ZUM CAUCHYPROBLEM FÜR CONVOLUTOREN

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades

der Mathematisch - Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Christian - Albrechts - Universität

zu Kiel

vorgelegt von

SÖNKE HANSEN

Kiel 1976

Referent : ......Prof. Dr. Wiebe....................

Korreferent : ....Prof. Dr. ~~W.~~ Flöret..................

Tag der mündlichen Prüfung : ..12. Februar..1977...

Zum Druck genehmigt: Kiel, den..12. Februar 1977.

..gez. Schlender..................

Dekan

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Im Mittelpunkt dieser Arbeit steht das Cauchyproblem in einem Halbraum $H \subset \mathbb{R}^n$ für Convolutionsgleichungen, die durch Distributionen $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ definiert sind. Wir fragen hierbei für jedes $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp} f \subset H$ nach Lösungen $u \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp} u \subset H$ der Gleichung

$$(\ast) \qquad (S * u)(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

In Theorem 1.4. zeigen wir, daß eine Lösung u von $(\ast)$ für einen $\mathcal{D}'$- invertierbaren Convolutor S eindeutig durch f bestimmt ist, falls H ein nichtcharakteristischer Halbraum für S ist. Ist S speziell ein linearer, partieller Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten, so ist dieses Theorem gerade der klassische Holmgrensche Eindeutigkeitssatz. Üblicherweise wird der Holmgrensche Satz mit Hilfe des Cauchy - Kowalewski - Theorems bewiesen; da ein solcher Satz für allgemeine Convolutoren nicht zur Verfügung steht, haben wir zum Beweis von Theorem 1.4. andere Techniken benutzt. In erster Linie stützen wir uns dabei auf Hörmanders Theorie der L^2 - Abschätzungen des Cauchy - Riemann - Operators $\bar{\partial}$ in $\mathbb{C}^n$. In Theorem 1.1o. zeigen wir, daß für gewisse Convolutoren S die Lösungen des Problems $(\ast)$ nicht mehr eindeutig durch f bestimmt sind, wenn der Halbraum charakteristisch für S ist. Im Spezialfall linearer, partieller Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten ist dieses ein Ergebnis von Hörmander.

Im 2. Abschnitt untersuchen wir die Frage nach der Existenz von lokalen Lösungen der Gleichung $(\ast)$. D.h. wir fragen:

Seien $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ und $K \Subset \mathbb{R}^n$ kompakt gegeben; gibt es dann ein $u \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, so daß $(S * u)(x) = f(x)$ für alle $x \in K$? Notwendig für eine positive Lösung dieses Problems ist das Bestehen einer "Langsam - Fallend - Abschätzung" der Fouriertransformierten $\hat{S}$ von S (siehe Satz 2.4.). Diese Bedingung reicht jedoch allein nicht hin, auch die Existenz lokaler Lösungen zu garantieren. Lokale Lösungen von (✱) erhalten wir, wenn wir zusätzlich noch Annahmen über die Nullstellenmenge $\mathcal{N}(\hat{S})$ von $\hat{S}$ machen (Satz 2.6.). Wie wir im 4. Abschnitt zeigen, werden diese Bedingungen insbesondere von den hyperbolischen und den parabolischen Convolutoren und Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten erfüllt.

Das Problem der Existenz von globalen Lösungen der Gleichung (✱) wird im 3. Abschnitt behandelt. In Satz 3.1. leiten wir eine notwendige Bedingung für die Lösbarkeit der Gleichung (✱), für alle $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp} f \subset H$, ab. Ist zusätzlich die Existenz lokaler Lösungen gesichert, so erhalten wir aus dieser Bedingung einen Approximationssatz für die Lösungen der homogenen Convolutionsgleichung. Mit diesem Approximationssatz kann man dann nach dem von Malgrange verallgemeinerten Mittag - Leffler - Verfahren wieder Lösungen $u \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp} u \subset H$ der Gleichung $S * u = f$, für jedes $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp} f \subset H$, erhalten.

Zu dieser Arbeit wurde ich von meinem Lehrer Prof. Dr. J. Wloka angeregt. Für seinen Rat und seine Unterstützung danke ich ihm.

o. Bezeichnungen

Wir verwenden die Bezeichnungen von Hörmander in [12], [13], [15]. Mit $|.|$ bezeichnen wir die euklidische Norm in $\mathbb{R}^n$ (bzw. $\mathbb{C}^n$) und mit $d(A,B)$ den euklidischen Abstand zweier Mengen $A, B \subset \mathbb{R}^n$ (bzw. $\subset \mathbb{C}^n$). Ein n-Tupel $\xi \in \mathbb{R}^n$ (bzw. $\in \mathbb{C}^n$) werden wir oft in der aufgespaltenen Form $\xi = (\xi', \xi_n)$ mit $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\xi_n \in \mathbb{R}$ (bzw. $\xi' \in \mathbb{C}^{n-1}$, $\xi_n \in \mathbb{C}$) schreiben.

Ist $N \in \dot{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \setminus \{o\}$, dann definieren wir den Halbraum $H_N := \{x \in \mathbb{R}^n ; \langle x, N\rangle \geq o\}$; speziell für $N = (o, \ldots, o, 1)$ sei $H_+ := H_N$, $H_- := H_{-N}$. Sei $\mathcal{F}$ ein Raum von Distributionen auf $\mathbb{R}^n$, dann bezeichnen wir mit $\mathcal{F}_+$ (bzw. $\mathcal{F}_-$) den Unterraum von $\mathcal{F}$, der aus den Distributionen $u \in \mathcal{F}$ mit $\operatorname{supp} u \subset H_+$ (bzw. $\operatorname{supp} u \subset H_-$) besteht.

Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Menge, so bezeichnet h_K die Stützfunktion von K; also $h_K(\eta) := \sup \{\langle x, \eta\rangle ; x \in K\}$, $\eta \in \mathbb{R}^n$.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$; dann setzen wir - wenn ch := "konvexe Hülle von" - $\Omega^S := \{x \in \mathbb{R}^n ; x - \operatorname{ch} \operatorname{supp} S \subset \Omega\}$. $\check{S} * : \mathcal{D}(\Omega^S) \longrightarrow \mathcal{D}(\Omega)$ und $S * : \mathcal{D}'(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega^S)$ sind dann wohldefinierte, lineare, stetige Convolutionsoperatoren. Sprechen wir von einem Convolutor $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ (z.B. einem Differential-Differenzen-Operator), so meinen wir den durch $u \rightsquigarrow S * u$, $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, definierten Convolutionsoperator. Die Nullstellenmenge einer holomorphen Funktion $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{N}(f) := \{\zeta \in \mathbb{C}^n ; f(\zeta) = o\}$.

Ein- und derselbe Buchstabe kann in verschiedenen Zeilen im allgemeinen verschiedene Konstanten bezeichnen.

1. Die Eindeutigkeitsfrage für das Cauchyproblem

Um die Eindeutigkeit des Convolutors $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ bezüglich der offenen Mengen $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ zu erhalten, d. h. den Satz

> aus $u \in \mathcal{E}(\Omega_2)$, $u=0$ in Ω_1 und $S * u = 0$ in Ω_2^S
> folgt $u=0$ in Ω_2

zu beweisen, müssen wir zeigen, daß die Menge aller $H \in \mathcal{E}'(\Omega_2)$ mit $H = G + \check{S} * F$, $G \in \mathcal{E}'(\Omega_1)$ und $F \in \mathcal{E}'(\Omega_2^S)$, dicht in $\mathcal{E}'(\Omega_2)$ ist; denn der Abschluß dieser Menge in $\mathcal{E}'(\Omega_2)$ ist gerade die Polare des Unterraumes $\{u \in \mathcal{E}(\Omega_2)\,;\ S * u = 0 \text{ in } \Omega_2^S,\ u = 0 \text{ in } \Omega_1\}$ von $\mathcal{E}(\Omega_2)$. Sind Ω_1 und Ω_2 konvex, so zeigt das Paley - Wiener - Theorem, daß sich $|\hat{H}(\zeta)|$ für jedes H von der ebengenannten Form gleichmäßig in allen $\zeta \in \mathfrak{N}(\check{\hat{S}}) = -\mathfrak{N}(\hat{S})$ wie die Fouriertransformierte einer Distribution in $\mathcal{E}'(\Omega_1)$ abschätzen lassen muß. Dieses führt uns darauf einen Eindeutigkeitsbeweis in folgender Weise zu führen:

(i) Wir konstruieren zunächst eine in $\mathcal{E}'(\Omega_2)$ dichte Menge von Distributionen, deren Fouriertransformierte auf einer festen Menge $E \subset \mathbb{C}^n$ eine Paley - Wiener - Abschätzung wie Distributionen aus $\mathcal{E}'(\Omega_1)$ erfüllen.

(ii) Über S wird $\mathfrak{N}(\check{\hat{S}}) \subset E$ vorrausgesetzt, und - unter eventuell zusätzlichen Annahmen über S und E - mit Hilfe von Minimum - Modulus - Abschätzungen wird $|\hat{S}(-\zeta)|$ dann gleichmäßig für alle ζ aus einer Umgebung von $\mathbb{C}^n \setminus E$ nach unten abgeschätzt.

(iii) Um zu einem $H \in \mathcal{E}'(\Omega_2)$, welches aus der in (i) konstruierten dichten Menge ist, ein $G \in \mathcal{E}'(\Omega_1)$ und ein $F \in \mathcal{E}'(\Omega_2^S)$ mit $\hat{H}(\zeta) = \hat{G}(\zeta) + \hat{S}(-\zeta) \cdot \hat{F}(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{C}^n$, zu erhalten, setzen wir

für $\hat{G}$ an: $\hat{G}(\zeta) = \varphi(\zeta)\cdot\hat{H}(\zeta) - \hat{S}(-\zeta)\cdot v(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{C}^n$.
Dabei ist $\varphi = 1$ in einer Umgebung von $\mathcal{N}(\check{\hat{S}})$, $\operatorname{supp}\varphi \subset E$ und $|\hat{H}/\check{\hat{S}}|$ muß auf $\operatorname{supp}\bar{\partial}\varphi$, welcher in der Nähe von ∂E liegt, klein sein (hierbei werden die in (i) und (ii) gewonnenen Abschätzungen gebraucht). Damit $\hat{G}$ holomorph ist, d. h. $\bar{\partial}\hat{G} = 0$, muß v die Gleichung

$$\bar{\partial} v(\zeta) = \frac{\hat{H}(\zeta)}{\hat{S}(-\zeta)}\,\bar{\partial}\varphi(\zeta)$$

für alle $\zeta \in \mathbb{C}^n$ erfüllen. Nach einem Theorem von Hörmander über L^2-Abschätzungen des Cauchy-Riemann-Operators $\bar{\partial}$ erhalten wir eine Lösung $v \in L^2_{loc}(\mathbb{C}^n)$ dieser Gleichung, die eine ähnliche L^2-Abschätzung wie $|\hat{H}/\check{\hat{S}}\cdot\bar{\partial}\varphi|$ erfüllt. Daraus schließen wir dann, daß $\hat{G}$ - wie schon durch die Schreibweise suggeriert - tatsächlich die Fouriertransformierte einer Distribution $G \in \mathcal{E}'(\Omega_1)$ ist. Schließlich erhalten wir noch $F \in \mathcal{E}'(\Omega_2^S)$ aus $\hat{F} = (1-\varphi)\hat{H}/\check{\hat{S}} + v$.

Dieses Programm wollen wir nun im Einzelnen durchführen.

Das folgende Lemma - es stimmt im Wesentlichen mit Lemma 9.22. in Ehrenpreis [9] überein - liefert uns Distributionen $H \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, deren Träger eine Parabeloberfläche $\{(ay, \frac{a}{2b}(1-|y|^2)) \in \mathbb{R}^n; |y| \le 1\}$, $a,b > 0$, ist. Ihre Fouriertransformierten erfüllen auf einer gewissen Teilmenge $E \subset \mathbb{C}^n$ jedoch Paley-Wiener-Abschätzungen wie Distributionen, deren Träger in der Basis der Parabel $\{(ay, 0) \in \mathbb{R}^n; y \in \mathbb{R}^{n-1}, |y| \le 1\}$ enthalten sind.

