U$ mit $u(x) > 0$. Daß f_β in $CU(X,E)$ bzw. $CUT(X,E)$ gegen f konvergiert, impliziert die Konvergenz von $\{u(x)f_\beta(x); \beta \in B\}$ in E gegen $u(x)f(x)$. Daher muß wegen der eindeutigen Bestimmtheit des Limes in E für jedes $x \in X$ gelten $f_v(x) = v(x)f(x)$, d.h. $f_v = vf$. Daraus erhält man $f \in CV(X,E)$ bzw. $CV\Gamma(X,E)$. Es ist nun klar, daß $\{f_\beta; \beta \in B\}$ in $CV(X,E)$ bzw. $CV\Gamma(X,E)$ gegen f konvergiert. q.e.d.

Dieses Vergleichskriterium sichert die Vollständigkeit von $CV(X,E)$ bzw. $CV\Gamma(X,E)$ für vollständiges E , X =vollständig regulärer Raum und $U \leq V$ mit $U = CB^+(X)$.

Um aber ein ähnliches Korollar wie [39], 3.7 anschließen zu können, müssen wir zunächst eine vektorwertige Form von Warner [46], 1., p.267 herleiten.

9. Definition: Ein Hausdorffraum X heißt k -Raum, wenn für eine Menge $M \subset X$ daraus, daß $M \cap K$ eine abgeschlossene Menge für jedes kompakte K in X ist, bereits die Abgeschlossenheit von M in X folgt.

Jeder lokalkompakte und jeder metrische Raum ist k -Raum (s. Kelley [22], Ch.7, Theorem 13).

Sei $W = \{\lambda x_K; \lambda > 0, K \text{ kompakt in } X\}$ (x_K , die charakteristische Funktion von K , ist von oben halbstetig sogar für jede abgeschlossene Menge K). Dann ist W Nachbin-Familie auf X , $W > 0$. $CW(X,E)$ stimmt als Menge mit $C(X,E)$ überein; die Topologie auf $CW(X,E)$ bezeichnet man als Topologie τ der kompakten Konvergenz.

10. Lemma: Sei W wie angegeben, X ein (vollständig regulärer) k -Raum und E vollständig. Dann ist $CW(X,E)$ bzw. $CW\Gamma(X,E)$ vollständig.

Beweis: Sei $\{f_\beta; \beta \in B\}$ Cauchysystem in $CW(X,E)$ bzw. $CW\Gamma(X,E)$ und K eine kompakte Menge in X . Für $f_{\beta K} = f_\beta|_K$ ist $\{f_{\beta K}; \beta \in B\}$ ein Cauchysystem in $CB(K,E)$ bzw. $CB\Gamma(K,E)$. Wegen der Vollständigkeit von E konvergiert $f_{\beta K}$ gleichmäßig auf K bzw. gleichmäßig bzgl. der absolutkonvexen Hülle des Wertebereiches gegen ein $f_K \in CB(K,E)$ bzw. $CB\Gamma(K,E)$. Definiere $f(x) = f_K(x)$ für $x \in K$, K kompakt in X . Dann ist f eine wohldefinierte Funktion von X in E , die auf jeder kompakten Menge K aus X mit f_K übereinstimmt und daher auf K stetig ist. Weil $X = k$ -Raum, ist f auf ganz X stetig; $f \in CW(X,E)$ bzw. $CW\Gamma(X,E)$, und f_β konvergiert gegen f . w.z.b.w.

Aus 8. und 10. folgert man:

11. Korollar: Ist X k -Raum, E vollständig und V Nachbin-Familie auf X mit $W \leq V$ für die oben definierte Familie W , so sind $CV(X,E)$ bzw. $CV\Gamma(X,E)$ vollständig.

Bemerkung: Man kann folgende allgemeinere Tatsache benutzen:

Ist X beliebiger topologischer Raum, E vollständiger topologischer Vektorraum und S ein System von Mengen in X mit der Eigenschaft, daß jedes $x \in X$ innerer Punkt einer Menge aus S ist. Dann ist $C(X,E)$ vollständig in der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den Mengen aus S (vgl. Schubert [33], II, 4.4.Satz 3 und 4.6.Satz 3).

Wenn man dies zusammen mit dem Vergleichskriterium anwendet, erhält man:

Ist X vollständig regulärer Raum, E vollständiger topologischer Vektorraum und V eine Nachbin-Familie auf X mit der Eigenschaft, daß zu jedem $x \in X$ eine abgeschlossene Umgebung $U = U(x)$ und $v = v(x,U) \in V$ existieren, so daß das Infimum der Restriktion von v auf U von 0 verschieden und jede Funktion aus $C(X,E)$ auf jedem U beschränkt ist. Dann ist $CV(X,E)$ vollständig.

Für lokalkompakten Raum X erhält man den oben betrachteten Fall aus dieser Verallgemeinerung, weil jeder Punkt in X eine relativkompakte Umgebung besitzt. Man vergleiche in diesem Zusammenhang auch Michael [25], Appendix D.

Hinweis: Gilt $0 < V \subset C^+(X)$, so gibt es für jedes $x \in X$ eine offene Umgebung U_x von x , $\varepsilon_x > 0$ und $v \in V$ mit $v(x) > \varepsilon_x$ auf U_x . Weil V Nachbin-Familie ist, folgert man daraus mit einem Kompaktheitsschluß $W \leq V$, d.h. $CV(X, E)$ ist für $X = k$ -Raum und vollständiges E vollständig.

Interessanter als $CV(X, E)$ und $CV\Gamma(X, E)$ sind im Hinblick auf die Anwendungen die in der nächsten Nummer definierten Unterräume.

12. Definition: Für eine Nachbin-Familie V auf X werden folgende gewichtete Räume stetiger E -wertiger Funktionen auf X definiert:

$$\begin{aligned} CV_\bullet(X, E) &= \{f \in C(X, E); v \in B_\bullet(X, E) \text{ für alle } v \in V\}, \\ CV_\bullet\Gamma(X, E) &= \{f \in C(X, E); v \in B_\bullet\Gamma(X, E) \text{ für alle } v \in V\}, \\ CV_{\bullet\bullet}\Gamma(X, E) &= \{f \in C(X, E); v \in B_{\bullet\bullet}\Gamma(X, E) \text{ für alle } v \in V\}. \end{aligned}$$

Dies sind Vektorräume über \mathbb{C} ; $CV_\bullet(X, E) \subset CV(X, E)$, $CV_{\bullet\bullet}\Gamma(X, E) \subset CV_\bullet\Gamma(X, E) \subset CV\Gamma(X, E)$. Wir versehen sie mit der von $CV(X, E)$ bzw. $CV\Gamma(X, E)$ induzierten Topologie; sie sind dann topologische Vektorräume (vgl. die Bemerkung nach 5.). Ist E lokalkonvex, so fallen $CV_\bullet(X, E)$, $CV_\bullet\Gamma(X, E)$ und $CV_{\bullet\bullet}\Gamma(X, E)$ als topologische Vektorräume zusammen. Setze $CV_\bullet(X) := CV_\bullet(X, \mathbb{C})$.

Hinweis: Im Hinblick auf 5. sei erwähnt, daß bei Summers [41], 3.1 ein Beispiel eines Raumes $CV_\bullet(X)$ angegeben wird, der separierte Topologie (stärker als die der punktweisen Konvergenz auf X) hat, ohne daß $V > 0$ gilt.

Bemerkungen: 1. $CV_\bullet(X, E)$, $CV_\bullet\Gamma(X, E)$ und $CV_{\bullet\bullet}\Gamma(X, E)$ sind Moduln über $CB(X)$.

2. Ist $v \in V$, $f \in CV_\bullet(X, E)$, so ist für beliebiges $\alpha \in A$ die Funktion $q_\alpha v f$, $(q_\alpha v f)(x) = q_\alpha(v(x)f(x))$ für jedes $x \in X$, von oben halbstetig auf X .

3. $f \in CV(X, E)$ gehört genau dann zu $CV_\bullet(X, E)$, wenn für jedes $v \in V$, jedes $\alpha \in A$ und jedes $\varepsilon > 0$ die abgeschlossene Menge $\{x \in X; q_\alpha(v(x)f(x)) \geq \varepsilon\}$ kompakt in X ist.

4. $q_\alpha v f$ nimmt für $v \in V$, $\alpha \in A$ und $f \in CV_\bullet(X, E)$ auf jeder nicht-leeren abgeschlossenen Teilmenge Y von X ein Maximum an (vgl. Nachbin [26], 22., Prop.3).

Beweis: 2. Zu zeigen ist: Für jedes $x \in X$ und jede Zahl $a > (q_\alpha v f)(x)$ gibt es eine Umgebung $U(x)$ mit $a > (q_\alpha v f)(y)$ für $y \in U(x)$.

Setze $\varepsilon = a - (q_\alpha v f)(x) > 0$. Zunächst findet man $\delta > 0$ mit $q_\alpha(\delta f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq v(x) + \delta$ gewählt. Wegen der Halbstetigkeit von v und der Stetigkeit von f existieren Umgebungen $U_1(x)$, $U_2(x)$ mit $v(y) < v(x) + \delta$ für $y \in U_1(x)$ und $q_\alpha(f(y) - f(x)) < \frac{\varepsilon}{2n}$ für $y \in U_2(x)$. Ist nun $y \in U(x) = U_1(x) \cap U_2(x)$, so gilt $q_\alpha(v(y)f(y)) \leq q_\alpha([v(x) + \delta] [(f(y) - f(x)) + f(x)]) \leq q_\alpha(n[f(y) - f(x)]) + q_\alpha(v(x)f(x)) + q_\alpha(\delta f(x)) < n \frac{\varepsilon}{2n} + q_\alpha(v(x)f(x)) + \frac{\varepsilon}{2} = (q_\alpha v f)(x) + \varepsilon = a$.

3. Dies folgt direkt aus 2.

4. Sei $\lambda = \sup_{x \in Y} q_\alpha(v(x)f(x))$. Wenn $\lambda = 0$, so ist nichts zu be-

weisen. Andernfalls ist nach 3. die nichtleere Menge

$K = \{x \in Y; q_\alpha(v(x)f(x)) \geq \frac{\lambda}{2}\}$ kompakt. Die nach 2. von oben halbstetige Funktion $q_\alpha v f$ nimmt auf K ihr Maximum an; dies ist auch ihr Maximum auf Y .

Man beachte: Ist f eine Funktion aus $CV_\bullet(X)$, dann ist f für jedes $v \in V$ eine δ -kompakte Menge $S_v = S_v(f)$ zugeordnet, so daß $v f$ außerhalb S_v identisch verschwindet. Ist V abzählbar, so verschwindet auch f (für $V > 0$) außerhalb einer δ -kompakten Menge.

13. Lemma: Seien U, V Nachbin-Familien auf X und gelte $U \leq V$; dann ist $CV_\bullet(X, E) \subset CU_\bullet(X, E)$, $CV_\bullet \Gamma(X, E) \subset CU_\bullet \Gamma(X, E)$, $CV_{\bullet\bullet} \Gamma(X, E) \subset CU_{\bullet\bullet} \Gamma(X, E)$.

Die Räume sind jeweils gleich (als topologische Vektorräume), wenn sogar $U \approx V$.

Dies ist analog zu 7.

14. Lemma: (1) $CV_\bullet(X, E)$ ist in $CV(X, E)$ abgeschlossen.
(2) $CV_\bullet \Gamma(X, E)$ und $CV_{\bullet\bullet} \Gamma(X, E)$ sind in $CV \Gamma(X, E)$ abgeschlossen.

Beweis: Sei etwa $\{f_\beta; \beta \in B\}$ ein in $CV(X, E)$ gegen $f \in CV(X, E)$ konvergentes System aus $CV_\bullet(X, E)$. Für jedes $v \in V$ konvergiert dann $\{v f_\beta; \beta \in B\}$ in $B(X, E)$ gegen $v f$. Da $B_\bullet(X, E)$ in $B(X, E)$ abgeschlossen ist und $\{v f_\beta\} \subset B_\bullet(X, E)$, liegt auch $v f$ in $B_\bullet(X, E)$, d.h. $f \in CV_\bullet(X, E)$.

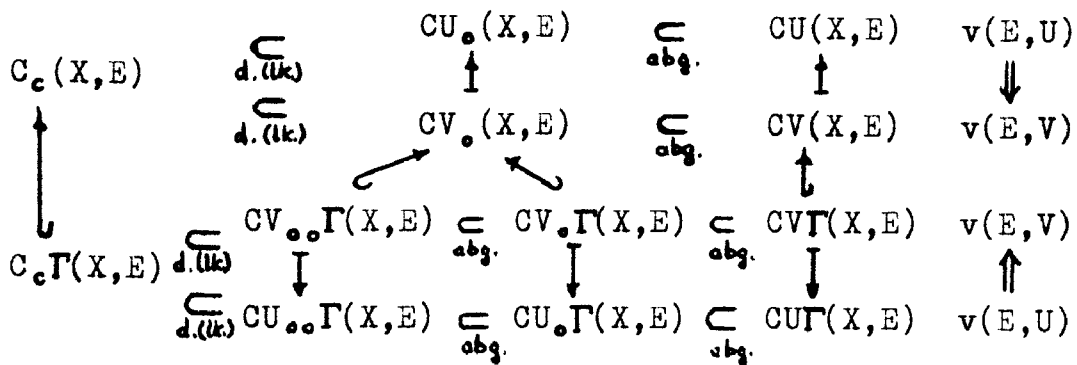
15. Lemma: Sei X lokalkompakt. Dann gilt:

- (1) $C_c(X, E)$ liegt dicht in $CV_0(X, E)$,
- (2) $C_c\Gamma(X, E)$ ist dicht in $CV_{00}\Gamma(X, E)$.

Ist $VcC^+(X)$, aber X nur vollständig regulär, so gilt (1) ebenfalls.

15. läßt sich ähnlich beweisen, wie vorn gezeigt wurde, daß $C_c(X, E)$ in $C_0(X, E)$ und für lokalkompaktes X $C_c\Gamma(X, E)$ in $C_{00}\Gamma(X, E)$ dicht liegt.

Wir erläutern die Ergebnisse wieder an einem Diagramm. Dabei sind U, V Nachbin-Familien auf X , und es gilt $U \leq V$. $A \mapsto B$ bedeute: A ist linearer Teilraum von B mit stärkerer Topologie als der induzierten.



Als besonders wichtig erweist sich im weiteren

16. Lemma: (1) Seien $v \in V$ und $f \in CV_0(X, E)$ beliebig. Dann ist $(vf)(X)$ präkompakt in E (also relativkompakt, wenn E quasivollständig ist).
- (2) Sei zusätzlich X lokalkompakt und $VcC^+(X)$. Dann ist $(vf)(X)$ für beliebiges E relativkompakt in E .

Beweis: Die Behauptung ist klar, wenn X kompakt ist. O.B.d.A. können wir im folgenden annehmen, daß X nicht kompakt.

Zu (1): Sei U eine beliebige Nullumgebung in E und wähle eine kreisförmige Nullumgebung \tilde{U} mit $\tilde{U} + \tilde{U} \subset U$. Nach Definition von $CV_0(X, E)$ gibt es eine kompakte Menge K in X mit $(vf)(X \setminus K) \subset \tilde{U}$. Da X nicht kompakt, gibt es $x_0 \in X \setminus K$, so daß $(vf)(X \setminus K) \subset (vf)(x_0) + U$. Auf K ist v beschränkt; mit $v(x) \leq M$ für alle $x \in K$ und $\tilde{K} = \overline{v(f(K))}$ = kreisförmige Hülle der kompakten Menge $f(K)$ ist $K' = M\tilde{K}$ kompakt, $B = (vf)(K) \subset K'$ relativ-, also auch präkompakt. Es gibt dann endlich viele Punkte e_i in B

($i=1, \dots, n$) mit $B \subset \bigcup_{i=1}^n (e_i + U)$. Somit gilt

$(vf)(X) \subset (vf)(K) \cup (vf)(X \setminus K) \subset \bigcup_{i=1}^{n+1} (e_i + U)$ für $e_{n+1} = (vf)(x_0)$.

Dies war zu zeigen.

Zu (2): Bezeichne $X_\infty = X \cup \{\infty\}$ die Alexandroff-Kompaktifizierung des lokalkompakten Raumes X und definiere $g(\infty) = 0$ und $g(x) = v(x)f(x)$ für $x \in X$. Da $x \rightarrow v(x)f(x)$ für $v \in C^+(X)$ stetig von X in E und $v \in B_0(X, E)$, ist g eine stetige Funktion von X_∞ in E . $(vf)(X) \subset g(X_\infty)$, und dies ist eine kompakte Menge in E . w.z.b.w.

Im Zusammenhang damit empfiehlt es sich, gewisse Teilräume von $CV(X, E)$ und $CV\Gamma(X, E)$ zu betrachten:

17. Definition: Unter den Voraussetzungen von 3. seien

$$CV^P(X, E) = \{f \in CV(X, E); (vf)(X) \text{ präkompakt in } E \\ \text{für alle } v \in V\},$$

$$CV^P\Gamma(X, E) = \{f \in CV\Gamma(X, E); \Gamma((vf)(X)) \text{ präkompakt für alle } v \in V\},$$

$$CV_{\bullet\bullet}^P\Gamma(X, E) = \{f \in CV_{\bullet\bullet}\Gamma(X, E); \Gamma((vf)(X)) \text{ präkompakt für alle } v \in V\},$$

versehen mit der von $CV(X, E)$ bzw. $CV\Gamma(X, E)$ induzierten Topologie.

Nach 16. gilt $CV_\bullet(X, E) \subset CV^P(X, E)$, und für lokalkonvexe E ist $CV_{\bullet\bullet}^P\Gamma(X, E) = CV_\bullet(X, E)$ (weil dann die absolutkonvexe Hülle einer präkompakten Menge in E wieder präkompakt).

Man beweist mit einem ähnlichen Schluß wie bei Kelley, Namioka [23], Ch.2, 8.3, daß die in 17. definierten linearen Räume in $CV(X, E)$ bzw. $CV\Gamma(X, E)$ abgeschlossen sind.

§ 2 Beispiele

Hier geben wir eine Reihe von Beispielen an.

1. Beispiel: Sei W die vor §1, 10. definierte Nachbin-Familie $W = \{\lambda \alpha_K; \lambda > 0, K \text{ kompakt in } X\}$. Dann gilt $W > 0$ und $CW(X, E) = (C(X, E), \tau)$ mit $\tau =$ Topologie der kompakten Konvergenz. $CW(X, E)$ ist separiert und für vollständige E und $X = k$ -Raum vollständig. Man sieht leicht $CW(X, E) = CW_\bullet(X, E)$ und $CW\Gamma(X, E) = CW_{\bullet\bullet}\Gamma(X, E)$.
2. Beispiel: Weniger interessant ist die Nachbin-Familie $W' = \{\lambda \alpha_E; \lambda > 0, E \text{ endliche Menge in } X\}$ mit $W' > 0$. Es gilt nämlich $CW'(X, E) = (C(X, E), p)$ mit der separierten Topologie p der punktweisen Konvergenz; der Raum ist selbst für vollständige E und kompakte X i.a. nicht vollständig. Man erhält $CW'(X, E) = CW'\Gamma(X, E) = CW'_{\bullet\bullet}\Gamma(X, E)$ als topologische Vektorräume, auch wenn E nicht lokalkonvex ist.
3. Beispiel: Sei $V = \{\lambda v; \lambda > 0\}$ mit einer stetigen Gewichtsfunktion v , für die $v(x) > 0$ für alle $x \in X$. Dann ist $CV(X, E)$ ein (separierter) topologischer Vektorraum, den man auch mit $Cv(X, E)$ bezeichnet (vgl. Nachbin [26], 22., Remark 2). Da auf jeder kompakten Menge $K \subset X$ die Funktion v ein Minimum größer als 0 annimmt, sind die Voraussetzungen von §1, 11. für $X = k$ -Raum und vollständiges E erfüllt, also $Cv(X, E)$ und $Cv_\bullet(X, E) (= CV_\bullet(X, E))$ vollständig; ist E normiert, so ist $Cv(X, E)$ ein normierter Raum.

Spezialfälle: 1. $X = \Omega$, eine offene Teilmenge des \mathbb{C}^n ($n \geq 1$),
und $v(x) = (1 + \|x\|)^k$ ($k \in \mathbb{Z}$ fest, $\|\cdot\|$ die ka-

nonische Norm des \mathbb{C}^n : $\|x\| = \sum_{i=1}^n |x_i|$).

2. $X = \mathbb{C}$ und $v(x) = \exp |x|$.

4. Beispiel: Sei $X = \mathbb{C}^n$ ($n \geq 1$), E lokalkonvex und
 $V = \{x \rightarrow \lambda(1 + \|x\|)^k; \lambda > 0, k = 0, 1, \dots\}$. Dann zeigt man $CV(X, E) = CV_\bullet(X, E)$; der Raum ist separiert und vollständig (sofern E vollständig ist).

Für jeden linearen Unterraum U von $C(X)$ stellt die Menge U^+ (vgl. §1, 6.) eine Nachbin-Familie auf X dar. Spezialfälle hiervon sind:

5. Beispiel: Sei $U=K(X)$ der lineare Raum der auf X konstanten Funktionen. Dann ist $V=U^+ > 0$, und man erhält sofort $CV(X,E)=CB(X,E)$ (Topologie δ der gleichmäßigen Konvergenz auf X). Analog ergeben sich $CV\Gamma(X,E)=CB\Gamma(X,E)$, $CV_\bullet(X,E)=C_\bullet(X,E)$, $CV_\bullet\Gamma(X,E)=C_\bullet\Gamma(X,E)$ und $CV_{\bullet\bullet}\Gamma(X,E)=C_{\bullet\bullet}\Gamma(X,E)$. Die Räume sind alle separiert und für vollständiges E vollständig.

6. Beispiel: Sei $V=C_\bullet^+(X)$; es läßt sich §1, 6. anwenden. Als Mengen stimmen $CV(X,E)$ und $CV_\bullet(X,E)$ mit $C(X,E)$ überein. In Summers [39], Ex. 3.4 ist gezeigt, daß X genau dann lokalkompakt ist, wenn $V \approx W$ (W wie in 1.), d.h. nach §1, 13. in diesem Fall $CV(X,E)=CV_\bullet(X,E)=(C(X,E), \tau)$.

Eines der wichtigsten Beispiele ist das folgende:

7. Beispiel: Sei X lokalkompakt und E lokalkonvex, sei $V=C_\bullet^+(X) > 0$. $CV_\bullet(X,E)$ stimmt als Menge mit $CB(X,E)$ überein (vgl. Buck [8], 2. Lemma 4). Das System $\{bv_\alpha; v \in C_\bullet^+(X), \alpha \in A\}$ von Halbnormen erzeugt auf $CB(X,E)$ die strikte Topologie β , $CV_\bullet(X,E)=(CB(X,E), \beta)$. §1, 14. liefert die Vollständigkeit von $CV_\bullet(X,E)$ für vollständiges E ; nach §1, 15. ist $C_\bullet(X,E)$ dicht in $CV_\bullet(X,E)$ (vgl. die Teile (ii) und (vi) von 3. Theorem 1 in [8]). Summers [40], 5.3 ff. zeigt, daß die Menge \tilde{V} aller nichtnegativen von oben halbstetigen Funktionen $\neq 0$ auf dem lokalkompakten Raum X , die im Unendlichen verschwinden, eine Nachbin-Familie auf X ist mit $\tilde{V} \approx C_\bullet^+(X)$; daraus ergeben sich Folgerungen für die strikte Topologie.

Bemerkung: Wegen der großen Bedeutung von 7. sei noch angefügt, daß sich Bucks Lemma auf lokal p_α -konvexe Räume E ausdehnen läßt (In einem solchen Raum existiert für jedes $\alpha \in A$ ein $0 < p_\alpha \leq 1$ mit $q_\alpha(\lambda e) = |\lambda|^{p_\alpha} q_\alpha(e)$ für alle $e \in E$, $\lambda \in \mathbb{C}$). Auch für solche E ist also $CV_\bullet(X,E)$ als Menge gleich $CB(X,E)$.

8. Beispiel: Sei $V'=CB^+(X) > 0$. Dann ist $CV'(X,E)=CB(X,E)$ und $V \approx V'$ für die in 5. mit V bezeichnete Nachbin-Familie.

Ein weiterer interessanter Fall, mit dem wir uns eingehender beschäftigen wollen, ist $V=C^+(X)$ für lokalkompaktes X .

9. Lemma: (1) Es gilt $C_c(X,E) \subset CV_0(X,E) \subset C_0(X,E)$; die Topologie von $CV_0(X,E)$ ist feiner als die der gleichmäßigen Konvergenz auf X .

(2) Ist zusätzlich $(E, \{p_\alpha; \alpha \in A\})$ lokalkonvex, so ist die (stets separierte) Topologie i des induktiven Limes auf $C_c(X,E)$ (vgl. Bourbaki [6], III, §1, p.40/41) feiner als die von $CV_0(X,E)$ induzierte.

Der Beweis von (2) verläuft analog zu Summers [40], 3.2.

Nun ist i.a. selbst $CV_0(X) \neq (C_c(X), i)$, denn die Vollständigkeit von $CV_0(X)$ ist immer gesichert, während Bourbaki [6], III, §1, Ex.2 ein Beispiel eines lokalkompakten (nicht parakompakten) Raumes X angibt, so daß $(C_c(X), i)$ nicht einmal quasivollständig ist. Andererseits erwähnt Schwartz [35], p.99, daß für $X = \mathbb{R}^n$: $CV_0(X) = (C_c(X), i)$. Unser Ziel ist es im folgenden, für gewisse stärkere Voraussetzungen an X und E die topologische Isomorphie $CV_0(X,E) = (C_c(X,E), i)$ herzuleiten (ohne größtmögliche Allgemeinheit anzustreben). Es darf dazu angenommen werden, daß X nicht kompakt ist.

10. Lemma: Sei X lokalkompakt und im Unendlichen abzählbar, $(E, \|\cdot\|)$ normierter Raum. Eine Funktion $f \in C(X,E)$ gehört genau dann zu $C_c(X,E)$, wenn für jedes $v \in V = C^+(X)$ gilt $vf \in B_0(X,E)$; d.h. als Menge ist $CV_0(X,E) = C_c(X,E)$.

Beweis: Es ist klar, daß für $f \in C_c(X,E)$ und $v \in C^+(X)$ gilt $vf \in B_0(X,E)$. Die Umkehrung ist zu zeigen, und nach 9. wissen wir bereits $f \in C_0(X,E)$.

Da X im Unendlichen abzählbar ist, gibt es eine Folge offener relativkompakter Mengen U_n in X mit $\overline{U_n} \subset U_{n+1}$ ($n=1,2,\dots$) und

$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ (vgl. Schubert [33], I, 7.7, Satz 2). Nehmen wir an,

für $f \in CV_0(X,E)$ sei $\text{Tr } f$ nicht kompakt. Für $n=1,2,\dots$ gibt es dann $x_n \in X \setminus \overline{U_n}$ mit $f(x_n) \neq 0$, $\lambda_n := \|f(x_n)\| > 0$; es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$. O.B.d.A. (bis auf Umnummerierung) sei $x_n \in U_{n+1} \setminus \overline{U_n}$.

Nun existiert eine Funktion $\varphi_n \in C_c(X, \mathbb{R})$ mit $0 \leq \varphi_n$, $\varphi_n(x_n) = \frac{1}{\lambda_n}$ und $\text{Tr } \varphi_n \subset \overline{U_{n+1}} \setminus U_n$, sei $v_n := \sum_{k=1}^n \varphi_k$. In der Topologie der kompakten Konvergenz von $C(X)$ konvergiert die Folge $\{v_n\}$ gegen eine Funktion $v \in C^+(X)$. Für v gilt $v(x_n) = \varphi_n(x_n)$, also

$\|v(x_n)r(x_n)\| = \varphi_n(x_n)\|f(x_n)\| = \frac{1}{\lambda_n} \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$), und
 $v f \in B(X, E) \supset B_0(X, E)$ im Widerspruch zur Voraussetzung w.z.b.w.

11. Lemma: Seien die Voraussetzungen wie in 10. und bezeichne
 $\{U_n; n=1, 2, \dots\}$ die dort angegebene Folge von
Mengen, $U_0 := \emptyset$. Definiere für $\varepsilon = \{\varepsilon_n; n=0, 1, 2, \dots\}$ ($\varepsilon_n > 0$
monoton fallend) $V_\varepsilon := \{f \in C_c(X, E); \sup_{x \in X \setminus U_n} \|f(x)\| \leq \varepsilon_n \text{ (} n=0, 1, \dots)\}$.

Durchläuft ε alle Folgen dieser Art, so bilden die Mengen V_ε
eine Nullumgebungsbasis in $(C_c(X, E), i)$ - hier i =Topologie
des strikten induktiven Limes, s. Bourbaki [6], III, §1, 1.,
p. 43 -.

Zum Beweis (vgl. Schwartz [35], 1., Prop.2, p.95): Sei V eine
beliebige Nullumgebungsbasismenge in i ; wenn

$$\tilde{V}_{\eta_n} := \{f \in C_c(X, E); \text{Tr } f \subset \overline{U_{n+2}}, \sup_{x \in X} \|f(x)\| \leq \eta_n\} \text{ und } \eta_n > 0$$

geeignet gewählt wird ($n=0, 1, \dots$), so läßt sich darstellen

$$V = \Gamma\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \tilde{V}_{\eta_n}\right) \text{ (auch die Umkehrung gilt). Ohne Einschränkung}$$

kann $\{\eta_n\}$ monoton fallend vorausgesetzt werden.

Somit ist jedes V_ε eine Nullumgebung in i , da $\bigcup_{n=0}^{\infty} \tilde{V}_{\eta_n} \subset V_\varepsilon$

für $\eta_n = \varepsilon_{n+2}$ und V_ε absolutkonvex.

Sei umgekehrt $V = \Gamma\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \tilde{V}_{\eta_n}\right)$ eine Nullumgebungsbasismenge in

$(C_c(X, E), i)$. $U_{n+2} \setminus \overline{U_n}$ ($n=0, 1, \dots$) bilden eine (lokalendliche)
offene Überdeckung von X ; da X parakompakt ist, gibt es eine
dieser Überdeckung untergeordnete Zerlegung der Eins (vgl.
Schubert [33], I.8.6, Satz 4 und 8.7, Satz 3): $\varphi_n \in C_c(X, \mathbb{R})$

mit $\varphi_n \neq 0$, $0 \leq \varphi_n \leq 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) = 1$ auf X , $\text{Tr } \varphi_n \subset U_{n+2} \setminus \overline{U_n}$ ($n=0, 1, \dots$).

Für $f \in C_c(X, E)$ gilt $f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} (2^{n+1} \varphi_n f)$ - die Summe ist in

Wirklichkeit endlich -, so daß wegen der absoluten Konvexi-
tät von V f zu V gehört, wenn nur jede Funktion $2^{n+1} \varphi_n f \in V$ ist.

Gilt aber $f \in V_\varepsilon$, $\varepsilon = \{\varepsilon_n; n=0, 1, \dots\}$, so ist $\text{Tr}(2^{n+1} \varphi_n f) \subset U_{n+2} \setminus \overline{U_n} \subset \overline{U_{n+2}}$

und $\sup_{x \in X} \|2^{n+1}(\varphi_n f)(x)\| = 2^{n+1} \sup_{x \in X \setminus U_n} \varphi_n(x) \|f(x)\| \leq 2^{n+1} \varepsilon_n \sup_{x \in X} \varphi_n(x) = k_n \varepsilon_n$

($n=0, 1, \dots$) mit $k_n = 2^{n+1} \sup_{x \in X} \varphi_n(x) > 0$. Wählt man die Folge ε_n

(monoton fallend) so, daß $k_n \varepsilon_n \leq \eta_n$ für jedes n , so folgt

$V_\varepsilon \subset V$ w.z.b.w.

12. Satz: Sei X lokalkompakt und im Unendlichen abzählbar, E normierter Raum. Dann gilt für $V=C^+(X)$:

$$CV_0(X,E)=(C_c(X,E),i); \text{ insbesondere ist } CV_0(X)=(C_c(X),i).$$

Beweis: Nach 9. und 10. bleibt nur zu zeigen, daß die Topologie von $CV_0(X,E)=C_c(X,E)$ (als linearer Raum) stärker als i ist. Dazu sei V eine beliebige Nullumgebungsbasismenge in i ; nach 11. $V=V_\varepsilon$ mit einer geeigneten (monoton fallenden) Folge $\varepsilon=\{\varepsilon_n; n=0,1,\dots\}$. Wir konstruieren eine Nullumgebung V' in $CV_0(X,E)$ mit $V' \subset V_\varepsilon$.

Sei $\varphi_n \in C_c(X, \mathbb{R})$ eine Funktion mit $0 \leq \varphi_n$, $\varphi_n(x) = \frac{1}{\varepsilon_n}$ auf $\overline{U_{n+1}} \setminus U_n$, $\text{Tr } \varphi_n \subset \overline{U_{n+2}} \setminus U_{n-1}$ ($n=0,1,\dots; U_{-1} := \emptyset$). Setze $v_n := \sum_{k=0}^n \varphi_k$. Es

gilt $\text{Tr } v_n \subset \overline{U_{n+2}}$, $v_n \geq 0$, $v_n(x) \geq \frac{1}{\varepsilon_k}$ auf $\overline{U_{k+1}} \setminus U_k$ ($k=0,1,\dots,n$).

In der Topologie der kompakten Konvergenz konvergiert $\{v_n\}$ gegen eine Funktion $v \in C^+(X)$ mit $v(x) \geq \frac{1}{\varepsilon_n}$ auf $X \setminus U_n$ ($n=0,1,\dots$).

Betrachte die Nullumgebung V' in $CV_0(X,E)$:

$V' = \{f \in C_0(X,E); \sup_{x \in X} v(x) \|f(x)\| \leq 1\}$. Gilt $f \in V'$, so gehört f zu

V_ε , weil $\frac{1}{\varepsilon_n} \sup_{x \in X \setminus U_n} \|f(x)\| \leq \sup_{x \in X \setminus U_n} v(x) \|f(x)\| \leq \sup_{x \in X} v(x) \|f(x)\| \leq 1$,

also auch $\sup_{x \in X \setminus U_n} \|f(x)\| \leq \varepsilon_n$ ($n=0,1,2,\dots$). q.e.d.

13. Satz: Sei X lokalkompakt und parakompakt, E normiert.

Dann gilt für $V=C^+(X)$ noch $CV_0(X,E)=C_c(X,E)$ als linearer Raum.

Beweis: Ein lokalkompaktes parakompaktes X ist topologische Summe von lokalkompakten \mathcal{L} -kompakten Räumen X_α (vgl. Dugundji [13], XI, 7.3), d.h. $X = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ mit X_α paarweise disjunkt, X_α

offen in X (die Topologie von X_α ist die von X induzierte für jedes $\alpha \in A$). Ist $f \in CV_0(X,E)$, so zeigen wir $f \in C_c(X,E)$.

Da $f_\alpha := f|_{X_\alpha} \in C(V_\alpha)_0(X_\alpha, E)$ mit $V_\alpha = C^+(X_\alpha)$, folgt aus 10.

$f_\alpha \in C_c(X_\alpha, E)$; $K_\alpha := \text{Tr } f_\alpha$ ist kompakt in X_α (also auch in X).