<u>LEMMA 1.1.</u> Zu $a,b>0$ und einem beliebigen Polynom in $n>1$ Variablen definiere die Distribution $H\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ durch

$$H(\varphi)=\int_{|y|\le 1}(P\cdot\varphi)(ay,\tfrac{a}{2b}(1-|y|^2))\,dy\ ,\qquad \varphi\in\mathcal{E}(\mathbb{R}^n).$$

Sei $m>0$ beliebig; dann gilt gleichmäßig in der Menge

$$E=\{(\zeta',\zeta_n)\in\mathbb{C}^n\ ;\ |\zeta_n|\le b|\mathrm{Re}\,\zeta'|+m\cdot\log(2+|\zeta|)\ \text{oder}\ \mathrm{Im}\,\zeta_n\le b|\mathrm{Im}\,\zeta'|+m\cdot\log(2+|\zeta|)\}$$

die Abschätzung

$$|\hat{H}(\zeta)|\le c\,(1+|\zeta|)^{am/b}\cdot\exp(a|\mathrm{Im}\,\zeta'|)\ ,\qquad \zeta=(\zeta',\zeta_n)\in\mathbb{C}^n.$$

<u>Beweis.</u> Wir führen den Beweis nur für $P\equiv 1$ durch. Man erkennt leicht, daß die folgenden Rechnungen für beliebiges P fast ungeändert gültig sind. Die Fouriertransformierte von H ist

$$\hat{H}(\zeta',\zeta_n)=\int_{|y|\le 1}\exp(-ia\cdot\langle\zeta',y\rangle-i\tfrac{a}{2b}\,\zeta_n(1-|y|^2))\,dy\ ,\quad (\zeta',\zeta_n)\in\mathbb{C}^n.$$

Schätzt man dieses Integral ab, so erhält man

$$|\hat{H}(\zeta)|\le c\cdot\exp(h\,(\mathrm{Im}\,\zeta))$$

mit $c=$ Volumen der reell-$(n-1)$-dimensionalen Einheitskugel und $h(\mathrm{Im}\,\zeta):=a\cdot\sup\{\langle y,\mathrm{Im}\,\zeta'\rangle+\frac{1}{2b}\mathrm{Im}\,\zeta_n(1-|y|^2)\ ;\ y\in\mathbb{R}^{n-1},\ |y|\le 1\}$.
Ist $\zeta\in E$ mit $\mathrm{Im}\,\zeta_n\le b|\mathrm{Im}\,\zeta'|+m\cdot\log(2+|\zeta|)$, dann ist

$$h(\mathrm{Im}\,\zeta)\le a\cdot\sup\{r|\mathrm{Im}\,\zeta'|+\tfrac{1}{2b}b|\mathrm{Im}\,\zeta'|(1-r^2)\ ;\ 0\le r\le 1\}+\tfrac{am}{2b}\log(2+|\zeta|)$$
$$\le a|\mathrm{Im}\,\zeta'|+\tfrac{am}{2b}\log(2+|\zeta|)\ ;$$

also ist für diese ζ

$$|\hat{H}(\zeta)|\le c\,(2+|\zeta|)^{am/2b}\cdot\exp(a|\mathrm{Im}\,\zeta'|).$$

Jetzt ist die Abschätzung noch für $\zeta\in E$ mit $|\zeta_n|\le b|\mathrm{Re}\,\zeta'|+m\cdot\log(2+|\zeta|)$ zu prüfen. Sei also solch ein $\zeta\in E$ gegeben.

Da das $\hat{H}$ definierende Fourierintegral invariant unter $(n-1)$-dimensionalen orthogonalen Transformationen ist, können wir o.B.d.A. über ζ vorraussetzen, daß $\mathrm{Re}\,\zeta' = (\mathrm{Re}\,\zeta_1, o, \ldots, o)$, also $|\zeta_n| \le b|\mathrm{Re}\,\zeta_1| + m\cdot\log(2+|\zeta|)$. Das innere Integral in

$$|\hat{H}(\zeta)| \le \int_{|x|\le 1} \exp(a\langle \mathrm{Im}\,\zeta'', x\rangle)\cdot \Big|\int_{t^2\le 1-|x|^2} \exp(-iat\cdot\mathrm{Re}\,\zeta_1 + at\cdot\mathrm{Im}\,\zeta_1 - i\tfrac{a}{2b}\zeta_n(1-|x|^2-t^2))\,dt\Big|\,dx$$

$\zeta = (\zeta_1, \zeta'', \zeta_n) \in \mathbb{C}^n$, $x \in \mathbb{R}^{n-2}$,

werten wir nun mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes aus. Indem wir nämlich den Integrationsweg $-(1-|x|^2)^{1/2} \le t \le (1-|x|^2)^{1/2}$ in den Halbkreis $|t|^2 = 1-|x|^2$, $\mathrm{Im}\,t\cdot\mathrm{Re}\,\zeta_1 \le o$ deformieren, erhalten wir für dieses Integral

$$\Big|\int_{\substack{|t|^2 = 1-|x|^2 =: \gamma^2 \\ \mathrm{Im}\,t\cdot\mathrm{Re}\,\zeta_1 \le o}} \exp(-iat\cdot\mathrm{Re}\,\zeta_1 + at\cdot\mathrm{Im}\,\zeta_1 - i\tfrac{a}{2b}\zeta_n(1-|x|^2-t^2))\,dt\Big|$$

$$\le \int_o^\pi \exp(-\gamma a\sin\vartheta|\mathrm{Re}\,\zeta_1| + a\gamma|\mathrm{Im}\,\zeta_1| + \tfrac{\gamma^2 a}{2b}|\zeta_n||1-e^{2i\vartheta}|)\cdot\gamma\;d\vartheta\,.$$

Da $|1-e^{2i\vartheta}| = 2|\sin\vartheta|$ und $o \le \gamma \le 1$ ist für $o \le \vartheta \le \pi$

$$\begin{aligned} -\gamma a\sin\vartheta\,|\mathrm{Re}\,\zeta_1| &+ \tfrac{\gamma^2 a}{2b}|\zeta_n||1-e^{2i\vartheta}| \\ &\le \gamma a\sin\vartheta(-|\mathrm{Re}\,\zeta_1| + \tfrac{\gamma}{b}(b|\mathrm{Re}\,\zeta_1| + m\cdot\log(2+|\zeta|))) \\ &\le \tfrac{am}{b}\log(2+|\zeta|)\,. \end{aligned}$$

Folglich

$$|\hat{H}(\zeta)| \le \pi(2+|\zeta|)^{am/b}\int_{|x|\le 1}\exp(a\langle\mathrm{Im}\,\zeta'', x\rangle + a\sqrt{1-|x|^2}\cdot|\mathrm{Im}\,\zeta_1|)\,dx\,.$$

Da $|(ax, a\sqrt{1-|x|^2})| = a$, $x \in \mathbb{R}^{n-2}$ mit $|x| \le 1$, folgt das Lemma aus einer Integralabschätzung mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung. ■

Mit diesem Lemma können wir das anfangs unter (i) genannte Ziel im Wesentlichen erreichen.

SATZ 1.2. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, offene, konvexe Menge mit C^1-Rand $\partial\Omega$. Seien ferner $b,m>0$ gegeben. Ist $x_0 \in \partial\Omega$ und $N \in \dot{\mathbb{R}}^n$ die äußere Einheitsnormale an Ω in x_0, so gibt es eine Umgebung ω von x_0, so daß die Menge aller $H \in \mathcal{E}'(\Omega \cup \omega)$, welche gleichmäßig auf der Menge

$$E := \Big\{ \zeta \in \mathbb{C}^n;\ \ |\langle \zeta, N\rangle| \leq b\,|\mathrm{Re}(\zeta - \langle \zeta, N\rangle N)| + m \log(2+|\zeta|) \ \text{ oder } \ \mathrm{Im}\,\langle \zeta, N\rangle \leq b\,|\mathrm{Im}(\zeta - \langle \zeta, N\rangle N)| + m \log(2+|\zeta|) \Big\}$$

eine Abschätzung

$$|\hat{H}(\zeta)| \leq c\,(1+|\zeta|)^{\mu} \exp(h_K(\mathrm{Im}\,\zeta)), \quad K \Subset \Omega ,$$

erfüllen (c, μ, K hängen nur von H, E und Ω ab), in $\mathcal{E}'(\Omega \cup \omega)$ dicht ist.

Zusatz zu Satz 1.2. Falls Ω ein Halbraum ist, kann man $\omega = \mathbb{R}^n$ wählen, egal wie b und m gegeben sind.

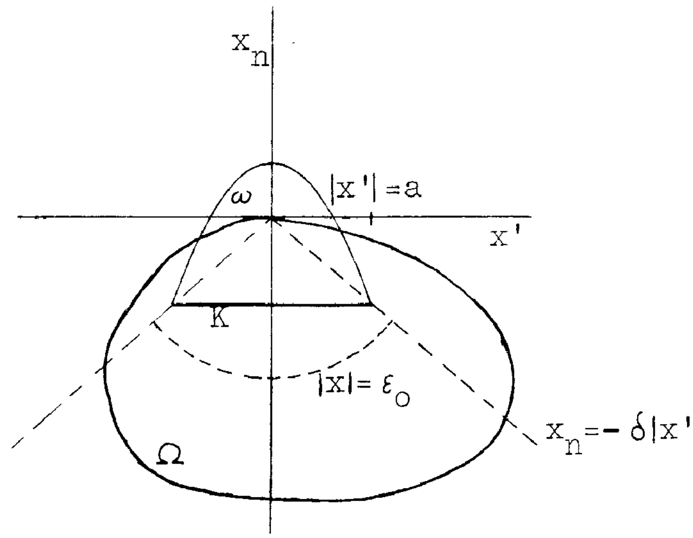
Beweis von Satz 1.2. O.B.d.A. sei $x_0=0$ und $N=(0,\dots,0,1)$. In einer Umgebung von $x_0=0$ gilt mit einer stetig differenzierbaren Funktion φ : $x \in \Omega \Longleftrightarrow \varphi(x) < 0$. Dabei kann φ so gewählt werden, daß $\mathrm{grad}\,\varphi(0) = N$. Wähle $0 < \delta < \frac{1}{2b}$. Da φ stetig differenzierbar ist, gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$, so daß

$$\big\{ x=(x',x_n) \in \mathbb{R}^n;\ |x| < \varepsilon_0,\ x_n < -\delta|x'| \big\} \subset \Omega .$$

Wähle $a>0$ mit $\sqrt{1+\delta^2}\cdot a < \varepsilon_0$ und setze

$$\overline{\omega} := \Big\{ x \in \mathbb{R}^n;\ |x'| \leq a \ \text{ und } \ -\delta a \leq x_n \leq -\delta a + \frac{a}{2b}\Big(1 - \Big|\frac{x'}{a}\Big|^2\Big) \Big\} .$$

Dann ist $0 \in \omega = \mathrm{int}\,\overline{\omega}$. Definiert man $K := \{ x \in \mathbb{R}^n;\ |x'| \leq a,\ x_n = -\delta a \}$, so ist $K \Subset \Omega$.



Sei P ein Polynom in n Variablen und $\beta > b$, dann gilt für die durch

$$H(\psi) = \int\limits_{|x'|\leq a} (P\cdot\psi)(x', \tfrac{a}{2\beta}(1-\left|\tfrac{x'}{a}\right|^2) - \delta a)\, dx', \quad \psi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n),$$

definierte Distribution $H \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ nach Lemma 1.1., daß $\operatorname{supp} H \subset \Omega \cup \omega$ und

$$|\hat{H}(\zeta)| \leq c\,(1+|\zeta|)^{\mu} \exp(h_K(\operatorname{Im}\zeta)), \quad \zeta \in E.$$

In dem Raum der stetigen, reellwertigen Funktionen auf dem Kompaktum $\Pi(a,\delta,\beta) := \{x \in \mathbb{R}^n;\ |x'| \leq a,\ x_n = \frac{a}{2\beta}(1-\left|\frac{x'}{a}\right|^2) - \delta a\}$ sind die auf $\mathbb{R}^n$ reellwertigen Polynome dicht (Satz von Stone-Weierstraß). Da mit $\psi \in \mathcal{E}(\Omega\cup\omega)$ auch $\operatorname{Re}\psi$ und $\operatorname{Im}\psi$ auf allen mit reellwertigen Polynomen wie oben definierten Distributionen H senkrecht stehen und die Parabeloberflächen $\Pi(a,\delta,\beta)$ für $\beta > b$ ganz ω überstreichen, ist die Menge der so definierten Distributionen H vereinigt mit der Menge $\mathcal{E}'(\Omega)$ dicht in $\mathcal{E}'(\Omega\cup\omega)$.

Die Behauptung des Zusatzes ist klar, denn wenn Ω ein Halbraum ist, können wir im obigen Beweis $a>o$ beliebig groß werden lassen, d.h. die Parabeln können beliebig groß werden. ■

Die folgende Definition charakteristischer und nicht-charakteristischer Vektoren verallgemeinert die in der Theorie der Differentialoperatoren üblichen Begriffe. Dieses werden wir weiter unten (Satz 1.9. und Theorem 1.10.) noch genauer sehen.