Nehmen wir an, es gäbe unendlich viele verschiedene $\alpha \in A$ mit $K_\alpha \neq \emptyset$, und sei etwa $\{\alpha_i; i=1,2,\dots\}$ eine Folge von paarweise verschiedenen α_i mit $x_i \in K_{\alpha_i}$, $\lambda_i := \|f(x_i)\| > 0$. Wegen der paarweisen Disjunktheit der X_{α_i} gibt es ein $v \in C^+(X)$ mit $v(x_i) = \frac{1}{\lambda_i}$

($i=1,2,\dots$); da jede kompakte Menge K in X nur mit endlich

vielen X_α nichtleeren Durchschnitt hat, existiert zu jedem solchen K ein Punkt $x \in X \setminus K$ mit $\|v(x)f(x)\| = v(x)\|f(x)\| = 1$. Das besagt $v \notin B_0(X, E)$ im Widerspruch zu $f \in CV_0(X, E)$. Also kann nur für endlich viele $\alpha = \alpha_j$ ($j=1, \dots, n$; $n \in \mathbb{N}$) $K_{\alpha_j} \neq \emptyset$ gelten,

$\text{Tr } f = \bigcup_{j=1}^n K_{\alpha_j}$ ist kompakt in X . q.e.d.

Hinweis: Bzgl. der Voraussetzung der Normiertheit von E vergleiche den Hinweis am Schluß von § 6.

Bemerkungen: Durch Zusammenfassen der zuletzt angegebenen Beispiele erhält man folgendes Schema für Nachbin-Familien $V=U^+$ mit U =linearer Unterraum von $C(X)$ und zugehörige $CV_0(X)$, wenn X lokalkompakt ist (und im letzten Fall X =parakompakt vorausgesetzt wird):

U	$C_c(X) \subset C_0(X) \subset CB(X) \subset C(X)$
$CV_0(X)$	$C(X) \supset CB(X) \supset C_0(X) \supset C_c(X)$

Ist X lokalkompakt und nicht kompakt, dann gibt es keinen linearen Unterraum U von $C(X)$, so daß mit $V=U^+$: $CV_0(X)=U$ (als linearer Raum). Es müßte nämlich sonst ein $v \in U^+$ existieren mit $v \notin C_0^+(X)$, aber $v^{\frac{1}{2}} = vv \in C_0^+(X)$, was zum Widerspruch führt. Dagegen gilt für $U=CB(X)$ und $V=U^+$: $CV(X)=U$.

Hinweis: Für $X=\mathbb{R}^n$ betrachtet L. Schwartz in [35] gewichtete Räume m -fach differenzierbarer Funktionen auf X ($0 \leq m \leq \infty$). Es ist interessant, für $m=0$ seine Räume H^m und ihre vektorwertigen Analoga $H^m(E)$ bzw. $\tilde{H}^m(E)$ (E =lokalkonvexer Raum) mit den hier eingeführten zu vergleichen: Schwartz läßt nur stetige Gewichtsfunktionen zu, und seine weiteren Bedingungen sind nicht von jedem unserer Beispiele erfüllt. Bei der Definition der Räume $CV(X, E)$ und $CV_0(X, E)$ werden dagegen Nachbin-Familien aus unstetigen (nur oberhalb stetigen) Funktionen zugelassen. Daß dies eine echte Verallgemeinerung darstellt, wird für $E=\mathbb{C}$ von Summers [40], 3.4 gezeigt: Dort ist ein Beispiel eines lokalkompakten X und eines Raumes $CV_0(X)$ mit $V \subset C^+(X)$ angegeben, so daß V zu keiner Nachbin-Familie U aus stetigen Funktionen äquivalent ist, d.h. daß die Topologie von $CV_0(X)$ nicht durch ein System stetiger Gewichtsfunktionen erzeugt werden kann.

Beispiele von Teilräumen gewichteter Räume stetiger Funktionen sind:

14. Beispiel: Für $X = \text{Gebiet in } \mathbb{C}$, E quasivollständiger lokal-konvexer Raum sei $H(X, E)$ der lineare Raum der auf X holomorphen Funktionen mit Werten in E (im Sinne von A. Grothendieck [19]). $HV(X, E)$ (bzw. $HV_0(X, E)$) bezeichne den Teilraum derjenigen auf X holomorphen E -wertigen Funktionen, die zu $CV(X, E)$ (bzw. $CV_0(X, E)$) gehören. Dieser Raum kann trivial werden, d.h. nur aus konstanten Funktionen oder der Null bestehen.

Für spezielle Nachbin-Familien V ist $HV(X, E) = (H^\infty(X, E), \delta) =$ Raum der auf X holomorphen und beschränkten E -wertigen Funktionen mit der Topologie δ der gleichmäßigen Konvergenz auf X , $HV_0(X, E) = (H^\infty(X, E), \beta)$, $HV(X, E) = HV_0(X, E) = (H(X, E), \tau)$. Diese drei Räume sind jeweils in $CV(X, E)$ bzw. $CV_0(X, E)$ abgeschlossen, wie sich aus [19], §4, 1. folgern läßt.

15. Beispiel: Sei $X = \mathbb{C}^n$ ($n \geq 1$). Im Falle $E = \mathbb{C}$ hat B.A. Taylor [42] für eine spezielle Klasse von Nachbin-Familien K Unterräume von $CK_0(X, E) = CK_0(\mathbb{C}^n)$ aus ganzen Funktionen betrachtet. Er nennt diese Räume $E(K)$; sie sind vollständig und enthalten alle Polynome (unter gewissen Bedingungen an K auch die Exponentialfunktionen). In [42] wird der duale Raum von $E(K)$ charakterisiert, und es werden hinreichende Bedingungen dafür hergeleitet, daß $E(K)$ tonneliert und bornologisch ist. In § 6 der Arbeit sind viele Beispiele angegeben; es ist leicht, analoge Räume vektorwertiger ganzer Funktionen einzuführen.

Nach dieser Aufzählung von Beispielen wenden wir uns damit im Zusammenhang stehenden Folgerungen und Fragen zu. Zunächst werden zwei Sätze von Buck über die strikte Topologie verallgemeinert.

16. Lemma: Sei V Nachbin-Familie auf dem lokalkompakten Raum X und gelte $V_1 := C_0^+(X) \leq V \leq CB^+(X) =: V_2$; sei E lokalkonvexer Raum. Dann sind in $CV_0(X, E)$ die beschränkten Mengen genau die in der Topologie δ der gleichmäßigen Konvergenz auf X beschränkten Teilmengen von $CV_0(X, E)$.

Beweis: Nach §1, 7. und den Beispielen 7. und 8. ist jede δ -beschränkte Menge erst recht in $CV_0(X, E)$ beschränkt und

jede in $CV_0(X, E)$ beschränkte Menge β -beschränkt. Die Behauptung folgt somit aus Theorem 1 (iii) von Buck [8].

Die Bedingung $C_0^+(X) \leq V$ in 16. kann nicht durch $C_c^+(X) \leq V$ ersetzt werden, da die Aussage des Lemmas für $V=C_c^+(X)$ falsch wird: Es gibt in der Topologie der kompakten Konvergenz beschränkte Mengen von stetigen Funktionen auf einem lokal-kompakten Raum X , die nicht in der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf X beschränkt sind.

17. Lemma: Seien X und E wie in 16., für V gelte aber dieses Mal $W \leq V \leq C_0^+(X)$. Dann fällt auf δ -beschränkten Mengen in $CV_0(X, E)$ die Topologie mit der Topologie τ der kompakten Konvergenz zusammen.

Beweis: Es gilt $CB(X, E) \subset CV_0(X, E) \subset C(X, E)$, und auf δ -beschränkten Mengen aus $CV_0(X, E)$ ist die Topologie von $CV_0(X, E)$ stärker als τ und schwächer als β . Da τ und β nach [8], Theorem 1.(iv) auf jeder δ -beschränkten Menge in $CB(X, E)$ zusammenfallen, folgt die Behauptung.

In 17. kann die Bedingung $V \leq C_0^+(X)$ nicht durch $V \leq CB^+(X)$ ersetzt werden, da die Aussage des Lemmas für $V=CB^+(X)$ i.a. falsch wird: Dorroh [12] bewies sogar, daß auf $CB(X)$ $\beta = \beta'$, der stärksten lokalkonvexen Topologie, die mit τ auf allen gleichmäßig beschränkten Mengen übereinstimmt.

Für $V=C_0^+(X)$ hat also der Raum $CV_0(X) = (CB(X), \beta)$ die dem Schwartzschen Axiom H_4) (vgl. [35], p.98) entsprechende Eigenschaft: Auf jeder beschränkten Menge in $CV_0(X)$ fällt die Topologie mit der von $(C(X), \tau)$ induzierten zusammen. Dagegen erfüllen viele der hier behandelten Räume $CV(X)$, $CV_0(X)$ nicht H_4), z.B. für $V=CB^+(X)$. Dorrohs Theorem beweist, daß jedes $CV(X)$ mit $C_0^+(X) \leq V \leq CB^+(X)$, dessen Topologie echt stärker als β ist, H_4) verletzt (Der zugehörige Raum $CV_0(X)$ muß wegen Summers [40], 5.4 dann echt in $CB(X)$ enthalten sein; Beispiele sind leicht zu konstruieren.).

Wir geben als nächstes eine hinreichende Bedingung für die Gleichheit der beiden Räume $CV(X, E)$ und $CV_0(X, E)$ an (vgl. dazu das Lemma bei Nakamura [28]):

18. Lemma: Sei $(E, \{q_\alpha; \alpha \in A\})$ topologischer Vektorraum, X vollständig regulärer Raum und genüge die Nachbin-Familie V auf X der Bedingung:

(*) Für jedes $v \in V$ gibt es $v' \in V$, derart daß gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ findet man eine kompakte Menge K in X mit der Eigenschaft, daß für alle $x \in X \setminus K$: $v(x) \leq \varepsilon v'(x)$.
Dann ist $CV(X, E) = CV_\bullet(X, E)$.

Beweis: Seien $f \in CV(X, E)$ und $v \in V$ beliebig vorgegeben; es ist zu zeigen, daß vf im Unendlichen verschwindet, d.h. sind $\alpha \in A$ und $\varepsilon > 0$ beliebig, so müssen wir eine kompakte Menge K in X finden mit $q_\alpha((vf)(x)) \leq \varepsilon$ für alle $x \in X \setminus K$.

Wähle nach (*) zu v ein $v' \in V$. Wegen $f \in CV(X, E)$ ist $(v'f)(X)$ beschränkt in E , d.h. es gibt $\lambda > 0$ mit

$\lambda \mathcal{C}((v'f)(X)) \subset U_{\alpha, \varepsilon} = \{e \in E; q_\alpha(e) \leq \varepsilon\}$ (\mathcal{C} =kreisförmige Hülle).

Nach (*) existiert dann zu $\varepsilon = \lambda > 0$ ein kompaktes K in X mit $v(x) \leq \varepsilon v'(x)$ für $x \in X \setminus K$, also $(vf)(X \setminus K) \subset \lambda \mathcal{C}((v'f)(X)) \subset U_{\alpha, \varepsilon}$.

w.z.b.w.

Die Bedingung (*) hängt nur von X und V , nicht aber von E ab. Für beliebiges X gilt bei der Nachbin-Familie $V = C_\bullet^+(X)$ stets $CV(X, E) = CV_\bullet(X, E)$; ist nämlich $v \in C_\bullet^+(X)$ beliebig, so kann mit $v' \in C_\bullet^+(X)$, definiert durch $v'(x) := [v(x)]^{1/2}$, eine Funktion gefunden werden, die der Bedingung (*) genügt. Insbesondere ist für lokalkompaktes X und lokalkonvexes E : $CV(X, E) = CB(X, E)$ (als linearer Raum). Dagegen sind, wenn X nicht kompakt ist, für $V = CB^+(X)$ $CV(X) = CB(X)$ und $CV_\bullet(X) = C_\bullet(X)$ stets verschieden.

Sind die Gewichtsfunktionen überall von Null verschieden, so ist (*) äquivalent zu:

(**) Zu jedem $v \in V$ gibt es $v' \in V$, derart daß die Funktion $\frac{v}{v'}$ im Unendlichen verschwindet.

(**) ist z.B. im Falle 4. gegeben.

Wir gehen noch kurz auf $V = C^+(X)$ ein: Für $X = \mathbb{C}^n$ sieht man wegen (*) $CV(X, E) = CV_\bullet(X, E)$ (E beliebig). Andererseits gilt sicher nicht $CV_\bullet(X) = CV(X)$ für jeden vollständig regulären Raum X , da es vollständig reguläre, pseudokompakte (vgl. Dugundji [13], Ch. XI, 3.7), nicht kompakte X gibt; in einem Raum dieser Art ist $C^+(X) = CB^+(X)$, aber $CV(X) = CB(X)$ verschieden von $C_\bullet(X) = CV_\bullet(X)$. Jeder lokalkompakte, abzählbar kompakte, aber nicht kompakte Raum X liefert ein Beispiel, s. Ex. 1 von [13], XI, 3.

19. Korollar; Sei X vollständig regulär, $V=C^+(X)$ und E topologischer Vektorraum.

(1) Existiert $f \in C^+(X)$ mit $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ (d.h. für jedes

$N \in \mathbb{N}$ gibt es eine kompakte Menge K_N in X mit $f(x) \geq N$ für alle $x \in X \setminus K_N$), so gilt $CV(X, E) = CV_\circ(X, E)$.

(2) (1) ist insbesondere erfüllt, wenn X lokalkompakt und im Unendlichen abzählbar ist. Für normiertes E erhält man dann $CV(X, E) = C_c(X, E)$.

Beweis: (2) folgt aus (1), weil im Beweis von 12. eine Funktion $f \in C^+(X)$ mit der in (1) geforderten Eigenschaft konstruiert wurde.

Zu (1): Existiert ein solches $f \in C^+(X)$, so wähle man zu $v \in V = C^+(X)$ die Funktion $v' \in V$: $v'(x) = v(x)f(x)$; damit ist (*) in 18. erfüllt. w.z.b.w.

Die Bedingung unter 19.(1) besagt für einen lokalkompakten Raum X , daß es eine positive stetige Funktion f auf X gibt, die auf die Alexandroff-Kompaktifizierung $X_\omega = X \cup \{\omega\}$ durch $f(\omega) = \infty$ stetig fortgesetzt werden kann. Dies ist nach Schubert [33], I.7.8, Satz 1 äquivalent dazu, daß f eine eigentliche Abbildung ist, d.h. jede kompakte Menge in \mathbb{R}_+ hat ein kompaktes Urbild bzgl. f . Daraus folgt sofort, daß X im Unendlichen abzählbar ist.

§ 3 Deltafunktionale und ϵ -Produkt

Zunächst leiten wir hinreichende Bedingungen dafür ab, daß jede präkompakte Menge stetiger Funktionen in einer gewichteten Topologie gleichstetig ist.

1. Lemma: (1) Sei X vollständig regulärer (Hausdorff-) Raum, E (separierter) topologischer Vektorraum und V eine Nachbin-Familie auf X mit der Eigenschaft, daß zu jedem $x \in X$ eine Umgebung $U=U(x)$ und dazu $v=v(x,U) \in V$ existieren, so daß das Infimum der Restriktion von v auf U von Null verschieden ist. Dann ist jede in $CV(X,E)$ bzw. $CV_{\circ}(X,E)$ präkompakte Menge K von Funktionen gleichstetig.
- (2) Sei X lokalkompakter Raum, E wie oben und V eine Nachbin-Familie auf X mit $W \leq V$. Dann ist jede in $CV(X,E)$ bzw. $CV_{\circ}(X,E)$ präkompakte Menge gleichstetig.

Bemerkung: Lemma 1. gilt analog für $CV\Gamma(X,E)$, $CV_{\circ}\Gamma(X,E)$ und $CV_{\circ\circ}\Gamma(X,E)$ anstelle von $CV(X,E)$ und $CV_{\circ}(X,E)$.

Beweis: (1) Es gilt $CV_{\circ}(X,E) \subset CV(X,E) \subset C(X,E)$, und die Topologie von $CV(X,E)$ ist stärker als die Topologie τ' der gleichmäßigen Konvergenz auf dem System $\mathcal{U} = \{U(x); x \in X\}$, das eine Überdeckung von X darstellt. Jede in $CV(X,E)$ präkompakte Menge K ist daher erst recht in $(C(X,E), \tau')$ präkompakt. Nach dem Satz von Ascoli (s. Bourbaki [5], Ch.X, §2, 5., Theorem 2) sind die Restriktionen der Funktionen aus K auf jeder Menge aus \mathcal{U} gleichstetig, d.h. die Funktionen aus K sind gleichstetig in jedem Punkt $x \in X$.

(2) Hier sind die Voraussetzungen von Teil (1) erfüllt, weil jeder Punkt $x \in X$ eine relativkompakte Umgebung U besitzt und die charakteristische Funktion $\chi_{\bar{U}}$ der Abschließung \bar{U} zu w gehört, $w \in V$. w.z.b.w.

Sei V eine Nachbin-Familie auf dem vollständig regulären Raum X (und sei ausnahmsweise in 2.(1) die Separiertheit von $CV(X)$ nicht vorausgesetzt). Für $x \in X$ definiere das Deltafunktional δ_x durch $\delta_x(f) = f(x)$ für alle $f \in CV(X)$; δ_x ist lineare Abbildung von $CV(X)$ in \mathbb{C} . Y sei linearer Unterraum von $CV(X)$ mit der induzierten Topologie (z.B. $Y = CV_{\circ}(X)$).

2. Lemma: (1) Wenn $V > 0$, so ist jedes δ_x Element von $CV'(X)$, d.h. stetig.

Ist umgekehrt $\{\delta_x; x \in X\} \subset CV'(X)$, dann ist die Topologie von $CV(X)$ separiert. Gilt $\delta_{x_0} \in CV'(X)$ bzw. $CV'_!(X)$ für $x_0 \in X$ und gibt es $f \in CV(X)$ bzw. $CV_0(X)$ mit $f(x_0) \neq 0$, so existiert ein $v \in V$, dessen Restriktion auf jede offene Umgebung von x_0 von Null verschieden ist.

(2) Ist $V > 0$, so ist die Abbildung $I: x \rightarrow \delta_x$ stetig von X in $Y'_c = Y'[\mathcal{C}(Y', Y)]$. I ist eineindeutig, wenn Y die Punkte trennt (d.h. für $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$, gibt es $y \in Y$ mit $y(x_1) \neq y(x_2)$)).

(3) I ist für $V > 0$ stetig von X in $Y'_c (=Y',$ versehen mit der Topologie $\lambda(Y', Y)$ der präkompakten Konvergenz, vgl. [2]) genau dann, wenn jede präkompakte Menge in $Y \subset CV(X)$ gleichstetig ist.

(4) $CV(X, E)$ (bzw. $CV\Gamma(X, E)$) hat für $V > 0$ separierte schwache Topologie, wenn E separierte schwache Topologie besitzt. Die Umkehrung gilt für $CV(X, E)$ bzw. $CV_0(X, E)$, wenn $CV(X)$ bzw. $CV_0(X)$ eine nicht identisch verschwindende Funktion enthält.

Bemerkung: Ist $V > 0$ und hat E separierte schwache Topologie, so besitzen nach 2.(4) erst recht $CV_0(X, E)$, $CV_0\Gamma(X, E)$ und $CV_{00}\Gamma(X, E)$ separierte schwache Topologie.

Beweis von 2.: Für (1) bis (3) sei jeweils $x_0 \in X$ ein beliebiger Punkt.

(1) Der erste Teil der Aussage ist klar; allgemeiner gilt: Gibt es zu $x_0 \in X$ ein $v \in V$ mit $v(x_0) > 0$, so gehört δ_{x_0} zu $CV'(X)$. Zum zweiten Teil: Für $\{\delta_x; x \in X\} \subset CV'(X)$ hat $CV(X)$ bereits separierte schwache Topologie. Ist für $x_0 \in X$ $\delta_{x_0} \in CV'(X)$ bzw. $CV'_!(X)$, so gibt es $C > 0, v \in V$ mit $|f(x_0)| = |\delta_{x_0}(f)| \leq C \sup_{x \in X} |v(x)f(x)|$ für alle $f \in CV(X)$ bzw.

$CV_0(X)$. Existiert $\tilde{f} \in CV(X)$ bzw. $CV_0(X)$ mit $\tilde{f}(x_0) \neq 0$, dann gibt es wegen der vollständigen Regularität von X (Konstruktion einer geeigneten Abschneidefunktion) zu einer beliebigen offenen Umgebung U von x_0 $f_U \in CV(X)$ bzw. $CV_0(X)$ mit $f_U(x_0) = \tilde{f}(x_0) \neq 0$ und $f_U(x) = 0$ außerhalb U . Da für jedes f_U $\sup_{x \in X} |v(x)f_U(x)| > 0$ sein muß, kann die Restriktion von v auf

keine offene Umgebung U von x_0 identisch Null sein.

(2) Eine Umgebung von δ_{x_0} in $I(X) \subset Y'$ hat die Form $U_{f_1, \dots, f_n; \varepsilon}(\delta_{x_0}) = \{\delta_x \in I(X); |f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon, i=1, \dots, n\}$ für gewisse $f_i \in Y \subset CV(X) \subset C(X)$ ($i=1, \dots, n$) und $\varepsilon > 0$. Aus der Stetigkeit der f_i auf X folgt die Stetigkeit von I in Y' .

(3) Sei in Y jede präkompakte Menge gleichstetig. Für $\varepsilon > 0$ und präkompaktes K in Y gibt es dann eine Umgebung $U = U(x_0, \varepsilon, K)$ von x_0 in X mit $|y(x) - y(x_0)| \leq \varepsilon$ für alle $x \in U$ und alle $y \in K$. Damit existiert zu jedem präkompakten K in Y und jedem $\varepsilon > 0$ eine Umgebung U von x_0 in X , deren Bild unter I in $\delta_{x_0} + \varepsilon K^\circ$ ($K^\circ =$ absolute Polare von K) liegt, d.h. als Abbildung in Y' ist I stetig im Punkt $x_0 \in X$.

Die Umkehrung folgt genauso einfach.

(4) Betrachte das im folgenden erläuterte Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} CV(X, E) & \longrightarrow & E & \xrightarrow{e'} & \mathbb{C} \\ & & & & \\ E & \longrightarrow & CV(X, E) & \xrightarrow{1} & \mathbb{C} \end{array}$$

1. Nach Definition der Topologie auf $CV(X, E)$ bzw. $CV\Gamma(X, E)$ und wegen $V > 0$ ist für festes $x \in X$ $f \rightarrow f(x)$ eine stetige lineare Abbildung von $CV(X, E)$ bzw. $CV\Gamma(X, E)$ in E . Daher ist für beliebiges $x \in X$ und $e' \in E'$ die Abbildung

$z(x, e'): f \rightarrow e'(f(x))$ Element von $(CV(X, E))'$ bzw.

$(CV\Gamma(X, E))'$. Ist $f_0 \in CV(X, E)$ bzw. $CV\Gamma(X, E)$, $f_0 \neq 0$, so gibt es $x_0 \in X$ mit $f_0(x_0) \neq 0$. Besitzt E separierte schwache Topologie, existiert $e'_0 \in E'$ mit $e'_0(f_0(x_0)) \neq 0$.

$z_0 = z(x_0, e'_0): f \rightarrow e'_0(f(x_0))$ ist Element von $(CV(X, E))'$ bzw. $(CV\Gamma(X, E))'$ und $z_0(f_0) \neq 0$; $CV(X, E)$ bzw. $CV\Gamma(X, E)$ haben separierte schwache Topologie.

2. Besitze umgekehrt $CV(X, E)$ bzw. $CV_0(X, E)$ separierte schwache Topologie und sei $e_0 \in E$, $e_0 \neq 0$, beliebig. Nach Voraussetzung enthält $CV(X)$ bzw. $CV_0(X)$ eine nicht identisch verschwindende Funktion f , und jede Funktion $f_e: x \rightarrow f(x)e$ ($e \in E$) gehört zu $CV(X, E)$ bzw. $CV_0(X, E)$, $f_{e_0} \neq 0$. Wegen der Separiertheit der schwachen Topologie existiert $l \in (CV(X, E))'$ bzw. $(CV_0(X, E))'$ mit $l(f_{e_0}) \neq 0$. Definiere e' durch $e'(e) = l(f_e)$ für beliebiges $e \in E$. Nach Definition der Topologie von $CV(X, E)$ ist die lineare Abbildung $e \rightarrow f_e$ von E in $CV(X, E)$ bzw. $CV_0(X, E)$ stetig; somit ist $e' \in E'$ mit $e'(e_0) \neq 0$ gefunden: E hat separierte schwache Topologie. w.z.z.w.

Hinweise: (1) Natürlich ist jedes δ_x Element von $CV'_0(X)$, falls nur die Topologie von $CV_0(X)$ stärker als die der punktweisen Konvergenz auf X ist. Das im Hinweis nach §1, 12. zitierte Beispiel von Summers zeigt also auch, daß aus $\{\delta_x; x \in X\} \subset CV'_0(X)$ i.a. nicht $V > 0$ folgt. Auf die damit verbundene mögliche Abschwächung der Voraussetzungen soll aber im weiteren nicht eingegangen werden.

(2) Der Beweis zeigt, daß 2.(3) auch in der folgenden lokalisierten Form gültig ist:

Sei $V > 0$. Dann ist die Abbildung I von X in Y'_c genau dann im Punkte $x_0 \in X$ stetig, wenn jede präkompakte Menge in $Y \subset CV(X)$ im Punkte x_0 gleichstetig ist.

3. Satz: (1) Betrachte folgende Voraussetzungen:

(a) Sei X vollständig regulär, $V > 0$ Nachbin-Familie auf X mit $V \subset B^+(X)$ und $Y = CV(X)$.

(b) Sei X lokalkompakt, $V > 0$ beliebige Nachbin-Familie auf X und gelte $C_c(X) \subset Y \subset CV(X)$.

Dann ist unter jeder der beiden Voraussetzungen (a) oder (b) die Umkehrabbildung $I^{-1}: \delta_x \rightarrow x$ der in 2.(2) definierten Abbildung I stetig von Y'_c in X , also I Homöomorphismus in Y'_c .

(2) (1) gilt insbesondere für $Y = CV_0(X)$ bei $V > 0$ und lokalkompaktem X . Für $W \leq V$ ist I dann auch Homöomorphismus in Y'_c .

Beweis: (1) Ist $V > 0$ und trennt Y die Punkte (dies gilt für $Y = CV(X)$ bei $V \subset B^+(X)$ und für $Y \supset C_c(X)$ bei lokalkompaktem X), so ist I nach 2.(2) stetig von X in Y'_c und eineindeutig, d.h. I^{-1} existiert als Abbildung von $I(X) \subset Y'$ in X . Sei $x_0 \in X$ beliebig und $U = U(x_0)$ eine feste offene Umgebung von x_0 (von der wir im Falle, daß X lokalkompakt, annehmen: \bar{U} kompakt). Dann ist eine Umgebung V von δ_{x_0} in $I(X)$ (bzgl. der Restriktion der Topologie von Y'_c) zu finden, so daß $I^{-1}(V) \subset U$; aus $\delta_x \in V$ soll also $x \in U$ folgen. Wegen der vollständigen Regularität von X gibt es eine Funktion $f \in C(X)$ mit $f(x_0) = 1$, $0 \leq f(x) \leq 1$ für alle $x \in X$ und $f(x) = 0$ für $x \in X \setminus U$ (Für lokalkompaktes X hat f kompakten Träger.). In beiden Fällen (a) und (b) gehört f zu Y . Nach Definition der Funktion folgt aus $\delta_x \in V = \{\delta_{x'}; x' \in X, |\delta_{x'}(f) - \delta_{x_0}(f)| = |f(x') - 1| < 1\}$ (V ist Umgebung von δ_{x_0} in $I(X) \subset Y'_c$): $f(x) \neq 0$, d.h. $x \in U$,

$I^{-1}(V) \subset U$.

(2) Dies ergibt sich aus 1.(2) und 2.(3). q.e.d.

Wegen 3.(2) fallen für lokalkompaktes X und $w \in V$ auf $I(X)$ die Topologien von $(CV_0(X))'_c$ und $(CV_0(X))'_c$ zusammen. Wenn V die Funktion, die auf X identisch 1 ist, enthält, so ist dies für beliebiges X trivial; auch für $(C(X), \tau)$ (X lokalkompakt) erhält man das Resultat leicht, s. Bourbaki [7], Ch.VI, §1, no.6, Remarque 1. Allgemeiner sind für $w \in V$ auf jeder Menge $I(K)$, K kompakt in X , die Topologien von $(CV_0(X))'_c$ und $(CV_0(X))'_c$ gleich, da $I(K)$ in einer gleichstetigen Menge von $CV'_0(X)$ liegt; die Abbildung I ist dann auf jeder kompakten Menge von X stetig in $(CV_0(X))'_c$. Wenn $X=k$ -Raum, so folgt daraus die Stetigkeit von I in $(CV_0(X))'_c$.

4. Hilfssatz: Seien X , V und Y wie vor 2. Für $V > 0$ ist das Bild $I(X)$ total in Y'_c .

Beweis: $I(X)^\perp = \{f \in Y; i(f) = 0 \text{ für alle } i \in I(X)\} = \{0\}$, also $I(X)^{\perp\perp} = Y'$, was gerade die Behauptung war (vgl. Horváth [21], 3, §3, Prop.3(e)).

Für das folgende benötigen wir schärfere Aussagen als 4. über gleichstetige Mengen im Dualraum Y' von $Y \subset CV(X)$ bzw. $CV_0(X)$.

5. Lemma: Seien X , Y und V wie vor 2., $V > 0$. Dann gibt es für jede gleichstetige Menge G in Y' ein $v \in V$, so daß feste skalare Vielfache von endlichen absolutkonvexen Linearkombinationen von gewichteten Deltafunktionalen (d.h. Funktionalen der Form $v(x)\delta_x$ für $x \in X$ mit $v(x) \neq 0$) schwach dicht in G liegen.

Beweis: Bekanntlich ist jede gleichstetige Menge G in Y' enthalten in der Polaren U° einer Nullumgebung U in Y . Bezeichne $v_\Delta := \{v(x)\delta_x; x \in X \text{ mit } v(x) \neq 0\} \subset Y'$, $U_{v,\varepsilon} := \{y \in Y; bv(y) \leq \varepsilon\} = \varepsilon U_{v,1}$ und sei o.B.d.A. $U = U_{v,\varepsilon}$ für geeignete $v \in V$, $\varepsilon > 0$. Es gilt $U_{v,1} = (v_\Delta)^\circ$, also $U^\circ = (\varepsilon U_{v,1})^\circ = \frac{1}{\varepsilon} (v_\Delta)^{\circ\circ}$. Nach dem Bipolarensatz (vgl. Horváth [21], 3, §3, Theorem 1) folgt die Behauptung.

Ohne Beweis geben wir zum besseren Verständnis einen Satz von Summers an (vgl. [40], Theorem 4.6), der ursprünglich Ausgangspunkt dieser Arbeit war (jetzt aber nicht mehr benötigt wird) und aus dem sich 5. mit Hilfe der Sätze von

Alaoglu-Bourbaki und Krein-Milman für den Spezialfall $Y=CV_0(X)$ sofort herleiten läßt:

6. Satz: Sei X lokalkompakt und $V \leq C^+(X)$. Dann gilt für $U_{v,1} = \{f \in CV_0(X); bv(f) \leq 1\}$: Die Menge $\mathcal{E}(U_{v,1}^\circ)$ der Extrempunkte von $U_{v,1}^\circ$ ist identisch mit $\{\lambda v(x) \delta_x; x \in X \text{ mit } v(x) \neq 0, \lambda \in \mathbb{C} \text{ mit } |\lambda| = 1\}$.

Hinweis: Summers [40], 3.5 zeigt, daß die Bedingung $V \leq C^+(X)$ nicht überflüssig ist, d.h. er gibt ein Beispiel eines Raumes X sowie eine nichtnegative oberhalb stetige Funktion v auf X an, für die kein $f \in C^+(X)$ existiert mit $v \leq f$.

Nach diesen Vorbetrachtungen über Deltafunktionale auf gewichteten Räumen stetiger skalarer Funktionen kehren wir zu vektorwertigen Funktionen zurück. Bei der Betrachtung vektorwertiger Funktionenräume haben sich das im lokalkonvexen Fall von L. Schwartz [36] eingeführte \mathcal{E} -Produkt und das injektive Tensorprodukt als geeignete Mittel erwiesen (vgl. [2], [3]).

7. Definition (vgl. [2]): Sei E topologischer Vektorraum mit dem gerichteten System $\{q_\alpha; \alpha \in A\}$ von (F) -Halbnormen, Y lokalkonvexer Raum mit dem gerichteten System $\{p_\beta; \beta \in B\}$ von Halbnormen. Das \mathcal{E} -Produkt $E \mathcal{E} Y$ von E und Y ist der topologische Vektorraum $\mathcal{L}_e(Y'_c, E)$ der stetigen linearen Abbildungen von Y'_c in E , versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf allen gleichstetigen Mengen von Y' . Das $\tilde{\mathcal{E}}$ -Produkt $E \tilde{\mathcal{E}} Y$ sei definiert als der topologische Vektorraum $\mathcal{L}_e(Y'_{c_0}, E)$ der stetigen linearen Abbildungen von Y'_{c_0} ($=Y'$, versehen mit der Topologie $\kappa(Y', Y)$ der gleichmäßigen Konvergenz auf allen absolutkonvexen kompakten Mengen von Y) in E , ebenfalls versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf allen gleichstetigen Mengen von Y' .

Hinweis: Der von L. Schwartz als " \mathcal{E} -Produkt" bezeichnete Raum ist für lokalkonvexes E topologisch isomorph unserem $\tilde{\mathcal{E}}$ -Produkt.

Die Topologie $\kappa(Y', Y)$ auf Y' ist stets mit der Dualität von Y und Y' verträglich. Für quasivollständiges Y hat man $Y'_c = Y'_{c_0}$, also $E \mathcal{E} Y = E \tilde{\mathcal{E}} Y$ (als topologische Vektorräume), während i.a. nur gilt: $E \tilde{\mathcal{E}} Y$ ist linearer und topologischer Unterraum von $E \mathcal{E} Y$.

Wir beschränken uns hier meist auf das ϵ -Produkt; viele der Eigenschaften des $\tilde{\epsilon}$ -Produktes sind ähnlich denen des ϵ -Produktes. Es werden nur solche Sätze für das $\tilde{\epsilon}$ -Produkt angegeben, die sich von den für das ϵ -Produkt hergeleiteten unterscheiden und für die Anwendungen von besonderem Interesse sind.

Der nächste Satz faßt die Ergebnisse von Schwartz [36] und [2] über das abstrakte ϵ -Produkt zusammen (Der Beweis von Teil (4) benutzt den Grothendieckschen Vollständigkeitssatz sowie den Satz von Banach-Dieudonné):

8. Satz: (1) Die (separierte) Topologie des topologischen Vektorraumes $E\epsilon Y$ wird durch das gerichtete System $\{q_{\alpha\beta}; \alpha \in A, \beta \in B\}$ von (F) -Halbnormen gegeben:

$$q_{\alpha\beta}(u) = \sup_{y' \in E_\beta^\circ} q_\alpha(u(y')) = \sup_{y' \in \Gamma_\beta} q_\alpha(u(y')) \text{ für alle } u \in E\epsilon Y$$

mit $E_\beta^\circ =$ Polare von $E_\beta := \{y \in Y; p_\beta(y) \leq 1\}$ und

$\Gamma_\beta := \Gamma(\tilde{E}_\beta) =$ absolutkonvexe Hülle der Menge $\tilde{E}_\beta = \tilde{E}(E_\beta^\circ)$ der Extrempunkte von E_β° .

(2) Ist q_α Halbnorm, so gilt $q_{\alpha\beta}(u) = \sup_{y' \in \tilde{E}_\beta} q_\alpha(u(y'))$,

und $q_{\alpha\beta}$ ist ebenfalls Halbnorm.

(3) Ist E lokalkonvex, so ist $E\epsilon Y$ lokalkonvex. Sind E und Y metrisierbar, so ist $E\epsilon Y$ metrisierbar. Sind E und Y normiert, so ist $E\epsilon Y$ normierter linearer Unterraum von $\mathcal{L}(Y'_\beta, E)$ mit der Norm $\|u\|_{\mathcal{L}(Y'_\beta, X)} = \sup_{\|y'\|_{Y'} \leq 1} \|u(y')\|_X$

($Y'_\beta = Y'$, versehen mit der Normtopologie).

(4) Ist (a) E vollständig und Y metrisierbar oder
ist (b) E lokalkonvex und sind E und Y vollständig,
so ist $E\epsilon Y$ vollständig.

Sind E und Y (B) -Räume, so ist $E\epsilon Y$ der mit der Operatornorm versehene Banachraum der linearen Abbildungen von Y' in E , deren Restriktion auf die Einheitskugel von Y' als Abbildung von $Y'[\mathcal{C}(Y', Y)]$ nach E stetig ist.

(5) Für lokalkonvexes E ist $E\tilde{\epsilon}Y$ beim Transponieren kanonisch topologisch isomorph zu $Y\tilde{\epsilon}E$.

Bemerkung: Da eine Abbildung $u \in E\epsilon Y$ auf jeder gleichstetigen Menge in Y' stetig von Y'_β in E ist, kann in 8.(1) bei der Darstellung von $q_{\alpha\beta}$ als Supremum E_β° durch eine schwach dichte Teilmenge ersetzt werden.

9. Lemma: (1) Sei E_2 linearer Unterraum des topologischen linearen Raumes E_1 , versehen mit der Relativtopologie, so ist $E_2 \varepsilon Y$ eingebettet in $E_1 \varepsilon Y$ und trägt die Einschränkung der Topologie dieses Raumes.

(2) Sei Y_2 linearer Unterraum (versehen mit der Relativtopologie) des lokalkonvexen Raumes Y_1 . Dann ist $E \varepsilon Y_2$ in $E \varepsilon Y_1$ eingebettet und trägt die von $E \varepsilon Y_1$ induzierte Topologie.

Beweis: Die algebraischen Eigenschaften wurden in [2], §1, 11. gezeigt. Nur die Behauptung über die Topologien - und hier nur (2) - ist noch zu beweisen.

Dazu benötigen wir den

Hilfssatz: Sei E lokalkonvexer Raum, Y linearer Unterraum von E . Die Topologie von E (bzw. Y) werde durch das gerichtete System $\{p_\alpha; \alpha \in A\}$ von Halbnormen gegeben, $V_\alpha = \{e \in E; p_\alpha(e) \leq 1\}$ (bzw. $U_\alpha = \{y \in Y; p_\alpha(y) \leq 1\}$) bezeichne die Einheitskugel bzgl. p_α in E (bzw. Y). Dann gilt: Ein Element $y' \in U_\alpha^\circ \subset Y'$ kann stets zu einem $l \in V_\alpha^\circ \subset E'$ fortgesetzt werden.

Beweis des Hilfssatzes: $y' \in Y'$ genügt als Element von U_α° der Ungleichung $|y'(y)| \leq p_\alpha(y)$ für die stetige Halbnorm p_α auf E und alle $y \in Y$. Nach dem Erweiterungssatz (Hahn-Banach, s. Köthe [24], §20, 1.(1)) gibt es eine Fortsetzung $l \in E'$ von y' mit $|l(e)| \leq p_\alpha(e)$ für alle $e \in E$, d.h. $l \in V_\alpha^\circ$. w.z.b.w.

Betrachte nun das im folgenden erklärte Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
 Y_2 & \xrightarrow[\text{1-1}]{i: \mathcal{C}} & Y_1 \\
 \\
 X & \xleftarrow{u} (Y_2)'_{\mathcal{C}} & \xleftarrow[\text{auf}]{Z} (Y_1)'_{\mathcal{C}}
 \end{array}$$

Ist $y'_1 \in Y'_1$, so sei $y'_{12} \in Y'_2$ die Einschränkung von y'_1 auf Y_2 und $Z: y'_1 \rightarrow y'_{12}$ die zugehörige lineare Abbildung von Y'_1 auf Y'_2 . Die Einbettung I von $E \varepsilon Y_2$ in $E \varepsilon Y_1$ wird gegeben durch $I: u_2 \rightsquigarrow (y'_1 \rightarrow u_2(y'_{12}))$, d.h. $I: u_2 \rightarrow u_2 \circ Z$ für alle $u_2 \in E \varepsilon Y_2$. Für die (F)-Halbnormen $q_{\alpha\beta}^{(4)}$ in $E \varepsilon Y_1$ bzw. $q_{\alpha\beta}^{(5)}$ in $E \varepsilon Y_2$

gilt nach 8.(1): $q_{\alpha\beta}^{(4)}(I(u_2)) = \sup_{y'_1 \in E_{\beta,1}^\circ} q_\alpha(u_2(y'_{12}))$,

$q_{\alpha\beta}^{(5)}(u_2) = \sup_{y'_2 \in E_{\beta,2}^\circ} q_\alpha(u_2(y'_2))$ mit $E_{\beta,1}^\circ = \text{Polare in } Y'_1 \text{ von}$

$E_{\beta,1} = \{y_1 \in Y_1; p_\beta(y_1) \leq 1\}$ bzw. $E_{\beta,2}^\circ = \text{Polare in } Y'_2 \text{ von}$

$E_{\beta, \lambda} = \{y_2 \in Y_2; p_\beta(y_2) \leq 1\}$. Nach dem Hilfssatz kann ein Element $y_2' \in E_{\beta, \lambda}^\circ \subset Y_2'$ stets zu einem $y_1' \in E_{\beta, \lambda}^\circ \subset Y_1'$ fortgesetzt werden; man erhält die Ungleichung $q_{\alpha\beta}^{(1)}(I(u_2)) \geq q_{\alpha\beta}^{(1)}(u_2)$. Umgekehrt gehört für beliebiges $y_1' \in E_{\beta, \lambda}^\circ \subset Y_1'$ die Linearform $Z(y_1') = y_{12}'$ zu $E_{\beta, \lambda}^\circ \subset Y_2'$; es gilt also auch $q_{\alpha\beta}^{(1)}(I(u_2)) \leq q_{\alpha\beta}^{(1)}(u_2)$. w.z.b.w.

Im folgenden soll das ε -Produkt gewichteter Räume stetiger Funktionen mit einem topologischen Vektorraum $(E, \{q_\alpha; \alpha \in A\})$ näher untersucht werden.

10. Lemma: Unter den Voraussetzungen von 5. seien die (F)-Halbnormen auf $E \in Y$ mit $q_{\alpha, v}$ ($\alpha \in A, v \in V$) bezeichnet. Dann gilt für jedes $u \in E \in Y$:

$q_{\alpha, v}(u) = \sup \{q_\alpha(a); a \in \Gamma W_v(u)\}$, wo $\Gamma W_v(u)$ die absolutkonvexe Hülle von $W_v(u) = \{v(x)u(\delta_x); x \in X \text{ mit } v(x) \neq 0\}$ angibt. Ist q_α Halbnorm, so $q_{\alpha, v}(u) = \sup \{q_\alpha(a); a \in W_v(u)\}$.

Dies folgt aus 5. und der Bemerkung nach 8.

11. Theorem: Sei V Nachbin-Familie auf dem lokalkompakten (allgemeiner: vollständig regulären k -) Raum X mit $W \leq V$, E topologischer Vektorraum und Y linearer und topologischer Unterraum von $CV(X)$. Betrachte die lineare Abbildung $A: u \rightsquigarrow (x \longrightarrow u(\delta_x))$ ($u \in E \in Y, x \in X$). Dann gilt:

- (1) A ist topologischer Isomorphismus von $E \in Y$ in $CV^p \Gamma(X, E)$.
- (2) Für $f \in A(E \in Y)$ und $v \in V$ stellt $\Gamma(vf)(X)$ eine relativkompakte Menge in E dar.
- (3) Ist $Y \subset CV_0(X)$, so gilt $A(E \in Y) \subset CV_{00}^p \Gamma(X, E)$.

Beweis: Wegen 9.(2) ist für (1) und (2) nur $Y = CV(X)$, für (3) $Y = CV_0(X)$ zu untersuchen.

1. Ist $u \in E \in CV(X)$ beliebig, so stellt $A(u): x \longrightarrow u(\delta_x)$ eine Funktion auf X mit Werten in E dar; für die Einbettung I von X in $CV'(X)$ aus 2.(2) gilt $A(u) = u \circ I$. Nach 2.(3) und 1.(2) (bzw. allgemeiner analog zu der Betrachtung vor 4.) ist I stetig von X in $(CV(X))'_c$, d.h. $A(u)$ ist als Zusammensetzung stetig von X in E .

2. Ist $v \in V$ beliebig, so gehört $\{v(x)\delta_x; x \in X \text{ mit } v(x) \neq 0\}$ zu der absolutkonvexen Menge $U_{v, 1}^\circ$. Bekanntlich (vgl. [2], §1, 5.) ist die Restriktion von u auf $U_{v, 1}^\circ$ stetig von

$CV'(X)[\delta(CV'(X), CV(X))]$ in E und das Bild $u(U_{v,1}^\circ)$ in E kompakt, $\Gamma((v[A(u)])(X)) = \Gamma\{v(x)u(\delta_x); x \in X \text{ mit } v(x) \neq 0\} \subset u(U_{v,1}^\circ)$ relativkompakt.

3. Für die (F) -Halbnormen in $E \in CV(X)$ und $CV\Gamma(X, E)$ gilt nach 10.: $b_{\alpha} v_{\alpha}(A(u)) = \sup \{q_{\alpha}(e); e \in \Gamma((v[A(u)])(X))\} = \sup \{q_{\alpha}(e); e \in \Gamma_{w_v}(u)\} = q_{\alpha, v}(u)$. Daraus liest man ab, daß A eine Einbettung von $E \in CV(X)$ in $CV\Gamma(X, E)$ und daß die Topologie auf $E \in CV(X)$ die gleiche ist wie auf $A(E \in CV(X))$ als Unterraum von $CV\Gamma(X, E)$.

4. Seien $\alpha \in A$, $\varepsilon > 0$, $v \in V$ beliebig; dann ist für (3) zu zeigen: Es existiert zu $u \in E \in CV_0(X)$ eine kompakte Menge K in X mit $q_{\alpha}(e) < \varepsilon$ für alle $e \in \Gamma((v[A(u)])(X \setminus K))$.

Betrachte die Nullumgebung $O_1 = \{e \in E; q_{\alpha}(e) < \varepsilon\}$ in E und die Restriktion u_v von u auf $U_{v,1}^\circ$. u_v ist stetig bzgl. der schwachen Topologie; es gibt eine $\delta(CV_0'(X), CV_0(X))$ -Nullumgebung O_2 , so daß das Bild von $O_2 \cap U_{v,1}^\circ$ unter u in O_1 liegt.

Mit $f_1, \dots, f_n \in CV_0(X)$, $n \in \mathbb{N}$, $\tau > 0$ hat man

$O_2 \cap U_{v,1}^\circ \supset \{\mu \in U_{v,1}^\circ; |\mu(f_i)| < \tau \ (i=1, \dots, n)\}$ (Diese Menge ist absolutkonvex.). Wegen $f_i \in CV_0(X)$ ($i=1, \dots, n$) gibt es kompakte Mengen K_i ($i=1, \dots, n$) mit $|v(x)f_i(x)| < \tau$ für $x \in X \setminus K_i$.

$K = \bigcup_{i=1}^n K_i$ ist in X kompakt, und für $x \in X \setminus K$ gilt $|v(x)\delta_x(f_i)| < \tau$

($i=1, \dots, n$). Für jedes $\mu \in \Gamma\{v(x)\delta_x; x \in X \setminus K\}$ ist also $\mu \in O_2 \cap U_{v,1}^\circ$, $u(\mu) \in O_1$, d.h. für jedes $e \in \Gamma((v[A(u)])(X \setminus K))$ erhält man $q_{\alpha}(e) < \varepsilon$; $A(u) \in CV_{\infty}^p\Gamma(X, E)$. q.e.d.

Analysiert man den Beweis von 11., so erhält man unter schwächeren Voraussetzungen einen Teil der Aussagen in abgeschwächter Form:

1. Ist X vollständig regulär und $V > 0$, dann kann die lineare Abbildung A definiert werden.

2. Ist in $CV(X)$ jede präkompakte Menge gleichstetig, so ist $A(u)$ für jedes $u \in E \in CV(X)$ stetig von X in E .

3. Ist E lokalkonvex und $CV(X)$ quasivollständig, so ist $u \in E \in CV(X)$ stetig von $CV'(X)[\delta(CV'(X), CV(X))]$ in $E[\delta(E, E')]$ (vgl. [2], §1, 5.). Mit 2.(2) ergibt sich: $A(u)$ ist für jedes $u \in E \in CV(X)$ stetig von X in $E[\delta(E, E')]$.

4. Es läßt sich für $V > 0$ immer $\Gamma((v[A(u)])(X))$ relativkompakt in E und bei $u \in E \in CV_0(X)$ auch $v[A(u)] \in B_{\infty}\Gamma(X, E)$ beweisen ($v \in V$).

Unter den Voraussetzungen von 10. ist ein Element $u \in E \in CV(X)$ bzw. $E \in CV_0(X)$ durch seine Werte auf $\{\delta_x; x \in X\}$ festgelegt. Sind X, V und E wie in 11. und hat $f \in CV^p \Gamma(X, E)$ bzw. $CV_0^p \Gamma(X, E)$ die Eigenschaft, daß $\tilde{B}(f): \delta_x \longrightarrow f(x)$ ($x \in X$) zu einer (eindeutig bestimmten) stetigen linearen Abbildung $B(f): (CV(X))'_c \longrightarrow E$ bzw. $(CV_0(X))'_c \longrightarrow E$ fortgesetzt werden kann, so gehört f zu $E \in CV(X)$ bzw. $E \in CV_0(X)$.

Eine einfache Anwendung von [2], §1, 5. und Horváth [21], 3, §11, Lemma 1 (das auch für nicht notwendig lokalkonvexen Bildraum richtig bleibt) zeigt dann:

12. Lemma: Seien die Voraussetzungen von 11. erfüllt und sei $CV(X)$ metrisierbar und E vollständig oder sei E vollständig und lokalkonvex; sei $f \in CV^p \Gamma(X, E)$ bzw. $CV_0^p \Gamma(X, E)$. Ist dann die Restriktion $L_{v, \lambda}(f)$ der linearen

Abbildung $\tilde{L}(f): \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{x_i} \longrightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$ ($n \in \mathbb{N}$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $x_i \in X$,

$i=1, \dots, n$) auf $\lambda \Gamma\{v(x) \delta_x; x \in X \text{ mit } v(x) \neq 0\}$ für jedes $v \in V$ und

jedes $\lambda > 0$ stetig in 0 von $\delta(CV'(X), CV(X))$ oder $\lambda(CV'(X), CV(X))$ bzw. $\delta(CV_0'(X), CV_0(X))$ oder $\lambda(CV_0'(X), CV_0(X))$ in E , so gehört f zu $E \in CV(X)$ bzw. $E \in CV_0(X)$.

Bemerkung: In 12. kann statt $f \in CV^p \Gamma(X, E)$ bzw. $CV_0^p \Gamma(X, E)$ nur $f \in C(X, E)$ gefordert werden. wenn jetzt noch die Voraussetzung $W \leq V$ durch $V > 0$ ersetzt wird (X =vollständig regulär), dann zeigt man, daß $B(f) \in E \in CV(X)$ bzw. $E \in CV_0(X)$ gilt, wenn E lokalkonvex und entweder $CV(X)$ bzw. $CV_0(X)$ - falls dieser Raum nicht schon metrisierbar - vollständig oder die Stetigkeit von $B(f)$ von $CV'(X)[\delta(CV'(X), CV(X))]$ bzw. $CV_0'(X)[\delta(CV_0'(X), CV_0(X))]$ in $E[\delta(E, E')]$ anderweitig bekannt ist.

§ 4 Tensorprodukt und Approximationssätze

Wir gehen über zu dem zweiten wichtigen Hilfsmittel bei der Behandlung vektorwertiger Funktionen, dem sog. injektiven ("bigleichstetigen" oder ϵ -) Tensorprodukt.

1. Definition: Sei E topologischer Vektorraum und Y lokal-konvex. Dann definiert die lineare Abbildung

$$l: u = \sum_{i=1}^n e_i \otimes y_i \longmapsto (y' \longmapsto \sum_{i=1}^n e_i y'(y_i)) \quad (n \in \mathbb{N}, e_i \in E, y_i \in Y,$$

$i=1, \dots, n, y' \in Y')$ eine Einbettung des algebraischen Tensorproduktes $E \otimes Y$ von E und Y in $E \epsilon Y$ (vgl. [2], §2, 1.). Die auf $E \otimes Y$ von $E \epsilon Y$ induzierte Topologie wird als injektive Topologie bezeichnet. $E \otimes_\epsilon Y$ sei der topologische Vektorraum $E \otimes Y$, versehen mit der injektiven Topologie. Die Vervollständigung von $E \otimes_\epsilon Y$ heißt injektives (topologisches) Tensorprodukt von E und Y , und man schreibt $E \check{\otimes}_\epsilon Y$.

Die in 2. und 3. folgenden Ergebnisse (vgl. Schwartz [36] und Gramsch, Vogt [18]) sind in [2] bewiesen:

2. Satz: (1) $E \otimes_\epsilon Y$ ist isomorph dem linearen Unterraum von $E \epsilon Y$ aller von $Y' [\mathcal{D}(Y', Y)]$ nach E stetigen

linearen Operatoren von endlichem Rang.

(2) $E \check{\otimes}_\epsilon Y$ ist vollständiger topologischer Vektorraum. Die Topologie wird von dem auf $E \check{\otimes}_\epsilon Y$ fortgesetzten System $\{q_{\alpha\beta}; \alpha \in A, \beta \in B\}$ (vgl. §3, 8.(1)) von (F)-Halbnormen gegeben.

(3) Ist E lokalkonvex, dann auch $E \check{\otimes}_\epsilon Y$. Sind E und Y metrisierbar, so ist $E \check{\otimes}_\epsilon Y$ metrisierbar.

(4) Ist E vollständig, so kann $E \check{\otimes}_\epsilon Y$ als linearer Teilraum von $L(Y', E)$ (= lineare Abbildungen von Y' in E) aufgefaßt werden. Die Elemente von $E \check{\otimes}_\epsilon Y$ sind, auf gleichstetige Mengen in Y' eingeschränkt, stetige Abbildungen von $Y' [\mathcal{D}(Y', Y)]$ in E .

(5) Ist (a) E lokalkonvex und sind E und Y vollständig oder ist (b) E vollständig und Y metrisierbar, dann ist $E \check{\otimes}_\epsilon Y$ die Abschließung von $E \otimes Y$ in $E \epsilon Y$. Sind E und Y (F)- bzw. (B)-Räume, so auch $E \check{\otimes}_\epsilon Y$.

Über die Beziehung zwischen $E \otimes_\epsilon Y$ und $Y \otimes_\epsilon E$ bzw. $E \check{\otimes}_\epsilon Y$ und $Y \check{\otimes}_\epsilon E$ gilt beim Transponieren ein ähnlicher Isomorphiesatz wie §3, 8.(5) unter denselben Voraussetzungen (E lokalkonvex).

3. Satz: (1) Ist Y quasivollständig und liegt $Y \otimes Y'$ dicht in $Y \otimes Y'_c$, so genügt Y der (Grothendieckschen) Approximationseigenschaft.
- (2) Besitzt Y die Approximationseigenschaft, so ist $Y \otimes E$ dicht in $Y \otimes E$ für alle quasivollständigen lokalkonvexen Räume E .
- (3) Sind E und Y lokalkonvex und vollständig und genügt einer von beiden der Approximationseigenschaft, dann ist $E \otimes Y$ identisch $E \otimes_c Y$.
- (4) Ist Y quasivollständiger lokalkonvexer Raum, E beliebiger topologischer Vektorraum und genügt Y'_c der Approximationseigenschaft, dann liegt $E \otimes Y$ dicht in $E \otimes Y$. Ist zusätzlich E vollständig und Y metrisierbar, so gilt $E \otimes_c Y = E \otimes Y$.

Teil (1) des nächsten Satzes ist bei Schwartz [36], §1, Prop.11, p.46/47 bewiesen:

4. Satz: (1) Der quasivollständige lokalkonvexe topologische Vektorraum Y besitzt genau dann die Approximationseigenschaft, wenn der topologische lineare Unterraum $Y \otimes_c E$ von $Y \otimes E$ dicht in $Y \otimes E$ ist für jeden lokalkonvexen Raum E .
- (2) Ist Y quasivollständiger lokalkonvexer Raum und ist für jeden lokalkonvexen Raum E $E \otimes Y$ dicht in $E \otimes Y$, so erfüllt Y die Approximationsbedingung.

Bei Schwartz [36], Préliminaires, Prop.4, Cor. 1 und 2 sind Beispiele von Räumen Y angegeben, derart daß Y'_c die Approximationseigenschaft besitzt. Da dies im Zusammenhang mit 3. (4) von Interesse ist, schreiben wir noch eine hinreichende Bedingung dafür auf:

5. Lemma: Sei Y quasivollständiger lokalkonvexer Raum - so daß $(Y'_c)'$ als linearer Raum $= Y$ -, und sei Y'_c quasivollständig (Dies gilt insbesondere für tonnelierte Y , s. Schaefer [32], IV, §6, 6.1).

- (1) Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:
(A) $Y \otimes Y'$ liegt dicht in $Y \otimes Y'_c$ (woraus nach 3.(1) folgt: Y besitzt die Approximationseigenschaft.) und
(B) $Y' \otimes Y$ liegt dicht in $Y'_c \otimes Y$.
- (2) Besitzt Y die Topologie γ in der Bezeichnungsweise von [36], d.h. $(Y'_c)'_c = Y$ als topologischer Vektorraum, so folgt aus (B): Y'_c besitzt die Approximationseigenschaft.

Bemerkung: Unter den Voraussetzungen von 5.(1) besitzt Y die Topologie γ stets, wenn es Mackey-Raum ist; notwendig und hinreichend für $Y=(Y'_c)'_c$ ist, daß es einen lokalkonvexen Raum E gibt mit $E'_c=Y$, vgl. [36], p.17.

Beweis von 5.: (1) folgt beim Transponieren.

Zu (2): Nach [2], §2, 8. ist - wegen der Quasivollständigkeit von $Y'_c - \mathcal{L}_c(Y'_c, Y'_c)$ linearer und topologischer Unterraum von $Y'_c \mathcal{E}(Y'_c)'_c$. Wegen $(Y'_c)'_c=Y$ gilt $Y' \otimes Y \subset \mathcal{L}_c(Y'_c, Y'_c) \subset Y'_c \mathcal{E} Y$. Ist $Y' \otimes Y$ dicht in $Y'_c \mathcal{E} Y$, so ist die Identität $I \in \mathcal{L}_c(Y'_c, Y'_c)$ Berührungspunkt von $Y' \otimes Y$ bzgl. der Topologie von $Y'_c \mathcal{E} Y$. Diese induziert die kanonische Topologie von $\mathcal{L}_c(Y'_c, Y'_c)$, so daß I Berührungspunkt von $Y' \otimes Y = Y' \otimes (Y'_c)'$ in $\mathcal{L}_c(Y'_c, Y'_c)$ ist. w.z.b.w.

Hinweis: Ist Y Schwartz-Raum (erst recht, falls Y Semi-Montelraum), so ist in Y jede beschränkte Menge präkompakt, d.h. $Y'_c=Y'_b$ ($Y'_b=Y'$, versehen mit der starken Topologie $\beta(Y', Y)$; vgl. Horváth [21], 3, §15, Prop.4(i)).

Definiert man für nicht lokalkonvexe topologische Vektorräume E die Approximationseigenschaft wie bei Grothendieck [20]: Die Identität von E ist Berührungspunkt von $E \otimes E'$ in dem separierten topologischen Vektorraum $\mathcal{L}_c(E, E)$ der von E in E stetigen linearen Abbildungen, versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf präkompakten Mengen (vgl. [2], Hinweis auf S. 16), so muß ein Raum mit Approximationseigenschaft notwendigerweise separierte schwache Topologie besitzen.

6. Lemma: Sei Y quasivollständiger lokalkonvexer Raum, E topologischer Vektorraum. Wenn E die Approximationsbedingung erfüllt, liegt $E \otimes Y$ dicht in $E \mathcal{E} Y$.

Der Beweis ist analog zu [2], §2, 9.(2), weil etwa Prop. 3. (a) aus §12 von 3 in Horváth [21] auch für nicht notwendig lokalkonvexen Bildraum richtig bleibt und $(E'[\mathcal{L}(E', E)])'_c = E$ gilt, wenn E nur separierte schwache Topologie hat.

Daß der Fall eines nicht lokalkonvexen Raumes, der die Approximationseigenschaft besitzt, überhaupt vorkommt, zeigt der folgende Satz, der sich auf l^p ($0 < p < 1$) anwenden läßt:

7. Satz: Sei E vollständiger metrisierbarer topologischer Vektorraum mit Basis $\{e_i; i \in \mathbb{N}\}$ (im Sinne von Arsove [1]). Dann hat E die Approximationseigenschaft.

Beweis: Sei φ_i ($i=1,2,\dots$) das i -te (lineare) Koeffizientenfunktional, $e = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(e) e_i$ (in eindeutig bestimmter Weise)

für jedes $e \in E$. Jedes φ_i ist auf E stetig, d.h. $\{e_i\}$ ist eine Schauderbasis (vgl. Arsove [1], Theorem 2). E besitzt separierte schwache Topologie, E ist Bairescher Raum. Nach dem Satz von Banach-Steinhaus (s. Schaefer [32], III, Theorem 4.6) konvergiert die Folge $A_n \in L(E, E)$, $A_n(e) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(e) e_i$,

gleichmäßig auf jeder präkompakten Menge von E gegen die Identität. Da $A_n = \sum_{i=1}^n e_i \otimes \varphi_i \in E \otimes E'$, ist die Behauptung bewiesen.

Wir kehren zurück zu gewichteten Räumen stetiger Funktionen.

8. Theorem: Seien die Bezeichnungen und Voraussetzungen wie in §3, 10. ($Y \subset CV(X)$).

(1) Bei Identifizierung gewisser isomorpher Räume gilt

$$E \otimes_{\epsilon} Y \subset CV^p \Gamma(X, E) \text{ und für } Y \subset CV_0(X): E \otimes_{\epsilon} Y \subset CV_{\infty}^p \Gamma(X, E).$$

Für $X =$ vollständig regulärer k -Raum und $W \leq V$ ist

$$E \otimes_{\epsilon} Y \subset E \otimes_{\epsilon} Y \subset CV^p \Gamma(X, E) \text{ bzw. } E \otimes_{\epsilon} Y \subset E \otimes_{\epsilon} Y \subset CV_{\infty}^p \Gamma(X, E) \text{ für } Y \subset CV_0(X).$$

(2) Für vollständig regulären k -Raum X , vollständigen topologischen Vektorraum E und $W \leq V$ ist

$$E \otimes_{\epsilon} Y \subset E \otimes_{\epsilon} Y \subset CV^p \Gamma(X, E) \text{ bzw. } C \subset CV_{\infty}^p \Gamma(X, E) \text{ (falls } Y \subset CV_0(X)).$$

Für außerdem noch metrisierbares $CV(X)$ und vollständiges E

(ebenso für vollständiges lokalkonvexes E ohne weitere

Voraussetzungen an V außer $W \leq V$, $X = k$ -Raum, wenn nur Y abge-

schlossen in $CV(X)$ ist) erhält man:

$$E \otimes_{\epsilon} Y \subset E \otimes_{\epsilon} Y \subset E \otimes_{\epsilon} Y \subset CV^p \Gamma(X, E) \text{ bzw. } C \subset CV_{\infty}^p \Gamma(X, E). \text{ Dabei ist die Topologie auf } E \otimes_{\epsilon} Y \text{ jeweils die von } CV \Gamma(X, E) \text{ induzierte.}$$

(3) $E \otimes CV(X)$ bzw. $E \otimes CV_0(X)$ ist der Raum der Funktionen in

$$CV \Gamma(X, E) \text{ bzw. } CV_{\infty} \Gamma(X, E) \text{ mit endlichdimensionalem Wertebereich, d.h. das Bild jeder Funktion liegt in einem endlichdimensionalen linearen Unterraum von } E \text{ (Dasselbe gilt für } CV(X, E) \text{ bzw. } CV_0(X, E) \text{ anstelle von } CV \Gamma(X, E) \text{ bzw. } CV_{\infty} \Gamma(X, E)).$$

Beweis: Der zweite Teil von (1) ist klar.

Zum ersten Teil: $u \in E \otimes_{\epsilon} Y$ liefert eine von $Y' [\mathcal{L}(Y', Y)]$ in E

stetige Abbildung. Definiert man $A(u)$ wie in §3, 11., so

$$CV_{\infty} \Gamma(X, E).$$

ist $A(u)$ stetig von X in E . Aus 4. nach §3, 11. liest man $A(u) \in CV^p\Gamma(X, E)$ bzw. $CV_{\infty}^p\Gamma(X, E)$ (für $Y \subset CV_0(X)$) ab, und aus §3, 10. folgt, daß $A: E \otimes Y$ eineindeutig in $CV^p\Gamma(X, E)$ abbildet und daß die Topologien auf beiden Räumen zusammenfallen. Die Einbettung von $E \otimes Y$ in $CV^p\Gamma(X, E)$ bzw. $CV_{\infty}^p\Gamma(X, E)$ hat die

$$\text{Form } u = \sum_{i=1}^n e_i \otimes f_i \rightsquigarrow (x \longrightarrow \sum_{i=1}^n e_i f_i(x)) \quad (n \in \mathbb{N}, e_i \in E, f_i \in Y$$

$(i=1, \dots, n), x \in X)$.

Zu (2): Wegen der Voraussetzungen an X und V ist $CV^p\Gamma(X, E)$ bzw. $CV_{\infty}^p\Gamma(X, E)$ vollständig, d.h. $E \otimes Y$ die Abschließung von $E \otimes Y$ in diesen Räumen.

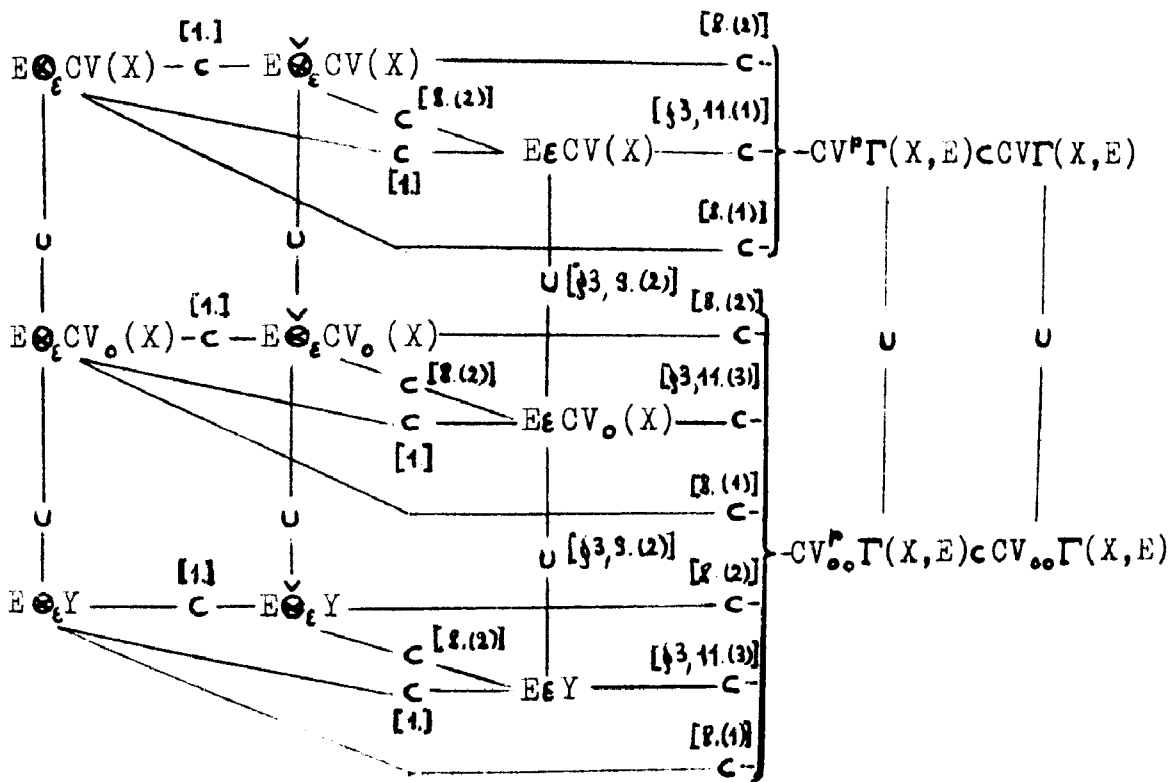
Zu (3): $E \otimes CV(X)$ enthält nur Funktionen, deren Bild in einem endlichdimensionalen Teilraum von E liegt. Besitze umgekehrt $f \in CV(X, E)$ (bzw. $CV_0(X, E)$), $f \neq 0$, endlichdimensionalen Wertebereich. Dann ist für alle $x \in X$: $f(x) = \sum_{i=1}^n e_i f_i(x)$ mit

$\{e_i; i=1, \dots, n\}$ linear unabhängig in E , $f_i: X \longrightarrow \mathbb{C}$ ($i=1, \dots, n$), $n \in \mathbb{N}$. Der von den e_i aufgespannte n -dimensionale lineare Unterraum U von E ist dem \mathbb{C}^n topologisch und algebraisch isomorph. Aus der Stetigkeit der Projektionen auf jede Komponente des \mathbb{C}^n und der Stetigkeit von f folgt die Stetigkeit der f_i von X in \mathbb{C} . Analog zeigt man für jedes $v \in V$ $v f_i \in B(X)$ bzw. $B_0(X)$ (für $f \in CV_0(X, E)$), d.h. $f_i \in CV(X)$ bzw.

$CV_0(X)$, $i=1, \dots, n$, $f = \sum_{i=1}^n e_i \otimes f_i \in E \otimes CV(X)$ bzw. $E \otimes CV_0(X)$.
q.e.d.

Sei $V > 0$ (bzw. $W \leq V$) Nachbin-Familie auf dem vollständig regulären (k -) Raum X ; sei Y (abgeschlossener) linearer und topologischer Unterraum von $CV_0(X)$ und sei schließlich E (vollständiger) topologischer Vektorraum. Das folgende Schema zeigt einige der in diesem und dem vorhergehenden Paragraphen bewiesenen Einbettungen. Die Zahlen in Klammern geben die Nummer des entsprechenden Satzes an; dort können die genauen Voraussetzungen nachgelesen werden.

Bis auf Isomorphie gilt also:



Wir wenden uns jetzt der Frage einer gewichteten Approximation E-wertiger stetiger Funktionen durch Elemente aus dem Tensorprodukt von E mit dem entsprechenden Raum skalarer Funktionen zu. Dabei lassen sich Räume vom Typ $CV_0(X, E)$ in der üblichen Weise mit einer Zerlegung der Eins behandeln, und man erhält besonders interessante Ergebnisse für solche Räume (Entsprechend beschränken wir uns in den weiteren Resultaten oft auf $CV_0(X, E)$, $CV_{00} \Gamma(X, E)$).

Wir beginnen mit zwei Sätzen, die ähnliche Ergebnisse von Shuchat (vgl. [37], Theorem 1 und 2) verallgemeinern. Sei $V > 0$ eine Nachbin-Familie auf dem vollständig regulären Raum X und E ein beliebiger topologischer Vektorraum.