<u>DEFINITION 1.3.</u> Sei $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ und $N \in \dot{\mathbb{R}}^n$. Dann nennen wir N einen nichtcharakteristischen Vektor von S genau dann, wenn es $b, m > 0$ gibt mit

$$\mathcal{N}(\hat{S}) \subset \Big\{ \zeta \in \mathbb{C}^n ;\ \left|\langle \zeta, N\rangle\right| \le b \left|\zeta - \frac{\langle \zeta, N\rangle}{\langle N, N\rangle} N\right| + m \cdot \log(2 + |\zeta|) \ \text{ oder}$$
$$-\mathrm{Im}\, \langle \zeta, N\rangle \le b \left|\mathrm{Im}\Big(\zeta - \frac{\langle \zeta, N\rangle}{\langle N, N\rangle} N\Big)\right| + m \cdot \log(2 + |\zeta|) \Big\} .$$

Das Komplement der nichtcharakteristischen Vektoren in $\dot{\mathbb{R}}^n$ besteht aus den charakteristischen Vektoren von S.

Wir verallgemeinern nun den in der Theorie linearer, partieller Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten bekannten Holmgrenschen Satz über die Eindeutigkeit von Lösungen mit Träger im Halbraum auf $\mathcal{D}'$-invertierbare Convolutoren.

<u>THEOREM 1.4.</u> Sei $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ invertierbar in $\mathcal{D}'$ und $N \in \dot{\mathbb{R}}^n$ ein nichtcharakteristischer Vektor von S. Dann verschwindet jedes $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ mit $S * u = 0$ und $\operatorname{supp} u \subset H_N$ schon identisch in ganz $\mathbb{R}^n$.

<u>Bemerkung.</u> Daß wir S als invertierbar voraussetzen, sehen wir als eine für uns unbedeutende Einschränkung an; denn zu einer sinnvoll gestellten Cauchyaufgabe gehört - neben der Eindeutigkeitsfrage - auch die Frage nach der Existenz von Lösungen. Und hier erwartet man für ein vernünftig gestelltes

Cauchyproblem zumindest die Lösbarkeit $S * \mathcal{D}'_+ \supset \mathcal{D}_+$ (o.B.d.A. N=(o,...,o,1) gewählt). Nach Ehrenpreis [7] impliziert dieses aber die Invertierbarkeit von S.

Beweis von Theorem 1.4. Nach Ehrenpreis [7] wissen wir, daß die Invertierbarkeit von S äquivalent mit der Langsam-Fallend-Abschätzung

$$\sup\left\{\left|\hat{S}(\xi+\eta)\right| ; \eta\in\mathbb{R}^n, |\eta|\le a\cdot\log(2+|\xi|)\right\} \ge A^{-1}(1+|\xi|)^{-A}, \xi\in\mathbb{R}^n,$$

für geeignete Konstanten $a, A > o$ ist. O.B.d.A. nehmen wir $N=(o,\dots,o,1)$ an. Also ist $\hat{S}(-z) \neq o$ für alle $z\in\mathbb{C}^n$ mit

$|z_n| > b|z'| + m\cdot\log(2+|z|)$ und $\operatorname{Im} z_n > b|\operatorname{Im} z'| + m\cdot\log(2+|z|)$.

Mit $b' = 4b$ und $m' = 2(m+b+3)$ setzen wir

$$\Omega := \left\{\zeta\in\mathbb{C}^n ; |\zeta_n| > b'|\zeta'| + m'\cdot\log(2+|\zeta|) \text{ und } \operatorname{Im}\zeta_n > b'|\operatorname{Im}\zeta'| + m'\cdot\log(2+|\zeta|)\right\}.$$

Zu $\zeta\in\Omega$ wähle ein $\eta\in\mathbb{R}^n$ mit $|\eta|\le a\cdot\log(2+|\operatorname{Re}\zeta|)$ und $|\hat{S}(-\operatorname{Re}\zeta+\eta)| \ge A^{-1}(1+|\operatorname{Re}\zeta|)^{-A}$, und setze dann

$$g(\lambda) := g_\zeta(\lambda) := \hat{S}(-\zeta+\lambda(\eta+i\operatorname{Im}\zeta)), \quad \lambda\in\mathbb{C}.$$

Dann ist $g(o)=\hat{S}(-\zeta)$ und $g(1)=\hat{S}(-\operatorname{Re}\zeta+\eta)$.

Wir zeigen nun, daß die holomorphe Funktion g in der Kreisscheibe $\{\lambda\in\mathbb{C} ; |\lambda|\le r := \min(\frac{1}{2}, \frac{1}{2a})\}$ keine Nullstellen hat (für alle $\zeta\in\Omega$, r unabhängig von ζ !). Dies ist gezeigt, wenn wir für alle $z := \zeta-\lambda(\eta+i\operatorname{Im}\zeta)$, $\zeta\in\Omega$, $|\lambda|\le r$, bewiesen haben, daß $|z_n| > b|z'| + m\cdot\log(2+|z|)$ und $\operatorname{Im} z_n > b|\operatorname{Im} z'| + m\cdot\log(2+|z|)$.

Zunächst beachte man, daß wegen $|z|\le 2|\zeta| + \log(2+|\zeta|) \le 1+3|\zeta|$ für jedes $k > o$ folgt

$$(2+k)\cdot\log(2+|\zeta|) \ge k\cdot\log(2+|z|).$$

Weil für $\zeta\in\Omega$, $|\lambda|\le r$, $z=\zeta-\lambda(\eta+i\operatorname{Im}\zeta)$ stets $|\zeta'| \ge |z'| - r|\operatorname{Im}\zeta'| - \frac{1}{2}\log(2+|\zeta|)$ gilt, haben wir

$$|z_n| \geq |\zeta_n| - r\,|\mathrm{Im}\,\zeta_n| - ra\cdot\log(2+|\zeta|) \geq \tfrac{1}{2}|\zeta_n| - \log(2+|\zeta|)$$

$$> 2b|\zeta'| + (m+b+3-1)\cdot\log(2+|\zeta|)$$

$$\geq b\,|\zeta'| + b\,|z'| - br\,|\mathrm{Im}\,\zeta'| + (m+b+2-\tfrac{b}{2})\cdot\log(2+|\zeta|)$$

$$\geq b\,|z'| + m\cdot\log(2+|z|).$$

Ebenso erhält man

$$|\mathrm{Im}\ z_n| \geq \tfrac{1}{2}\mathrm{Im}\,\zeta_n - \log(2+|\zeta|)$$

$$> b\,|\mathrm{Im}\,\zeta'| + b\,|\mathrm{Im}\ z'| - \tfrac{b}{2}|\mathrm{Im}\,\zeta'| + (m+2)\cdot\log(2+|\zeta|)$$

$$\geq b\,|\mathrm{Im}\ z'| + m\cdot\log(2+|z|).$$

Wegen $m' \geq 2$ haben wir

$$\mathrm{Im}\ z_n = (1-\mathrm{Re}\,\lambda)\,\mathrm{Im}\,\zeta_n - \mathrm{Im}\,\lambda\cdot\eta_n \geq (\tfrac{m'}{2}-1)\cdot\log(2+|\zeta|) \geq o\,.$$

Also ist $g(\lambda) \neq o$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| \leq r$, $\zeta \in \Omega$.

Daher können wir das Minimum-Modulus-Theorem von Chou [5] (Théorème II.2.1.) auf g anwenden und erhalten Konstanten $\alpha, \beta > o$, die nur von r jedoch nicht von $\zeta \in \Omega$ abhängen, mit

$$|\hat{S}(-\zeta)| = |g(o)| \geq \frac{|g(1)|^{1+\alpha}}{\sup\left\{|g(\lambda)|^{\alpha};\ \lambda \in \mathbb{C},\ |\lambda| \leq \beta\right\}}\quad.$$

Wegen

$$\sup\left\{|g(\lambda)|\,;|\lambda|\leq\beta\right\} = \sup\left\{|\hat{S}(-\zeta+\lambda(\eta+i\,\mathrm{Im}\,\zeta))|;\ |\lambda|\leq\beta\right\}$$

$$\leq c\,(1+|\zeta|)^{\mu_o}\cdot\exp(B_o\,|\mathrm{Im}\,\zeta|)$$

($c, \mu_o, B_o > o$ hängen nur von S, a und β ab) können wir schließen, daß gleichmäßig für alle $\zeta \in \Omega$ gilt

$$(*)\qquad |\hat{S}(-\zeta)| \geq c\,(1+|\zeta|)^{-\mu}\exp(-B\,|\mathrm{Im}\,\zeta|),$$

mit Konstanten $c, \mu, B > o$.

Man beachte, daß wir die Langsam-Fallend-Eigenschaft von $\hat{S}$ dazu benutzt haben im Argument von exp in der Ungleichung $(*)$ nur $\mathrm{Im}\,\zeta$ vorkommen zu lassen.

Jetzt wählen wir $b_1 > b'$, $m_1 > m'$ so, daß $\{\zeta \in \mathbb{C}^n;\ d(\zeta, \partial E) < 1\} \subset \Omega$, wobei

$$E := \{\zeta \in \mathbb{C}^n;\ |\zeta_n| < b_1 |\zeta'| + m_1 \cdot \log(2 + |\zeta|) \quad \text{oder} \quad \operatorname{Im} \zeta_n < b_1 |\operatorname{Im} \zeta'| + m_1 \cdot \log(2 + |\zeta|)\}.$$

Sei χ_E die charakteristische Funktion der Menge E und $\psi \in C_o^\infty(\mathbb{C}^n)$ mit $\psi \geq o$, $\int \psi(\zeta)\, d\zeta = 1$, $\operatorname{supp} \psi \subset \{\zeta \in \mathbb{C}^n;\ |\zeta| < 1\}$. Setzt man $\varphi = \psi * \chi_E \in C^\infty(\mathbb{C}^n)$, dann ist

$$\operatorname{supp} \bar\partial \varphi \subset \Omega \cap \{\zeta \in \mathbb{C}^n;\ |\zeta_n| \leq b_o |\operatorname{Re} \zeta'| + m_o \cdot \log(2 + |\zeta|) \quad \text{oder} \quad \operatorname{Im} \zeta_n \leq b_o |\operatorname{Im} \zeta'| + m_o \cdot \log(2 + |\zeta|)\}$$

für $b_o > b_1$, $m_o > m_1$ geeignet (Benutze: $|\zeta'| \leq 2 \cdot \max(|\operatorname{Re} \zeta'|, |\operatorname{Im} \zeta'|)$). Ferner ist $\bar\partial \varphi$ gleichmäßig in $\mathbb{C}^n$ beschränkt und $\varphi = 1$ in einer Umgebung von $\mathcal{N}(\check{S})$. Wegen der Ungleichung $(*)$ und des Zusatzes zu Satz 1.2. ist daher die Menge aller $H \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\left| \frac{\hat H(\zeta)}{\hat S(-\zeta)} \bar\partial \varphi(\zeta) \right| \leq c\,(1 + |\zeta|^2)^\mu \cdot \exp(h(\operatorname{Im} \zeta)), \quad \zeta \in \mathbb{C}^n,$$

($h = h_K$ ist die Stützfunktion einer konvexen, kompakten Menge $K \Subset \operatorname{int} H_-$ mit $K - \operatorname{ch} \operatorname{supp} S \Subset \operatorname{int} H_-$) dicht in ganz $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$.

Weil $\mathbb{C}^n \ni \zeta \rightsquigarrow \mu \log(1 + |\zeta|^2) + h(\operatorname{Im} \zeta) \in \mathbb{R}$ plurisubharmonisch ist und $\bar\partial((\hat H/\check{\hat S})\bar\partial \varphi) = o$ gibt es nach Hörmander [13] (Thm. 4.4.2.) ein $v \in L^2_{loc}(\mathbb{C}^n)$ mit

$$\bar\partial v(\zeta) = \frac{\hat H(\zeta)}{\hat S(-\zeta)} \bar\partial \varphi(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{C}^n,$$

und für ein $k \geq o$

$$\int_{\mathbb{C}^n} |v(\zeta)|^2 (1 + |\zeta|^2)^{-k} \exp(-2 h(\operatorname{Im} \zeta))\, d\zeta < +\infty.$$

Die durch $\hat G(\zeta) := \varphi(\zeta) \cdot \hat H(\zeta) - \hat S(-\zeta) \cdot v(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{C}^n$, definierte

Funktion $\hat{G}$ ist holomorph, d.h. $\bar{\partial}\hat{G}=0$, und $\hat{G}$ erfüllt mit $h' = \max(h, h + h_{-\mathrm{supp}\, S})$ die Abschätzung

$$\int_{\mathbb{C}^n} |\hat{G}(\zeta)|^2 (1+|\zeta|^2)^{-\mu} \exp(-2h'(\mathrm{Im}\,\zeta))\, d\zeta =: \beta^2 < +\infty .$$

Nach dem Satz, daß sich die sup-Norm einer holomorphen Funktion durch die L^2-Norm abschätzen läßt, gibt es eine nur von n abhängige Konstante $c_n > 0$ mit

$$|\hat{G}(z)| \le c_n \Big(\int_{|\zeta - z| \le 1} |\hat{G}(\zeta)|^2\, d\zeta \Big)^{1/2} \le c_n \cdot \beta \cdot c\, (1+|z|^2)^{\mu/2} \exp(h'(\mathrm{Im}\, z))$$

für alle $z \in \mathbb{C}^n$. Das Paley-Wiener-Theorem zeigt, daß $\hat{G}$ die Fouriertransformierte einer Distribution $G \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ mit $\mathrm{supp}\, G \subset \{ x \in \mathbb{R}^n;\ \langle x, \eta \rangle \le h'(\eta)$ für alle $\eta \in \dot{\mathbb{R}}^n \} \Subset \mathrm{int}\, H_-$ ist.