9. Satz: Sei X lokalkompakter Raum mit der endlichen Überdeckungsdimension d (vgl. Nagata [27], insbesondere trifft dies für geeignetes $d=d(n)$ zu, falls $X \subset \mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$). Dann liegt $E \otimes_{\epsilon} CV_0(X)$ dicht in $CV_0(X, E)$.

Man beachte aber, daß $CV_0(X, E)$ auf dem Tensorprodukt i.a. nicht die Topologie von $E \otimes_{\epsilon} CV_0(X)$ induziert.

Beweis: Nach §1, 15.(1) ist $C_c(X, E)$ dicht in $CV_0(X, E)$. Es muß daher wegen 8.(3) bewiesen werden: Für jedes $f \in C_c(X, E)$, jedes $v \in V$ und jede (kreisförmige) Nullumgebung U in E existiert eine Funktion $g \in CV_0(X, E)$ mit endlichdimensionalem Wertebereich, so daß $(vf - vg)(X) \subset U$.

Sei v auf der Abschließung \bar{K} der offenen relativkompakten Umgebung \tilde{K} der kompakten Menge $K = \text{Tr } f$ durch M beschränkt; wähle eine kreisförmige Nullumgebung \tilde{U} in E , so daß die $(d+1)$ -fache Summe $M\tilde{U} + \dots + M\tilde{U} \subset U$. Sei schließlich \tilde{U} kreisförmig mit $\tilde{U} + \tilde{U} \subset \tilde{U}$.

Das System $\{X \setminus K, W_x; x \in K\}$ mit

$$W_x = \{x' \in X; f(x') \in f(x) + \tilde{U}\} = f^{-1}(f(x) + \tilde{U}) \text{ für } x \in K \text{ und}$$

$$W_x' = W_x \cap \tilde{K} \text{ bildet wegen der Stetigkeit von } f \text{ eine offene}$$

Überdeckung von X . Wegen der Kompaktheit von K existiert

eine endliche Teilüberdeckung $\{X \setminus K, \tilde{W}_j; j=1, \dots, n\}$ mit

$$\tilde{W}_j \subset \tilde{K}. \text{ Da } X \text{ Überdeckungsdimension } d \text{ hat, hat diese Über-}$$

deckung von X eine Verfeinerung der Ordnung $\leq d+1$. K wird

dabei von endlich vielen Mengen W_i ($i=1, \dots, m$) überdeckt

mit $W_i \subset \tilde{K}$ ($i=1, \dots, m$).

Sei $g_i \in C_c(X, \mathbb{R})$ eine dieser Überdeckung nach Nachbin [26],

§23, Lemma 2 zugeordnete Zerlegung der Eins: $g_i(x) = 0$ außer-

halb W_i , $0 \leq g_i(x) \leq 1$ auf X ($i=1, \dots, m$), $\sum_{i=1}^m g_i(x) = 1$ auf K ,

$$\sum_{i=1}^m g_i(x) \leq 1 \text{ auf } X. \text{ Sei } x_i \in W_i \text{ beliebig und } g(x) = \sum_{i=1}^m f(x_i) g_i(x).$$

g ist eine Funktion aus $CV_0(X, E)$ mit endlichdimensionalem

Wertebereich. Sowohl auf K als auch auf $X \setminus K$ ist

$$f(x) = \sum_{i=1}^m g_i(x) f(x), \text{ d.h.}$$

$$v(x)(f(x) - g(x)) = \sum_{i=1}^m v(x) g_i(x) (f(x) - f(x_i)). \text{ Ist } x \in W_i, \text{ so}$$

gehört $f(x) - f(x_i)$ zu \tilde{U} , also $v(x) g_i(x) (f(x) - f(x_i)) \in M\tilde{U}$;

ist $x \notin W_i$, dann gilt $v(x) g_i(x) (f(x) - f(x_i)) = 0$. Somit erhält

man $v(x) f(x) - v(x) g(x) \in \underbrace{M\tilde{U} + \dots + M\tilde{U}}_K$, wo k die Zahl der Mengen

W_i ist mit $x \in W_i$. Da die Ordnung der Überdeckung $\leq d+1$ ist,

liegt jedes $v(x) f(x) - v(x) g(x)$ in der $(d+1)$ -fachen Summe

$M\tilde{U} + \dots + M\tilde{U} \subset U$. q.e.d.

Bemerkung: Der Beweis von 9. zeigt, daß bereits die Funktio-

nen mit endlichdimensionalem Wertebereich und

kompaktem Träger, also aus $E \otimes C_c(X)$, dicht liegen in

$CV_0(X, E)$ (Da $C_c(X)$ dicht in $CV_0(X)$ ist, kann man das auch

aus der Aussage des Satzes folgern.).

10. Satz: Sei E topologischer Vektorraum und besitze E die Approximationseigenschaft. Dann liegen dicht:

- (1) $E \otimes CV(X)$ in $CV^p(X, E)$ bzw. $CV^p\Gamma(X, E)$.
 (2) $E \otimes CV_\circ(X)$ in $CV_\circ(X, E)$ bzw. $CV_\circ^p\Gamma(X, E)$.

Beweis: Wir beweisen dies nur für $E \otimes CV_\circ(X)$ und $CV_\circ^p\Gamma(X, E)$. Die anderen Fälle lassen sich analog zeigen.

Zu $f \in CV_\circ^p\Gamma(X, E)$, $v \in V$ und der Nullumgebung U in E ist eine Funktion $g \in CV_\circ\Gamma(X, E)$ mit endlichdimensionalem Wertebereich zu finden, derart daß $\Gamma([v(f-g)](X)) \subset U$.

$K = \Gamma((vf)(X))$ stellt eine in E präkompakte Menge dar für $f \in CV_\circ^p\Gamma(X, E)$. Zu K existiert nach Voraussetzung ein stetiger linearer Operator T von endlichem Rang, der die Identität I von E gleichmäßig auf K approximiert, so daß $(I-T)(K) \subset U$.

Daraus folgt $\Gamma([v(f-g)](X)) \subset U$ mit $g(x) = T(f(x))$ ($x \in X$). g ist eine stetige Funktion auf X mit Werten in einem endlichdimensionalen linearen Unterraum von E , und aus der Stetigkeit von T ergibt sich auch $g \in CV_\circ\Gamma(X, E)$. q.e.d.

Wegen 7. bleibt 10. für nicht notwendig lokalkonvexen vollständigen metrisierbaren topologischen Vektorraum E mit Basis richtig. Der erste Teil von 10.(2) ist somit eine Verallgemeinerung und Verschärfung von Shuchat [37], Th.2.

Für den Rest des Paragraphen machen wir der Einfachheit halber folgende Voraussetzungen: $V > 0$ sei Nachbin-Familie auf dem lokalkompakten Raum X und E topologischer Vektorraum.

Der Beweis des nächsten Satzes ist ähnlich dem von 13.

11. Satz: Besitze $f \in C_c\Gamma(X, E)$ die folgende Eigenschaft:

- (*) Zu jeder (kreisförmigen) Nullumgebung U in E gibt es eine endliche Anzahl von Punkten $x_k^{(0)} \in K = \text{Tr } f$ ($k=1, \dots, q$; $q \in \mathbb{N}$) und offene Umgebungen

$U_k = U_k(x_k^{(0)})$ von $x_k^{(0)}$ in X mit $K \subset \bigcup_{k=1}^q U_k$, so daß

$$\Gamma\left(\bigcup_{k=1}^q (f(U_k) - f(x_k^{(0)}))\right) \subset U.$$

Dann ist f Berührungspunkt von $E \otimes CV_\circ(X)$ in $CV_\circ\Gamma(X, E)$. Die Umkehrung gilt für $f \neq 0$ und $W \in V$.

Bemerkung: $f \in C_c\Gamma(X, E)$ mit (*) ist Berührungspunkt von $E \otimes C_c(X)$ in $CV_\circ\Gamma(X, E)$; mehr noch, für beliebig vorgege-

bene offene relativkompakte Umgebung \tilde{K} von $K = \text{Tr } f$ kann man erreichen, daß die f approximierenden Funktionen aus $E \otimes C_c(X)$ ihre Träger in der Abschließung $\overline{\tilde{K}}$ haben.

12. Korollar: Sei K kompakter Hausdorffraum, E vollständiger topologischer Vektorraum, f eine Funktion aus $C(K, E)$ mit $\Gamma(f(K))$ beschränkt in E . Dann sind die folgenden beiden Bedingungen an f äquivalent:

- (1) $f \in E \check{\otimes} C(K)$
 (2) Für jede (kreisförmige) Nullumgebung U in E gibt es eine

Zerlegung $\bigcup_{k=1}^q U_k = K$ von K in offene Mengen U_k und Punkte $x_k \in U_k$ ($k=1, \dots, q$; $q \in \mathbb{N}$) mit $\Gamma(\bigcup_{k=1}^q (f(U_k) - f(x_k))) \subset U$.

13. Satz: Betrachte die zwei Bedingungen an eine Funktion $f \in CV_{\bullet\bullet} \Gamma(X, E)$:

- (1) f ist Berührungspunkt von $E \otimes CV_{\bullet}(X)$ in $CV_{\bullet\bullet} \Gamma(X, E)$.
 (2) Für jede (kreisförmige) Nullumgebung U in E und für jedes $v \in V$ gibt es eine kompakte Menge K in X mit $\Gamma((vf)(X \setminus K)) \subset U$, eine endliche Anzahl offener Mengen U_k in X

und Punkte $x_k^{(v)} \in U_k$ ($k=1, \dots, q$; $q \in \mathbb{N}$) mit $K \subset \bigcup_{k=1}^q U_k$ und

$\Gamma(\bigcup_{k=1}^q \{v(x)(f(x) - f(x_k^{(v)}))\}; x \in U_k\} \subset U$.

Es gilt: (2) impliziert (1), und (1) und (2) sind äquivalent, falls $W \triangleleft V$.

Beweis: 1. (2) impliziert (1).

Sei U Nullumgebung in E und $v \in V$ beliebig. Wähle eine Nullumgebung \tilde{U} in E mit $\tilde{U} + \tilde{U} + \tilde{U} \subset U$. Zu \tilde{U} , v gibt es nach (2) $K \subset X$ kompakt mit $\Gamma((vf)(X \setminus K)) \subset \tilde{U}$, U_k offen in X , $x_k^{(v)} \in U_k$, derart

daß $K \subset \bigcup_{k=1}^q U_k$ und $\Gamma(\bigcup_{k=1}^q \{v(x)(f(x) - f(x_k^{(v)}))\}; x \in U_k\} \subset \tilde{U}$. Sei

$\{g_k; k=1, \dots, q\} \subset C_c(X, \mathbb{R})$ eine $\bigcup_{k=1}^q U_k \supset K$ zugeordnete Zerlegung

der Eins. Setze $g(x) = \sum_{k=1}^q f(x_k^{(v)}) g_k(x)$, $g \in E \otimes CV_{\bullet}(X)$. Es ist

für jedes $x \in K$: $f(x) = \sum_{k=1}^q g_k(x) f(x)$, also

$(vf - vg)(x) = \sum_{k=1}^q g_k(x) v(x)(f(x) - f(x_k^{(v)}))$. Daraus folgert man

$\Gamma((vf - vg)(K)) \subset \Gamma(\bigcup_{k=1}^q \{v(x)(f(x) - f(x_k^{(v)}))\}; x \in U_k\} \subset \tilde{U}$. Man be-

achte $g_k(x)v(x)f(x_k^{(0)})=0$, wenn $x \notin U_k$, d.h. für $x \in X \setminus K$ ist $g_k(x)v(x)f(x_k^{(0)}) \neq 0$ nur, wenn $x \in U_k \setminus K$. Dann gilt $v(x)f(x_k^{(0)})=v(x)f(x)+v(x)(f(x_k^{(0)})-f(x))$

$$\in (vf)(X \setminus K) + \mathcal{C}\{v(x)(f(x)-f(x_k^{(0)})); x \in U_k\}, \text{ somit}$$

$$\Gamma((vg)(X \setminus K)) \subset \Gamma((vf)(X \setminus K)) + \Gamma\left(\bigcup_{k=1}^q \{v(x)(f(x)-f(x_k^{(0)})); x \in U_k\}\right) \cdot$$

$$\subset \tilde{U} + \tilde{U}; \Gamma((vf-vg)(X)) = \Gamma((vf-vg)(K) \cup (vf-vg)(X \setminus K)) \subset$$

$$\Gamma((vf-vg)(K)) + \Gamma((vf-vg)(X \setminus K)) \subset \tilde{U} + \Gamma((vf)(X \setminus K)) + \Gamma((vg)(X \setminus K)) \subset \tilde{U} + \tilde{U} + \tilde{U} + \tilde{U} \subset U.$$

2. Aus (1) folgt (2) für $W \leq V$.

Sei U Nullumgebung in E und $v \in V$ beliebig. Wähle eine Nullumgebung \tilde{U} in E mit $\tilde{U} + \tilde{U} + \tilde{U} \subset U$. Sei dann K kompakt in X mit $\Gamma((vf)(X \setminus K)) \subset \tilde{U} \subset U$. Sei v auf der offenen relativkompakten Umgebung \bar{K} von K durch M beschränkt - o.B.d.A. $M \geq 1$ - und sei \tilde{U} eine kreisförmige Nullumgebung in E mit $M\tilde{U} \subset \tilde{U}$. Wegen $W \leq V$ gibt es zu \bar{K} $v' \in V$ mit $v'(x) \geq 1$ auf \bar{K} ; da V Nachbin-Familie ist, existiert $\tilde{v} \in V$ mit $v, v' \leq \tilde{v}$. Weil $f \in CV_{\bullet\bullet}\Gamma(X, E)$ Berührungspunkt von $E \in CV_{\bullet}(X)$ in $CV_{\bullet\bullet}\Gamma(X, E)$ sein soll, gibt es zu \tilde{U} und \tilde{v} $g \in E \in CV_{\bullet}(X)$ mit $\Gamma((\tilde{v}f - \tilde{v}g)(X)) \subset \tilde{U}$, also $\Gamma((f-g)(\bar{K})) \subset \tilde{U}$ und $\Gamma((vf-vg)(X)) \subset \tilde{U} \subset \tilde{U}$. Nun existieren zu der stetigen Funktion g von X in einen endlichdimensionalen Unterraum von E (der topologisch isomorph dem lokalkonvexen Raum \mathbb{C}^n für geeignetes $n \in \mathbb{N}$ ist) und der kompakten Menge K in X endlich viele offene Mengen U_k und Punkte $x_k^{(0)} \in U_k$

$$(k=1, \dots, q; q \in \mathbb{N}) \text{ mit } K \subset \bigcup_{k=1}^q U_k \subset \bar{K}, \Gamma\left(\bigcup_{k=1}^q (g(U_k) - g(x_k^{(0)}))\right) \subset \tilde{U},$$

$$\text{damit auch } \Gamma\left(\bigcup_{k=1}^q \{v(x)(g(x) - g(x_k^{(0)})); x \in U_k\}\right) \subset M\tilde{U} \subset \tilde{U}.$$

$$\text{Für } x \in U_k \text{ ist dann } v(x)(f(x) - f(x_k^{(0)})) =$$

$$(vf - vg)(x) + v(x)(g(x) - g(x_k^{(0)})) + v(x)(g - f)(x_k^{(0)}) \in$$

$$(vf - vg)(X) + \{v(x)(g(x) - g(x_k^{(0)})); x \in U_k\} + M\mathcal{C}((f - g)(\bar{K})), \text{ so daß}$$

$$\Gamma\left(\bigcup_{k=1}^q \{v(x)(f(x) - f(x_k^{(0)})); x \in U_k\}\right) \subset$$

$$\Gamma\left[(vf - vg)(X) + \bigcup_{k=1}^q \{v(x)(g(x) - g(x_k^{(0)})); x \in U_k\} + M\mathcal{C}((f - g)(\bar{K}))\right] \subset$$

$$\Gamma((vf - vg)(X)) + \Gamma\left(\bigcup_{k=1}^q \{v(x)(g(x) - g(x_k^{(0)})); x \in U_k\}\right) + M\Gamma((f - g)(\bar{K})) \subset$$

$$\tilde{U} + \tilde{U} + M\tilde{U} \subset \tilde{U} + \tilde{U} \subset U. \text{ q. e. d.}$$

Bemerkung: In 13.(2) kann man noch $x_k^{(0)} \in K$ ($k=1, \dots, q$) erreichen.

14. Korollar: Sei E vollständig. Eine Funktion $f \in C_{\bullet\bullet} \Gamma(X, E)$ gehört genau dann zu $E \check{\otimes}_c C_{\bullet\bullet}(X)$, wenn gilt:

Für jede (kreisförmige) Nullumgebung U in E gibt es eine kompakte Menge K in X (mit $\Gamma(f(X \setminus K)) \subset U$), dazu eine endliche

Überdeckung $\bigcup_{k=1}^q U_k \supset K$ von K durch offene Mengen U_k in X ,

schließlich Punkte $x_k \in U_k$ ($k=1, \dots, q$), so daß

$$\Gamma\left(\bigcup_{k=1}^q (f(U_k) - f(x_k))\right) \subset U.$$

Satz 13. charakterisiert $E \check{\otimes}_c CV_{\bullet\bullet}(X)$ in $CV_{\bullet\bullet} \Gamma(X, E)$. Er ist gleichzeitig der erste Schritt auf dem Wege zu einer einfacheren Charakterisierung des injektiven Tensorproduktes als Funktionenraum, wie sie nach 10. möglich erscheint (auch ohne vom Bildraum E die Approximationseigenschaft vorauszusetzen).

Da eine solche Darstellung von $E \check{\otimes}_c CV_{\bullet\bullet}(X)$ bisher nicht bekannt ist, erscheint es interessant, daß sich unter gewissen Bedingungen genauere Aussagen als 8.(1) über die Beziehung zwischen $E \otimes CV_{\bullet\bullet}(X)$ und $E \check{\otimes} CV_{\bullet\bullet}(X)$ für nicht lokalkonvexes E machen lassen.

15. Satz: Es sei $W \leq V$.

(1) Ist $(CV_{\bullet\bullet}(X))'_c$ quasivollständig und besitzt $CV_{\bullet\bullet}(X)$ die Topologie γ , so gilt:

$E \otimes CV_{\bullet\bullet}(X)$ liegt dicht in $E \check{\otimes} CV_{\bullet\bullet}(X)$.

(2) Für vollständiges E und metrisierbares $CV_{\bullet\bullet}(X)$ hat man

$$E \check{\otimes}_c CV_{\bullet\bullet}(X) = E \check{\otimes} CV_{\bullet\bullet}(X).$$

Die Voraussetzungen von (1) sind insbesondere erfüllt, wenn $CV_{\bullet\bullet}(X)$ tonneliert ist. Deshalb ergibt sich (2) direkt aus (1).

Beweis von (1): Dies folgt aus 3.(4), wenn gezeigt ist, daß $(CV_{\bullet\bullet}(X))'_c$ die Approximationseigenschaft besitzt. Zum Beweis ist wegen 5.(2) nur zu zeigen, daß $CV_{\bullet\bullet}'(X) \otimes CV_{\bullet\bullet}(X)$ dicht in $(CV_{\bullet\bullet}(X))'_c \check{\otimes} CV_{\bullet\bullet}(X)$ liegt. Im nächsten Paragraphen wird aber allgemeiner bewiesen, daß für jeden lokalkonvexen Raum E schon $E \otimes CV_{\bullet\bullet}(X)$ dicht in $E \check{\otimes} CV_{\bullet\bullet}(X)$ ist. q.e.d.

Bemerkung: Wegen 6. gilt für $W \leq V$ ein 15.(1) analoger Satz, wenn nur E der Approximationsbedingung genügt;

$CV_0(X)$ kann dann im übrigen beliebig sein. Insbesondere ist $l^p \otimes CV_0(X)$ dicht in $l^p \varepsilon CV_0(X)$ ($0 < p < 1$).

16. Korollar: Sei E vollständig; dann gilt:

$$(1) E \check{\otimes} C_0(X) = E \varepsilon C_0(X),$$

(2) $E \check{\otimes}_\tau(C(X), \tau) = E \varepsilon(C(X), \tau)$, wenn X zusätzlich im Unendlichen abzählbar ist.

Sei $(E, \|\cdot\|_p)$ (p)-Raum ($0 < p < 1$, s. Gramsch [17]) und Y Banachraum. Man sieht wie in [2], §1, 6.(2) ein, daß $E \varepsilon Y = \{u \text{ linear: } Y' \longrightarrow E; \text{ die Restriktion von } u \text{ auf die abgeschlossene Einheitskugel von } Y' \text{ ist stetig von } \mathcal{S}(Y', Y) \text{ in } E\}$, versehen mit der Operator- p -Norm

$$\|u\|_{E \varepsilon Y} = \sup_{\|y'\|_{Y'} \leq 1} \|u(y')\|_p.$$

Damit erhält man aus 16.(1):

Jede lineare Abbildung von $C'_0(X)$ in den (p)-Raum E , deren Restriktion auf die Einheitskugel von $C'_0(X)$ stetig von $\mathcal{S}(C'_0(X), C_0(X))$ in E ist, ist Limes bzgl. der Operator- p -Norm von stetigen linearen Abbildungen von $(C_0(X))'_0$ in E von endlichem Rang.

§ 5 Die Approximationseigenschaft für gewichtete Räume stetiger Funktionen

Während für nicht lokalkonvexen Bildraum E im vorhergehenden Paragraphen über die Charakterisierung des injektiven Tensorproduktes als gewichteter Raum stetiger E -wertiger Funktionen nur unter einschränkenden Voraussetzungen Resultate hergeleitet werden konnten, gelingt es bei lokalkonvexem E jetzt relativ leicht, dieses Problem vollständig und in voller Allgemeinheit für $E \otimes_e CV_0(X)$ zu lösen.

1. Theorem: Sei $V > 0$ Nachbin-Familie auf dem vollständig regulären Raum X und $(E, \{p_\alpha; \alpha \in A\})$ ein lokalkonvexer Raum. Dann liegt $E \otimes CV_0(X)$ dicht in $CV_0(X, E)$.

Beweis: Zu $f \in CV_0(X, E)$, $v \in V$, $\alpha \in A$ und $\epsilon > 0$ wird $g \in E \otimes CV_0(X)$ angegeben mit $bv_\alpha(f-g) = \sup_{x \in X} p_\alpha((vf-vg)(x)) \leq \epsilon$.

Wegen $f \in CV_0(X, E)$ ist $K = \{x \in X; p_\alpha((vf)(x)) \geq \frac{\epsilon}{4}\}$ kompakt in X (vgl. §1, Bemerkung 3. nach 12.) mit $p_\alpha((vf)(x)) < \frac{\epsilon}{4}$ für $x \in X \setminus K$ und v auf K durch $\tilde{M} > 0$ beschränkt. Weil v von oben halbstetig vorausgesetzt wird, existiert eine offene Menge \tilde{K} in X mit $K \subset \tilde{K}$ und $v(x) < M$ auf \tilde{K} für $M > \tilde{M}$. Zu $f \in C(X, E)$ gibt es endlich viele offene Mengen U_k und $x_k \in U_k$ ($k=1, \dots, q; q \in \mathbb{N}$)

mit $K \subset \bigcup_{k=1}^q U_k \subset \tilde{K}$ und $p_\alpha(f(x) - f(x_k)) < \frac{\epsilon}{2M}$ für jedes $x \in U_k$.

$CV_0(X)$ ist Teilmodul von $C(X)$ über $CB(X)$ (vgl. §1, Bemerkung 1. nach 12.), und nach Definition von K findet man zu jedem $x_0 \in K$ ein $f_{x_0} \in CV_0(X)$ mit $f_{x_0}(x_0) \neq 0$: Ist $e'_\alpha \in E'$ mit $e'_\alpha(f(x_0)) \neq 0$, so setze $f_{x_0}(x) = e'_\alpha(f(x))$ für beliebiges $x \in X$. Die Voraussetzungen von Nachbin [26], 23., Lemma 2 sind erfüllt, und es gibt eine Zerlegung der Eins $\{g_k; k=1, \dots, q\} \subset CV_0(X)$ mit

$g_k \geq 0$, $g_k = 0$ außerhalb U_k , $\sum_{k=1}^q g_k(x) = 1$ auf K und $\sum_{k=1}^q g_k(x) \leq 1$

auf X . Definiere für $x \in X$ $g(x) := \sum_{k=1}^q f(x_k) g_k(x)$; $g \in E \otimes CV_0(X)$.

Ist $x \in K$, so gilt $f(x) = \sum_{k=1}^q f(x) g_k(x)$, also $p_\alpha((vf-vg)(x)) =$

$p_\alpha\left(\sum_{k=1}^q g_k(x) v(x) (f(x) - f(x_k))\right) \leq \sum_{k=1}^q g_k(x) v(x) p_\alpha(f(x) - f(x_k)) \leq$

$\sum_{k=1}^q g_k(x) M \frac{\epsilon}{2M} = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$. Für $x \notin K$ ist $g_k(x) f(x_k) \neq 0$ nur, wenn

$x \in U_k \setminus K$; dann erhält man wegen $U_k \subset \tilde{K}$: $p_\alpha(g_k(x)v(x)f(x_k)) <$
 $g_k(x)[p_\alpha((vf)(x)) + v(x)p_\alpha(f(x) - f(x_k))] \leq g_k(x)(\frac{\epsilon}{4} + M\frac{\epsilon}{2M}) = g_k(x)\frac{3}{4}\epsilon,$

so daß $p_\alpha((vf - vg)(x)) \leq p_\alpha((vf)(x)) + p_\alpha((vg)(x)) <$

$$\frac{\epsilon}{4} + p_\alpha(v(x) \sum_{k=1}^q g_k(x)f(x_k)) \leq \frac{\epsilon}{4} + \sum_{k=1}^q p_\alpha(g_k(x)v(x)f(x_k)) \leq$$

$$\frac{\epsilon}{4} + \sum_{k=1}^q g_k(x)\frac{3}{4}\epsilon \leq \epsilon \text{ für jedes } x \in X \setminus K. \text{ q.e.d.}$$

Nimmt man $V = \{\lambda x_k; \lambda > 0, K \in \mathcal{K}\}$ für ein System \mathcal{K} kompakter Mengen in X , das unter Bildung endlicher Vereinigungen abgeschlossen ist und für das $\bigcup_{K \in \mathcal{K}} K = X$ gilt, so ergibt sich

aus 1. Proposition 3 von Johnson [49] (die hier also wesentlich verallgemeinert wird).

2. Korollar: Ist X vollständig regulärer k -Raum, erfüllt die Nachbin-Familie $V \text{ w} \leq V$ (dies ist insbesondere richtig für $0 < V \subset C^+(X)$, s. den Hinweis vor §1, 12.) und ist E vollständiger lokalkonvexer Raum, so gilt $CV_\bullet(X, E) = E \check{\otimes}_\epsilon CV_\bullet(X)$.

Hinweis: Als Spezialfälle von 2. erhält man die bekannten Tensorprodukt Darstellungen (E =vollständiger lokalkonvexer Raum):

- $C(X, E) = E \check{\otimes}_\epsilon C(X)$ jeweils mit kompakter Konvergenz-Topologie, X =vollständig regulärer k -Raum (s. Dietrich [11], Th.3 und Johnson [49], Prop.5),
- $CB(X, E) = E \check{\otimes}_\epsilon CB(X)$ jeweils mit strikter Topologie, X =lokalkompakt (vgl. dazu etwa Wells [47], Th.2 und Todd [43], Th.3),
- $C_\bullet(X, E) = E \check{\otimes}_\epsilon C_\bullet(X)$ (s. Grothendieck [20], Ch.I, §3, no.3, Ex.1, insbesondere also $c_\bullet(E) = E \check{\otimes}_\epsilon c_\bullet$ mit $c_\bullet(E)$ =Raum der Nullfolgen in E) und
- $C_c(X, E) = E \check{\otimes}_\epsilon C_c(X)$ jeweils mit induktiver Limes-Topologie, E =Banachraum und X =lokalkompakt und im Unendlichen abzählbar (vgl. Schwartz [35], Remarque 2°) nach Prop.10, p.110).

Dagegen gilt $CB(X, E) = E \check{\otimes}_\epsilon CB(X)$ i.a. nicht für die gleichmäßige Topologie (s. [35], p.110, Remarque 2°)).

Bemerkung: Da der Dualraum von $CV_0(X)$ bekannt ist (s. Summers [40], Theorem 3.1; in Th. 4.5 sind auch die gleichstetigen Mengen von $CV_0'(X)$ charakterisiert), läßt sich aus der Tensorproduktzerlegung und allgemeinen Sätzen über das Dual eines injektiven Tensorproduktes (vgl. etwa Schaefer [32], Ch.IV, 9.2) der Dualraum von $CV_0(X, E)$ bestimmen und eine Verallgemeinerung der Arbeit von Johnson ([49]) erreichen. Wir gehen hier aber nicht näher auf die damit im Zusammenhang stehenden Probleme ein.

Teil (1) des folgenden Satzes wurde bereits in §4, 15. benutzt.

3. Theorem: Seien die Voraussetzungen wie in 1., X ein k -Raum und $W \leq V$.

- (1) Dann ist $E \otimes CV_0(X)$ dicht in $E \otimes CV_0(X)$.
- (2) Ist E vollständig, so gilt $E \otimes CV_0(X) = E \otimes CV_0(X) = CV_0(X, E)$.
- (3) $CV_0(X)$ hat die Approximationseigenschaft.
- (4) Besitzt $CV_0(X)$ die Topologie γ und ist $(CV_0(X))'_c$ quasi-vollständig, so hat auch $(CV_0(X))'_c$ die Approximationseigenschaft.

(1) folgt aus 1. und §4, 8.(1), (2) aus §3, 8.(4)(b), (3) aus (1) und §4, 4.(2) und (4) schließlich aus (1) und §4, 5.(2).

4. Korollar: Die folgenden Räume besitzen die Approximationseigenschaft:

- (1) $(C(X), \tau)$ für X =vollständig regulärer k -Raum, $(CB(X), \beta)$, $(C_0(X), \delta)$ jeweils für lokalkompaktes X und $(C_c(X), i)$ für X =lokalkompakt und im Unendlichen abzählbar.
- (2) $(C_0(X) [\delta])'_c$ für lokalkompaktes X , $(C(X) [\tau])'_c$ und $(C_c(X) [i])'_c$ für X =lokalkompakt und im Unendlichen abzählbar.

Denn die Räume $(C(X), \tau)$, $(C_0(X), \delta)$ und $(C_c(X), i)$ (vgl. Bourbaki [6], III, §1, 1., Prop. 2(i)) sind ja unter den Voraussetzungen von 4.(2) tonneliert.

3. ist auch auf Beispiele 3. und 4. aus §2 anwendbar.

Hinweis: 4.(1) liefert neue Beweise bzw. Verallgemeinerungen von Resultaten bei Schwartz [35] und [34], Exp. no. 15, Theorem 4, Collins und Dorroh [9], Theorem 3.1.

Unter den Voraussetzungen von 2. erhält man nun das folgende Schema:

$$\begin{array}{ccccccc} E\mathfrak{O}_c CV_0(X) & \subset & E\check{\mathfrak{O}}_c CV_0(X) & = & E\mathfrak{E} CV_0(X) & = & CV_0(X, E) \\ \cup & & \cup & & \cup & & \\ E\mathfrak{O}_c Y & \subset & E\check{\mathfrak{O}}_c Y & \subset & E\mathfrak{E} Y, & & \end{array}$$

wobei das Gleichheitszeichen zwischen $E\check{\mathfrak{O}}_c Y$ und $E\mathfrak{E} Y$ jedenfalls dann steht, wenn der abgeschlossene Unterraum Y von $CV_0(X)$ die Approximationsbedingung erfüllt.

Wir wollen jetzt den Fall betrachten, daß nicht mehr $W \leq V$ gilt. Es ist auch hier möglich - z.T. unter der Voraussetzung, daß X lokalkompakt sein soll -, ähnliche Resultate wie z.B. 3. herzuleiten.

5. Definition: Für vollständig regulären Hausdorffraum X , eine Nachbin-Familie $V > 0$ auf X und lokalkonvexen Raum $(E, \{p_\alpha; \alpha \in A\})$ seien

$$CV^\delta(X, E) := \{f \in C(X, E[\delta(E, E')])\}; \quad v \in B(X, E) \text{ für jedes } v \in V \text{ und}$$

$$CV_0^\delta(X, E) := \{f \in C(X, E[\delta(E, E')])\}; \quad v \in B_0(X, E) \text{ für jedes } v \in V\} \subset CV^\delta(X, E).$$

Man beachte, daß nach dem Satz von Mackey (die beschränkten Mengen in E und $E = E[\delta(E, E')]$ sind identisch) $v \in B(X, E)$ äquivalent zu $v \in B(X, E_\delta)$ ist, also $CV^\delta(X, E) = CV(X, E_\delta)$.

$CV^\delta(X, E)$ und $CV_0^\delta(X, E)$ sind lineare Räume. Offensichtlich gilt $CV(X, E) \subset CV^\delta(X, E)$, $CV_0(X, E) \subset CV_0^\delta(X, E)$, $C_c(X, E) \subset C_c(X, E_\delta) \subset CV_0^\delta(X, E)$ und $CV(X) = CV^\delta(X, \mathbb{C})$, $CV_0(X) = CV_0^\delta(X, \mathbb{C})$.

Für jedes $f \in CV^\delta(X, E)$ ist

$$bv_\alpha(f) = \sup_{x \in X} p_\alpha(v(x)f(x)) = \sup_{x \in X} v(x)p_\alpha(f(x)) \text{ ebenfalls definiert;}$$

wie in §1 zeigt man, daß $\{bv_\alpha; \alpha \in A, v \in V\}$ ein gerichtetes System von Halbnormen auf $CV^\delta(X, E)$ darstellt. Wir versehen $CV^\delta(X, E)$ und $CV_0^\delta(X, E)$ mit der von diesem System induzierten (kanonischen) separierten lokalkonvexen Topologie, die $CV(X, E)$ bzw. $CV_0(X, E)$ zu einem linearen und topologischen Unterraum von $CV^\delta(X, E)$ bzw. $CV_0^\delta(X, E)$ macht.

6. Hilfssatz: Ist X lokalkompakt, so liegt $C_c(X, E_\delta)$ dicht in $CV_0^\delta(X, E)$.

Dies gilt analog zu §1, 15.(1).

I.a. sind $CV^\delta(X, E)$ und $CV_0^\delta(X, E)$ nicht vollständig.

7. Satz: Seien X, V und E wie in 5. Definiere die lineare Abbildung $\tilde{A}: \tilde{u} \rightsquigarrow (x \longrightarrow \tilde{u}(\delta_x))$ ($\tilde{u} \in E\tilde{E}CV(X), x \in X$).

Dann erhält man:

- (1) \tilde{A} ist topologischer Isomorphismus von $E\tilde{E}CV(X)$ in $CV^d(X, E)$.
- (2) Für $f \in \tilde{A}(E\tilde{E}CV(X))$ und $v \in V$ stellt $\Gamma((vf)(X))$ eine relativkompakte Menge in E dar.
- (3) \tilde{A} definiert einen topologischen Isomorphismus von $E\tilde{E}CV_0(X) \subset E\tilde{E}CV(X)$ in $CV_0^d(X, E)$.

Beweis: Es gilt $\tilde{A}(\tilde{u}) = \tilde{u} \circ \tilde{I}$, wobei \tilde{I} die Einbettung von X in $CV'(X)$ bezeichnet, die nach §3, 2.(2) X stetig in $(CV(X))'$ ($=CV'(X)[\delta(CV'(X), CV(X))]$) abbildet. Nach Schwartz [36], Prop.5 von §1, p.35/36 ist $\tilde{u} \in E\tilde{E}CV(X)$ stetig von $(CV(X))'$ in E , so daß $\tilde{A}(\tilde{u})$ als Zusammensetzung zu $C(X, E)$ gehört.

Die restlichen Teile beim Beweis von §3, 11. lassen sich nun wegen der zitierten Proposition von Schwartz direkt auf diesen Fall übertragen und beweisen 7. q.e.d.

8. Korollar: (1) Unter den Voraussetzungen von 7. gilt bei Identifizierung:

$E \otimes_e CV(X) \subset E\tilde{E}CV(X) \subset CV^d(X, E)$ und $E \otimes_e CV_0(X) \subset E\tilde{E}CV_0(X) \subset CV_0^d(X, E)$.

(2) $E \otimes_e CV(X)$ bzw. $E \otimes_e CV_0(X)$ ist der Raum der Funktionen aus $CV^d(X, E)$ bzw. $CV_0^d(X, E)$ mit endlichdimensionalem Wertebereich.

Bemerkungen: 1. Es ist nicht etwa zu erwarten, daß $E \otimes_e CV_0(X)$ allgemein in $CV_0^d(X, E)$ dicht liegt, da

$E \otimes_e CV_0(X) \subset CV_0(X, E) \subset CV_0^d(X, E)$, und wenn $CV_0(X, E)$ vollständig ist und sich von $CV_0^d(X, E)$ unterscheidet, so kann $E \otimes_e CV_0(X)$ nicht dicht im Raum $CV_0^d(X, E)$ liegen (vgl. aber §6, 6.(2)).

2. In 8. ist die Topologie von $E \otimes_e CV(X)$ bzw. $E \otimes_e CV_0(X)$ wiederum die von $CV^d(X, E)$ induzierte. Sind E und $CV(X)$

bzw. $CV_0(X)$ vollständig, ergibt sich $E \otimes_e CV(X) \subset E \otimes_e CV(X) \subset E\tilde{E}CV(X) = E\tilde{E}CV(X) \subset CV^d(X, E)$ bzw.

$E \otimes_e CV_0(X) \subset E \otimes_e CV_0(X) \subset E\tilde{E}CV_0(X) \subset CV_0^d(X, E)$.

3. Für lokalkonvexes E erhält man einen anderen Beweis von $E \otimes_e CV(X) \subset CV(X, E)$ bzw. $E \otimes_e CV_0(X) \subset CV_0(X, E)$ aus der Tatsache, daß auf dem endlichdimensionalen linearen Unterraum von E , der das Bild von $f \in E \otimes_e CV(X)$ bzw. $E \otimes_e CV_0(X)$ enthält, die Topologie von E und $\delta(E, E')$ identisch sind.

9. Hilfssatz: Seien die Voraussetzungen wie in 7.,
 $f = \tilde{A}(\tilde{u}) \in E\tilde{E}CV(X) \subset CV^d(X, E)$ bzw. $E\tilde{E}CV_0(X) \subset CV_0^d(X, E)$
 und $v \in V$ beliebig. Definiere für $\epsilon > 0$ $A_{v, \epsilon} := \{x \in X; v(x) \geq \epsilon\}$.
 Dann bildet $f|_{A_{v, \epsilon}}$ stetig in E ab.

Beweis: $f|_{A_{v, \epsilon}} = \tilde{u} \circ \tilde{I}|_{A_{v, \epsilon}}$. Wenn gezeigt wird, daß $\tilde{I}(A_{v, \epsilon})$ in
 einer gleichstetigen Menge von $CV'(X)$ bzw. $CV_0'(X)$ liegt,
 folgt die Behauptung, weil $\tilde{u} \in E\tilde{E}CV(X)$ bzw. $E\tilde{E}CV_0(X)$ auf jeder
 solchen Menge stetig als Abbildung von der schwachen Topo-
 logie in E ist. Nun gilt aber in der Bezeichnungsweise von
 §3 $\{v(x)\delta_x; x \in A_{v, \epsilon}\} \subset U_{v, \epsilon}^0$, daher $\tilde{I}(A_{v, \epsilon}) = \{\delta_x; x \in A_{v, \epsilon}\} \subset U_{v, \epsilon}^0$.
 w.z.b.w.

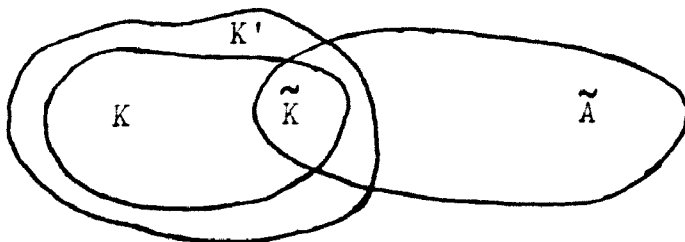
Bemerkung: Ist $W \leq V$ (also $E\tilde{E}CV(X) = E\tilde{E}CV(X)$ für $X = k$ -Raum), so
 gibt es für eine kompakte Menge K in X eine Funk-
 tion $v \in V$ mit $v(x) \geq 1$ auf K . Nach 9. bildet $f = \tilde{A}(\tilde{u})$ jede kom-
 pakte Menge in X stetig in E ab. Daraus folgt die Stetigkeit
 von f als Funktion von dem vollständig regulären k -Raum X in
 E , d.h. $E\tilde{E}CV(X) \subset CV(X, E)$ bzw. $E\tilde{E}CV_0(X) \subset CV_0(X, E)$ (was in §3,
 11. auf etwas andere Art bewiesen wurde).

Wir beschränken uns nun erneut auf $CV_0(X)$, um 3. zu verall-
 gemeinern.

10. Theorem: Sei $V > 0$ Nachbin-Familie auf dem lokalkompakten
 Raum X und $(E, \{p_\alpha; \alpha \in A\})$ lokalkonvex. Dann
 liegt $E \odot CV_0(X)$ dicht in $E\tilde{E}CV_0(X)$.

Beweis: Zu $f \in E\tilde{E}CV_0(X)$, $v \in V$, $\alpha \in A$ und $\epsilon > 0$ ist eine Funktion
 $g \in E \odot CV_0(X)$ gesucht mit $p_\alpha((vf - vg)(x)) < \epsilon$ für jedes $x \in X$.

Betrachte zur besseren Übersicht das folgende Diagramm:



Wegen $f \in CV_0^d(X, E)$ gibt es eine kompakte Menge K in X mit
 $p_\alpha((vf)(x)) < \frac{\epsilon}{4}$ für $x \in X \setminus K$. Sei v auf der Abschließung \overline{K}
 der offenen relativkompakten Umgebung K' von K durch $M > 0$
 beschränkt. Da f stetig von X in E_α ist, stellt $f(K)$ eine
 in E_α kompakte, daher in E beschränkte Menge dar: Sei für

$N > 0$ $p_\alpha(f(x)) \leq N$ ($x \in K$ beliebig). Setze $\tilde{A} := A_{v, \frac{\epsilon}{2N}}$ und $\tilde{K} := K \cap \tilde{A}$; \tilde{K} ist kompakt in X . Da f nach 9. \tilde{A} stetig in E abbildet, ist für $x \in \tilde{K}$ und mit $U := \{e \in E; p_\alpha(e) < \frac{\epsilon}{2M}\}$ die Menge $S_x := f|_{\tilde{A}}^{-1}(f(x) + U)$ offen in \tilde{A} , $S_x = O_x \cap \tilde{A}$ für O_x offen in X .

Mit $U_x = O_x \cap K'$ erhält man durch $\bigcup_{x \in \tilde{K}} U_x$ eine offene Überdeckung von \tilde{K} , aus der sich eine endliche Teilüberdeckung $\bigcup_{k=1}^q U_k$

auswählen läßt ($U_k = U_{x_k}$): $\tilde{K} \subset \bigcup_{k=1}^q U_k \subset K'$, U_k offen in X ,

$x_k \in U_k \cap \tilde{K}$, so daß $p_\alpha(f(x) - f(x_k)) < \frac{\epsilon}{2M}$ für jedes $x \in U_k \cap \tilde{A}$. Sei

$\{g_k; k=1, \dots, q\} \subset C_c(X, \mathbb{R})$ eine dieser Überdeckung zugeordnete

Zerlegung der Eins und setze $g(x) := \sum_{k=1}^q f(x_k) g_k(x)$,
 $g \in E \otimes CV_0(X)$.

Für jedes $x \in \tilde{K}$ gilt $p_\alpha((vf - vg)(x)) = p_\alpha(\sum_{k=1}^q g_k(x) v(x) (f(x) - f(x_k)))$

$$< \sum_{k=1}^q g_k(x) v(x) p_\alpha(f(x) - f(x_k)) < \sum_{k=1}^q g_k(x) M \frac{\epsilon}{2M} = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Für $x \in K \setminus \tilde{K}$ ist $x \notin \tilde{A}$, d.h. $v(x) < \frac{\epsilon}{2N}$, $p_\alpha((vf - vg)(x)) \leq$

$$v(x) (p_\alpha(f(x)) + p_\alpha(\sum_{k=1}^q g_k(x) f(x_k))) \leq \frac{\epsilon}{2N} (N + \sum_{k=1}^q g_k(x) p_\alpha(f(x_k))) \leq \frac{\epsilon}{2N} (N + N) = \epsilon.$$

Ist $x \in \tilde{A} \setminus \tilde{K}$, so hat man $g_k(x) p_\alpha(v(x) f(x_k)) \neq 0$ nur, wenn $x \in U_k \setminus K$.

Dann gilt aber $p_\alpha(v(x) f(x_k)) \leq p_\alpha(v(x) f(x)) + v(x) p_\alpha(f(x_k) - f(x))$

$$< \frac{\epsilon}{4} + M \frac{\epsilon}{2M} = \frac{3}{4} \epsilon, \text{ somit } p_\alpha((vf - vg)(x)) \leq p_\alpha((vf)(x)) + p_\alpha((vg)(x))$$

$$< \frac{\epsilon}{4} + p_\alpha(v(x) \sum_{k=1}^q g_k(x) f(x_k)) \leq \frac{\epsilon}{4} + \sum_{k=1}^q g_k(x) p_\alpha(v(x) f(x_k)) \leq \frac{\epsilon}{4} + \frac{3}{4} \epsilon = \epsilon$$

für jedes $x \in \tilde{A} \setminus \tilde{K}$.

Gehört schließlich x zu $X \setminus (K \cup \tilde{A})$, so ist $p_\alpha((vf - vg)(x)) \leq$

$$p_\alpha((vf)(x)) + v(x) p_\alpha(\sum_{k=1}^q g_k(x) f(x_k)) < \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{2N} \sum_{k=1}^q g_k(x) p_\alpha(f(x_k))$$

$$< \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{2N} N < \epsilon. \text{ q.e.d.}$$

11. Theorem: Seien die Voraussetzungen wie in 10.

(1) Dann hat $CV_0(X)$ stets die Approximationseigenschaft im Sinne von Schwartz [36],

Prélim., Déf., p.5 (d.h. die Identität von $E = CV_0(X)$ ist

Berührungspunkt von $E \otimes E'$ in dem Raum $\mathcal{L}_{c_0}(E, E)$ der stetigen linearen Operatoren auf E , versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf absolutkonvexen kompakten Mengen in E).

(2) Ist $CV_0(X)$ zusätzlich quasivollständig, so erfüllt $CV_0(X)$ die Approximationsbedingung im üblichen (Grothendieck-schen) Sinne.

(1) folgt aus 10. zusammen mit Schwartz [36], §1, Prop.11, p.46/47, während für quasivollständige Räume allgemein die Approximationsbedingungen von Schwartz und von Grothendieck zusammenfallen.

Hinweis: Um eine Anwendung von 11. auf konkrete Räume der Analysis zu geben, betrachte man etwa die von W.B. Jones in [53] eingeführten lokalkonvexen Räume $H(X)$ und $C(X)$ mit der Topologie $\tau_{\mathcal{J}}$. Dabei ist X ein Gebiet in der komplexen Ebene, $H(X)$ der Raum der holomorphen Funktionen auf X und $\tau_{\mathcal{J}}$ die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf dem System \mathcal{J} aller kompakten Teilmengen von X , die nur endlich viele Häufungspunkte besitzen (äquivalent: $\tau_{\mathcal{J}}$ = Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf je endlich vielen konvergenten Folgen in X).

Mit $V = \{\lambda x_s; \lambda > 0, s \in \mathcal{J}\}$ ist $C(X)[\tau_{\mathcal{J}}] = CV_0(X)$ vollständig, so daß $C(X)[\tau_{\mathcal{J}}]$ nach 11.(2) die Approximationseigenschaft besitzt. Wegen Jones [53], Cor.2.2 stellt $C(X)[\tau_{\mathcal{J}}]$ die Vervollständigung von $H(X)[\tau_{\mathcal{J}}]$ dar; nach Schwartz [34], Exp. no.15, Th.7 hat also auch $H(X)[\tau_{\mathcal{J}}]$ die Approximationseigenschaft. Man beachte, daß wegen der Bemerkung am Ende von p.154 in [53] weder $C(X)[\tau_{\mathcal{J}}]$ noch $H(X)[\tau_{\mathcal{J}}]$ nukleare Räume sind (Den Hinweis auf die Arbeit [53] von Jones verdanke ich Herrn E. Dubinsky.).

Wir haben gesehen, daß zur Behandlung der Räume $CV_0(X, E)$ $\tilde{\otimes}$ -Produkt und Tensorprodukt mit Vorteil herangezogen werden können und interessante Ergebnisse auch dann liefern, wenn $CV_0(X, E)$ nicht vollständig ist.

Dagegen erscheint das injektive Tensorprodukt für Räume des Typs $CV(X, E)$ nicht so geeignet, wie sich etwa aus §4, 10.(1) zeigt: Ist E vollständiger lokalkonvexer Raum mit Approximationseigenschaft, X vollständig regulärer k -Raum und gilt $W \triangleleft V$, so erhält man eine Isomorphie von $E \otimes_{\epsilon} CV(X)$ auf

$CV^p(X, E)$, einen in vielen Fällen echten Unterraum von $CV(X, E)$. Dazu erlauben es die Funktionen aus $CV(X, E)$ nicht, sich auf kompakte Mengen in X zurückzuziehen, so daß i.a. nicht mit einer Zerlegung der Eins gearbeitet werden kann.

Wir wollen deshalb nur an dem Beispiel $(CB(X), \mathfrak{d})$ ($= CV(X)$ für $V=CB^+(X)$) untersuchen, in welcher Beziehung $E \otimes CB(X)$, $E \in CB(X)$ und $CB(X, E)$ zueinander stehen, wenn E ein lokalkonvexer Raum ist und stets die Topologie \mathfrak{d} betrachtet wird. Es ist zunächst klar, daß $CB(X, E)$ sich i.a. von $CB^p(X, E) = \{f \in CB(X, E); f(X) \text{ präkompakt in } E\}$ unterscheidet: Man nehme $X = \mathbb{N}$ (mit der diskreten Topologie ein lokalkompakter Raum), $E = H$, ein separabler unendlichdimensionaler Hilbertraum, und beachte, daß für ein Orthonormalsystem $\{e_n; n \in \mathbb{N}\}$ in H die Funktion $f(n) = e_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ zu $CB(X, E)$, nicht aber zu $CB^p(X, E)$ gehört.

Durch leichte Modifizierung des Argumentes mit der Zerlegung der Eins zeigt man (vgl. Grothendieck [52], Ch.1, no.9, Exercice 2):

12. Satz: Sei $(E, \{p_\alpha; \alpha \in A\})$ lokalkonvexer Raum, X vollständig regulär und f eine Funktion aus $CB(X, E)$ mit $f(X)$ relativkompakt in E . Dann ist f Berührungspunkt von $E \otimes CB(X)$.

Beweis: Zu $\alpha \in A$, $\varepsilon > 0$ wird $g \in E \otimes CB(X)$ gesucht, so daß $p_\alpha((f-g)(x)) < \varepsilon$ für jedes $x \in X$. $K := \overline{f(X)}$ ist kompakt in E und $\bigcup_{x \in X} (f(x) + U_{\alpha, \varepsilon})$ eine offene Überdeckung von K -

$$U_{\alpha, \varepsilon} := \{e \in E; p_\alpha(e) < \varepsilon\}.$$

Sei $\bigcup_{k=1}^q U_k$ eine endliche Teilüberdeckung mit $U_k = f(x_k) + U_{\alpha, \varepsilon}$, $x_k \in X$ ($k=1, \dots, q$), derart daß $p_\alpha(e - f(x_k)) < \varepsilon$ für jedes $e \in U_k$. Weil E als separierter topologischer Vektorraum vollständig regulär, existiert eine Zerlegung der Eins $\{g_k; k=1, \dots, q\}$

aus $CB(E)$ mit $0 \leq g_k$, $g_k = 0$ außerhalb U_k , $\sum_{k=1}^q g_k = 1$ auf K .

Setze $g(x) := \sum_{k=1}^q h_k(x) f(x_k)$ für $x \in X$, $h_k = g_k \circ f \in CB(X)$, $g \in E \otimes CB(X)$.

Für jedes $x \in X$ erhält man dann $p_\alpha((f-g)(x)) =$

$$p_{\alpha} \left(\sum_{k=1}^q h_k(x)(f(x)-f(x_k)) \right) \leq \sum_{k=1}^q g_k(f(x)) p_{\alpha}(f(x)-f(x_k)) \leq \varepsilon \sum_{k=1}^q g_k(f(x)) = \varepsilon . \text{ q.e.d.}$$

Wegen §3, 11. und da $\{\delta_x; x \in X\}$ in einer gleichstetigen Menge von $CB'(X)$ enthalten, also $I: x \longrightarrow \delta_x$ stetig von X in $(CB(X))'_c$, und für beliebiges vollständig reguläres X $E \in CB(X) \subset CB(X, E)$ ist, folgt sofort:

13. Korollar: Seien X und E wie in 12.

(1) $E \in CB(X)$ liegt dicht in $E \in CB(X)$.

(2) $CB(X)$ hat die Approximationseigenschaft (ebenso $(CB(X), \delta)_c$).

13.(2) ist bekannt (s. Schwartz [34], Exp. no.15, Th.2, Cor.2): $CB(X)$ ist ja isometrisch isomorph $C(\beta X)$ für $\beta X = \text{Stone-}\check{\text{C}}\text{ech-Kompaktifizierung von } X$. Hier wird aber ein direkter Beweis angegeben, der ohne diese Isomorphie auskommt und sofort Resultate für vektorwertige Funktionen liefert.

Ebenso einfach ergibt sich:

14. Korollar: Ist E vollständiger lokalkonvexer Raum, so gilt für jedes vollständig reguläre X :

$$E \overset{\vee}{\in} CB(X) = E \in CB(X) = CB^p(X, E) \subset CB(X, E).$$

§ 6 Folgerungen aus der Darstellung als $\tilde{\mathcal{E}}$ -Produkt

Im vorhergehenden Paragraphen haben wir unser Interesse auf das injektive Tensorprodukt $E \tilde{\mathcal{E}} CV_0(X)$ konzentriert und Folgerungen für das $\tilde{\mathcal{E}}$ -Produkt $E \tilde{\mathcal{E}} CV_0(X)$ erhalten. Wir wenden uns jetzt einer direkten Behandlung der Räume $E \tilde{\mathcal{E}} CV(X)$ und $E \tilde{\mathcal{E}} CV_0(X)$ zu.

1. Satz: Sei X vollständig regulär, $V > 0$ Nachbin-Familie auf X , E lokalkonvexer Raum.

(1) Sei $f \in CV^d(X, E)$ bzw. $CV_0^d(X, E)$ und definiere

$f_{e'}(x) := e'(f(x))$ für $x \in X$, $e' \in E'$. Dann findet man $f_{e'} \in CV(X)$ bzw. $CV_0(X)$.

(2) Erfülle f zusätzlich die Bedingung:

(*) Für jedes $v \in V$ ist $\Gamma((vf)(X))$ relativkompakt in E .
(oder: (**) Für jedes $v \in V$ ist $(vf)(X)$ präkompakt in E .)

Dann gehört die Abbildung $L(f): e' \longrightarrow f_{e'}$ für alle $e' \in E'$ zu $CV(X) \tilde{\mathcal{E}} E$ bzw. $CV_0(X) \tilde{\mathcal{E}} E$ (oder $CV(X) \mathcal{E} E$ bzw. $CV_0(X) \mathcal{E} E$).

Im ersten Falle gilt also: $L(f)$ ist

(i) stetig von $E'[\mathcal{J}(E', E)]$ in $CV(X)[\mathcal{J}(CV(X), CV'(X))]$ bzw. $CV_0(X)[\mathcal{J}(CV_0(X), CV_0'(X))]$,

(ii) auf jeder gleichstetigen Menge von E' stetig von $\mathcal{J}(E', E)$ in $CV(X)$ bzw. $CV_0(X)$.

(iii) Das Bild unter $L(f)$ jeder gleichstetigen Menge aus E' ist relativkompakt in $CV(X)$ bzw. $CV_0(X)$.

(3) Für f mit der Bedingung (*) wie in (2) ist die transponierte Abbildung $B(f) = {}^t L(f)$ von $L(f)$ Element von $E \tilde{\mathcal{E}} CV(X)$ bzw. $E \tilde{\mathcal{E}} CV_0(X)$; es gilt $e'(B(f)(\mu)) = \mu(f_{e'})$ für alle $e' \in E'$, $\mu \in CV'(X)$ bzw. $CV_0'(X)$ und $B(f)(\delta_x) = f(x)$ für jedes $x \in X$.

(4) Man erhält bei Identifizierung:

$CV(X) \tilde{\mathcal{E}} E = E \tilde{\mathcal{E}} CV(X) = \{f \in CV^d(X, E); \Gamma((vf)(X)) \text{ relativkompakt in } E \text{ für jedes } v \in V\}$,
 $CV_0(X) \tilde{\mathcal{E}} E = E \tilde{\mathcal{E}} CV_0(X) = \{f \in CV_0^d(X, E); \Gamma((vf)(X)) \text{ relativkompakt in } E \text{ für jedes } v \in V\}$.

(5) $L: f \longrightarrow L(f)$ liefert eine Einbettung von $CV^d(X, E)$ bzw. $CV_0(X, E)$ in $CV(X) \mathcal{E} E$ bzw. $CV_0(X) \mathcal{E} E$ (oder eine topologische Isomorphie in $CV(X) \tilde{\mathcal{E}} E$ bzw. $CV_0(X) \tilde{\mathcal{E}} E$, wenn E quasivollständig).

Beweis: Zu (1): Da $e' \in E'$ auf $E[\mathcal{J}(E, E')]$ stetig ist, folgt

(1) nach Definition von $CV^d(X, E)$ bzw. $CV_0^d(X, E)$.

Zu (2): Seien $\epsilon > 0$, $v \in V$ beliebig,

$U_{v, \epsilon} = \{g \in CV(X) \text{ bzw. } CV_0(X); \sup_{x \in X} |v(x)g(x)| \leq \epsilon\}$.

Zu zeigen: Es gibt eine absolutkonvexe kompakte (oder prä-kompakte) Menge K in E , so daß $L(f)(K^\circ) \subset U_{v,\epsilon}$, d.h. für jedes $e' \in K^\circ \subset E'$ erhält man $bv(f_{e'}) \leq \epsilon$. Nach Voraussetzung ist $\tilde{K} = \overline{\Gamma((vf)(X))}$ absolutkonvex und kompakt (oder $\tilde{K} = (vf)(X)$ präkompakt) in E ; gleiches gilt für die Menge $K = \frac{1}{\epsilon} \tilde{K}$. Für

$e' \in K^\circ$ ergibt sich

$$|(vf_{e'})(x)| = |e'((vf)(x))| = \epsilon |e'(\frac{1}{\epsilon}(vf)(x))| \leq \epsilon \quad \text{für alle } x \in X,$$

d.h. $bv(f_{e'}) \leq \epsilon$. Der Rest folgt aus Schwartz [36], Prop.5 von §1.

Zu (3): Der erste Teil ist wegen §3, 8.(5) klar. Es gilt $\langle B(f)(\mu), e' \rangle = \langle {}^tL(f)(\mu), e' \rangle = \langle \mu, L(f)(e') \rangle = \langle \mu, f_{e'} \rangle$ für alle $e' \in E'$, $\mu \in CV'(X)$ bzw. $CV'_0(X)$, insbesondere mit $\mu = \delta_x$ ($x \in X$): $\langle B(f)(\delta_x), e' \rangle = \langle \delta_x, f_{e'} \rangle = \langle f(x), e' \rangle$ für alle $e' \in E'$, daher $B(f)(\delta_x) = f(x)$.

Zu (4): Ist $\tilde{u} \in E \tilde{\epsilon} CV(X) (=CV(X) \tilde{\epsilon} E)$ bzw. $E \tilde{\epsilon} CV_0(X) (=CV_0(X) \tilde{\epsilon} E)$, so folgt aus §5, 7.(1) bzw. (3) $\tilde{A}(\tilde{u}) \in CV^\delta(X, E)$ bzw. $CV_0^\delta(X, E)$ und $\Gamma((vf)(X))$ relativkompakt in E für jedes $v \in V$ und $f = \tilde{A}(\tilde{u})$. Die Umkehrung ist nach (2) richtig; die Hintereinanderschaltung von $f \longrightarrow L(f)$, $L(f) \longrightarrow {}^tL(f) = B(f)$ und der Einbettung aus §5 ergibt nach (3) wieder f .

Zu (5): L bildet wegen (2) $CV^p(X, E)$ bzw. $CV_0(X, E) \subset CV^p(X, E)$ in $CV(X) \epsilon E$ bzw. $CV_0(X) \epsilon E$ ab; die Eineindeutigkeit dieser Abbildung sieht man sofort. Ist E quasivollständig, so stimmt $CV(X) \epsilon E$ bzw. $CV_0(X) \epsilon E$ mit $CV(X) \tilde{\epsilon} E = E \tilde{\epsilon} CV(X)$ bzw. $CV_0(X) \tilde{\epsilon} E = E \tilde{\epsilon} CV_0(X)$ überein, und die Topologie auf diesem Raum ist nach §5, 7.(1) identisch mit der von $CV^\delta(X, E)$ induzierten. q.e.d.

Bemerkung: Die Bedingungen $f \in CV^\delta(X, E)$ bzw. $CV_0^\delta(X, E)$ und (*) aus 1.(2) implizieren für einen k -Raum X und $W \subset V$ natürlich schon $f \in CV(X, E)$ bzw. $CV_0(X, E)$: Für jede kompakte Menge K in X existiert $v \in V$ mit $v(x) \geq 1$ auf K , d.h. $f(K) \subset \mathcal{U}((vf)(X))$ ist relativkompakt in E ; auf $f(K)$ fallen die Topologie von E und $\delta(E, E')$ zusammen; f ist stetig auf jeder kompakten Menge aus X in E .

Wir haben nach 1. für quasivollständiges E , vollständig reguläres X und $V > 0$ folgende Situation:

$$\begin{array}{cccccccc} E \otimes_{\mathbb{C}} CV(X) & \subset & CVP(X, E) & \subset & CV(X) \otimes E & = & CV(X) \tilde{\otimes} E & = & E \tilde{\otimes} CV(X) & \subset & CV^d(X, E) \\ \cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\ E \otimes_{\mathbb{C}} CV_0(X) & \subset & CV_0(X, E) & \subset & CV_0(X) \otimes E & = & CV_0(X) \tilde{\otimes} E & = & E \tilde{\otimes} CV_0(X) & \subset & CV_0^d(X, E) \end{array}$$

2. Theorem: Sei X vollständig regulär, $V > 0$ und E quasi-vollständiger lokalkonvexer Raum.

(1) Dann gilt im Sinne von topologischen Isomorphismen:

$$\begin{array}{l} CV(X) \otimes E = CV(X) \tilde{\otimes} E = E \tilde{\otimes} CV(X) = \{f \in CV^d(X, E); (vf)(X) \text{ präkompakt} \\ \text{in } E \text{ für jedes } v \in V\}, \\ CV_0(X) \otimes E = CV_0(X) \tilde{\otimes} E = E \tilde{\otimes} CV_0(X) = \{f \in CV_0^d(X, E); (vf)(X) \text{ präkompakt} \\ \text{in } E \text{ für jedes } v \in V\}. \end{array}$$

(2) Ist zusätzlich $W \leq V$ und X k -Raum, so ergibt sich:

$$\begin{array}{l} CV(X) \otimes E = CV(X) \tilde{\otimes} E = E \tilde{\otimes} CV(X) = E \otimes CV(X) = CV^P(X, E), \\ CV_0(X) \otimes E = CV_0(X) \tilde{\otimes} E = E \tilde{\otimes} CV_0(X) = E \otimes CV_0(X) = CV_0(X, E). \end{array}$$

Bemerkung: 2.(2) gilt ohne die Voraussetzung $X=k$ -Raum, wenn $CB^+(X) \leq V$.

2. ist eine einfache Folgerung von 1.(4), (5) und der Bemerkung nach 1.

3. Satz: Seien die Voraussetzungen wie in 2.(2).

Dann ist die Trilinearform

$(f, \mu, e') \longrightarrow e'(B(f)(\mu)) = \mu(f_{e'})$ für alle $f \in CVP(X, E)$ bzw. $CV_0(X, E)$, $\mu \in CV'(X)$ bzw. $CV_0'(X)$, $e' \in E'$ hypostetig auf $CVP(X, E) \times (CV(X))'_c \times E'_c$ bzw. $CV_0(X, E) \times (CV_0(X))'_c \times E'_c$ bzgl. des Systems der (relativ-) kompakten Mengen in $CVP(X, E)$ bzw. $CV_0(X, E)$, bzgl. des Systems der gleichstetigen Mengen in $CV'(X)$ bzw. $CV_0'(X)$ und bzgl. des Systems der gleichstetigen Mengen in E' .

Interessanter sind gewisse Spezialisierungen dieses Satzes:

4. Korollar: Seien X , V und E wie in 2.(2).

- (1) Die bilineare Abbildung $(f, e') \longrightarrow f_{e'}$ von $CVP(X, E) \times E'_c$ bzw. $CV_0(X, E) \times E'_c$ in $CV(X)$ bzw. $CV_0(X)$ ist hypostetig bzgl. des Systems der (relativ-) kompakten Mengen in $CVP(X, E)$ bzw. $CV_0(X, E)$ und bzgl. des Systems der gleichstetigen Mengen in E' . Das Bild unter dieser Abbildung des Produktes einer relativkompakten Menge in $CVP(X, E)$ bzw. $CV_0(X, E)$ und einer gleichstetigen Menge in E' ist relativkompakt in $CV(X)$ bzw. $CV_0(X)$.
- (2) Die bilineare Abbildung $(f, \mu) \longrightarrow B(f)(\mu)$ von $CVP(X, E) \times (CV(X))'_c$ bzw. $CV_0(X, E) \times (CV_0(X))'_c$ in E ist hypo-

stetig bzgl. des Systems der (relativ-) kompakten Mengen in $CV^p(X, E)$ bzw. $CV_0(X, E)$ und bzgl. des Systems der gleichstetigen Mengen in $CV'(X)$ bzw. $CV'_0(X)$. Das Bild unter dieser Abbildung des Produktes einer relativkompakten Menge in $CV^p(X, E)$ bzw. $CV_0(X, E)$ und einer gleichstetigen Menge in $CV'(X)$ bzw. $CV'_0(X)$ ist relativkompakt in E .

3. und 4. folgen aus $CV^p(X, E) = E\tilde{\mathcal{E}}CV(X)$ bzw. $CV_0(X, E) = E\tilde{\mathcal{E}}CV_0(X)$ und aus Cor.1 von Prop.4 in §1 von Schwartz [36]. Man kann analoge Aussagen für $(CV(X))'_b$ bzw. $(CV_0(X))'_b$ und E'_b anstelle von $(CV(X))'_c$ bzw. $(CV_0(X))'_c$ und E'_c beweisen, wenn man relativkompakte Mengen durch beschränkte ersetzt (vgl. [36], §2, Prop.18, Remarque 3).

Es soll jetzt die Beziehung zwischen $CV(X, E)$ und $CV^d(X, E)$ genauer untersucht werden.

5. Lemma: Sei E Semi-Montel-Raum, X vollständig regulärer k -Raum.

(1) Dann gilt: $C(X, E) = C(X, E_d)$.

(2) Für beliebige Nachbin-Familien $V > 0$ auf X fallen $CV^d(X, E)$ und $CV(X, E)$ bzw. $CV^d_0(X, E)$ und $CV_0(X, E)$ zusammen.

Hinweis: Man vergleiche Treves [44], II, Exercise 36.4 oder Prop.36.11; $f \in C(X, E_d)$ ist äquivalent zu der Bedingung: Für jedes $e' \in E'$ gehört $f_{e'}$ zu $C(X)$.

Wir geben einen Beweis an, da in dem genannten Buch eine Voraussetzung fehlt, so daß man sofort ein Gegenbeispiel findet: Sei in den Bezeichnungen von [44] E ein Montel-Raum, dessen Topologie von $\mathcal{d}(E, E')$ verschieden ist, und sei T der topologische Raum $E[\mathcal{d}(E, E')]$. Dann ist die Identitätsabbildung von T auf E "skalar" stetig, aber nicht stetig.

Beweis von 5.(1): Für beliebige kompakte Menge K in X und $f \in C(X, E_d)$ sei $f_K := f|_K \in C(K, E_d)$. Die Menge $f(K)$ ist $\mathcal{d}(E, E')$ -kompakt und nach dem Satz von Mackey in E beschränkt. Nach Horváth [21], 3, §9, Prop.2 fallen auf $f(K)$ $\mathcal{d}(E, E')$ und die Ausgangstopologie von E zusammen, d.h. $f_K \in C(K, E)$. Die Restriktion von f auf jede kompakte Menge in X ist stetig in E , so daß $f \in C(X, E)$ folgt, weil X k -Raum. w.z.b.w.

Bemerkungen: (1) Aus dem Beweis von 5. ersieht man: Ist f eine Funktion des topologischen Raumes X

in den Semi-Montel-Raum E , so daß $f_e \in CB(X)$ für jedes $e \in E'$, so gehört f zu $CB(X, E)$.

(2) 5. gilt allgemeiner für einen lokalkonvexen Raum E , in dem auf jeder beschränkten Menge die Ausgangstopologie und $\mathcal{L}(E, E')$ zusammenfallen (Diese Bedingung schließt den trivialen Fall $E[\mathcal{L}(E, E')]$ ein.). Man beweist nun, daß das genau dann der Fall ist, wenn jede beschränkte Menge in E präkompakt:

1. In $\mathcal{L}(E, E')$ ist jede beschränkte Menge präkompakt (vgl. Horváth [21], 3, §15, Example 1).
2. Ist in E jede beschränkte Menge B präkompakt, so ist das Bild $j(B)$ unter dem Isomorphismus j von E in seine Vervollständigung \hat{E} relativkompakt (s. [21], 2, §10, Theorem 2); auf der Abschließung $\overline{j(B)}$ in \hat{E} fallen die von \hat{E} induzierte Topologie und die schwächere Hausdorfftopologie $\mathcal{L}(\hat{E}, \hat{E}')$ zusammen. Auf der Teilmenge $j(B)$ von $\overline{j(B)}$ ist aber die von \hat{E} induzierte Topologie gleich der von E und die von $\mathcal{L}(\hat{E}, \hat{E}')$ induzierte Topologie identisch $\mathcal{L}(E, E')$ (vgl. Cor. von Prop. 1 in 3, §13 von [21]).

Die zuletzt angegebene Bedingung erfüllt jeder Schwartz-Raum E (vgl. [21], 3, §15, Prop.4(i)), während nur jeder quasivollständige Schwartz-Raum auch Semi-Montel-Raum ist. Wir werden jedoch in Zukunft nicht mehr auf eine solche Abschwächung der Voraussetzung eingehen.