Die holomorphe Funktion

$$\hat{F}(\zeta) := \frac{\hat{H}(\zeta) - \hat{G}(\zeta)}{\hat{S}(-\zeta)} = \frac{1 - \varphi(\zeta)}{\hat{S}(-\zeta)} \hat{H}(\zeta) + v(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{C}^n,$$

erfüllt ebenfalls eine Paley-Wiener-Abschätzung; denn wegen $\mathrm{supp}\, (1-\varphi) \subset \Omega$ ist

$$\left| \frac{1-\varphi(\zeta)}{\hat{S}(-\zeta)} \hat{H}(\zeta) \right| \le c(1+|\zeta|^2)^k \exp(h_K(\mathrm{Im}\,\zeta)), \quad \zeta \in \mathbb{C}^n,$$

und daher können wir nun ähnlich argumentieren wie eben bei der Abschätzung von $\hat{G}$.

Somit haben wir gezeigt, daß die Menge

$\{ H \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n);\ H = G + \check{S} * F,\ \ G, F \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n),\ \mathrm{supp}\, G \Subset \mathrm{int}\, \dot{H}_- \}$ in $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ dicht ist. Also ist $u=0$ in $\mathbb{R}^n$ falls $u \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ mit $S * u = 0$ in $\mathbb{R}^n$ und $\mathrm{supp}\, u \subset H_+$. Wie man nach Regularisierung mit einer geeigneten Diracfolge einsieht gilt dies auch falls $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. ■

Theorem 1.4. wenden wir auf ein Beispiel an.

SATZ 1.5. Sei $\chi = \chi_{K(o,1)} \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ die charakteristische Funktion der Einheitskugel in $\mathbb{R}^n$ und $N \in \dot{\mathbb{R}}^n$. Dann ist N ein nichtcharakteristischer Vektor von χ, und jedes $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ mit $\chi * u = o$ in $\mathbb{R}^n$ und $\operatorname{supp} u \subset H_N$ verschwindet schon identisch in ganz $\mathbb{R}^n$.

Beweis. Da χ rotationssymmetrisch ist, können wir o.B.d.A. $N=(o,\ldots,o,1)$ annehmen. Die Fouriertransformierte von χ ist nach Berenstein-Dostal [1], [2], bzw. Bochner [3] (pp. 235), durch

$$\hat{\chi}(\zeta) = c_n \cdot \langle \zeta,\zeta \rangle^{n/2} \cdot J_{n/2}(\langle \zeta,\zeta \rangle^{1/2}), \quad \zeta \in \mathbb{C}^n,$$

gegeben ($J_{n/2}$ ist die Besselfunktion der Ordnung $n/2$).
Aus den asymptotischen Eigenschaften von $J_{n/2}$ leiteten Berenstein-Dostal [1] ab, daß $\hat{\chi}$ langsam fallend ist. Nach Theorem 1.4. bleibt zum Beweis von Satz 1.5. nur zu zeigen, daß N ein nichtcharakteristischer Vektor von χ ist.
Dazu reicht hin:

$$\mathcal{N}(\hat{\chi}) \subset \{\zeta \in \mathbb{C}^n;\ |\zeta_n| \le 2|\zeta'| \ \text{ oder } \ |\operatorname{Im} \zeta_n| \le |\operatorname{Im} \zeta'|\} =: E \ .$$

Da die Nullstellen von $J_{n/2}$ sämtlich reell sind (siehe z. B. Watson [21], p. 482, oder Courant-Hilbert [6], p. 428), gilt für $\zeta \in \mathbb{C}^n$ mit $\hat{\chi}(\zeta) = o$ notwendigerweise

$$o \le \langle \zeta,\zeta \rangle = |\operatorname{Re} \zeta|^2 - |\operatorname{Im} \zeta|^2 + 2i \langle \operatorname{Re} \zeta, \operatorname{Im} \zeta \rangle ,$$

also: $|\operatorname{Im} \zeta| \le |\operatorname{Re} \zeta|$ und $|\operatorname{Re} \zeta_n| |\operatorname{Im} \zeta_n| \le |\operatorname{Re} \zeta'| |\operatorname{Im} \zeta'|$.
Für $\zeta \in \mathcal{N}(\hat{\chi})$ unterscheiden wir nun drei Fälle:

(i) Ist $|\operatorname{Re} \zeta'| \le |\operatorname{Im} \zeta'|$, dann muß – wegen $|\operatorname{Im} \zeta| \le |\operatorname{Re} \zeta|$ – $|\operatorname{Re} \zeta_n| \ge |\operatorname{Im} \zeta_n|$ sein. Also ist

$$|\mathrm{Im}\,\zeta_n|^2 \le |\mathrm{Re}\,\zeta_n|\cdot|\mathrm{Im}\,\zeta_n| \le |\mathrm{Re}\,\zeta'|\cdot|\mathrm{Im}\,\zeta'| \le |\mathrm{Im}\,\zeta'|^2$$

und damit $\zeta \in E$.

(ii) Ist $|\mathrm{Re}\,\zeta'| \ge |\mathrm{Im}\,\zeta'|$ und $|\mathrm{Re}\,\zeta_n| \le |\mathrm{Re}\,\zeta'|$, dann ist

$$|\mathrm{Re}\,\zeta_n|^2 + |\mathrm{Im}\,\zeta_n|^2 \le 2|\mathrm{Re}\,\zeta_n|^2 + |\mathrm{Re}\,\zeta'|^2 \le 3|\mathrm{Re}\,\zeta'|^2,$$

folglich $|\zeta_n| \le 2|\zeta'|$, und daher $\zeta \in E$.

(iii) Ist $|\mathrm{Re}\,\zeta'| \ge |\mathrm{Im}\,\zeta'|$ und $|\mathrm{Re}\,\zeta_n| \ge |\mathrm{Re}\,\zeta'|$, dann ist

$$|\mathrm{Im}\,\zeta_n| \le |\mathrm{Re}\,\zeta_n|^{-1}\cdot|\mathrm{Im}\,\zeta'|\,|\mathrm{Re}\,\zeta'| \le |\mathrm{Im}\,\zeta'|,$$ also $\zeta \in E$.

Damit ist $\mathcal{N}(\hat{\chi}) \subset E$ gezeigt. ■

Für Differential-Differenzen-Operatoren S mit konstanten Koeffizienten können wir einen globalen Eindeutigkeitssatz (für konvexe Mengen) beweisen, welcher Theorem 5.3.3. in Hörmander [12] verallgemeinert. Wichtig hierfür ist, daß man das Anwachsen von $|\hat{S}|$ außerhalb einer Umgebung seiner Nullstellenmenge $\mathcal{N}(\hat{S})$ kennt.

<u>LEMMA 1.6.</u> Sei S ein Differential-Differenzen-Operator mit konstanten Koeffizienten; h sei die Stützfunktion von supp S. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $c > 0$, so daß gleichmäßig für alle $\zeta \in \mathbb{C}^n$ mit $d(\zeta, \mathcal{N}(\hat{S})) > \varepsilon$

$$|\hat{S}(\zeta)| \ge c\cdot\exp(h(\mathrm{Im}\,\zeta)).$$

<u>Beweis.</u> Nach Grudzinski [11] (Folgerung aus Thm. 10) gilt für

$$\hat{S}(\zeta) = \sum_{j=1}^{r} P^j(\zeta)\cdot\exp(\langle -ia_j, \zeta\rangle), \quad \zeta \in \mathbb{C}^n,\ a_j \in \mathbb{R}^n,$$

die Ungleichung

$$|\hat{S}(\zeta)| \ge c(\varepsilon, j)\cdot\exp(\mathrm{Re}\langle -ia_j, \zeta\rangle), \quad j=1,\dots,r, \quad d(\zeta, \mathcal{N}(\hat{S})) > \varepsilon.$$

Da $h(\mathrm{Im}\,\zeta) = \max\{\langle a_j, \mathrm{Im}\,\zeta\rangle ;\ j=1,\dots,r\}$ haben wir für ein $c=c(\varepsilon)>0$ die Abschätzung

$$|\hat{S}(\zeta)| \geq c \cdot \exp(h(\operatorname{Im}\zeta))$$

für alle $\zeta \in \mathbb{C}^n$ mit $d(\zeta, \mathcal{V}(\hat{S})) > \varepsilon$. ■

DEFINITION 1.7. Eine offene, konvexe Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit $\Omega^S - \operatorname{chsupp} S = \Omega$ nennen wir S-rund.

Ist S ein Differentialoperator, so ist natürlich jede offene, konvexe Menge S-rund.

Mit dem Begriff einer S-runden Menge können wir nun den Eindeutigkeitssatz formulieren.

THEOREM 1.8. Seien Ω_1 und Ω_2 offene, konvexe Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ mit $\Omega_1 \subset \Omega_2$. Sei $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ ein Differential-Differenzen-Operator mit konstanten Koeffizienten, so daß Ω_1 und Ω_2 S-rund sind. Jede Hyperebene, deren Normalenvektor aus dem Abschluß charakteristischen Vektoren von S ist und die Ω_2 trifft, treffe auch schon Ω_1. Dann verschwindet jedes $u \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$, welches die Gleichung $S * u = 0$ in Ω_2^S erfüllt und in Ω_1 verschwindet, auch schon in Ω_2.