6. Korollar: Seien X, V und E wie in 5. und zusätzlich E quasivollständig. Dann gilt:

- (1) $CV(X) \tilde{E} E = E \tilde{E} CV(X) = CV^p(X, E) = CV(X, E) = CV^{\mathcal{L}}(X, E),$
 $CV_0(X) \tilde{E} E = E \tilde{E} CV_0(X) = CV_0(X, E) = CV_0^{\mathcal{L}}(X, E).$
- (2) $E \otimes_{\epsilon} CV_0(X)$ liegt dicht in $CV_0(X, E) = CV_0^{\mathcal{L}}(X, E)$, und $E \otimes_{\epsilon} CB(X)$ liegt dicht in $CB(X, E)$.

Hier ist nach dem Schema vor 2., 5.(2), §5, 1. und §5, 12. nichts mehr zu beweisen.

Wir wollen nun die bereits vorliegenden Ergebnisse ausnutzen, um eine "schwache" Charakterisierung der Räume $CV(X, E)$ und $CV_0(X, E)$ für vollständig reguläre X und lokalkonvexe E zu geben.

In einer (wie sich gleich zeigen wird) etwas unpräzisen Weise verstehen wir zunächst darunter die

Frage: Gehört eine Funktion f von X in E , für die $f_{e'} \in CV(X)$ bzw. $CV_0(X)$ für jedes $e' \in E'$ gilt, bereits automatisch zu $CV(X, E)$ bzw. $CV_0(X, E)$?

Man sieht sofort, daß keine Aussicht auf eine positive Antwort in genügend breitem Rahmen erwartet werden kann. Z.B. schon $C(K, E)$ für unendlichdimensionalen reflexiven Banachraum E mit Einskugel E_1 und den kompakten Raum $K = E_1, [\delta(E, E')]$ liefert ein Gegenbeispiel: Die identische Abbildung f von K in E gehört nicht zu $C(K, E)$, erfüllt aber $f_{e'} \in C(K)$ für jedes $e' \in E'$.

Die folgende modifizierte Frage hat mehr Aussicht auf Erfolg:

Frage: Unter welchen Voraussetzungen an X , V und E gehört jede Funktion $f \in C(X, E)$, für die $f_{e'} \in CV(X)$ bzw. $CV_0(X)$ für jedes $e' \in E'$ gilt, zu $CV(X, E)$ bzw. $CV_0(X, E)$?

Für einen Semi-Montel-Raum E zeigt 5.(1), daß dann die Bedingung $f \in C(X, E)$ unnötig ist, sofern $X = k$ -Raum vorausgesetzt wird.

Die Frage für die Räume $CV(X, E)$ und $CV(X)$ ist nun sehr einfach positiv zu beantworten:

7. Hilfssatz: Sei E lokalkonvexer Raum, V Nachbin-Familie auf dem vollständig regulären Hausdorffraum X . Gilt für $f \in C(X, E)$ (bzw. für eine Funktion f von X in E , wenn X k -Raum und E Semi-Montel-Raum) und jedes $e' \in E'$ $f_{e'} \in CV(X)$, so gehört f zu $CV(X, E)$.

Nach Voraussetzung ist nämlich die Menge $(vf)(X)$ ($v \in V$ beliebig) $\delta(E, E')$ -beschränkt, so daß der Satz von Mackey die Behauptung liefert.

Jede Funktion $f \in C(X, E)$, die den Voraussetzungen der Frage mit $CV_0(X)$ genügt, liegt nach 7. in $CV(X, E)$; mehr läßt sich im allgemeinen nicht aussagen, insbesondere nicht $f \in CV_0(X, E)$, wie folgendes einfache Gegenbeispiel zeigt:

Sei $V = CB^+(X)$ mit $X = \mathbb{N}$ (diskrete Topologie). Dann ist $CV_0(X, E) = c_0(E)$, der Raum der in der Topologie von E gegen 0 konvergenten Folgen. Jede in E schwach gegen 0 konvergente, aber nicht gegen 0 konvergente Folge (z.B. ein Orthonormalsystem in einem unendlichdimensionalen separablen Hilbertraum) liefert ein Beispiel eines $f \in C(X, E)$ mit $f_{e'} \in CV_0(X)$

für alle $e' \in E'$, so daß zwar $f \in CV(X, E)$ (also eine beschränkte Folge in E), aber nicht $f \in CV_0(X, E)$.

Das Gegenbeispiel läßt sich nur konstruieren, wenn E kein Semi-Montel-Raum ist (vgl. Horváth [21], 3, §9, Cor. von Prop. 2). Es zeigt gleichzeitig, daß eine ähnlich starke Voraussetzung an E notwendig ist, wenn weiter über die Nachbin-Familie V nichts vorausgesetzt wird.

8. Lemma: Sei X vollständig regulär, $V > 0$ Nachbin-Familie auf X , E Semi-Montel-Raum. Gilt für die Funktion $f \in C(X, E)$ (bzw. f von X in E , wenn $X = k$ -Raum vorausgesetzt wird) $f_{e'} \in CV_0(X)$ für alle $e' \in E'$, so gehört f zu $CV_0(X, E)$.

Beweis: Zu zeigen ist $vf \in B_0(X, E)$ für vorgegebenes $v \in V$; es gilt bereits $f \in CV(X, E)$. $(vf)(X)$ ist eine beschränkte Menge B in E , auf der die Topologie von E und $\mathcal{O}(E, E')$ zusammenfallen. Da es wegen $vf_{e'} \in B_0(X)$ für jedes $e' \in E'$ zu einer beliebigen $\mathcal{O}(E, E')$ -Nullumgebung U in E eine kompakte Menge K in X gibt mit $(vf)(X \setminus K) \subset B \cap U$, gibt es auch zu jeder Nullumgebung V in E eine kompakte Menge K' in X mit $(vf)(X \setminus K') \subset V \cap B \subset V$. w.z.b.w.

Bei schwächeren Voraussetzungen an E und ohne Einschränkung für V muß nach geeigneten Zusatzbedingungen an f gesucht werden; dann garantiert 1. eine Lösung.

Dazu sei für $f \in C(X, E)$ mit $f_{e'} \in CV_0(X)$ ($e' \in E'$ beliebig) die lineare Abbildung $L(f)$ von E' in $CV_0(X)$ durch $e' \longrightarrow f_{e'}$ definiert. Ein allgemeineres Problem als das bisher betrachtete lautet:

Frage: Wann wird eine lineare Abbildung L von E' in $CV_0(X)$ durch eine Funktion $f \in CV_0(X, E)$ erzeugt, d.h. wann hat sie die Form $L = L(f)$ mit $f \in CV_0(X, E)$?

Dies ist nach 2. bzw. 6. gelöst:

9. Korollar: Sei X vollständig regulärer k -Raum, sei
(A) $W \leq V$ und E quasivollständiger lokalkonvexer Raum oder

(B) $V > 0$ und E quasivollständiger Semi-Montel-Raum.
Genau dann ist eine Funktion f von X in E Element von $CV_0(X, E)$ (bzw. $CV^p(X, E)$), wenn für jedes $e' \in E'$ $f_{e'} \in CV_0(X)$ (bzw. $CV(X)$) gilt und $L(f): e' \longrightarrow f_{e'}$ zu $CV_0(X) \tilde{\in} E$ (bzw. $CV(X) \tilde{\in} E$) gehört.

Man darf 9. (in gewissem Sinne) als allgemeinste schwache Charakterisierung von $CV_0(X, E)$ ansehen.

Wir geben zum Schluß eine Voraussetzung an das System V von Gewichtsfunktionen an, unter der eine einfachere Lösung des Problems möglich ist und die Bedingung $L(f) \in CV_0(X) \tilde{E}$ eliminiert werden kann.

Dazu benötigen wir einen Satz, der auch von eigenem Interesse ist und auf einer anderen (von L. Schwartz stammenden) Methode beruht.

10. Satz: Sei X lokalkompakt, $V > 0$ Nachbin-Familie auf X und E vollständiger lokalkonvexer Raum. $CV(X)$ bzw.

$CV_0(X)$ besitze die Eigenschaft:

(S') Auf jeder beschränkten Menge von $CV(X)$ bzw. $CV_0(X)$ ist die Topologie höchstens so stark wie die Topologie der kompakten Konvergenz τ .

(1) Dann kann jede Funktion $f \in C(X, E)$ mit $f_{e'} \in CV(X)$ bzw. $CV_0(X)$ für alle $e' \in E'$ zu einer (eindeutig bestimmten) linearen Abbildung $B(f) \in E \tilde{E} CV(X)$ bzw. $E \tilde{E} CV_0(X)$ mit $B(f)(\delta_x) = f(x)$ fortgesetzt werden.

(2) Diese Fortsetzung $B: f \longrightarrow B(f)$ liefert eine (lineare) Einbettung von $CV(X, E)$ bzw. $CV_0(X, E)$ in $E \tilde{E} CV(X)$ bzw. $E \tilde{E} CV_0(X)$, bei der $CV(X, E)$ bzw. $CV_0(X, E)$ die induzierte Topologie trägt. Insbesondere gilt $CV(X, E) = CV^p(X, E)$.

Beweis (vgl. Bourbaki [7], Ch. VI, §1, no. 6, Prop. 14 und Schwartz [35], 1. Prop. 7):

1. Zu zeigen ist zunächst (im Hinblick auf §3, 12. und die anschließende Bemerkung bzw. die analoge Prop. 5 von §1 in Schwartz [36]), daß die Abbildung

$$L_{v, \lambda}(f): \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{x_i} \longrightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) \quad (x_i \in X, \lambda_i \in \mathbb{C}, i=1, \dots, n,$$

$n \in \mathbb{N}$) auf $\lambda \Gamma = \lambda \Gamma \{v(x) \delta_x; x \in X \text{ mit } v(x) \neq 0\}$ ($\lambda > 0, v \in V$) stetig in 0 von $\kappa(CV^1(X), CV(X))$ bzw. $\kappa(CV_0^1(X), CV_0(X))$ in E ist, wo κ die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf absolutkonvexen kompakten Mengen angibt. Sei U abgeschlossene absolutkonvexe Nullumgebung in E , also $U = U^\infty$ nach dem Bipolarenatz. Dann muß bewiesen werden, daß eine absolutkonvexe kompakte Menge M in $CV(X)$ bzw. $CV_0(X)$ existiert mit

der Eigenschaft: Aus $\mu = \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{x_i} \in M \cap \lambda \Gamma$ und $e' \in U^\circ$ folgt

$|e'(L_{\nu, \lambda}(f)(\mu))| \leq 1$. Nach Definition von $f_{e'}$ ist die Behauptung gleichbedeutend mit $|(\sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{x_i})(f_{e'})| \leq 1$ für alle $e' \in U^\circ$ und $\mu = \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{x_i} \in M^\circ \cap \lambda \Gamma$. Dazu langt es zu zeigen, daß die absolutkonvexe Menge $M = \{f_{e'}; e' \in U^\circ\}$ relativkompakt in $CV(X)$ bzw. $CV_0(X)$ ist.

U° ist $\delta(E', E)$ -beschränkt, damit auch für festes $x \in X$ $M(x) = \{f_{e'}(x) = e'(f(x)); e' \in U^\circ\}$ beschränkt in \mathbb{C} . Außerdem ist M gleichstetig, denn für jedes $x_0 \in X$, jedes $\varepsilon > 0$ und die Nullumgebung U in E existiert zu $f \in C(X, E)$ eine Umgebung W von x_0 in X mit $f(x) - f(x_0) \in \varepsilon U$ für alle $x \in W$, so daß für jedes $e' \in U^\circ$ und jedes $x \in W$ $|f_{e'}(x) - f_{e'}(x_0)| = |e'(f(x) - f(x_0))| \leq \varepsilon$. Nach dem Satz von Ascoli (vgl. Bourbaki [5], Ch. X, §2, no.5, Cor.3 von Theorem 2) stellt daher M in der Topologie τ eine relativkompakte und die τ -Abschließung \bar{M} von M eine kompakte Menge dar.

Andererseits ist jede Halbnorm von $CV(X)$ bzw. $CV_0(X)$ auf M beschränkt: Für beliebiges $v \in V$ ist $(vf)(X)$ nach 7. beschränkt in E und wegen der Gleichstetigkeit der $e' \in U^\circ$ dann $U \cup \{(vf_{e'})_X = e'((vf)(X)); e' \in U^\circ\}$ beschränkt in \mathbb{C} . Es ist nun leicht zu sehen, daß auch \bar{M} in $CV(X)$ bzw. $CV_0(X)$ beschränkt; wegen der Bedingung (S') ist \bar{M} kompakt in $CV(X)$ bzw. $CV_0(X)$.

2. Nach 1. ist $B(f)$ definiert und stetig auf $\lambda U_{\nu, \lambda}^\circ$ [δ] ($\delta = \delta(CV'(X), CV(X))$ bzw. $\delta(CV_0'(X), CV_0(X))$) in E ($\lambda > 0$, $\nu \in V$ beliebig). Daher sind $\mu \rightarrow e'(B(f)(\mu))$ und $\mu \rightarrow \mu(f_{e'}) = \langle f_{e'}, \mu \rangle$ ($e' \in E'$) stetig auf $\lambda U_{\nu, \lambda}^\circ$ [δ] in \mathbb{C} . Die Abbildung $\mu \rightarrow e'(B(f)(\mu)) - \mu(f_{e'})$, auf der in $\lambda U_{\nu, \lambda}^\circ$ [δ] dichten Menge $\lambda \Gamma$ Null, verschwindet somit identisch, $e'(B(f)(\mu)) = \mu(f_{e'})$ für alle $e' \in E'$, $\mu \in CV'(X)$ bzw. $CV_0'(X)$.

3. Es ist noch (für den Fall, daß $CV(X)$ bzw. $CV_0(X)$ nicht vollständig) zu zeigen, daß die durch Fortsetzung der $L_{\nu, \lambda}$ ($\nu \in V$, $\lambda > 0$) gewonnene lineare Abbildung $B(f)$ stetig (in 0) von $\delta(CV'(X), CV(X))$ bzw. $\delta(CV_0'(X), CV_0(X))$ in $E[\delta(E, E')]$. Sei dazu $U = \{e \in E; |e_i'(e)| \leq \varepsilon, i=1, \dots, n\}$ ($\varepsilon > 0$, $e_i' \in E'$, $n \in \mathbb{N}$) Nullumgebung in $E[\delta(E, E')]$. Nach Voraussetzung gehören $f_{e_i'}$ ($i=1, \dots, n$) zu $CV(X)$ bzw. $CV_0(X)$, d.h. $\bar{U} = \{\mu \in CV'(X)$ bzw. $CV_0'(X); |\mu(f_{e_i'})| \leq \varepsilon, i=1, \dots, n\}$ ist

$\delta(CV'(X), CV(X))$ - bzw. $\delta(CV'_0(X), CV_0(X))$ -Nullumgebung in $CV'(X)$ bzw. $CV'_0(X)$, und es gilt $B(f)(\tilde{U}) \subset U$ nach 2. Damit ist (1) vollständig bewiesen und (2) wegen (1) und dem Schema vor §6, 2. klar. q.e.d.

Die Bedingung (S') ist für $V \leq W$ jedenfalls erfüllt. Für den Fall $W \leq V$ geht sie über in:

(S) Auf jeder beschränkten Menge von $CV(X)$ bzw. $CV_0(X)$ fällt die Topologie mit τ zusammen.

(S) entspricht dem erwähnten Axiom H_+ bei Schwartz, dem z.B. $CV(X)$, $CV_0(X)$ für $V=CB^+(X)$ nicht genügen. Dagegen ist (S) richtig für $CV_0(X)$ in den Fällen $V=C_c^+(X)$, $V=C_0^+(X)$ (vgl. §2, nach 17.) und, falls X (stets lokalkompakt) im Unendlichen abzählbar, für $V=C^+(X)$ (vgl. §2, 12. und Bourbaki [6], Ch.III, §1, no.1, Prop. 1(i) und 2(ii)). Ist $W \leq V$ und $CV_0(X)$ Semi-Montel-Raum, so erfüllt $CV_0(X)$ ebenfalls die Bedingung (S). Allgemeiner stimmt für $W \leq V$ ja auf einer kompakten Menge in $CV_0(X)$ die Topologie mit τ überein.

Wir kehren zu unserem Ausgangspunkt zurück und geben die aus 10. folgende schwache Charakterisierung von $CV_0(X, E)$ an:

11. Korollar: Seien X und E wie in 10., $W \leq V$, und genüge $CV(X)$ bzw. $CV_0(X)$ der Bedingung (S). Es gilt: Eine Funktion $f \in C(X, E)$ gehört genau dann zu $CV^p(X, E) = CV(X, E)$ bzw. $CV_0(X, E)$, wenn für jedes $e' \in E'$ $f_{e'} \in CV(X)$ bzw. $CV_0(X)$.

Es ist sofort klar, daß es auf die Vollständigkeit von E bei 11. nicht ankommt (Man betrachte f als Funktion in die vollständige Hülle von E).

Hinweis: Da für $V=C^+(X)$ (X lokalkompakt und im Unendlichen abzählbar) die Bedingung (S) erfüllt ist, folgt aus 11. und §2, 12.: Für einen lokalkonvexen Raum E gehört $f \in C(X, E)$ zu $CV_0(X, E)$ genau dann, wenn für jedes $e' \in E'$ $f_{e'} \in C_c(X)$.

Dasselbe Resultat läßt sich auch aus 7. und §2, 19. herleiten.

Damit sieht man an dem Beispiel von Schwartz [35], p.106, daß die Bedingung E -normiert in §2, 12. nicht völlig weggelassen werden kann: Eine stetige vektorwertige Funktion kann "skalar" kompakten Träger haben, ohne kompakten Träger zu besitzen, d.h. i.a. $C_c(X, E) \not\subseteq CV_0(X, E)$.

§ 7 Unterräume

Für den Rest der Arbeit beschränken wir uns auf Räume des Typs $CV_0(X, E)$ und machen zunächst generell folgende Vereinbarungen und Voraussetzungen: Falls nichts anderes gesagt ist, sei X vollständig regulärer k -Raum, V Nachbin-Familie auf X mit $W \leq V$ und Y abgeschlossener linearer Unterraum des vollständigen Raumes $CV_0(X)$ (mit der Relativtopologie).

1. Hilfssatz: Sei E beliebiger lokalkonvexer Raum.

(1) Bei geeigneter Identifizierung gilt

$$Y \tilde{E} = \{f \in CV_0(X) \mid \exists E \subset CV_0(X, E); f_{e'} \in Y \text{ für jedes } e' \in E'\}.$$

(2) Ist E quasivollständig, so erhält man

$$Y \tilde{E} = \{f \in CV_0(X, E); f_{e'} \in Y \text{ für jedes } e' \in E'\}.$$

(3) $Y \otimes E$ ist der Unterraum derjenigen Funktionen aus $Y \tilde{E}$, deren Bild endlichdimensional ist.

(1) und (2) folgen mit §3, 11. und §6, 2.(2).

Zu (3): Es ist zu zeigen: Ist $f \in Y \tilde{E} \subset CV_0(X, E)$ eine Funktion mit endlichdimensionalem Wertebereich, $f \neq 0$, so gilt $f \in Y \otimes E$. Zunächst ist wegen §4, 8.(3) $f \in CV_0(X) \otimes E$ klar. Dann hat f

die Form $f(x) = \sum_{i=1}^n e_i f_i(x)$ mit $n \in \mathbb{N}$, $\{e_i; i=1, \dots, n\}$ linear

unabhängig in E , $\{f_i; i=1, \dots, n\}$ linear unabhängig in $CV_0(X)$. Wir erhalten einen Widerspruch, wenn wir $f_{i_0} \notin Y$ ($i_0 \in \{1, \dots, n\}$) annehmen: Man wähle (vgl. Köthe [24], §20, 1.(2)) $e' \in E'$ mit $e'(e_i) = 0$ für $i \neq i_0$, $e'(e_{i_0}) = 1$; es wäre $f_{e'} = f_{i_0} \notin Y$ im Gegensatz zu $f \in Y \tilde{E}$.

2. Theorem: (1) Für Y sind folgende Aussagen äquivalent:

I. Y besitzt die Approximationseigenschaft.

II. Für beliebigen lokalkonvexen Raum E liegt in

$$\{f \in CV_0(X, E); f_{e'} \in Y \text{ für jedes } e' \in E', \text{ und die Abbildung } e' \longmapsto f_{e'} \text{ gehört zu } \mathcal{L}(E'_0, CV_0(X))\}$$

der Unterraum der Funktionen mit endlichdimensionalem Bild dicht.

(2) Ist Y'_0 quasivollständig (z.B. Y tonneliert), so sind

I. und II. äquivalent zu:

II!: Für beliebigen quasivollständigen lokalkonvexen Raum

E liegt in $\{f \in CV_0(X, E); f_{e'} \in Y \text{ für jedes } e' \in E'\}$ der Unterraum der Funktionen mit endlichdimensionalem Bild dicht.

(3) Ist Y (F)-Raum, so sind I., II., II' äquivalent zu:
II'': Für beliebigen Banachraum E liegt in
 $\{f \in CV_0(X, E); f_{e'} \in Y \text{ für jedes } e' \in E'\}$ der Unterraum
der Funktionen mit endlichdimensionalem Bild dicht.

(4) Ist Y (B)-Raum, so sind I., II., II', II'' äquivalent
zu:

II''': Für beliebigen abgeschlossenen linearen Unterraum E
von c_0 (=Raum der Nullfolgen) liegt in
 $\{f \in CV_0(X, E); f_{e'} \in Y \text{ für jedes } e' \in E'\}$ der Unterraum der Funk-
tionen mit endlichdimensionalem Bild dicht.

(1) und (2) folgen aus 1., §4, 4.(1) und §4, 3.(1). (3) ist
nach Schwartz [34], Exp. no.14, Th.2.II und (4) nach Wael-
broeck [45], Prop.4 richtig (vgl. §3, 8.(4)).

Bemerkung: Insbesondere erhält man durch Anwendung auf $X=N$,
 $V=CB^+(X)$ (also $CV_0(X, E)=c_0(E)$ =Raum der Nullfol-
gen aus E) und aus der bekannten Tatsache, daß jeder lokal-
konvexe Raum die Approximationseigenschaft besitzen würde,
sofern dies für jeden abgeschlossenen linearen Unterraum
von c_0 gilt (vgl. etwa Waelbroeck [45], Prop.4), verschie-
dene äquivalente Aussagen der Approximationshypothese von
Grothendieck (daß jeder lokalkonvexe Raum der Approximations-
bedingung genügt), darunter die folgende:

Für jeden abgeschlossenen linearen Unterraum Y von c_0 und
beliebigen (B)-Raum E liegt in
 $\{x=(x_n) \in c_0(E); e'x := (e'(x_n)) \in Y \text{ für jedes } e' \in E'\}$ der Unter-
raum der endlichdimensionalen Folgen (d.h. der Folgen, die
in einem endlichdimensionalen Unterraum von E liegen) dicht.

Hinweis: Der vorstehende Satz 2. kann dazu benutzt werden,
die Approximationseigenschaft für Unterräume Y von
Räumen stetiger Funktionen zu beweisen, wenn Approximations-
sätze für vektorwertige Funktionen bekannt sind.
So bemerkte A.M. Davie (nach Kenntnis von [3]), daß für eine
beliebige kompakte Menge K der komplexen Ebene wegen der
Äquivalenz von I. und II'' in 2. die Approximationseigen-
schaft für den Raum $R(K)$ (=Abschließung der rationalen
Funktionen mit Polen außerhalb K in $C(K)$ bzgl. der gleich-
mäßigen Topologie) direkt aus Gamelin, Garnett [16], Theorem
6.1 (und der Bemerkung vor 6.3 dort) folgt.

Davie hat mit einer ähnlichen Methode gezeigt (schriftliche Mitteilung), daß der Raum $A(K)$ der auf K stetigen, im Innern von K holomorphen Funktionen ebenfalls der Approximationsbedingung genügt.

Manchmal liegt ein anderes Problem vor: Es ist ein konkreter linearer Teilraum Y_E von $CV_0(X, E)$ (E lokalkonvex) gegeben; man definiert den linearen Raum $Y_0 = \{g \in CV_0(X); g = f_e, \text{ für gewisse } f \in Y_E \text{ und } e \in E\}$ und fragt, unter welchen Bedingungen $Y_E = Y_0 \check{\otimes}_E E$, wenn Y_0 mit der von $CV_0(X)$ induzierten Topologie versehen wird.

Betrachte dazu folgende Voraussetzung an Y_E :

(*) Alle Funktionen $f \in CV_0(X, E)$ der Form $f(x) = eg(x)$ (für alle $x \in X$) mit $e \in E$, $g \in Y_0$ gehören zu Y_E .

3. Hilfssatz: Sei E lokalkonvex, $Y_E \subset CV_0(X, E)$ und (*) erfüllt.

(1) Definiere für beliebiges $e \in E$:

$Y_e = \{f \in Y_E; f = eg \text{ mit } g \in CV_0(X)\}$. Dann sind für $e_1, e_2 \in E$ ($e_1, e_2 \neq 0$) die Unterräume Y_{e_1} und Y_{e_2} von $CV_0(X, E)$ topologisch isomorph (und zwar topologisch isomorph zu Y_0).

(2) Ist Y_E abgeschlossen in $CV_0(X, E)$, so ist Y_0 abgeschlossen in $CV_0(X)$.

Beweis: Zu (1): Es ist zu zeigen, daß für $e \in E$, $e \neq 0$, Y_e topologisch isomorph Y_0 . Man definiert $I: f = eg \longrightarrow g$ von Y_e in $CV_0(X)$ und stellt fest, daß aufgrund von (*) I wohldefinierte eineindeutige lineare Abbildung von Y_e auf Y_0 . Nach Definition der Topologie von $CV_0(X, E)$ bzw. $CV_0(X)$ (Y_E und Y_0 sind lineare und topologische Unterräume) ist I auch in beiden Richtungen stetig. Allgemeiner bildet $\tilde{I}: g \longrightarrow eg$ eine in beiden Richtungen stetige Abbildung von $CV_0(X)$ in $CV_0(X, E)$ und $Y_e = \tilde{I}(Y_0)$.

Zu (2): Ist Y_E abgeschlossen in $CV_0(X, E)$, so ist für beliebiges $e \in E$ Y_e als Teilraum von $CV_0(X, E)$ abgeschlossen, daher nach dem Beweis von (1) Y_0 abgeschlossen in $CV_0(X)$. w.z.b.w.

4. Theorem: Sei E vollständiger lokalkonvexer Raum, Y_E abgeschlossener linearer Unterraum von $CV_0(X, E)$ und erfülle Y_0 (oder E) die Approximationseigenschaft. Genau dann gilt $Y_E = Y_0 \check{\otimes}_E E$, wenn (*) erfüllt ist.

Beweis: Ist (*) erfüllt, so besagt dies $Y_0 \otimes E \subset Y_E$, also wegen der Abgeschlossenheit von Y_E $Y_0 \overset{\check{S}}{\otimes} E \subset Y_E$. Andererseits ist nach §5, 3.(2) $Y_E \subset CV_0(X, E) = CV_0(X) \overset{\check{S}}{\otimes} E$, d.h. die Abbildung $e' \longrightarrow f_e$ ist für $f_e \in Y_E$ stetig von E'_0 in $CV_0(X)$. Das Bild dieser Abbildung liegt nach Definition in dem Unterraum Y_0 von $CV_0(X)$, $Y_E \subset Y_0 \overset{\check{S}}{\otimes} E$. Da Y_0 bzw. E die Approximationseigenschaft erfüllt, gilt nach 3.(2) und §4, 3.(3) $Y_0 \overset{\check{S}}{\otimes} E = Y_0 \overset{\check{S}}{\otimes} E = Y_E$. q.e.d.

Satz 4. läßt sich dazu benutzen, eine Tensorproduktzerlegung für Unterräume stetiger vektorwertiger Funktionen zu beweisen, wenn die Approximationseigenschaft für den entsprechenden Raum skalarer Funktionen bekannt ist. 4. kann so als Umkehrung von Satz 2. betrachtet werden.

Hinweis: L. Eifler [15] hat die Approximationseigenschaft des Raumes $A(K)$ gezeigt, sofern K eine kompakte Menge in \mathbb{C} mit zusammenhängendem Komplement ist. Ausgehend von diesem Theorem wurde in [2] mit Hilfe einer sehr speziellen Fassung von 4. bewiesen, daß der Raum $A(K, E)$ der auf einer solchen Menge $K \subset \mathbb{C}$ stetigen, im Innern von K holomorphen Funktionen mit Werten in dem vollständigen lokal-konvexen Raum E die Darstellung $A(K, E) = A(K) \overset{\check{S}}{\otimes} E$ gestattet, und daraus eine vektorwertige Fassung des Satzes von Mergelyan hergeleitet.

Bemerkung: Über die Approximationseigenschaft von konkreten Unterräumen von $CV_0(X)$ sind außer den genannten nur wenige Resultate bekannt. Dagegen gibt es in der Literatur Kriterien für die Nuklearität solcher Räume. Diese Sätze haben in unserem Zusammenhang auch eine Bedeutung, weil jeder nukleare Raum der Approximationsbedingung genügt; wir wollen daher kurz darauf eingehen.

$C(X)$ mit der kompakten Konvergenz-Topologie ist bekanntlich genau dann nuklear, wenn jede kompakte Teilmenge von X endlich (s. Warner [46], Th.9), und $(CB(X), \beta)$ ist dann und nur dann nuklearer Raum, wenn X endlich (s. Collins [50], Th.4.10). Während also $CV_0(X)$ fast nie selbst einen nuklearen Raum darstellt, gibt es nukleare Teilräume, z.B. $H(X) =$ holomorphe Funktionen auf der offenen Teilmenge X des \mathbb{C}^n mit der kompakten Konvergenz-Topologie. Für stetige Gewichtsfunktionen $\{M_\alpha; \alpha \in A\}$ und Ω offen $\subset \mathbb{C}^n$ ($n \geq 1$) hat Nakamura

[28] mit Hilfe eines Satzes von Pietsch hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß die von Gelfand und Schilow eingeführten Räume $Z_{\Omega} \{M_{\mathbb{R}}\}$ holomorpher Funktionen auf Ω (die unter gewissen Voraussetzungen Unterräume von $C(M_{\mathbb{R}})_0(\Omega)$ sind) nuklear werden.

Von einfacherer Art als eine Tensorproduktzerlegung für Unterräume stetiger vektorwertiger Funktionen ist nach §5 das Problem, vektorwertige Approximationssätze vom Stone-Weierstraßschen Typ für $CV_0(X, E)$ herzuleiten, weil $E \otimes CV_0(X)$ in $CV_0(X, E)$ dicht liegt. Allein aus dieser Eigenschaft folgt:

5. Lemma: Sei X vollständig regulärer Raum, $V > 0$ Nachbin-Familie auf X und E lokalkonvex. Sei Y_E abgeschlossener linearer Unterraum von $CV_0(X, E)$ und Y_0 wie vor 3. definiert. Gilt $Y_0 = CV_0(X)$ und genügt Y_E der Bedingung (*), so erhält man $Y_E = CV_0(X, E)$.

5. ist insbesondere dann von Vorteil, wenn für den skalaren Raum $CV_0(X)$ Approximationssätze bekannt sind. So ergibt sich aus dem verallgemeinerten Stone-weierstraßschen Satz für die strikte Topologie von Glicksberg [51], Cor. unter Benutzung von 3.(2):

6. Korollar: Sei X lokalkompakt, E lokalkonvex und Y_E abgeschlossener linearer Teilraum von $(CB(X, E), \beta)$, der (*) erfüllt. Dann gilt $Y_E = CB(X, E)$, wenn
 (i) Y_0 selbstadjungiert, (ii) Y_0 Teilalgebra von $CB(X)$,
 (iii) für je zwei verschiedene Punkte $x_1, x_2 \in X$ $f \in Y_0$ existiert mit $f(x_1) = 1, f(x_2) = 0$.

Bemerkung: Die Bedingungen an Y_0 in 6. kann man zum Teil durch solche an Y_E ersetzen. Betrachte nämlich:

(iv) [(iv')] Mit $f \in Y_E, \varphi \in Y_0$ [$\varphi \in CB(X)$] gehört φf zu Y_E ,

(v) für jedes $x \in X$ ist $Y_E(x) = \{f(x); f \in Y_E\} \neq \{0\}$.

Es folgt jetzt (ii) aus (iv) und (iii) aus (iv') und (v).

Eine andere Möglichkeit, einen Approximationssatz für $CV_0(X, E)$ zu beweisen, besteht darin, auf die Methode der Zerlegung der Eins aus §5 zurückzugreifen.

7. Theorem: Sei X vollständig regulärer Raum, $V > 0$ Nachbin-Familie auf X und $(E; \{p_{\alpha}; \alpha \in A\})$ lokalkonvex.

Der abgeschlossene lineare Teilraum Y_E von $CV_0(X, E)$ fällt mit ganz $CV_0(X, E)$ zusammen, wenn er den Voraussetzungen (i) und (ii) genügt:

- (i) $Y_E(x) = \{f(x); f \in Y_E\} = E$ für jedes $x \in X$,
- (ii) für $f \in Y_E$ und $\varphi \in CV_0(X)$ mit Werten in $[0, 1]$ hat man $\varphi f \in Y_E$.

Beweis: Zu $f \in CV_0(X, E)$, $v \in V$, $\alpha \in A$ und $\epsilon > 0$ wird $g \in Y_E$ angegeben mit $bv_\alpha(f-g) = \sup_{x \in X} p_\alpha((vf-vg)(x)) < \epsilon$. Daraus folgt die Be-

hauptung aufgrund der Abgeschlossenheit von Y_E .

Wähle zu $f \in CV_0(X, E)$ wie beim Beweis von §5, 1. K kompakt in X mit $p_\alpha((vf)(x)) < \frac{\epsilon}{4}$ für $x \in X \setminus K$ und \tilde{K} offen, derart daß $K \subset \tilde{K}$ und $v(x) < M$ auf \tilde{K} ($M > 0$).

Wegen (i) gibt es zu jedem $x \in K$ eine Funktion $y_x \in Y_E$ mit $y_x(x) = f(x)$, so daß eine offene Umgebung $U_x \subset \tilde{K}$ von x existiert mit $p_\alpha(f(x') - y_x(x')) < \frac{\epsilon}{2M}$ für jedes $x' \in U_x$. Wegen der Kompaktheit von K findet man endlich viele $U_k = U_{x_k}$ und zugehörige

Funktionen $y_k = y_{x_k} \in Y_E$ mit $K \subset \bigcup_{k=1}^q U_k \subset \tilde{K}$ und $p_\alpha(f(x) - y_k(x)) < \frac{\epsilon}{2M}$ für alle $x \in U_k$.

Wie in §5, 1. läßt sich eine Zerlegung der Eins $\{g_k; k=1, \dots, q\}$ aus $CV_0(X)$ mit $0 \leq g_k \leq 1$, $g_k = 0$ außerhalb U_k , $\sum_{k=1}^q g_k(x) = 1$ auf K

und $\sum_{k=1}^q g_k(x) \leq 1$ auf X konstruieren. Definiere für $x \in X$

$g(x) := \sum_{k=1}^q g_k(x) y_k(x)$; wegen (ii) gehört g zu Y_E .

Durch eine Abschätzung wie beim Beweis von §5, 1. erhält man $p_\alpha((vf-vg)(x)) < \epsilon$ sowohl für $x \in K$ als auch für $x \in X \setminus K$.
q.e.d.

Hinweis: 7. verallgemeinert und impliziert den vektorwertigen Stone-Weierstraß-Satz für die strikte Topologie von Wells [47] (Theorem 2). Der Beweis ist von dem in [47] wesentlich verschieden und entspricht mehr dem von Theorem 3 bei Todd [43] (wo ebenfalls nur der Spezialfall $CV_0(X, E) = (CB(X, E), \beta)$ betrachtet wird).

8. Korollar: Seien die Voraussetzungen wie in 7. Der abgeschlossene lineare Unterraum Y_E von $CV_0(X, E)$ erfülle (i) aus 7. und sei Modul über $CB(X)$. Dann gilt

Bemerkungen: (1) Aus den Überlegungen in §5 weiß man: Ist X lokalkompakt, so kann Bedingung (ii) in 7.

ersetzt werden durch

(ii') für $f \in Y_E$ und $\varphi \in C_c(X)$ mit Werten in $[0,1]$ hat man

$$\varphi f \in Y_E.$$

Analog braucht für diesen Fall in 8. nur vorausgesetzt zu werden, daß Y_E Modul über $C_c(X)$ ist, um $Y_E = CV_o(X, E)$ schließen zu können.

(2) 7. und 8. werden mit $CV(X, E)$ anstelle von $CV_o(X, E)$ falsch, wie der abgeschlossene lineare Unterraum $C_o(X, E)$ von $CB(X, E)$ mit der gleichmäßigen Konvergenz-Topologie zeigt.

Wir schließen hier eine Betrachtung an, die in keinem direkten Zusammenhang zum vorhergehenden steht.

Es ist nach den Ergebnissen von §5 interessant, als Bildraum bei einem Raum stetiger vektorwertiger Funktionen einen Raum stetiger skalarer Funktionen zu nehmen und so das Tensorprodukt zweier gewichteter Räume stetiger Funktionen miteinander zu untersuchen. Man vermutet eine Isomorphie mit einem gewichteten Raum stetiger skalarer Funktionen auf dem topologischen Produkt der Urbildräume.

In dieser Richtung hat Summers ohne Benutzung vektorwertiger Funktionen den folgenden Satz bewiesen (der sich auch aus §5 herleiten läßt):

9. Satz ([40], Th.5.1): Seien X_1, X_2 lokalkompakt, U bzw. V Nachbin-Familien auf X_1 bzw. X_2 mit

$C_c^+(X_1) \leq U \leq C^+(X_1)$ und $C_c^+(X_2) \leq V \leq C^+(X_2)$. Sei $W = \{uv; u \in U, v \in V\}$, wo uv die Funktion $(uv)(x_1, x_2) = u(x_1)v(x_2)$ auf dem topologischen Produkt $X_1 \times X_2$ bezeichnet. Dann gilt $CU_o(X_1) \otimes_{\epsilon} CV_o(X_2) = CW_o(X_1 \times X_2)$ im Sinne einer topologischen Isomorphie.

Gemeint ist der Sachverhalt: W ist eine Nachbin-Familie auf $X_1 \times X_2$ mit $C_c^+(X_1 \times X_2) \leq W$, so daß $CW_o(X_1 \times X_2)$ vollständig. Identifiziert man $CU_o(X_1) \otimes_{\epsilon} CV_o(X_2)$ in der üblichen Weise mit einem Raum stetiger Funktionen auf $X_1 \times X_2$, so liefert dies eine topologische Isomorphie von $CU_o(X_1) \otimes_{\epsilon} CV_o(X_2)$ in $CW_o(X_1 \times X_2)$, und das Bild des Tensorproduktes liegt dicht in $CW_o(X_1 \times X_2)$.

Als Folgerung aus diesem Satz ergibt sich eine neue Charakterisierung für das ε -Produkt zweier gewichteter Räume als Funktionenraum.

Bei einer komplexwertigen Funktion auf $X_1 \times X_2$ wollen wir für festes $x_2 \in X_2$ mit $f(\cdot, x_2)$ die Funktion $x_1 \longrightarrow f(x_1, x_2)$ von X_1 in \mathbb{C} bezeichnen, analog für $f(x_1, \cdot)$.

10. Definition: Seien X_1, X_2, U, V, W wie in 9., seien Y_1 bzw. Y_2 abgeschlossene lineare Unterräume von $CW_0(X_1)$ bzw. $CV_0(X_2)$. Dann wird das "Slice-Produkt" von Y_1 und Y_2 definiert durch

$$Y_1 \# Y_2 = \{f \in CW_0(X_1 \times X_2); f(\cdot, x_2) \in Y_1 \text{ und } f(x_1, \cdot) \in Y_2 \text{ für jedes feste } (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2\}.$$

$Y_1 \# Y_2$ wird mit der von $CW_0(X_1 \times X_2)$ induzierten Topologie versehen.

Diese Definition ist eine Verallgemeinerung auf gewichtete Räume von Eifler [15], 2.1; sie macht es möglich, Prop. 15 aus [3] auf diesen allgemeineren Zusammenhang zu übertragen.

11. Satz: Seien die Voraussetzungen und Bezeichnungen wie in 10. Dann gilt $Y_1 \# Y_2 = Y_1 \varepsilon Y_2$ als topologischer Isomorphismus.

Beweis: Wegen 9. und §5, 3.(2) ergibt sich $CV_0(X_2, CU_0(X_1)) = CU_0(X_1) \varepsilon CV_0(X_2) = CU_0(X_1) \overset{\check{\otimes}}{\varepsilon} CV_0(X_2) = CW_0(X_1 \times X_2)$. Die Isomorphie von $CW_0(X_1 \times X_2)$ auf $CU_0(X_1) \varepsilon CV_0(X_2)$ wird durch die Abbildung $f \rightsquigarrow (\mu_1 \longrightarrow \mu_1 f)$ ($f \in CW_0(X_1 \times X_2)$, $\mu_1 \in CV_0(X_2)$) hergestellt, wobei $\mu_1 f$ die Funktion aus $CU_0(X_1)$ ist, die man durch Anwendung von μ_1 bzgl. der zweiten Variablen von f erhält ($f(x_1, \cdot) \in CV_0(X_2)$ für jedes $x_1 \in X_1$).

Mit §3, 9. findet sich $Y_1 \varepsilon Y_2 \subset Y_1 \varepsilon CV_0(X_2) \subset CU_0(X_1) \varepsilon CV_0(X_2)$; man kann $Y_1 \varepsilon Y_2$ als linearen und topologischen Unterraum von $CW_0(X_1 \times X_2)$ betrachten. Daher gilt

$$Y_1 \varepsilon Y_2 = \{f \in CW_0(X_1 \times X_2); x_1 \longrightarrow (\mu_1 f)(x_1) \text{ gehört zu } Y_1 \text{ und } x_2 \longrightarrow (\mu_1 f)(x_2) \text{ gehört zu } Y_2 \text{ für alle } \mu_1 \in CV_0(X_2)\},$$

womit $Y_1 \varepsilon Y_2 \subset Y_1 \# Y_2$ klar ist, weil für jedes $x_1 \in X_1, \delta_1 \in CV_0(X_2)$ und für jedes $x_2 \in X_2, \delta_2 \in CV_0(X_2)$.

Andererseits folgt aus der Stetigkeit der Abbildung $\mu_1 \longrightarrow \mu_1 f$ von $(CV_0(X_2))'$ in $CU_0(X_1)$, der Abgeschlossenheit von Y_1 und aus §3, 5., daß für $f \in Y_1 \# Y_2$ bereits

$x_1 \longrightarrow (\mu_2 f)(x_1)$ Element von Y_1 nicht nur für $\mu_2 = \delta_{x_2}$ ($x_2 \in X_2$), sondern für alle $\mu_2 \in CV_0(X_2)$. Aus Symmetriegründen ist mithin $Y_1 \# Y_2 \subset Y_1 \varepsilon Y_2$. q.e.d.

12. Korollar: Hat zu den Voraussetzungen von 10. Y_1 oder Y_2 die Approximationseigenschaft, so gilt

$$Y_1 \overset{\forall}{\otimes}_{\varepsilon} Y_2 = Y_1 \# Y_2.$$

Hinweis: Für kompakte X_1 und X_2 , $Y_1 \subset C(X_1)$, $Y_2 \subset C(X_2)$ mit der gleichmäßigen Konvergenz wurde 12. in [15], Prop.

2.2 gezeigt.

Zwar ist mir kein Satz bekannt, wonach $Y_1 \overset{\forall}{\otimes}_{\varepsilon} Y_2 = Y_1 \# Y_2$ die Approximationseigenschaft für einen der beiden Räume impliziert, doch hängt das Problem der Gleichheit von injektivem Tensorprodukt und Slice-Produkt für zwei Funktionenräume nach 11. sehr eng mit der Frage nach der Approximationseigenschaft von Y_1 oder Y_2 zusammen.

§ 8 Algebren und Moduln

1. Lemma: Sei $(E, \{q_\alpha; \alpha \in A\})$ quasivollständige topologische Algebra, so daß die Multiplikation in E eine bzgl. des Systems $\mathcal{K} = \mathcal{K}(E)$ der kompakten Mengen in E $(\mathcal{K}, \mathcal{K})$ -hypostetige bilineare Abbildung ist. Sei X (vollständig regulärer) k -Raum und $V > 0$ Nachbin-Familie auf X , für die (A) zu jedem $v \in V$ $v', v'' \in V$ existieren mit $v \leq v'v''$.

Dann ist $CV_0(X, E)$ unter punktweiser Multiplikation topologische Algebra (d.h. die Multiplikation getrennt stetig). Ist die Multiplikation in E in beiden Variablen gleichzeitig stetig, ergibt sich dasselbe für $CV_0(X, E)$. Die Eigenschaft, kommutativ zu sein, überträgt sich von E auf $CV_0(X, E)$; ebenso für die Existenz eines Einselementes, sofern $V \leq C_0^+(X)$.

Beweis: 1. Behauptung: $CV_0(X, E)$ ist Algebra.

Seien $f, g \in CV_0(X, E)$ und fg definiert durch $(fg)(x) := f(x)g(x)$.

a) Zunächst ist $fg \in C(X, E)$ zu zeigen.

Dazu langt es, weil X k -Raum ist, daß für kompaktes K in X fg stetig auf K bewiesen wird.

Seien $t_0 \in K, \alpha \in A, \epsilon > 0$ beliebig; zu den kompakten Mengen $f(K)$ und $g(K)$ existieren wegen der $(\mathcal{K}, \mathcal{K})$ -Hypostetigkeit der Multiplikation Nullumgebungen V_1, V_2 in E mit

$$f(K)V_2 = \{e_1, e_2; e_1 \in f(K), e_2 \in V_2\} \subset U_{\alpha, \epsilon/2} := \{e \in E; q_\alpha(e) \leq \frac{\epsilon}{2}\},$$

$V_1 g(K) \subset U_{\alpha, \epsilon/2}$. Da $f, g \in C(K, E)$, gibt es Umgebungen $U_1(t_0)$ und $U_2(t_0)$ in K mit $f(t) - f(t_0) \in V_1$ für $t \in U_1(t_0)$ und

$g(t) - g(t_0) \in V_2$ für $t \in U_2(t_0)$, so daß mit $U = U_1(t_0) \cap U_2(t_0)$ für alle $t \in U$ gilt: $fg(t) - fg(t_0) = (f(t) - f(t_0))g(t) + f(t_0)(g(t) - g(t_0)) \in V_1 g(K) + f(K)V_2 \subset U_{\alpha, \epsilon/2} + U_{\alpha, \epsilon/2} \subset U_{\alpha, \epsilon}$.

b) Es bleibt zu zeigen $v(fg) \in B_0(X, E)$ für $v \in V$.

Dazu seien nach (A) $v', v'' \in V$ mit $v \leq v'v''$ gewählt und $\alpha \in A, \epsilon > 0$ vorgegeben. Wegen der Hypostetigkeit der Multiplikation in E gibt es nach §1, 16.(1) eine Nullumgebung U mit $\overline{(v'f)(X)} \cup U \subset U_{\alpha, \epsilon}$. Wegen $v''g \in B_0(X, E)$ existiert eine kompakte Menge K in X mit $\overline{(v''g)(X \setminus K)} \subset U$, d.h. für $x \in X \setminus K$ gilt: $(v'f)(x)(v''g)(x) \in \overline{(v'f)(X)} \cup U \subset U_{\alpha, \epsilon}$.

2. Aus Symmetriegründen langt beim Nachweis der getrennten Stetigkeit der Multiplikation in $CV_0(X, E)$ der Beweis der Stetigkeit im zweiten Faktor bei festgehaltenem erstem Faktor $f \in CV_0(X, E)$.

Seien $\alpha \in A$, $\epsilon > 0$, $v \in V$ vorgegeben und $v', v'' \in V$ mit $v \leq v'v''$ gewählt. Wie oben existiert für $K = \overline{(v'f)(X)}$ eine Nullumgebung $U_{\beta, \epsilon'}$ in E mit $KU_{\beta, \epsilon'} \subset U_{\alpha, \epsilon}$. Setze

$$V_{\beta, \epsilon', v''} := \{g \in CV_0(X, E); bv_{\beta'}'(g) = \sup_{x \in X} q_{\beta}(v''(x)g(x)) \leq \epsilon'\};$$

$V_{\beta, \epsilon', v''}$ ist Nullumgebung in $CV_0(X, E)$ und für alle $x \in X$, $g \in V_{\beta, \epsilon', v''}$ gilt $(v''g)(x) \in U_{\beta, \epsilon'}$, also

$$bv_{\alpha}(fg) = \sup_{x \in X} q_{\alpha}(v(x)(fg)(x)) \leq \sup_{x \in X} q_{\alpha}((v'f)(x)(v''g)(x)) \leq \epsilon,$$

$fV_{\beta, \epsilon', v''} \subset V_{\alpha, \epsilon, v}$. w.z.b.w.

Bemerkungen: 1. Die Voraussetzung der Quasivollständigkeit von E kann gestrichen werden, wenn X lokal-kompakt ist und $V \subset C^+(X)$ gilt (vgl. §1, 16.(2)).

2. Nach §1, 16.(1) bleibt das Lemma auch für nicht quasivollständige E richtig, wenn man von der Multiplikation in E fordert, daß sie eine (P, P) -hypostetige bilineare Abbildung ist, wo $P = P(E)$ das System der präkompakten Mengen in E bezeichnet. Insbesondere kann man die Bedingung E quasivollständig weglassen, wenn die Multiplikation in E in beiden Variablen gleichzeitig stetig ist.

3. Die Eigenschaft, topologische Algebra zu sein, gilt genauso für $CV(X, E)$ anstelle von $CV_0(X, E)$ mit folgenden Änderungen: Die Quasivollständigkeit von E ist unnötig, die Multiplikation in E muß aber bzgl. des Systems B der beschränkten Mengen in E (B, B) -hypostetig sein (Dies ergibt sich nach einer Bemerkung von Neubauer, wenn E metrisierbar und das Produkt beschränkter Mengen in E beschränkt ist.).

Bedingung (A) ist erfüllt, wenn die Konstante 1 unter den Gewichtsfunktionen ist oder mit v auch \sqrt{v} zu V gehört.

Man sieht, daß etwa $V = C_c^+(X)$, $C_0^+(X)$, $CB^+(X)$, $C^+(X)$ oder die Nachbin-Familie aus §2, 4. der Voraussetzung von 1. genügen. Dagegen erfüllt z.B. $Cv_0(X)$ aus §2, 3. für $X = \mathbb{Q}$, $v(x) = \exp(-|x|)$ nicht diese Voraussetzungen; $Cv_0(X)$ ist auch keine Algebra.

2. Satz: Seien die Bedingungen an X , V und Y wie zu Beginn von §7 vereinbart. Weiter genüge V (A) aus 1., Y sei Teilalgebra von $CV_0(X)$ und E vollständige lokalkonvexe Algebra mit (κ, κ) -hypostetiger Multiplikation. Dann ist $E \check{\otimes}_c Y$ vollständige lokalkonvexe Algebra, und zwar topologische Unteralgebra von $CV_0(X, E)$. Hat E in beiden Variablen gleichzeitig stetige Multiplikation, so auch $E \check{\otimes}_c Y$.

Beweis: Nach §4, 8.(2) ist der topologische Vektorraum $E \check{\otimes}_\epsilon Y$ eingebettet in $CV_0(X, E)$ und dies nach 1. topologische Algebra. Die Einbettung der Algebra $E \otimes Y$ (vgl. [2], §5, 3.) ist multiplikativ, so daß $E \otimes_\epsilon Y$ topologische Teilalgebra von $CV_0(X, E)$ wird, deren Abschließung $E \check{\otimes}_\epsilon Y$ darstellt. Man schließt daraus wie im Buch von Neumark, "Normierte Algebren", §8, 1.I, daß $E \check{\otimes}_\epsilon Y$ vollständige lokalkonvexe Algebra ist, deren Topologie von $CV_0(X, E)$ induziert wird. q.e.d.

3. Korollar: Unter den Voraussetzungen von 2. ist die Identifizierung aus §5, 2. ein topologischer Algebra-Isomorphismus von $E \check{\otimes}_\epsilon CV_0(X)$ auf $CV_0(X, E)$.

Im folgenden werde für eine lokalkonvexe Algebra E $M(E) := \{e' \in E'; e' \neq 0, e' \text{ multiplikativ auf } E\}$ gesetzt. Man versteht $M(E)$ mit der von $\mathcal{L}(E', E)$ induzierten Topologie. Das bekannte Beispiel L^∞ zeigt, daß selbst für kommutative vollständige metrisierbare E mit Einselement $M(E) = \emptyset$ eintreten kann (vgl. Zelazko [48], (12.1.1.)).

4. Satz: Seien die Voraussetzungen wie in 2. Dann gibt es eine eindeutige Zuordnung Z von $M(E \check{\otimes}_\epsilon Y)$ auf

$M(E) \times M(Y)$, nämlich:

Jedes $m \in M(E \check{\otimes}_\epsilon Y)$ ist die stetige Fortsetzung $m' \check{\otimes} m''$ eines

$m' \otimes m''$ (definiert durch $(m' \otimes m'')(\sum_{i=1}^n e_i \otimes f_i) = \sum_{i=1}^n m'(e_i) m''(f_i)$)

für alle $\sum_{i=1}^n e_i \otimes f_i \in E \otimes Y$ mit $m' \in M(E)$, $m'' \in M(Y)$ und

$Z: m = m' \check{\otimes} m'' \longrightarrow (m', m'')$ - es wird dabei nicht ausgeschlossen, daß beide Mengen leer sind -.

Versieht man $M(E) \times M(Y)$ mit der Produkttopologie, so ist die Abbildung Z stetig; sie ist ein Homöomorphismus, wenn $E \check{\otimes}_\epsilon Y$ lokal m -konvexe Q -Algebra (vgl. Michael [25]).

Beweis: $E \check{\otimes}_\epsilon Y$ ist Vervollständigung des Tensorproduktes $E \otimes Y$ der beiden lokalkonvexen Algebren E und Y in einer schwächeren als der induktiven Topologie von Grothendieck. Daher läßt sich nach Smith [38], 3., Lemma 1 jedes $m \in M(E \check{\otimes}_\epsilon Y)$ als stetige Fortsetzung von $m' \otimes m''$ mit geeigneten $m' \in M(E)$ und $m'' \in M(Y)$ darstellen, und umgekehrt ist jedes $m' \otimes m''$, das eine stetige Ausdehnung auf $E \check{\otimes}_\epsilon Y$ hat, Element von $M(E \check{\otimes}_\epsilon Y)$. Nach Definition der injektiven Topologie besitzt beliebiges $m' \otimes m''$ mit $m' \in M(E)$ und $m'' \in M(Y)$ eine stetige Fortsetzung

auf die vollständige Hülle $E \check{\otimes}_\epsilon Y$; außerdem ist die Zuordnung $Z: m = m' \check{\otimes} m'' \longrightarrow (m', m'')$ wohldefiniert (vgl. [2], §6, 1.). Somit bildet Z $M(E \check{\otimes}_\epsilon Y)$ eineindeutig auf $M(E) \times M(Y)$ ab und stetig nach Smith [38], 3., Lemma 2. Der letzte Teil des Satzes folgt aus [38], Theorem 1. q.e.d.

Hinweis: Interessante Beispiele lokal m -konvexer Algebren, die gewichtete Räume aus stetigen Funktionen sind, findet man bei Michael [25].

5. Korollar: Seien die Voraussetzungen wie in 2.

(1) Ist $Y \neq \{0\}$, so folgt aus

$$\bigcap \{ \text{Kern } m; m \in M(E \check{\otimes}_\epsilon Y) \} = \{0\}:$$

$$\bigcap \{ \text{Kern } m'; m' \in M(E) \} = \{0\}.$$

(2) Gilt für E : $\bigcap \{ \text{Kern } m'; m' \in M(E) \} = \{0\}$, so gilt auch

$$\bigcap \{ \text{Kern } m; m \in M(E \check{\otimes}_\epsilon Y) \} = \{0\}.$$

Beweis: Zu (1): Sei $e \in E$ und werde $m'(e) = 0$ für alle $m' \in M(E)$ angenommen; zu zeigen ist $e = 0$.

Sei dazu $f_0 \in Y$ mit $f_0 \neq 0$ fest gewählt. Dann gilt wegen 4. $m(e \check{\otimes} f_0) = 0$ für alle $m \in M(E \check{\otimes}_\epsilon Y)$, nach Voraussetzung also $e \check{\otimes} f_0 = 0$ in $E \check{\otimes} Y$ und somit $e = 0$.

Zu (2): Dies erhält man aus 2. und §3, 2., weil $E \check{\otimes}_\epsilon Y \subset CV_0(X, E)$ und für $m' \in M(E)$, $x \in X$ jedes Funktional der Form $f \longrightarrow m'(f(x))$ ($f \in E \check{\otimes}_\epsilon Y$) zu $M(E \check{\otimes}_\epsilon Y)$ gehört oder identisch Null ist. q.e.d.

Definiert man eine topologische Algebra A als sm -halbeinfach, wenn der Durchschnitt der Kerne aller stetigen multiplikativen Linearformen auf ihr nur aus dem Nullelement besteht, dann folgt aus 5.:

Ist $Y \neq \{0\}$, so ist $E \check{\otimes}_\epsilon Y$ genau dann sm -halbeinfach, wenn dies für E gilt.

Für $E = CV_0(X)$ Algebra, $V > 0$ und $X = \text{lokalkompakt}$, ist X nach §3, 3. homöomorph einer Teilmenge von $M(E)$. Es wird nun die Frage betrachtet, ob jede stetige nichttriviale multiplikative Linearform die Form δ_x für gewisses $x \in X$ hat.

Zunächst untersuchen wir die wichtigsten Spezialfälle:

1. Für $E = C(X)$ (hier X ausnahmsweise nur vollständig regulär) mit der kompakten Konvergenz-Topologie ist X homöomorph dem vollen Raum $M(E)$ bei der Abbildung $I: x \longrightarrow \delta_x$, s. Michael [25], Example 7.6 f) (wie Prop. 12.2 von [25] zeigt, gilt dies i.a. nicht, wenn man nicht die Stetigkeit der mul-

tiplikativen linearen Funktionale fordert.)

2. Auch für $E=C_0(X)$ ist X homöomorph $M(E)$.

3. Für $E=(CB(X),\beta)$ gilt ebenfalls $I(X)=M(E)$ (s. Buck [8], Cor.1 von Th.4). Man beachte, daß dies für die Banachalgebra $CB(X)$ mit der gleichmäßigen Topologie i.a. nicht richtig bleibt.

4. $I(X)=M(E)$ auch bei $E=(C_c(X),i)$, wenn X im Unendlichen abzählbar ist: Seien U_n ($n=1,2,\dots, \overline{U_n} \subset U_{n+1}$) offene relativkompakte Mengen in X mit $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$. Die U_n sind mit der

induzierten Topologie wieder lokalkompakt, vgl. Schubert [33], I.7.5, Satz 2. Setze $E_n := C_c(\overline{U_n}, X) = \{f \in C_c(X); \text{Tr } f \subset \overline{U_n}\}$, versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz. Im Sinne von Michael [25], Def. 15.2, stellen die E_n eine m -verträgliche Folge lokal m -konvexer Algebren dar, und die lokal m -konvexe Algebra E ist \mathcal{LF} -Algebra. [25], Prop. 15.9 erlaubt, $M(E)$ als Vereinigung der $M(E_n)$ zu betrachten. Offenbar ist $C_c(\overline{U_n}, X)$ als Banachalgebra isomorph zu $C_0(U_n)$, so daß bei geeigneter Identifizierung $M(E_n) = U_n$ und $M(E) = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = X$.

6. Korollar: Sei X lokalkompakt (in (1): vollständig regulärer k -Raum) und E wie in 2. Dann gilt im Sinne von eindeutigen Zuordnungen: (1) $M(C(X,E)) = X \times M(E)$, (2) $M(CB(X,E),\beta) = X \times M(E)$, (3) $M(C_0(X,E)) = X \times M(E)$, (4) für im Unendlichen abzählbares X und normiertes E : $M(C_c(X,E),i) = X \times M(E)$.

Hinweis: 6.(1) impliziert einen Teil von Theorem 4 bei Dietrich [11]. Dort wird an Hand eines Beispiels gezeigt, daß die Zuordnung von $M(C(X,E))$ auf $X \times M(E)$ nur unter gewissen Restriktionen an E einen Homöomorphismus darstellt. Auf eine Untersuchung von Bedingungen, die dies leisten, soll in dem allgemeineren Rahmen hier verzichtet werden.

Was den allgemeinen Fall anbelangt, so beweist man zunächst (X vollständig regulär, $V > 0$):

7. Lemma: Ist $E=CV_0(X)$ eine Algebra, die die Punkte von X trennt, so ist $I(X)$ dicht in $M(E)$.

Beweis: $CV_0(X)$ ist selbstadjungierte Algebra stetiger Funktionen auf X . Genügt $f \in CV_0(X)$ der Bedingung $\inf_{x \in X} |1-f(x)| = \varepsilon > 0$,

so ist f quasiregulär in $CV_0(X)$: g , definiert durch

$$g(x) = \frac{f(x)}{f(x)-1} \quad \text{für alle } x \in X, \text{ gehört zu } CV_0(X), \text{ und es gilt}$$

$f+g-fg=0$. Rickart [29], Theorem (3.2.7) läßt sich anwenden und liefert, daß $I(X)$ dicht in dem Raum aller multiplikativen Linearformen ($\neq 0$) auf E ist (-versehen mit der von $E=CV_0(X)$ induzierten schwachen Topologie); da $I(X)$ in dem Teilraum aller stetigen multiplikativen Linearformen auf E liegt und die Topologie dort mit $\mathcal{C}(CV_0'(X), CV_0(X))$ zusammenfällt, folgt die Behauptung.

8. Satz: Ist X lokalkompakt, $V > 0$ und $E=CV_0(X)$ Algebra, so ist X homöomorph zu dem vollen Raum $M(E)$ in jedem der beiden folgenden Fälle:

(1) $W \leq V \leq C_0^+(X)$, (2) $CB^+(X) \leq V$.

Beweis: Nach 7. und den Vorbemerkungen bleibt nur zu zeigen, daß $I(X)$ abgeschlossen in $M(E)$ ist. Im Falle (1) folgt dies aus Summers [40], Theorem 5.7, da unter der Voraussetzung $W \leq V \leq C_0^+(X)$ I eine abgeschlossene Abbildung in $CV_0'(X) [\mathcal{C}(CV_0'(X), CV_0(X))]$ darstellt.

Im Falle (2) ist nach Rickart [29], Theorem (3.2.4) $I(X)$ abgeschlossen in dem Raum aller multiplikativen Linearformen $\neq 0$ (mit der von E induzierten schwachen Topologie). q.e.d.

Bemerkungen: 1. 8. umfaßt (im wesentlichen) alle vier vorher behandelten Beispiele.

2. [29], Cor. (3.2.8) zeigt (wie auch aus dem Beweis von 8. ersichtlich), daß im Falle (2) X homöomorph dem Raum aller multiplikativen Linearformen $\neq 0$ auf E ist. Dies gilt im Falle (1) durchaus nicht.

3. Möglicherweise bleibt 8. für alle Nachbin-Familien $V > 0$ richtig; jedenfalls ist mir kein Gegenbeispiel bekannt.

9. Korollar: Seien X , V und E wie in 2.; zusätzlich sei X lokalkompakt und V erfülle entweder $V \leq C_0^+(X)$ oder $CB^+(X) \leq V$. Dann gilt (als eineindeutige Zuordnung) $M(CV_0(X, E)) = X \times M(E)$.

Wir wollen im weiteren untersuchen, wie sich $CV_0(X, E)$ als Modul über $CV_0(X)$ verhält.

10. Lemma: Sei E topologischer Vektorraum, $V > 0$ Nachbin-Familie auf dem vollständig regulären Raum X , die (A) erfüllt. Dann ist $CV_0(X, E)$ topologischer Modul über $CV_0(X)$, d.h. die Abbildung $(g, f) \longrightarrow gf$ von $CV_0(X) \times CV_0(X, E)$ in $CV_0(X, E)$ - $(gf)(x) := g(x)f(x)$ für alle $x \in X$ - stetig in beiden Variablen gleichzeitig.

Beweis: 1. Zu zeigen ist: Für beliebiges $v \in V$, $g \in CV_0(X)$, $f \in CV_0(X, E)$ gilt $v(gf) \in B_0(X, E)$.

Seien nach (A) $v', v'' \in V$ gewählt mit $v \leq v'v''$ und $\varepsilon > 0, \alpha \in A$ beliebig. Da $v'g \in B(X)$, gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $|(v'g)(x)| \leq N$ für alle $x \in X$; wegen $v''f \in B_0(X, E)$ existiert eine kompakte Menge

K in X mit $q_\alpha((v''f)(x)) < \frac{\varepsilon}{N}$ für $x \in X \setminus K$, so daß dort

$$q_\alpha(v(gf)(x)) \leq q_\alpha((v'g)(x)(v''f)(x)) \leq Nq_\alpha((v''f)(x)) < \varepsilon.$$

2. Seien $\alpha \in A, \varepsilon > 0, v \in V$ beliebig,

$V_{\alpha, \varepsilon, v} = \{f \in CV_0(X, E); bv_\alpha(f) = \sup_{x \in X} q_\alpha(v(x)f(x)) \leq \varepsilon\}$. Wähle

$v', v'' \in V$ mit $v \leq v'v''$. Zu der Nullumgebung

$U_{\alpha, \varepsilon} = \{e \in E; q_\alpha(e) \leq \varepsilon\}$ in E findet man wegen der Stetigkeit der Skalarmultiplikation $\varepsilon' > 0, \alpha' \in A$ und $\delta > 0$ mit

$W_\delta U_{\alpha', \varepsilon'} \subset U_{\alpha, \varepsilon}$ für $W_\delta = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq \delta\}$. Setze

$W_{\delta, v'} := \{g \in CV_0(X); bv'(g) = \sup_{x \in X} |v'(x)g(x)| \leq \delta\}$; es gilt

$W_{\delta, v'} V_{\alpha', \varepsilon', v''} \subset V_{\alpha, \varepsilon, v}$, was die Behauptung beweist.

Bemerkung: Der Beweis von 10. zeigt, daß unter den angegebenen Voraussetzungen $CV_0(X, E)$ bereits Modul über $CV(X)$ ist.

11. Satz: Seien die Bedingungen an X, V und Y wie zu Beginn von §7 vereinbart, V genüge (A), Y sei Teilalgebra von $CV_0(X)$ und E vollständiger lokalkonvexer Raum. Dann ist $E \check{\otimes}_\varepsilon Y$ lokalkonvexer Modul über Y .

Beweis: $E \check{\otimes}_\varepsilon Y$ ist als topologischer Vektorraum eingebettet in $CV_0(X, E)$ und $CV_0(X, E)$ nach 10. topologischer Modul über $CV_0(X)$, erst recht also über Y . Auf $E \check{\otimes}_\varepsilon Y$ wird eine Struktur

als Y -Modul definiert, indem man für $u = \sum_{i=1}^n e_i \check{\otimes} y_i$ ($n \in \mathbb{N}, e_i \in E,$

$y_i \in Y, i=1, \dots, n$) und $y \in Y$ $yu := \sum_{i=1}^n e_i \check{\otimes} yy_i$ setzt und die uni-

verselle Eigenschaft des Tensorproduktes beachtet. $E \check{\otimes}_\varepsilon Y$

wird bei der Einbettung topologischer Teilmodul von $CV_0(X, E)$, dessen Abschließung $E \check{X}_E Y$ darstellt. Aus der Stetigkeit der Modul-Multiplikation in $CV_0(X, E)$ folgt, daß auch $E \check{X}_E Y$ topologischer Modul über Y ist (dessen algebraische und topologische Struktur von $CV_0(X, E)$ induziert wird). q.e.d.

12. Korollar: Seien die Voraussetzungen wie in 11. Dann ist die in §5, 2. definierte Abbildung topologischer Modul-Isomorphismus von $E \check{X}_E CV_0(X)$ auf $CV_0(X, E)$.

Wir machen nun folgende Vereinbarungen und Voraussetzungen: A sei lokalkonvexer Modul über der kommutativen lokalkonvexen Algebra Y , d.h. A ist lokalkonvexer Raum und für $y \in Y$ und $a \in A$ ist $ya \in A$ erklärt, so daß Y homomorph abgebildet wird in den Raum der linearen Operatoren auf A ; die Modul-Multiplikation $(y, a) \longrightarrow ya$ von $Y \times A$ in A ist getrennt stetig, und es gilt z.B. $y_1(y_2 a) = (y_1 y_2) a$ für $y_1, y_2 \in Y$ und $a \in A$. Jetzt werde definiert:

$L(A, Y) = \{a' \in A' \setminus \{0\}; \text{ es gibt } y' = y'(a') \in M(Y) \text{ mit}$
 $a'(ya) = y'(y)a'(a) \text{ für alle } y \in Y \text{ und alle } a \in A \}$
 (möglicherweise $L(A, Y) = \emptyset$). Ist $a' \in L(A, Y)$ und sind $a'(a_0) \neq 0$, $a'(a_1) \neq 0$ für $a_0, a_1 \in A$, so gilt $a'(y a_1) a'(a_0) =$
 $y'(y) a'(a_1) a'(a_0) = y'(y) a'(a_0) a'(a_1) = a'(y a_0) a'(a_1)$, also
 $\frac{a'(y a_1)}{a'(a_1)} = \frac{a'(y a_0)}{a'(a_0)}$ für alle $y \in Y$. Für $a' \in L(A, Y)$ existiert $a_0 \in A$
 mit $a'(a_0) \neq 0$, daher gilt $y'(y) = \frac{a'(y a_0)}{a'(a_0)}$ für jedes $y \in Y$, und
 diese Formel legt $y' \in M(Y)$ eindeutig fest.

Bemerkung: Bisher wurde die Stetigkeit von y' nicht benutzt. Daher braucht in der Definition von $L(A, Y)$ nicht gefordert zu werden, daß $y' = y'(a')$ zu $a' \in L(A, Y)$ stetig ist; es ergibt sich aus der vorhergehenden Betrachtung, der Stetigkeit von a' und der (getrennten) Stetigkeit der Modul-Multiplikation.

13. Satz: Sei A lokalkonvexer Modul über der kommutativen lokalkonvexen Algebra Y , und zwar Vervollständigung des Y -Moduls $Y \odot E$ (E lokalkonvexer Raum) unter einer Topologie, die schwächer als die induktive und stärker als die injektive Topologie ist. Dann existiert eine eindeutige Zuordnung von $L(A, Y)$ auf $M(Y) \times (E' \setminus \{0\})$ (oder beide Mengen sind leer).