Beweis. Ω ist S-rund bedeutet, daß es zu jedem Kompaktum $K \Subset \Omega$ ein Kompaktum $K' \Subset \Omega^S$ gibt mit $\operatorname{ch} K \subset \operatorname{ch} K' - \operatorname{ch}\operatorname{supp} S$. Sei $y_2 \in \Omega_2^S$ und wähle $y_1 \in \Omega_1^S \subset \Omega_2^S$. $[y_1, y_2]$ sei die konvexe Strecke zwischen y_1 und y_2. Zu $\delta > 0$ definiere $K_\delta := [y_1, y_2] + \{x \in \mathbb{R}^n;\ |x| < \delta\} - \operatorname{ch}\operatorname{supp} S$. Dann ist K_δ S-rund. Wähle $\delta > 0$ so klein, daß $\{y_1\} + \{x \in \mathbb{R}^n;\ |x| < \delta\} - \operatorname{ch}\operatorname{supp} S \Subset \Omega_1$ und $K_\delta \Subset \Omega_2$. Sei $x_0 \in \overline{K_\delta}$ und sei $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$, $|\xi_0| = 1$, aus dem Abschluß der charakteristischen Vektoren von S. Die Menge all dieser (x_o, ξ_o) ist kompakt. Es gibt nach Voraussetzung zu (x_o, ξ_o) eine offene Kugel $\Sigma \Subset \Omega_1$, welche die Hyperebene $\{x \in \mathbb{R}^n;\ \langle x - x_o, \xi_o\rangle = o\}$ trifft. Daher trifft auch jede Hyperebene mit Normale "nahe bei ξ_o", die durch einen Punkt "nahe bei x_o" geht, die Kugel Σ. Nach dem Borel-Lebesgue-Lemma erhält man eine konvexe Menge $\omega \Subset \Omega_1$ mit C^1-Rand, so daß jede Hyperebene, deren Normale aus dem Abschluß der charakteristischen Vektoren ist, mit K_δ auch ω trifft, indem man die konvexe Hülle von endlich vielen dieser Σ bildet. Nach eventueller Vergrößerung können wir ω als S-rund mit $\{y_1\} + \{x \in \mathbb{R}^n;\ |x| < \delta\} \dot{-} \operatorname{ch} \operatorname{supp} S \subset \omega$ annehmen. Nun sei ω_t für $o \leq t \leq 1$ die konvexe Hülle von ω und der offenen, konvexen, S-runden Menge $\{(1-t)y_1 + ty_2\} + \{x \in \mathbb{R}^n;\ |x| < \delta\} \dot{-} \operatorname{ch} \operatorname{supp} S$. Wir behaupten: $u = o$ in ω_1 falls $u \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$ mit $S * u = o$ in Ω_2^S, $u = o$ in Ω_1. Ist diese Behauptung gezeigt, dann ist das Theorem bewiesen; denn weil Ω_2 S-rund ist, wird Ω_2 durch die Vereinigung aller $\omega_1 = \omega_1(y_1, y_2)$ überdeckt. Nach Regularisierung von u zu $u_\varepsilon = u * \psi_\varepsilon$, $o < \varepsilon$, mit einem "mollifier" ψ_ε (i.e.: $\psi_\varepsilon(.) = \varepsilon^{-n}\psi(./\varepsilon)$, $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\psi \geq o$, $\int \psi(x)\,dx = 1$ und $\operatorname{supp} \psi \subset \{x \in \mathbb{R}^n;\ |x| < 1\}$), genügt es die Behauptung für alle $u * \psi_\varepsilon$ mit $o < \varepsilon < \varepsilon_o := \frac{1}{2}\min(d(\omega, \partial\Omega_1), d(\omega_1, \partial\Omega_2))$ zu zeigen. Denn für $o < \varepsilon < \varepsilon_o$ ist u_ε in einer Umgebung von ω_1 definiert und eine C^∞-Funktion, und für $\varepsilon \longrightarrow o$ konvergiert u_ε gegen u. Sei τ das Supremum aller $t \in [o, 1]$, so daß $u_\varepsilon = o$ in ω_t für alle $o < \varepsilon < \varepsilon_o$. Die Menge dieser t ist nicht leer, denn wegen $d(\omega, \partial\Omega_1) \geq 2\varepsilon_o$ ist $u_\varepsilon = o$ in einer ε_o-Umgebung von $\omega_o = \omega$ für alle $o < \varepsilon < \varepsilon_o$. Da $\omega_\tau = \bigcup_{t<\tau} \omega_t$ ist $u_\varepsilon = o$ in ω_τ, $o < \varepsilon < \varepsilon_o$. Nach Konstruktion von ω und ω_τ ist klar, daß Randpunkte x_o von ω_τ mit einem für S charakteristischen äußeren Normalenvektor in x_o an ω_τ schon zu $\overline{\omega}$ gehören müssen. Wir zeigen nun, daß es zu jedem $x_o \in \partial\omega_\tau \setminus \overline{\omega}$ eine Umgebung $U \subset \Omega_2$ von x_o gibt, so daß $u_\varepsilon = o$ in U für $o < \varepsilon < \varepsilon_o$. Dann ist $u_\varepsilon = o$ für alle $o < \varepsilon < \varepsilon_o$ in einer Umgebung von ω_τ, was der Definition von τ widerspricht wenn nicht $\tau = 1$.

Sei also $x_o \in \partial\omega_\tau \setminus \overline{\omega}$ gegeben. Da die äußere Normale N an ω_τ in x_o nichtcharakteristisch ist, gibt es nach Satz 1.2. eine Umgebung $U \subset \Omega_2$ von x_o, so daß die Menge aller $H \in \mathcal{E}'(\omega_\tau \cup U)$, die mit Konstanten $c, \mu > o$ und einem $K \Subset \omega_\tau$ die Abschätzung

$$|\hat{H}(\zeta)| \leq c(1+|\zeta|)^\mu \cdot \exp(h_K(\operatorname{Im}\zeta)),\ \zeta \in \mathbb{C}^n,\ d(\zeta, \mathcal{N}(\check{\hat{S}})) \leq 2, \ .$$

erfüllen, dicht in $\mathcal{E}'(\omega_\tau \cup U)$ ist. U sei o.B.d.A. so klein gewählt, daß $d(U, \partial\Omega_2) > \varepsilon_o$. Sei jetzt solch ein $H \in \mathcal{E}'(\omega_\tau \cup U)$ gegeben. Wählen wir $\varphi \in C^\infty(\mathbb{C}^n)$ mit $\varphi = 1$ in $\{\zeta \in \mathbb{C}^n;\ d(\zeta, \mathcal{N}(\check{\hat{S}})) \leq 1\}$ und $\varphi = o$ in $\{\zeta \in \mathbb{C}^n;\ d(\zeta, \mathcal{N}(\check{\hat{S}})) \geq 2\}$, so daß $|\bar{\partial}\varphi|$ in ganz $\mathbb{C}^n$ gleichmäßig beschränkt ist, dann ist aufgrund von Lemma 1.6. für alle $\zeta \in \mathbb{C}^n$

$$\left|\frac{\hat{H}(\zeta)}{\hat{S}(-\zeta)} \cdot \bar{\partial}\varphi(\zeta)\right| \leq c(1+|\zeta|)^\mu \exp(h_K(\operatorname{Im}\zeta) - h_{-\operatorname{supp} S}(\operatorname{Im}\zeta)).$$

Da ω_τ S-rund ist, gibt es ein $K' \Subset \omega_\tau^S$ mit $h_K = h_{K'} + h_{-\operatorname{supp} S}$. Also ist für alle $\zeta \in \mathbb{C}^n$

$$\left|\frac{\hat{H}(\zeta)}{\hat{S}(-\zeta)}\ \bar{\partial}\varphi(\zeta)\right| \leq c(1+|\zeta|)^\mu \exp(h_{K'}(\operatorname{Im}\zeta)).$$

Da $\bar{\partial}((\hat{H}/\check{\hat{S}})\,\bar{\partial}\varphi) = o$ erhalten wir mit Theorem 4.4.2. in Hörmander [13] ein $v \in L^2_{loc}(\mathbb{C}^n)$ mit

$$\bar{\partial} v(\zeta) = \frac{\hat{H}(\zeta)}{\hat{S}(-\zeta)}\ \bar{\partial}\varphi(\zeta),\quad \zeta \in \mathbb{C}^n, \quad \text{und}$$

$$\int_{\mathbb{C}^n} |v(\zeta)|^2\ (1+|\zeta|^2)^{-k} \cdot \exp(-2h_{K'}(\operatorname{Im}\zeta))\, d\zeta < +\infty .$$

Durch $\hat{G} = \varphi \cdot \hat{H} - \check{\hat{S}} \cdot v$ und $\hat{F} = (\hat{H} - \hat{G})/\check{\hat{S}}$ sind dann in ganz $\mathbb{C}^n$

holomorphe Funktionen $\hat{G}$ und $\hat{F}$ definiert . Wie in Theorem 1.4. können wir zeigen, daß $\hat{G}$ und $\hat{F}$ die Fouriertransformierten von Distributionen $G, F \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ sind, wobei

$$h_{\operatorname{supp} G} \leq \max(h_K, h_{K'} + h_{-\operatorname{supp} S}) = h_{K'} + h_{-\operatorname{supp} S} ,$$

$$h_{\operatorname{supp} F} \leq \max(h_{K'}, h_{K''}) \text{ mit } \operatorname{ch} \operatorname{supp} H \subset \operatorname{ch} K'' - \operatorname{ch} \operatorname{supp} S.$$

Daher ist $H = G + \check{S} * F \in \mathcal{E}'(\omega_\tau \cup U)$, $G \in \mathcal{E}'(\omega_\tau)$ und $F \in \mathcal{E}'(\Omega_2^S)$, $d(\operatorname{supp} F, \partial\Omega_2^S) > \varepsilon_0$. Folglich gilt für diese H, G, F und alle $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$: $\langle u_\varepsilon, H\rangle = \langle u_\varepsilon, G\rangle + \langle S * u_\varepsilon, F\rangle = 0$. Wegen der Dichtheit der Menge dieser H in $\mathcal{E}'(\omega_\tau \cup U)$ ist $u_\varepsilon = 0$ in $\omega_\tau \cup U$ für alle $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. ■

<u>Bemerkung.</u> Theorem 1.8. gilt auch für solche Convolutoren $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, die für jedes $\varepsilon > 0$ mit $c_\varepsilon, \mu_\varepsilon > 0$ die Abschätzung

$$|\hat{S}(\zeta)| \geq c_\varepsilon (1 + |\zeta|)^{-\mu_\varepsilon} \exp(h_{\operatorname{supp} S}(\operatorname{Im} \zeta) - \varepsilon |\operatorname{Im} \zeta|)$$

für alle $\zeta \in \mathbb{C}^n$ mit $d(\zeta, \mathcal{N}(\hat{S})) \geq 1$ erfüllen. Denn eine - in Lemma 1.6. für Differential-Differenzen-Operatoren aufzeigte - Abschätzung dieser Art, war die einzige besondere Eigenschaft von Differential-Differenzen-Operatoren, die wir im Beweis von Theorem 1.8. benötigten.

Um das Eindeutigkeitstheorem 1.8. verwenden zu können, muß man die charakteristischen Vektoren eines Differential-Differenzen-Operators $S = \sum_{j=1}^{r} P^j(D) \cdot \delta(\cdot - a_j)$ kennen. Aus dem nachfolgenden Satz ersieht man, daß die charakteristischen Vektoren von S in der nichttrivialen, konischen Menge

$$\{N \in \dot{\mathbb{R}}^n ;\ \exists\, k \neq 1 : \langle N, a_k\rangle = \langle N, a_1\rangle = \min\{\langle N, a_j\rangle ;\ j = 1, \ldots, r\} \text{ oder }$$
$$\exists\, k : \langle N, a_k\rangle < \min\{\langle N, a_j\rangle ;\ j \neq k\} \text{ und } (\text{Hauptteil } P^k)(N) = 0\}$$

enthalten sind. Speziell für Differentialoperatoren heißt dieses, zusammen mit der Aussage von Theorem 1.1o., daß der von uns in Definition 1.3. eingeführte Begriff eines charakteristischen Vektors mit dem sonst üblichen (z. B. in Hörmander [12]) übereinstimmt.

SATZ 1.9. Seien $S = P(D)\delta + T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $N \in \dot{\mathbb{R}}^n$ mit $P_m(N) \neq 0$ und $\operatorname{supp} T \Subset \{x \in \mathbb{R}^n;\ \langle x,N\rangle > 0\}$ gegeben. Dann ist N ein nichtcharakteristischer Vektor von S und jedes $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ mit $S * u = 0$ in $\mathbb{R}^n$, $\operatorname{supp} u \subset \{x \in \mathbb{R}^n;\ \langle x,N\rangle \geq 0\}$ verschwindet in ganz $\mathbb{R}^n$.

Beweis. Der letzte Teil der Aussage von Satz 1.9. folgt mit Theorem 1.4. aus dem ersten Teil, denn $\hat{S}$ ist langsam fallend. O.B.d.A. sei $N=(0,\dots,0,1)$ und $P_m(N)=1$ (P_m ist der Hauptteil von P). Für die Stützfunktion h von supp T gilt $-h(-N) =: \alpha > 0$, und daher ist für ein $A>0$ und alle $\zeta \in \mathbb{C}^n$ mit $\operatorname{Im} \zeta_n = \operatorname{Im} \langle \zeta,N\rangle \geq 0$

$$h(-\operatorname{Im} \zeta) \leq A|\operatorname{Im} \zeta'| - \alpha \cdot \operatorname{Im} \zeta_n .$$

Aus der Paley-Wiener-Abschätzung von $\hat{T}$ schließt man folglich, daß es ein $c>0$ gibt, mit $|\hat{T}(-\zeta)| < 1$ für alle $\zeta \in \mathbb{C}^n$ mit $\operatorname{Im} \zeta_n > c|\operatorname{Im} \zeta'| + c\log(2+|\zeta|)$. Mit Polynomen b_j in $\mathbb{C}^{n-1}$ vom Grade $\leq j$, $j=1,\dots,m$, hat P die Darstellung

$$P(\zeta',\zeta_n) = \zeta_n^m + \dots + b_j(\zeta')\cdot\zeta_n^{m-j} + \dots + b_m(\zeta'),$$

und für ein $c>0$ ist $|b_j(\zeta')| \leq (c+|\zeta'|)^j$, $\zeta' \in \mathbb{C}^{n-1}$, $j=1,\dots,m$.

Für alle $\zeta \in \mathbb{C}^n$ mit $c+|\zeta'| \leq \frac{1}{2}|\zeta_n|$ und $2 \leq |\zeta_n|$ gilt dann

$$|P(\zeta',\zeta_n)| \geq |\zeta_n|^m - \sum_{j=1}^{m} |b_j(\zeta')|\cdot|\zeta_n|^{m-j}$$

$$\geq |\zeta_n|^m \cdot (1-\sum_{j=1}^{m} 2^{-j}) \geq 1 \ .$$

Für ein $c>o$ und alle $\zeta \in \mathbb{C}^n$ mit $|\zeta_n| \geq 2|\zeta'| + c$ und $\operatorname{Im} \zeta_n \geq c|\operatorname{Im} \zeta'| + c\cdot\log(2+|\zeta|)$ ist daher

$$|\hat{S}(-\zeta)| \geq |P(-\zeta)| - |\hat{T}(-\zeta)| \geq 1 - |\hat{T}(-\zeta)| > o.$$

D. h.: N ist ein nichtcharakteristischer Vektor von S. ■

Der folgende Nichteindeutigkeitssatz verallgemeinert das Theorem 5.2.2. von Hörmander [12].

Es ist $n>1$.

<u>THEOREM 1.1o.</u> Seien $S=P(D)\delta + T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $N \in \dot{\mathbb{R}}^n$ mit $P_m(N)=o$ und $\operatorname{supp} T \Subset \{x \in \mathbb{R}^n;\ \langle x,N\rangle > o\}$ gegeben. Dann ist N ein charakteristischer Vektor von S und es gibt eine Lösung $u \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ der Gleichung $S * u = o$, so daß $\operatorname{supp} u \subset H_N$ und $o \in \operatorname{supp} u$.

<u>Beweis.</u> O.B.d.A. sei wieder $N=(o,\ldots,o,1)$. Mit $\xi \in \mathbb{R}^n$, $|\xi|=1$, so daß $P_m(\xi) \neq o$, definieren wir die in $\mathbb{C}^2$ holomorphe Funktion

$$f(s,w)=\hat{S}(sN+sw\xi) = s^m\Big(P_m(N+w\xi) + \sum_{k=o}^{m-1} s^{k-m}P_k(N+w\xi) + s^{-m}\hat{T}(sN+sw\xi)\Big),$$

$(s,w) \in \mathbb{C}^2$.

Die Nullstelle $w=o$ des Polynoms $P_m(N+w\xi)$ in w habe die Ordnung ν $(1 \leq \nu \leq m)$. Es gibt dann ein $\delta>o$, so daß

$$\delta\cdot|w|^\nu < |P_m(N+w\xi)| \ , \ w \in \mathbb{C},\ |w|<\delta \ .$$

Setze $\quad a:=\sum_{k=o}^{m-1} \sup\{|P_k(N+w\xi)| \ ; \ w \in \mathbb{C},\ |w| \leq \delta\}.$

Aus der Paley-Wiener-Abschätzung von $\hat{T}$

$$|s^{1-m}\cdot\hat{T}(sN+sw\xi)| \leq c(1+|s|+|sw|)^c \exp(-\operatorname{Im} s \cdot h_{\operatorname{supp} T}(-N) + |sw|)$$

für $(s,w) \in \mathbb{C}^2$ mit $\operatorname{Im} s \leq 0$, folgt – wegen $h_{\operatorname{supp} T}(-N) < 0$ – die Existenz von Konstanten $\mu > 0$ und $1 > \gamma > 1 - \nu^{-1}$, so daß $|s^{1-m}\, \hat{T}(sN + sw\xi)| \leq 1$ für alle $(s,w) \in \mathbb{C}^2$ mit $-\operatorname{Im} s > \mu(1+|s|)^{\gamma}$ und $|w|^{\nu} \leq (1+a)(\delta|s|)^{-1}$. Sei nun $G := \{s \in \mathbb{C};\ -\operatorname{Im} s > \mu(1+|s|)^{\gamma}\}$

und $\quad \varsigma(s) := \left(\frac{1+a}{\delta|s|}\right)^{1/\nu}, \quad s \in G.$

O.B.d.A. sei $\mu > 0$ so groß gewählt, daß $|s| \geq 1$ und $\varsigma(s) < \delta$ für $s \in G$. Für alle $s \in G$ und $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| = \varsigma(s)$ gilt nun

$$|s^{-m} f(s,w) - P_m(N + w\xi)| \leq |s|^{-1}(a+1) = \delta|w|^{\nu} < |P_m(N+w\xi)| .$$

Nach Rouché's Theorem hat die Funktion $w \rightsquigarrow f(s,w)$ für jedes $s \in G$ genau ν Nullstellen $w_1(s), \ldots, w_\nu(s) \in \mathbb{C}$ mit $|w_j(s)| < \varsigma(s)$ für $j = 1, \ldots, \nu$. Hieraus erkennt man leicht, daß es keine Konstante $b > 0$ mit

$$\mathcal{N}(\hat{S}) \subset \{\zeta \in \mathbb{C}^n;\ -\operatorname{Im} \zeta_n \leq b|\zeta'| + b \log(2 + |\zeta|)\}$$

geben kann. Also ist N ein charakteristischer Vektor von S. Da $f(s,w) \neq 0$ für alle $s \in G$, $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| = \varsigma(s)$, erhalten wir nach dem Argumentprinzip die in $s \in G$ holomorphe Funktion

$$\sum_{j=1}^{\nu} \exp(i\langle x, sw_j(s)\xi\rangle) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=\varsigma(s)} \exp(i\langle x, sw\xi\rangle) \frac{\frac{\partial f}{\partial w}(s,w)}{f(s,w)}\, dw, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Mit $\mu > 0$ so groß, daß $\Gamma_\mu : \mathbb{R} \longrightarrow G$, $\Gamma_\mu(t) := t - i\mu(1+t^2)^{\gamma/2}$, $t \in \mathbb{R}$, setzen wir

$$u(x) = \int_{\Gamma_\mu} \sum_{j=1}^{\nu} \exp(i\langle x, sN + sw_j(s)\xi\rangle - (is)^{\gamma})\, ds, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Hier ist $(is)^{\gamma}$ so definiert, daß es reell und positiv ist, wenn s auf der negativen imaginären Achse liegt. Das Integral ist konvergent und nach dem Cauchyschen Integralsatz unabhängig von μ; wenn x in einem festen Kompaktum liegt, haben wir für große $|s|$, $j = 1, \ldots, \nu$,

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re}\left(i\langle x, sN + s w_j(s)\xi\rangle - (is)^\gamma \right) \\
&\quad \leq -\operatorname{Im} s\langle x,N\rangle + c|x||s|^{1-1/\nu} - |s|^\gamma \cos\frac{\pi\gamma}{2} \\
&\quad \leq -\operatorname{Im} s\langle x,N\rangle - C|s|^\gamma
\end{aligned}$$

mit $2C = \cos(\pi\gamma/2)$.

Ferner ist $\left|\frac{d\Gamma_\mu(t)}{dt}\right| \leq (1+\mu^2\cdot\gamma^2)^{1/2}$.

Diese Abschätzungen zeigen auch, daß das Integral sogar nach beliebig hohen Differentiationen nach x gleichmäßig für x in einem Kompaktum konvergiert. Also ist $u \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ und weil $\hat{S}(sN + sw_j(s)\xi) = 0$ für alle $s \in G$ ist $S * u = 0$ (man approximiere das u definierende Integral z.B. durch Riemannsummen).

Da das Integral für genügend großes $\mu > 0$ unabhängig von μ ist, folgt aus den obigen Abschätzungen für $\langle x,N\rangle < 0$

$$|u(x)| \leq \exp(\mu\langle x,N\rangle)\cdot\nu\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-c|t|^\gamma)\cdot(1+\mu^2\cdot\gamma^2)^{1/2}\,dt\,.$$

Lassen wir $\mu \longrightarrow +\infty$, so folgt $u(x)=0$, also ist $\operatorname{supp} u \subset H_N$.

Um $0 \in \operatorname{supp} u$ zu zeigen, bemerken wir, daß $u(x) = \nu\cdot v(\langle x,N\rangle)$ falls $\langle x,\xi\rangle = 0$, wobei

$$v(t) = \int_{\Gamma_\mu} \exp(ist - (is)^\gamma)\,ds\,,\quad t \in \mathbb{R}.$$

Wir haben gerade gezeigt, daß v auf der negativen reellen Achse verschwindet. Das Theorem ist bewiesen, wenn wir gezeigt haben, daß v in keiner Umgebung von 0 verschwindet. Mit dem Cauchyschen Integralsatz folgt unter Benutzung der obigen Abschätzungen des Integranden für jedes $\tau > 0$, $t \in \mathbb{R}$

$$v(t)e^{-\tau t} = e^{-\tau t}\int_{-i\tau-\infty}^{-i\tau+\infty}\exp(ist - (is)^\gamma)\,ds = \int_{-\infty}^{+\infty}\exp(i\sigma t - (\tau+i\sigma)^\gamma)\,d\sigma.$$

Folglich gilt Parseval's Gleichung

$$(2\pi)^{-1}\int_0^{+\infty}\left|v(t)\ e^{-\tau t}\right|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\left|e^{-(\tau+i\sigma)^\gamma}\right|^2 d\sigma\ .$$

Wegen $\gamma<1$ haben wir $|\tau+i\sigma|^\gamma \leq (|\tau|+|\sigma|)^\gamma \leq |\tau|^\gamma+|\sigma|^\gamma$.

Also

$$(2\pi)^{-1}\int_0^{\infty}\left|v(t)\ e^{-\tau t}\right|^2 dt \geq e^{-2|\tau|^\gamma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|\sigma|^\gamma}\ d\sigma\ ,\quad \tau>0.$$

Falls v jedoch für ein $\varepsilon>0$ im Intervall $(-\varepsilon,\varepsilon)$ verschwindet, dann ist die linke Seite der Ungleichung $O(e^{-2\varepsilon\tau})$ für $\tau\to+\infty$. Dies widerspricht der Ungleichung und beendet so den Beweis. ■

<u>Bemerkung.</u> Aus Satz 1.9. und Theorem 1.10. ersieht man, daß es Differential-Differenzen-Operatoren $S\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $n>1$, gibt, deren Eindeutigkeitsverhalten unsymmetrisch in den Vektoren N und -N ist; das heißt:

(a) N ist ein nichtcharakteristischer Vektor von S und für alle $u\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ mit $S*u=0$ und $\operatorname{supp} u\subset H_N$ folgt $u=0$.

(b) -N ist ein charakteristischer Vektor von S und es gibt ein $u\in\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, $S*u=0$, $\operatorname{supp} u\subset H_{-N}$ und $0\in\operatorname{supp} u$.

Man beachte, daß so etwas bei Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten nicht vorkommen kann.

2. Die lokale Lösbarkeit in einem Halbraum

Wir setzen über $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ im Folgenden stets $o \in \operatorname{supp} S \subset H_+$ voraus. Es ist $N = (o, \ldots, o, 1)$.

DEFINITION 2.1. $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ heißt lokal lösbar im Halbraum H_+ genau dann, wenn es zu jedem Kompaktum $K \in \mathbb{R}^n$ und jedem $f \in \mathcal{D}_+$ ein $u \in \mathcal{D}'_+$ und ein $g \in \mathcal{D}'_+$ gibt mit $S * u = f + g$ und $\operatorname{supp} g \cap K = \emptyset$.

Lokale Lösbarkeit in H_+ bedeutet also, daß die Convolutionsgleichung in H_+ modulo Distributionen, die ihren Träger "weit außerhalb" des Nullpunktes haben, lösbar ist.

SATZ 2.2. Sei $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ lokal lösbar in H_+. Dann gilt für jedes Kompaktum $K \in \mathbb{R}^n$ eine Abschätzung

$$\sup \left\{ |\varphi(x)|;\ x \in H_+ \right\} \leq c_K \sum_{|\alpha| \leq s_K} \sup \left\{ |D^\alpha(\check{S} * \varphi)(x)|\ ;\ x \in K \cap H_+ \right\},$$

für alle $\varphi \in \mathcal{D}$ mit $\operatorname{supp} \check{S} * \varphi \subset K$.

Beweis. Mit den Halbnormen

$$p_s([\varphi]) := \sum_{|\alpha| \leq s} \sup \left\{ |D^\alpha(\check{S} * \varphi)(x)|;\ x \in H_+ \right\},\ s \in \mathbb{N},\ \varphi \in \mathcal{D},$$

ist der Quotientenraum $\Phi_K = \left\{ [\varphi]\ ;\ \varphi \in \mathcal{D},\ \operatorname{supp} \check{S} * \varphi \subset K \right\}$

(die Äquivalenzrelation ist: $\varphi \sim \psi \Longleftrightarrow [\varphi] = [\psi] \Longleftrightarrow \varphi - \psi \in \mathcal{D}_-$)

für jedes Kompaktum $K \in \mathbb{R}^n$ ein separierter (Satz von Titchmarsh-Lions ! (siehe z.B. Hörmander [16])) prä-(F)-Raum.

Für jedes Kompaktum $K_o \in \mathbb{R}^n$ ist $\mathcal{D}_+(K_o)$ ein (F)-Raum.