Beweis: Für $y' \in M(Y) \subset Y' \setminus \{0\}$ und $e' \in E' \setminus \{0\}$ ist $y' \otimes e' \in A' \setminus \{0\}$ in kanonischer Weise erklärt (da A Vervollständigung von $Y \otimes E$ unter einer stärkeren als der injektiven Topologie). Es ist klar, daß $y' \otimes e' \in L(A, Y)$, weil A topologischer Modul ist und auf der in A dichten Teilmenge $Y \otimes E$ gilt:

$$(y' \otimes e')(yu) = (y' \otimes e')(y \left[\sum_{i=1}^n y_i \otimes e_i \right]) = (y' \otimes e') \left(\sum_{i=1}^n yy_i \otimes e_i \right) = \sum_{i=1}^n y'(yy_i) e'(e_i) = y'(y) \left(\sum_{i=1}^n y'(y_i) e'(e_i) \right) = y'(y) (y' \otimes e')(u)$$

für alle $y \in Y$, $u = \sum_{i=1}^n y_i \otimes e_i \in Y \otimes E$ ($n \in \mathbb{N}$, $y_i \in Y$, $e_i \in E$, $i=1, \dots, n$).

Sei nun für $y', y'' \in M(Y)$, $e', e'' \in E' \setminus \{0\}$:
 $y' \otimes e' = y'' \otimes e'' = a' \in L(A, Y)$. Dann haben wir bereits $y' = y''$ gesehen. Außerdem ist die Menge $\{y \otimes e; y \in Y, e \in E\}$ total in A , und da $a' \in A'$ nicht identisch verschwindet, gibt es $y_0 \in Y$, $e_0 \in E$ mit $a'(y_0 \otimes e_0) = (y' \otimes e')(y_0 \otimes e_0) = y'(y_0) e'(e_0) \neq 0$. Aus $y'(y_0) \neq 0$ und $a'(y_0 \otimes e) = (y' \otimes e')(y_0 \otimes e) = (y'' \otimes e'')(y_0 \otimes e) = y''(y_0) e''(e)$ für alle $e \in E$ folgt $e' = e''$: Für $a' \in L(A, Y)$ existiert höchstens ein Paar $(y', e') \in M(Y) \times (E' \setminus \{0\})$ mit $a' = y' \otimes e'$.

Sei umgekehrt $a' \in L(A, Y)$; es wird als nächstes gezeigt, daß $y' \in M(Y)$ und $e' \in E' \setminus \{0\}$ existieren mit $a' = y' \otimes e'$:

Sei $y' \in M(Y)$ die $a' \in L(A, Y)$ in eindeutig bestimmter Weise zugeordnete nichttriviale multiplikative Linearform auf Y . Es

gibt $y_1 \in Y$ mit $y'(y_1) \neq 0$; setze $e'(e) = \frac{a'(y_1 \otimes e)}{y'(y_1)}$ für $e \in E$; e'

ist Linearform auf E . Wegen $a' \in A'$ und der Stetigkeit der Abbildung $e \longrightarrow y_1 \otimes e$ von E in A - die von A induzierte Topologie ist schwächer als die induktive Topologie auf $E \otimes Y$ - gilt $e' \in E'$. e' ist unabhängig von $y_1 \in Y$ mit $y'(y_1) \neq 0$ definiert, da für $y_2 \in Y$ mit $y'(y_2) \neq 0$ $y'(y_2) a'(y_1 \otimes e) = a'(y_2 [y_1 \otimes e]) = a'(y_2 y_1 \otimes e) = a'(y_1 y_2 \otimes e) = y'(y_1) a'(y_2 \otimes e)$, also

$$\frac{a'(y_1 \otimes e)}{y'(y_1)} = \frac{a'(y_2 \otimes e)}{y'(y_2)}$$

für alle $e \in E$ (Hier wurde die Kommutativität der Algebra Y benutzt.).

Es bleibt zu beweisen: $a' = y' \otimes e'$, woraus auch $e' \neq 0$ folgt. Dazu langt es, weil $\{y \otimes e; y \in Y, e \in E\}$ total in A ist und $y' \otimes e'$ ebenso zu A' gehört wie a' , die Gleichung $a'(y \otimes e) = (y' \otimes e')(y \otimes e)$ für $y \in Y$ und $e \in E$ zu zeigen; nach De-

$$\begin{aligned} \text{finition gilt aber } (y' \otimes e')(y \otimes e) &= y'(y)e'(e) = y'(y) \frac{a'(y_1 \otimes e)}{y'(y_1)} \\ &= \frac{a'(yy_1 \otimes e)}{y'(y_1)} = \frac{a'(y_1 y \otimes e)}{y'(y_1)} = a'(y \otimes e). \end{aligned}$$

Die Abbildung $a' \longrightarrow (y', e')$ mit $a' = y' \otimes e'$ definiert eine eineindeutige Zuordnung von $L(A, Y)$ auf $M(Y) \times (E' \setminus \{0\})$. q.e.d.

14. Korollar: Seien die Voraussetzungen wie in 11. Dann gilt für $A = E \check{\otimes}_e Y$: $L(A, Y)$ läßt sich identifizieren mit $(E' \setminus \{0\}) \times M(Y)$. Für $A = CV_0(X, E)$, X lokalkompakt, und $V \leq C_0^+(X)$ oder $CB^+(X) \leq V$ ist $L(A, CV_0(X)) = (E' \setminus \{0\}) \times X$.

15. Satz: Seien die Voraussetzungen von 13. erfüllt, Y kommutative Banachalgebra (mit Einselement 1, $\|1\|_Y = 1$), E Banachraum und A "unital module" über Y im Sinne von Dunkl [14]: A ist Banachraum, es gilt $1a = a$ und $\|ya\|_A \leq \|y\|_Y \|a\|_A$ für $y \in Y, a \in A$. Dann ist jedes $M = M_{y', e'} = \{a \in A; (y' \otimes e')(a) = 0\}$ ($y' \in M(Y), e' \in E' \setminus \{0\}$) abgeschlossener maximaler Teilmodul von A (d.h. abgeschlossener linearer Unterraum und Modul über Y und nicht in einem echt größeren Y -Modul $\neq A$ enthalten). Umgekehrt hat jeder abgeschlossene maximale Teilmodul von A diese Form (Man beachte, daß für $e' = \alpha e'$ mit $e' \in E' \setminus \{0\}, \alpha \in \mathbb{C}, \alpha \neq 0$ $M_{y', e'} = M_{y', e'}$ gilt.).

Beweis: Genau wie bei Dunkl [14], Prop. 1 und 2 zeigt man, daß die abgeschlossenen maximalen Teilmoduln von A gerade die Moduln der Form $M_{a'} = \{a \in A; a'(a) = 0\}$ für gewisses $a' \in L(A, Y)$ sind. Aus 13. folgt jetzt die Behauptung.

16. Korollar: Ist Y abgeschlossene Teilalgebra von $C(K)$ mit Einselement ($K = \text{kompakter Hausdorffraum}$) und E Banachraum, so ist jeder abgeschlossene maximale Teilmodul M des Y -Moduls $A = E \check{\otimes}_e Y$ von der Gestalt $M = M_{y', e'} = \{a \in A; (y' \otimes e')(a) = 0\}$ für gewisse $y' \in M(Y), e' \in E' \setminus \{0\}$ (und umgekehrt).

Aus §7, 4., §8, 11. bzw. 12. und dem in §7 erwähnten Ergebnis von Davie über die Approximationseigenschaft von $A(K)$ folgert man, daß im Sinne eines topologischen Modul-Isomorphismus $A(K, E) = E \check{\otimes}_e A(K)$ für vollständigen lokalkonvexen Raum E und beliebige kompakte Menge K in \mathbb{C} . Wegen des Satzes von Arens über die maximalen Ideale von $A(K)$ und aus 16. erhält man:

17. Korollar: Ist K kompakte Teilmenge von \mathbb{C} und E Banachraum, so ergeben sich als abgeschlossene maximale Teilmoduln von $A(K, E)$ genau alle $M = M_{z, e'} = \{f \in A(K, E); f_{e'}(z) = e'(f(z)) = 0\}$ für $z \in K$ und $e' \in E' \setminus \{0\}$.

Bemerkung: In 15. wurde benutzt, daß bei gewissen Voraussetzungen die abgeschlossenen maximalen Teilmoduln von A identisch sind mit den Moduln der Form $\{a \in A; a'(a) = 0\}$ für $a' \in L(A, Y)$. Es ist interessant festzustellen, unter welchen allgemeineren Bedingungen dies richtig bleibt.

Man zeigt so, daß jeder abgeschlossene maximale Teilmodul von A die Form $\{a \in A; a'(a) = 0\}$ für $a' \in L(A, Y)$ besitzt und umgekehrt (oder $L(A, Y)$ und das System der abgeschlossenen maximalen Teilmoduln von A sind gleichzeitig leer), wenn nur folgende Voraussetzungen an A und Y erfüllt sind:

A lokalkonvexer topologischer Vektorraum und topologischer Y -Modul für eine lokalkonvexe kommutative (nicht notwendig vollständige) topologische Algebra Y mit Einselement 1 ($1a = a$ für jedes $a \in A$; die Abbildung $(y, a) \longrightarrow ya$ von $Y \times A$ in A muß getrennt stetig sein), und jedes abgeschlossene maximale Ideal in Y ist Kern eines multiplikativen linearen Funktionals. Die letzte Bedingung trifft jedenfalls zu, wenn Y m -konvex ist (vgl. Michael [25], Cor. 2.10) oder eine B_0 -Algebra im Sinne von Zelazko darstellt (vgl. [48], p.3.9).

Dies liefert eine Abschwächung der Voraussetzungen in 15. bis 17. Mit $Y = (CB(X), \beta)$ - X lokalkompakt -, $A = (CB(X, E), \beta)$ - E vollständiger lokalkonvexer topologischer Vektorraum - erhalten wir gleichzeitig aus 12., 14. und Buck [8], Cor. 1 zu Theorem 3 einen neuen Beweis von Theorem 4 bei Todd [43].

§ 9 Anwendung auf ein Beispiel

Zum Schluß soll ein einfaches Beispiel betrachtet werden.

Für ein Gebiet G in der komplexen Ebene und vollständigen lokalkonvexen Raum E setze

$$Y_E(G) = H^\infty(G, E) = \{f \in CB(G, E); z \rightarrow e'(f(z)) \text{ holomorph auf } G \text{ für jedes } e' \in E'\};$$

$H^\infty(G, E)$ ist der Raum der auf G (schwach) holomorphen beschränkten Funktionen mit Werten in E . Wir versehen $H^\infty(G, E)$ mit der induzierten strikten Topologie β . Man zeigt, daß $Y_E(G)$ vollständiger lokalkonvexer topologischer Vektorraum, dem (vgl. die Definition vor § 7, 3.) $Y_\bullet(G) = (H^\infty(G), \beta)$ zugeordnet ist, $E \neq \{0\}$.

Für $r > 0$ sei $D_r := \{z \in \mathbb{C}; |z| < r\}$, $D := D_1$ und $Y_E = Y_E(D)$. Der Raum $Y_\bullet = Y_\bullet(D) = (H^\infty(D), \beta)$ hat in letzter Zeit großes Interesse gefunden und wurde u.a. in Arbeiten von Conway [10], Rubel und Shields [31], Rubel und Ryff [30] behandelt. Er besitzt als topologischer Vektorraum die folgenden Eigenschaften: Y_\bullet ist vollständiger lokalkonvexer Semi-Montel-Raum (vgl. [10], Th.4), weder tonneliert noch bornologisch noch metrisierbar (s. [31], 3.12 und 3.13) noch Mackeyraum (vgl. [10], Theorem 9) - Y_\bullet ist also auch kein Montelraum und nicht quasitunneliert.

Der folgende Satz beruht auf der Modifizierung eines bekannten Beweises der Approximationseigenschaft für den Raum $A(D)$.

1. Satz: $Y_\bullet = (H^\infty(D), \beta)$ hat die Approximationseigenschaft.

Beweis: Sei K eine kompakte Menge in Y_\bullet . Zu zeigen ist: Für vorgegebene $v \in C_0^+(D)$ und $\epsilon > 0$ gibt es einen Operator $L \in Y_\bullet \otimes Y_\bullet'$, so daß $\sup_{z \in D} v(z) |f(z) - (Lf)(z)| \leq \epsilon$ für alle $f \in K$.

Die Menge K ist gleichmäßig auf D beschränkt (vgl. [31], 3.6): Sei $\|f\| = \sup_{z \in D} |f(z)|$ für $f \in Y_\bullet$ und $\sup_{f \in K} \|f\| = M$. Da $v \in C_0^+(D)$,

existiert $0 < r < 1$ mit $v(z) \leq \min(1, \frac{\epsilon}{4M})$ für $r < |z| < 1$.

Setze $N \geq \sup_{z \in D} v(z)$, o.B.d.A. $N \geq 1$.

Weil K kompakt in Y_\bullet und die Topologie von Y_\bullet stärker als die Topologie der kompakten Konvergenz, ist K nach dem Satz

von Arzela-Ascoli gleichstetig auf D ; die Funktionen aus K sind gleichmäßig gleichstetig auf \overline{D}_r : Es gibt $1 > \delta > 0$, so daß aus $z, z' \in \overline{D}_r, |z-z'| < \delta$ folgt $|f(z)-f(z')| < \frac{\epsilon}{2N}$ für alle $f \in K$.

Sei $t=1-\delta$ ($0 < t < 1$) und $(Tf)(z) := f(tz)$ ($z \in D, f \in Y_0$). Die Funktionen Tf ($f \in Y_0$) sind auf $\{z; |tz| < 1\} = D_{(1-\delta)^{-1}} \supset D$

holomorph, $(Tf)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_d} \frac{(Tf)(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta$ mit $1 < d < (1-\delta)^{-1}$

$$\text{für } z \in D \text{ und } f \in Y_0, (Tf)(z) = \sum_{k=0}^n z^k \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_d} \frac{(Tf)(\zeta)}{\zeta^{k+1}} d\zeta \right) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_d} \frac{z^{n+1}}{\zeta^{n+2}} \frac{1}{1-\frac{z}{\zeta}} (Tf)(\zeta) d\zeta.$$

Wegen $|1-\frac{z}{\zeta}| \geq 1 - \frac{|z|}{|\zeta|} \geq 1 - \frac{1}{d}$ ($z \in D, \zeta \in \partial D_d$) gilt

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_d} \frac{z^{n+1}}{\zeta^{n+2}} \frac{1}{1-\frac{z}{\zeta}} (Tf)(\zeta) d\zeta \right| \leq d \frac{1}{d^{n+2}} \frac{1}{1-\frac{1}{d}} \|f\| \leq \left(\frac{1}{d}\right)^n \frac{1}{d-1} M \leq \frac{\epsilon}{2N}$$

gleichmäßig für $f \in K$, wenn nur $n \geq n_0$. Setze

$$(Lf)(z) := \sum_{k=0}^{n_0} z^k \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_d} \frac{f(t\zeta)}{\zeta^{k+1}} d\zeta \right). \text{ Wir zeigen:}$$

$$f \longrightarrow l_k(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_d} \frac{f(t\zeta)}{\zeta^{k+1}} d\zeta \text{ ist stetig von } Y_0 \text{ in } \mathbb{C}, \text{ so}$$

daß $L \in Y_0 \otimes Y_0'$. Wegen $td < 1$ existiert $v' \in C_0^+(D)$ mit $v'(z) = 1$ auf

$$\overline{D_{td}}. \text{ Für dieses } v' \text{ erhält man: } \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_d} \frac{f(t\zeta)}{\zeta^{k+1}} d\zeta \right| \leq$$

$$\frac{1}{d^k} \sup_{\zeta \in \partial D_d} |f(t\zeta)| \leq \frac{1}{d^k} \sup_{z \in \overline{D_{td}}} |f(z)| \leq \frac{1}{d^k} \sup_{z \in D} v'(z) |f(z)| = d^{-k} b v'(f) (f \in Y_0).$$

Es bleibt $\sup_{z \in D} v(z) |f(z) - (Lf)(z)| < \epsilon$ für alle $f \in K$ zu zeigen.

Zunächst ist für $z \in D \setminus \overline{D}_r$: $v(z) \leq \frac{\epsilon}{4M}$ und ≤ 1 , so daß

$$v(z) |f(z) - (Lf)(z)| \leq v(z) (|f(z) - (Tf)(z)| + |(Tf)(z) - (Lf)(z)|) \leq$$

$$v(z) (|f(z)| + |f(tz)|) + v(z) \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_d} \frac{z^{n_0+1}}{\zeta^{n_0+2}} \frac{1}{1-\frac{z}{\zeta}} (Tf)(\zeta) d\zeta \right| \leq$$

$$\frac{\epsilon}{4M} (\|f\| + \|f\|) + \frac{\epsilon}{2N} \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \text{ wenn } f \in K. \text{ Andererseits gilt für } f \in K$$

$$\text{und } z \in \overline{D}_r: |f(z) - f(tz)| \leq \frac{\epsilon}{2N}, \text{ d.h. } v(z) |f(z) - (Lf)(z)| \leq$$

$$v(z) (|f(z) - f(tz)| + |(Tf)(z) - (Lf)(z)|) \leq N \left(\frac{\epsilon}{2N} + \frac{\epsilon}{2N} \right) = \epsilon. \text{ q.e.d.}$$

Der Beweis benutzt wesentlich Eigenschaften der strikten Topologie und kann nicht ohne weiteres auf $H^\infty(D)$ mit der sup-Norm übertragen werden (Es ist ein offenes Problem zu zeigen, daß $(H^\infty(D), \|\cdot\|)$ die Approximationseigenschaft besitzt, vgl. [4].).

Mit Hilfe von 1. erhält man ohne Schwierigkeit die allgemeinere Aussage:

2. Satz: Sei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet in der komplexen Ebene. Dann hat auch $Y_\circ(G) = (H^\infty(G), \beta)$ die Approximationseigenschaft.

Beweis: O.B.d.A. darf $G \neq \mathbb{C}$ angenommen werden. Nach dem Riemannschen Abbildungssatz gibt es in diesem Fall eine Funktion g , die D eineindeutig und konform auf G abbildet; g (bzw. g^{-1}) ist holomorph auf D (bzw. G).

Definiere $\varphi(f) = f \circ g$ für alle $f \in H^\infty(G)$; φ liefert eine stetige lineare Abbildung von $(H^\infty(G), \beta)$ in $(H^\infty(D), \beta)$: Für $v \in C_\circ^+(D)$ gehört v' mit $v'(\zeta) = (v \circ g^{-1})(\zeta)$ für alle $\zeta \in G$ zu $C_\circ^+(G)$, weil g (bzw. g^{-1}) kompakte Mengen in D (bzw. G) in kompakte Mengen in G (bzw. D) überführt. Daher ist für eine beliebige Nullumgebung $U = U_{v, \varepsilon} = \{ \tilde{f} \in H^\infty(D); \sup_{z \in D} v(z) |\tilde{f}(z)| < \varepsilon \}$ ($\varepsilon > 0, v \in C_\circ^+(D)$)

in $(H^\infty(D), \beta)$ mit $V = V_{v', \varepsilon} = \{ f \in H^\infty(G); \sup_{\zeta \in G} v'(\zeta) |f(\zeta)| < \varepsilon \}$

($v' = v \circ g^{-1} \in C_\circ^+(G)$) eine Nullumgebung in $(H^\infty(G), \beta)$ gefunden, so daß $\varphi(V) \subset U$.

Analog beweist man, daß $\psi(h) = h \circ g^{-1}$ für alle $h \in H^\infty(D)$ eine stetige lineare Abbildung ψ von $(H^\infty(D), \beta)$ in $(H^\infty(G), \beta)$ darstellt, derart daß $\psi \circ \varphi = \text{id}_{H^\infty(G)}$.

Nach dem Lemma auf p.75 von [54] besitzt also $(H^\infty(G), \beta)$ mit $(H^\infty(D), \beta)$ die Approximationseigenschaft. q.e.d.

Jetzt wenden wir Sätze der vorhergehenden Paragraphen an; es ergibt sich aus §7, 4.:

3. Satz: Für vollständigen lokalkonvexen Raum E und einfach zusammenhängendes Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ gilt

$$(H^\infty(G, E), \beta) = (H^\infty(G), \beta) \otimes_\varepsilon E.$$

$H^\infty(G)$ ist abgeschlossene lokalkonvexe Teilalgebra von $(CB(G), \beta)$ mit in beiden Variablen stetiger Multiplikation (aber i.a. nicht lokal m -konvex, vgl. Rubel, Shields [31], 3.17)

und etwa $D=M(H^\infty(D))$ (s. [31], Theorem 5.17, wo unter sehr allgemeinen Voraussetzungen an G die Elemente von $M(H^\infty(G))$ charakterisiert sind).

Aus §8, 2., §8, 4. und §8, 5.(2) folgt:

4. Satz: Für vollständige lokalkonvexe Algebra E mit (κ, κ) -hypostetiger Multiplikation und G wie in 2. ist $(H^\infty(G, E), \beta)$ als topologische Algebra isomorph $(H^\infty(G), \beta) \otimes_{\mathbb{C}} E$. Es gibt eine eindeutige Zuordnung von $M(H^\infty(G, E))$ auf $M(E) \times M(H^\infty(G))$ (im Spezialfall $G=D$ also von $M(H^\infty(D, E))$ auf $D \times M(E)$). Ist E sm-halbeinfach, so auch $H^\infty(G, E)$.

Weiter erhält man aus §8, 11., 13. und der Bemerkung nach 17. (vgl. [31], 5.14):

5. Satz: Für vollständigen lokalkonvexen Raum E und G wie in 2. ist $(H^\infty(G, E), \beta)$ als topologischer Modul über $H^\infty(G)$ isomorph $(H^\infty(G), \beta) \otimes_{\mathbb{C}} E$. Es gibt eine eindeutige Zuordnung von $L(H^\infty(G, E), H^\infty(G))$ auf $M(H^\infty(G)) \times (E' \setminus \{0\})$, d.h. im Spezialfall $G=D$ von $L(H^\infty(D, E), H^\infty(D))$ auf $D \times (E' \setminus \{0\})$. Jeder abgeschlossene maximale Teilmodul etwa von $(H^\infty(D, E), \beta)$ hat die Form $\{f \in H^\infty(D, E); e'(f(z))=0\}$ für gewisse $z \in D$ und $e' \in E'$ ($e' \neq 0$).

Für Gebiete G und G' in \mathbb{C} setze $H^\infty(G \times G') = \{f \in CB(G \times G'); z \rightarrow f(z, z') \text{ holomorph auf } G \text{ für festes } z' \in G' \text{ und } z' \rightarrow f(z, z') \text{ holomorph auf } G' \text{ für festes } z \in G\}$;

$H^\infty(G \times G')$ ist der Raum der beschränkten holomorphen Funktionen (in zwei Variablen) auf $G \times G'$ und wird als abgeschlossener linearer Unterraum (bzw. Teilalgebra) von $(CB(G \times G'), \beta)$ mit der strikten Topologie versehen.

6. Lemma: Im Sinne einer topologischen Isomorphie gilt, wenn alle vorkommenden Räume unter der strikten

Topologie betrachtet werden:

(1) $CB(X, CB(X')) = CB(X \times X')$ für beliebige lokalkompakte X

und X' ,

(2) $H^\infty(G, H^\infty(G')) = H^\infty(G \times G')$ für beliebige Gebiete G und

G' in \mathbb{C} .

Beweis: Zu (1): Dies folgt aus

$(CB(X, CB(X')), \beta) = (CB(X), \beta) \check{\Theta}_\epsilon(CB(X'), \beta)$ und
 $(CB(X), \beta) \check{\Theta}_\epsilon(CB(X'), \beta) = (CB(X \times X'), \beta)$ (nach Summers [39], Th.
 4.7). Der Isomorphismus wird durch die kanonische Abbildung
 I gegeben: $I(f)(x, x') = [f(x)](x')$ für $f \in CB(X, CB(X'))$, $x \in X$,
 $x' \in X'$.

Zu (2): Nach (1) gilt bei I :

$$H^\infty(G, H^\infty(G')) \subset CB(G, H^\infty(G')) \subset CB(G, CB(G')) = CB(G \times G');$$

I bildet aber $H^\infty(G, H^\infty(G'))$ sogar in $H^\infty(G \times G')$ ab: Für

$f \in H^\infty(G, H^\infty(G'))$ ist die Funktion

$I_{z', \cdot}(f)(z) = I(f)(z, z') = \langle \delta_{z'}, f(z) \rangle$ nach Definition von
 $H^\infty(G, H^\infty(G'))$ bei festem $z' \in G'$ holomorph auf G . Daher kann
 man $H^\infty(G, H^\infty(G'))$ als eingebettet in $H^\infty(G \times G')$ betrachten,
 und die Topologien der beiden Räume fallen zusammen.

Umgekehrt definiert nach (1) jedes $g \in H^\infty(G \times G') \subset CB(G \times G')$ eine
 Funktion $f_g \in CB(G, CB(G'))$ durch $[f_g(z)](z') = g(z, z')$ für $z \in G$,
 $z' \in G'$; f_g gehört zu $H^\infty(G, H^\infty(G'))$, weil $\langle \delta_{z'}, f_g(z) \rangle = g(z, z')$
 holomorph auf G für jedes $z' \in G'$ und $\{\delta_{z'}; z' \in G'\}$ total in
 $(H^\infty(G'), \beta)$; ist (benutze Grothendieck [19], p.39, Remarque
 1). Es gilt $I(f_g) = g$; damit liefert I einen topologischen
 Isomorphismus von $H^\infty(G, H^\infty(G'))$ auf $H^\infty(G \times G')$. w.z.b.w.

Aus 3., 4. und 6. folgt nun:

7. Satz: Für einfach zusammenhängendes Gebiet G und beliebiges
 Gebiet G' in \mathbb{C} findet man

$$(H^\infty(G \times G'), \beta) = (H^\infty(G), \beta) \check{\Theta}_\epsilon(H^\infty(G'), \beta) \text{ und (als Menge)}$$

$$M((H^\infty(G \times G'), \beta)) = M((H^\infty(G), \beta)) \times M((H^\infty(G'), \beta)).$$

Bemerkung: Wir haben es vorgezogen, noch einen Beweis von 7.
 mit Hilfe von vektorwertigen Funktionen zu geben,
 ohne direkt §7, 12. anzuwenden.

8. Korollar: $(H^\infty(D \times D), \beta) = (H^\infty(D), \beta) \check{\Theta}_\epsilon(H^\infty(D), \beta)$ und (als Menge)
 $M((H^\infty(D \times D), \beta)) = D \times D$.

Hinweis: Korollar 8. wird durch die Tatsache besonders inter-
 essant, daß $H^\infty(D) \check{\Theta}_\epsilon H^\infty(D) \not\subset H^\infty(D \times D)$, wenn man die
 Räume mit der sup-Norm versieht (s. Birtel, Dubinsky [4], p.
 304/5).

Literatur:

- [1] M.G. Arsove, The Paley-Wiener theorem in metric linear spaces, Pacific J. Math. 10, 365-379 (1960)
- [2] K.-D. Bierstedt, Topologische Tensorprodukte und Tensoralgebren stetiger Funktionen, Diplomarbeit Mainz 1969
- [3] "- Function algebras and a theorem of Mergelyan for vector-valued functions, in "Papers from the Summer Gathering on Function Algebras", Aarhus 1969
- [4] F. Birtel, E. Dubinsky, Bounded analytic functions of two complex variables, Math. Zeitschr. 93, 299-310 (1966)
- [5] N. Bourbaki, General topology, Parts I, II, Addison-Wesley, Don Mills 1966
- [6] "- Intégration, Ch. I-IV, A.S.I. 1175, Hermann, Paris 1965
- [7] "- Intégration, Ch. VI, A.S.I. 1281, Hermann, Paris 1959
- [8] R.C. Buck, Bounded continuous functions on a locally compact space, Michigan Math. J. 5, 95-104 (1958)
- [9] H.S. Collins, J.R. Dorroh, Remarks on certain function spaces, Math. Annalen 176, 157-168 (1968)
- [10] J.B. Conway, Subspaces of $C(S)_\beta$, the space (l^∞, β) and (H^∞, β) , Bull. AMS 72, 79-81 (1966)
- [11] W.E. Dietrich jr., The maximal ideal space of the topological algebra $C(X, E)$, Math. Annalen 183, 201-212 (1969)
- [12] J.R. Dorroh, The localization of the strict topology via bounded sets, Proc. AMS 20, 413-414 (1969)
- [13] J. Dugundji, Topology, Allyn and Bacon, Boston 1966
- [14] C.F. Dunkl, Modules over Banach algebras, Monatshefte Math. 74, 6-14 (1970)
- [15] L. Eifler, The slice product of function algebras, Proc. AMS 23, 559-564 (1969) (vgl. Notices AMS 15, 1968, p.200, 68T-36)
- [16] T.W. Gamelin, J. Garnett, Constructive techniques in rational approximation, Transact. AMS 143, 187-200 (1969)

- [17] B. Gramsch, Topologische Algebren, Vorlesungsausarbeitung
Mainz 1966/67
- [18] B. Gramsch, D. Vogt, Holomorphe Funktionen mit Werten in
nicht lokalkonvexen Vektorräumen,
J. reine angew. Math. 243, 159-170
(1970)
- [19] A. Grothendieck, Sur certains espaces de fonctions holo-
morphes I, II, J. reine angew. Math. 192,
35-64, 77-95 (1953)
- [20] "- Produits tensoriels topologiques et es-
paces nucléaires, Memoirs AMS 16 (1966)
- [21] J. Horváth, Topological vector spaces and distributions I,
Addison-Wesley, Reading 1966
- [22] J.L. Kelley, General topology, Van Nostrand, Princeton
1955
- [23] J.L. Kelley, I. Namioka (and co-authors), Linear topolo-
gical spaces, Van Nostrand, Prince-
ton 1963
- [24] G. Köthe, Topologische lineare Räume I, Springer, Heidel-
berg 1960
- [25] E.A. Michael, Locally multiplicatively-convex topological
algebras, Memoirs AMS 11 (1968)
- [26] L. Nachbin, Elements of approximation theory, Van Nost-
rand Math. Studies 14, Princeton 1967
- [27] J. Nagata, Modern dimension theory, North-Holland, Amster-
dam 1965
- [28] M. Nakamura, Notes on the nuclearity of some function
spaces II, Proc. Japan Acad. 44, 144-146
(1968)
- [29] C.E. Rickart, General theory of Banach algebras, Van
Nostrand, Princeton 1960
- [30] L.A. Rubel, J.V. Ryff, The bounded weak-star topology
and the bounded analytic functions,
J. Functional Anal. 5, 167-183
(1970)
- [31] L.A. Rubel, A.L. Shields, The space of bounded analytic
functions on a region, Ann. Inst.
Fourier Grenoble 16, 235-277
(1966)

- [32] H.H. Schaefer, Topological vector spaces, Macmillan, New York 1964
- [33] H. Schubert, Topologie, Teubner, Stuttgart 1964
- [34] Séminaire Schwartz 1953/54: Produits tensoriels topologiques d'espaces vectoriels topologiques, espaces vectoriels topologiques nucléaires, applications, Paris 1954
- [35] L. Schwartz, Espaces de fonctions différentiables à valeurs vectorielles, J. d'analyse (Jérusalem) 4, 88-148 (1954-56)
- [36] "- Théorie des distributions à valeurs vectorielles I, Ann. Inst. Fourier Grenoble 7, 1-142 (1957)
- [37] A.H. Shuchat, Approximation of vector-valued functions, to appear in Proc. AMS (vgl. Notices AMS 16, 1969, p.1066/67, 671-21)
- [38] H.A. Smith, Tensor products of locally convex algebras, Proc. AMS 17, 124-132 (1966)
- [39] W.H. Summers, A representation theorem for biequicontinuous completed tensor products of weighted spaces, Transact. AMS 146, 121-132 (1969) (vgl. Notices AMS 16, 1969, p.87, 663-2)
- [40] "- Dual spaces of weighted spaces, to appear in J. Functional Anal. (vgl. Notices AMS 16, 1969, p.787, 667-34)
- [41] "- Full completeness in weighted spaces, to appear (vgl. Notices AMS 17, 1970, p.89, 672-11)
- [42] B.A. Taylor, Some locally convex spaces of entire functions, in "AMS Proc. Symp. Pure Math., Vol. XI (1966) (Entire functions and related parts of analysis), 1968", p. 431-467
- [43] C. Todd, Stone-Weierstrass theorems for the strict topology, Proc. AMS 16, 654-659 (1965)
- [44] F. Trèves, Topological vector spaces, distributions and kernels, Academic Press, New York 1967
- [45] L. Waelbroeck, Duality and the injective tensor product, Math. Annalen 163, 122-126 (1966)
- [46] S. Warner, The topology of compact convergence on continuous function spaces, Duke Math. J. 25, 265-282 (1958)

- [47] J. Wells, Bounded continuous vector-valued functions on a locally compact space, Michigan Math. J. 12, 119-126 (1965)
- [48] W. Zelazko, Metric generalizations of Banach algebras, Yale Univ. 1963/64

Nachträge:

- [49] G.W. Johnson, The dual of $C(S, F)$, Math. Annalen 187, 1-8 (1970)
- [50] H.S. Collins, On the space $l^\infty(S)$, with the strict topology, Math. Zeitschr. 106, 361-373 (1968)
- [51] I. Glicksberg, Bishop's generalized Stone-Weierstrass theorem for the strict topology, Proc. AMS 14, 329-333 (1963)
- [52] A. Grothendieck, Espaces vectoriels topologiques, São Paulo 1954
- [53] W.B. Jones, A locally convex topology for spaces of holomorphic functions, Math. Annalen 177, 143-155 (1968)
- [54] D. Vogt, On the approximation property for $R(X)$, in "Papers from the Summer Gathering on Function Algebras", Aarhus 1969

Lebenslauf

Am 4. 5. 1945 wurde ich als Sohn des Prokuristen Otto Bierstedt und seiner Ehefrau Anneliese, geb. Knußmann, in Bad Eilsen (Schaumburg-Lippe) geboren. Ich bin römisch-katholisch. Seit Herbst 1945 wohne ich mit meinen Eltern in Mainz-Kastel, wo meine Großeltern mütterlicherseits herkommen.

In Kastel besuchte ich von Ostern 1951 bis Ostern 1955 die Volksschule und anschließend in Mainz das Gymnasium am Kurfürstlichen Schloß (neusprachlicher Zweig mit 9 Jahren Französisch, 7 Jahren Latein und 6 Jahren Englisch). An diesem Gymnasium bestand ich auch im Frühjahr 1964 das Abitur.

Da etwa seit Beginn der Oberstufe mein besonderes Interesse der Mathematik und ihren Anwendungen in der Physik gehörte, begann ich mit dem Sommersemester 1964 das Studium der Mathematik und Physik an der Johannes Gutenberg-Universität in Mainz. Im Frühsommer 1966 legte ich die Vordiplomprüfung in Mathematik und im Herbst 1966 das Vordiplom in Physik ab.

Mein Studium wurde zum Teil mit Mitteln aus dem Gutenberg-Preis der Stadt Mainz, durch Hilfsassistenten-Tätigkeit an den Mathematischen Instituten und vor allem durch ein Stipendium des Cusanuswerks finanziert. Das Stipendium half mir insbesondere, als im Januar 1967 mein Vater überraschend nach kurzer Krankheit verstarb.

Im Sommersemester 1969 bestand ich die Diplomprüfung in Mathematik - die mündliche Prüfung dazu hatte ich bereits ein Jahr vorher abgelegt. Während des Wintersemesters 1969/70 war ich als Tutor der Vw-Stiftung am Institut für Angewandte Mathematik angestellt und hielt eine Übungsgruppe "Analysis I" ab. Um besser und schneller mit meiner Dissertation voranzukommen, griff ich Ende des Wintersemesters auf ein Promotionsstipendium zurück, das ich über das Cusanuswerk bezog.

Ich beabsichtige, wenn möglich, auch weiterhin an der Universität zu bleiben.