Die Bilinearform $(f, [\varphi]) \rightsquigarrow \int f \cdot \varphi$ auf $\mathcal{D}_+(K_o) \times \Phi_K$ ist daher stetig, wenn sie getrennt stetig ist (Bourbaki [4], Chap. III, § 4, Prop. 2). Da die Stetigkeit in $\mathcal{D}_+(K_o)$ klar ist, zeigen wir die Stetigkeit in Φ_K. Nach dem Satz von Titchmarsh-Lions gibt es zu K ein $\tilde{K} \Subset \mathbb{R}^n$ mit $\operatorname{supp} \varphi \subset \tilde{K}$ falls $\varphi \in \mathcal{D}$ mit $[\varphi] \in \Phi_K$. Wähle zu festem $f \in \mathcal{D}_+(K_o)$ ein $u \in \mathcal{D}'_+$ und ein $g \in \mathcal{D}'_+$ mit $\operatorname{supp} g \cap \tilde{K} = \emptyset$ und $S * u = f + g$. Dann gilt für alle $\varphi \in \mathcal{D}$ mit $[\varphi] \in \Phi_K$

$$\int f \cdot \varphi = \langle S * u - g, \varphi \rangle = \langle u, \check{S} * \varphi \rangle .$$

Da $\operatorname{supp} u \subset H_+$ und ∂H_+ Whitney-regulär ist, ist

$$|\langle u, \check{S} * \varphi \rangle| \leq c \sum_{|\alpha| \leq s} \sup \left\{ |D^\alpha (\check{S} * \varphi)(x)| ;\ x \in H_+ \right\} , \quad \varphi \in \mathcal{D}, [\varphi] \in \Phi_K,$$

für ein $s \in \mathbb{N}$ (Schwartz [2o], p. 98). Also ist die Bilinearform auch in Φ_K stetig und damit überhaupt stetig. Die Stetigkeit der Bilinearform ist äquivalent zu einer Abschätzung

$$\left| \int f \cdot \varphi \right| \leq c \left(\sum_{|\alpha| \leq \nu} \sup_{K_o \cap H_+} |D^\alpha f| \right) \left(\sum_{|\alpha| \leq \mu} \sup_{K \cap H_+} |D^\alpha (\check{S} * \varphi)| \right)$$

für alle $f \in \mathcal{D}_+(K_o)$, $\varphi \in \mathcal{D}$ mit $\operatorname{supp} \check{S} * \varphi \subset K$.

Um aus dieser Abschätzung f eliminieren zu können, bemerken wir zunächst, daß diese Abschätzung auch für alle $f \in \mathcal{E}_+$ gilt, wenn $K_o \Subset \mathbb{R}^n$ genügend groß gewählt ist. Man wähle nämlich $\psi \in \mathcal{D}$, so daß $\psi = 1$ in einer Umgebung von $\operatorname{supp} \varphi$, wenn $\varphi \in \mathcal{D}$ mit $\operatorname{supp} \check{S} * \varphi \subset K$. Da $\int f \cdot \varphi = \int \psi \cdot f \cdot \varphi$ für $f \in \mathcal{E}_+$, $\varphi \in \mathcal{D}$ mit $\operatorname{supp} \check{S} * \varphi \subset K$, gilt die Abschätzung mit $K_o = \operatorname{supp} \psi$ auch für alle $f \in \mathcal{E}_+$.

Wir zeigen die Existenz eines Differentialoperators $L(D)$ mit $\mathcal{D}_+ \subset L(D) \mathcal{S}_+$, der für ein $c > o$ die Ungleichung

$$\sum_{|\alpha| \leq \nu} \sup_{K_o} |D^\alpha f| \leq c \cdot \int |L(D) f| , \quad f \in \mathcal{S}_+,$$

erfüllt. Dann ist

$$\left|\int (L(D)f)\cdot\varphi\right| = \left|\int f\cdot L(-D)\varphi\right|$$

$$\leq c\,\Big(\sum_{|\alpha|\leq\nu}\ \sup_{K_0} |D^\alpha f|\Big)\Big(\sum_{|\alpha|\leq\mu}\ \sup_{K\cap H_+} |D^\alpha L(-D)(\check{S}*\varphi)|\Big)$$

$$\leq c\,\Big(\int |L(D)f|\Big)\Big(\sum_{|\alpha|\leq\mu'}\ \sup_{K\cap H_+} |D^\alpha(\check{S}*\varphi)|\Big)$$

für alle $f\in\mathcal{S}_+$, $\varphi\in\mathcal{D}$ mit $\operatorname{supp}\check{S}*\varphi\subset K$ $(\mu'=\mu+\operatorname{ord} L)$.
Da $L(D)\,\mathcal{S}_+\cap\mathcal{D}_+(K_0)=\mathcal{D}_+(K_0)$ dicht in $L^1(K_0\cap H_+)$ ist, folgt nach Bildung des Supremums über alle $f\in\mathcal{S}_+$ mit $L(D)f\in\mathcal{D}_+(K_0)$ und $\int|L(D)f|\leq 1$ aus der obigen Ungleichung die gesuchte Abschätzung. Den Differentialoperator $L(D)$ definieren wir durch

$$L(\zeta)=(\zeta'^2-(\zeta_n-i)^2)^k\ ,\qquad \zeta=(\zeta',\zeta_n)\in\mathbb{C}^n\,;$$

$k\in\mathbb{N}$ wird weiter unten fest gewählt.
Das Polynom $\mathbb{C}\ni\zeta_n\rightsquigarrow(\zeta_n-i)^2-\xi'^2=\zeta_n^{\,2}-2i\zeta_n-1-\xi'^2$ hat für $\xi'\in\mathbb{R}^{n-1}$ nur Nullstellen für $\operatorname{Im}\zeta_n=1$. Daher ist $|L(\xi+i\tau N)|\geq 1$ für alle $\xi\in\mathbb{R}^n$, $\tau\leq 0$ $(N=(0,\dots,0,1))$.
Zu $g\in\mathcal{D}_+$ wird deshalb durch

$$f(x):=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\exp(i\langle x,\xi+i\tau N\rangle)\,\frac{\hat{g}}{L}(\xi+i\tau N)\,d\xi\ ,\ \tau\leq 0,\ x\in\mathbb{R}^n,$$

eine Lösung $f\in\mathcal{S}$ der Gleichung $L(D)f=g$ definiert. Aufgrund des Cauchyschen Integralsatzes ist die Definition des Integrales unabhängig von $\tau\leq 0$. Schätzt man das f definierende Integral für $x\in\mathbb{R}^n$ mit $\langle x,N\rangle<0$ nach oben ab und läßt $\tau\longrightarrow-\infty$, so erhält man, daß $\operatorname{supp} f\subset H_+$, d.h. $f\in\mathcal{S}_+$.
Damit gilt $L(D)\,\mathcal{S}_+\supset\mathcal{D}_+$. Wir zeigen nun, daß es ein $c_K>0$ gibt mit

$$|L(\xi)| \geq c_K (1+|\xi|)^k, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Dies folgt aus $L(\xi) \neq 0$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ und den für $\xi = (\xi', \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $\xi'^2 + \xi_n^2 = 1$ und $t > 0$ gültigen Abschätzungen

$$\begin{aligned} t^{-1}\left|(t\xi')^2 - (t\xi_n - i)^2\right| &= \left|t(\xi'^2 - \xi_n^2) + 2i\xi_n + \tfrac{1}{t}\right| \\ &= \left|t(1 - 2\xi_n^2) + 2i\xi_n + \tfrac{1}{t}\right| \\ &\geq \begin{cases} \frac{t}{2} & \text{für } \xi_n^2 \leq \frac{1}{4} \\ |2i\xi_n| \geq 1 & \text{für } \xi_n^2 \geq \frac{1}{4} \end{cases}. \end{aligned}$$

Wählt man nun $k > \nu + n$, dann gilt für $f \in \mathcal{S}_+$

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha| \leq \nu} \sup_{K_0} |D^\alpha f(x)| &\leq c \int (1+|\xi|)^\nu \cdot |\hat{f}(\xi)|\, d\xi \\ &\leq c \int (1+|\xi|)^{\nu-k} |L(\xi)\hat{f}(\xi)|\, d\xi \\ &= c \cdot \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\widehat{L(D)f}(\xi)| \leq c \cdot \int |L(D)f|, \end{aligned}$$

mit $c > 0$ unabhängig von f. ■

Vorbild für den Beweis von Satz 2.1. war der Beweis von Theorem 3.1. in Hörmander [15].

Geht man andererseits von der Abschätzung

$$|\varphi(0)| \leq c_K \sum_{|\alpha| \leq s_K} \sup_{K \cap H_+} |D^\alpha(\check{S} * \varphi)|, \quad \varphi \in \mathcal{D}, \quad \operatorname{supp} \check{S} * \varphi \subset K,$$

aus, so kann man das auf dem Teilraum $\check{S} * \mathcal{D} \cap \mathcal{D}(K)$ definierte lineare, stetige Funktional

$$\check{S} * \varphi \rightsquigarrow \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$$

nach dem Satz von Hahn-Banach auf ganz $\mathcal{D}$ unterhalb der Halbnorm

$$\psi \rightsquigarrow \sum_{|\alpha| \leq s_K} \sup \left\{ |D^\alpha \psi(x)|;\ x \in K \cap H_+ \right\}, \quad \psi \in \mathcal{D},$$

fortsetzen zu einer Distribution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ mit $\langle S * u, \varphi\rangle = \langle \delta, \varphi\rangle$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}$ mit $\operatorname{supp} \check{S} * \varphi \subset K$ und $\operatorname{int}(K \cap H_-) \cap \operatorname{supp} u = \emptyset$.
Wählt man K jeweils "groß genug" und schneidet u dann "passend" ab, erhält man nach Faltung mit $f \in \mathcal{E}'_+$:

<u>SATZ 2.3.</u> Für jedes $K \Subset \mathbb{R}^n$ gelte eine Abschätzung

$$|\varphi(0)| \leq c_K \sum_{|\alpha| \leq s_K} \sup \left\{ |D^\alpha(\check{S} * \varphi)(x)|;\ x \in K \cap H_+ \right\},\ \varphi \in \mathcal{D},\ \operatorname{supp} \check{S} * \varphi \subset K.$$

Dann gibt es für jedes $f \in \mathcal{E}'_+$ und $K \Subset \mathbb{R}^n$ ein $u \in \mathcal{E}'_+$ und ein $g \in \mathcal{E}'_+$ mit $S * u = f + g$ und $\operatorname{supp} g \cap K = \emptyset$.

Aus den Sätzen 2.2. und 2.3. folgt insbesondere, daß die lokale Lösbarkeit für $f \in \mathcal{D}_+$ auch schon die lokale Lösbarkeit für $f \in \mathcal{E}'_+$ impliziert.

Zusammenfassend sehen wir, daß folgende Bedingungen äquivalent sind:

(i) S ist lokal lösbar in H_+ (vgl. Def. 2.1.)

(ii) Für jedes $K \Subset \mathbb{R}^n$ und jedes $f \in \mathcal{E}'_+$ gibt es ein $u \in \mathcal{E}'_+$ und ein $g \in \mathcal{E}'_+$ mit $S * u = f + g$ und $\operatorname{supp} g \cap K = \emptyset$.

(iii) Für jedes $K \Subset \mathbb{R}^n$ gibt es Konstanten $c > 0$, $s \in \mathbb{N}$ mit

$$\sup_{H_+} |\varphi| \leq c \sum_{|\alpha| \leq s} \sup_{H_+} |D^\alpha(\check{S} * \varphi)| \quad \text{für } \varphi \in \mathcal{D},\ \operatorname{supp} \check{S} * \varphi \subset K.$$

Die lokale Lösbarkeit impliziert eine Langsam-Fallend-Eigenschaft von $\hat{S}$:

<u>SATZ 2.4.</u> Für ein $K \Subset \mathbb{R}^n$ mit $-\operatorname{supp} S \Subset \operatorname{int} K$ und Konstanten $c > 0$, $s \in \mathbb{N}$ gelte

$$|\varphi(0)| \leq c \sum_{|\alpha| \leq s} \sup_{H_+} |D^\alpha(\check{S} * \varphi)|,\quad \varphi \in \mathcal{D} \text{ mit } \operatorname{supp} \check{S} * \varphi \subset K.$$

Dann gibt es ein $b>o$, so daß es für jedes $\varepsilon>o$ ein $a>o$ gibt mit

$$\sup\left\{|\hat{S}(\eta+\xi+i\tau N)|\ ;\ \eta\in\mathbb{R}^n,\ |\eta|\le b\log(2+|\xi|+|\tau|)\right\} > e^{\varepsilon\tau}(1+|\xi|)^{-a}$$

für alle $\xi\in\mathbb{R}^n$, $\tau\le o$.

Beweis (vgl. Hörmander [15], Thm. 3.3.).

Mit Hilfe der Fourierinversionsformel und des Cauchyschen Integralsatzes (Unabhängigkeit der folgenden Integrale von τ) erhält man aus der vorausgesetzten die folgende Ungleichung:

$$\left|\int\hat{\varphi}(\xi)\,d\xi\right|\le c\sum_{|\alpha|\le s}\sup\left\{\left|\int\exp(i\langle x,\xi+i\tau N\rangle)(\xi+i\tau N)^\alpha\hat{S}(-\xi-i\tau N)\cdot\hat{\varphi}(\xi+i\tau N)\,d\xi\right|\ ;\ x\in K\cap H_+\right\}$$

für alle $\tau\in\mathbb{R}$, $\varphi\in\mathcal{D}$ mit $\operatorname{supp}\check{S}*\varphi\subset K$.

Für $\tau\ge o$ schätzen wir weiter ab

$$\left|\int\hat{\varphi}(\xi)\,d\xi\right|\le c\sum_{|\alpha|\le s}\sup\left\{\exp(-\tau\langle x,N\rangle)\int|\xi+i\tau N|^{|\alpha|}|\hat{S}(-\xi-i\tau N)|\cdot|\hat{\varphi}(\xi+i\tau N)|\,d\xi\ ;\ x\in K\cap H_+\right\}$$

$$\le c(1+\tau)^s\int(1+|\xi|)^s\,|\hat{S}(-\xi-i\tau N)\,\hat{\varphi}(\xi+i\tau N)|\,d\xi\ .$$

Angenommen die Behauptung des Satzes wäre falsch; dann gäbe es ein $\varepsilon>o$ und Folgen $(\xi_j)_{j\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}^n$, $(\tau_j)_{j\in\mathbb{N}}\ge o$ zu jedem festgewählten $b>o$ mit

$$|\xi_j|+|\tau_j|\longrightarrow\infty \quad \text{für } j\longrightarrow\infty\ ,$$

$$\sup\left\{|\hat{S}(\eta-\xi_j-i\tau_j N)|\ ;\ \eta\in\mathbb{R}^n,\ |\eta|\le b\log(2+|\xi_j|+|\tau_j|)\right\}$$
$$\le\exp(-\varepsilon\cdot\tau_j)\,(1+|\xi_j|)^{-j}.$$

Wir zeigen, daß diese Annahme der hergeleiteten Ungleichung widerspricht, wenn wir $b>o$ geeignet wählen.

Wegen $\operatorname{supp}\check{S}\in K$ können wir ein δ mit $o<\delta<\varepsilon$ und $\operatorname{supp}\check{S}+K(o,\delta)\subset K$ wählen. Mit einem $o\neq\psi\in\mathcal{D}$, ψ symmetrisch, supp $\psi \subset K(o,\delta)$, $\psi \geq o$, $\hat{\psi}(\xi) \geq o$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ und $\int\psi = \hat{\psi}(o)=1$, definieren wir dann die Funktionenfolge $\psi_k \in \mathcal{D}(K(o,\delta))$, $k \in \mathbb{N}$,

$$\hat{\psi}_k(\xi) = (\hat{\psi}(\xi/k))^k, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Die Paley-Wiener-Abschätzung des Fourierintegrals ergibt

$$|\hat{\psi}_k(\zeta)| \leq \exp(\delta\,|\mathrm{Im}\,\zeta|), \quad \zeta \in \mathbb{C}^n.$$

Wegen $|\hat{\psi}(\xi)| \longrightarrow o$ für $|\xi| \longrightarrow \infty$ und $|\hat{\psi}(\xi)| < 1$ für $\xi \in \dot{\mathbb{R}}^n$ gibt es ein $d > o$ mit $|\hat{\psi}(\xi)| \leq e^{-d}$ falls $|\xi| \geq 1$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. Also ist $|\hat{\psi}_k(\xi)| \leq e^{-dk}$ für $|\xi| \geq k$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. Zu den Folgen (ξ_j), (τ_j) definieren wir nun eine Folge $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(K(o,\delta))$

$$\hat{\varphi}_j(\zeta) := \hat{\psi}_k(\zeta - \xi_j - i\,\tau_j N), \quad \zeta \in \mathbb{C}^n,$$

wobei $k=k(j)$ durch $k \leq b\log(2+|\xi_j|+|\tau_j|) < k+1$ definiert sei.

Da supp $\check{S} * \varphi_j \subset K$ müssen die φ_j die zu Beginn des Beweises hergeleitete Ungleichung erfüllen. Mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes sehen wir, daß

$$(2\pi)^n |\varphi_j(o)| = \left|\int \hat{\varphi}_j(\xi)\,d\xi\right| = \left|\int \hat{\psi}_k(\xi)\,d\xi\right| = \int \hat{\psi}(\xi/k)^k\,d\xi \longrightarrow \infty$$

für $j \longrightarrow \infty$ ($\Longrightarrow k=k(j) \longrightarrow \infty$); denn nach dem Mittelwertsatz ist

$$\left|\hat{\psi}(\xi/k)^k - 1\right| \leq |\xi| \cdot \max\left\{|(\mathrm{grad}\,\hat{\psi})(\eta/k)|\ ;\ \eta \in \mathbb{R}^n, |\eta| \leq |\xi|\right\}$$

und wegen $(\mathrm{grad}\,\hat{\psi})(o) = o$ gilt daher $\hat{\psi}(\xi/k)^k \longrightarrow 1$ gleichmäßig auf den Kompakta. Der Widerspruch zur Annahme ist darum erreicht, wenn wir

$$(1+|\tau_j|)^s \int (1+|\xi|)^s |\hat{S}(-\xi - i\,\tau_j N) \cdot \hat{\varphi}_j(\xi + i\,\tau_j N)|\,d\xi \longrightarrow o$$

für $j \longrightarrow \infty$ gezeigt haben.

Weil $|\hat{\varphi}_j(\zeta)| \leq \exp(\delta|\mathrm{Im}\,\zeta| + \delta \cdot \tau_j)$, $\zeta \in \mathbb{C}^n$, gilt

$$(1+\tau_j)^s \int\limits_{|\xi-\xi_j|\leq k(j)} (1+|\xi|)^s |\hat{S}(-\xi - i\,\tau_j N)\cdot\hat{\varphi}_j(\xi + i\,\tau_j N)|\,d\xi$$

$$\leq (1+\tau_j)^s \int\limits_{|\eta|\leq k} (1+|\xi_j|+k)^s \exp(-\varepsilon\,\tau_j)\,(1+|\xi_j|)^{-j}\exp(\delta\,\tau_j)\,d\eta$$

$$\leq c\,(1+\tau_j)^s (1+|\xi_j|+k(j))^s (1+|\xi_j|)^{-j}\exp(-(\varepsilon-\delta)\,\tau_j)\cdot k(j)^n$$

für alle $j \in \mathbb{N}$.

Wegen $\varepsilon - \delta > 0$, $\tau_j \geq 0$ und $k(j) \leq b\log(2+|\xi_j|+\tau_j)$ erhalten wir aus den vorstehenden Ungleichungen für $j \longrightarrow \infty$

$$(1+\tau_j)^s \int\limits_{|\xi-\xi_j|\leq k(j)} (1+|\xi|)^s |\hat{S}(-\xi - i\,\tau_j N)\,\hat{\varphi}_j(\xi + i\,\tau_j N)|\,d\xi \longrightarrow 0\,.$$

Also bleibt noch zu zeigen, daß für $j \longrightarrow \infty$

$$(1+\tau_j)^s \int\limits_{|\xi-\xi_j|\geq k(j)} (1+|\xi|)^s |\hat{S}(-\xi - i\,\tau_j N)\,\hat{\varphi}_j(\xi + i\,\tau_j N)|\,d\xi \longrightarrow 0.$$

Da $\operatorname{supp} S \subset H_+$ ist nach dem Paley-Wiener-Theorem für ein $m>0$

$$|\hat{S}(\xi - i\tau N)| \leq m\,(1+|\xi|+|\tau|)^m, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \tau \geq 0\,,$$

und damit für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$, $j \in \mathbb{N}$

$$(1+|\xi|)^s |\hat{S}(-\xi - i\,\tau_j N)| \leq m\,(1+\tau_j)^m (1+|\xi_j|)^{s+m} (1+|\xi-\xi_j|)^{s+m}.$$

Also

$$(1+\tau_j)^s \int\limits_{|\xi-\xi_j|\geq k(j)} (1+|\xi|)^s |\hat{S}(-\xi - i\,\tau_j N)\cdot\hat{\varphi}_j(\xi + i\,\tau_j N)|\,d\xi$$

$$\leq m\,(1+\tau_j)^{m+s} (1+|\xi_j|)^{m+s} \int\limits_{|\eta|\geq k} (1+|\eta|)^{m+s} |\hat{\varphi}_j(\eta + \xi_j + i\,\tau_j N)|\,d\eta$$

$$\leq m\,(1+\tau_j)^{m+s} (1+|\xi_j|)^{m+s} \int\limits_{|\eta|\geq k} (1+|\eta|)^{m+s} |\hat{\varphi}_k(\eta)|\,d\eta\,.$$

Mit $|\hat{\varphi}_k(\eta)| \leq |\hat{\varphi}(\eta/k)|\cdot\exp(-d\cdot(k-1))$ für $|\eta|\geq k$, $\eta \in \mathbb{R}^n$, schätzen wir – nach Variablentransformation im Integral – weiter ab

$$\leq m\,(1+\tau_j)^{m+s}\,(1+|\xi_j|)^{m+s}\exp(-d\cdot(k-1)) \int\limits_{|\xi|\geq 1} (1+|k\,\xi|)^{m+s}\, k^n\, |\hat{\varphi}(\xi)|\, d\xi$$

$$\leq c\,(1+\tau_j)^{m+s}\,(1+|\xi_j|)^{m+s}\cdot k^{n+m+s}\exp(-dk/2)\,(2+|\xi_j|+\tau_j)^{-db/2}$$

– hierbei wurde $k+1 > b\log(2+|\xi_j|+\tau_j)$ benutzt. Wählt man nun $b>o$ mit $db > 4(m+s)$, dann konvergiert die rechte Seite der Ungleichung gegen Null. Damit ist alles gezeigt. ■

Wir zeigen nun wie man aus der Langsam-Fallend-Eigenschaft von $\hat{S}$ in Satz 2.3. und einer Voraussetzung über die Nullstellen von $\hat{S}$, welche – wie wir in Abschitt 4 zeigen werden – sowohl von den hyperbolischen als auch den parabolischen Convolutoren erfüllt wird, eine Fundamentallösung $E \in \mathcal{D}'_+$ von $S * E = \delta$ finden kann. Die Existenz einer solchen Fundamentallösung zieht offenbar die lokale Lösbarkeit in H_+ nach sich.

Zunächst schätzen wir $|\hat{S}|$ in einem Bereich außerhalb der Nullstellenmenge $\mathcal{N}(\hat{S})$ nach unten ab.

<u>LEMMA 2.5.</u> Zu einem $b>o$ gebe es für jedes $\varepsilon>o$ ein $a>o$ mit $\sup\{|\hat{S}(\eta+\xi+i\tau N)|\,;\,\eta\in\mathbb{R}^n,\,|\eta|\leq b\cdot\log(2+|\xi|+|\tau|)\} > \exp(\varepsilon\tau)\,(1+|\xi|)^{-a}$ für alle $\xi\in\mathbb{R}^n$, $\tau\leq o$. Seien $\beta,\gamma>o$ gegeben; dann gibt es für jedes $\varepsilon>o$ ein $B>o$, so daß

$$|\hat{S}(\zeta)| \geq B^{-1}\exp(\varepsilon\cdot\mathrm{Im}\,\zeta_n)\,(1+|\zeta|)^{-B}$$

gleichmäßig in der Menge $\Omega_{\beta,\gamma} := \{\zeta\in\mathbb{C}^n\,;\, d(\zeta,\mathcal{N}(\hat{S})) > \gamma\cdot\log(2+|\zeta|),\ |\mathrm{Im}\,\zeta'| < \beta\cdot\log(2+|\zeta|),\ \mathrm{Im}\,\zeta_n < o\}$.

<u>Beweis.</u> Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, und wähle $a = a(\varepsilon)$ nach Voraussetzung. Sei $\zeta \in \Omega_{\beta,\gamma}$ ($\beta, \gamma > 0$ gegeben); dann gibt es ein $\eta \in \mathbb{R}^n$ mit

$$|\eta| \leq b \cdot \log(2 + |\zeta|) \quad \text{und}$$

$$\left| \hat{S}(\eta + \operatorname{Re}\zeta + i \operatorname{Im}\zeta_n \cdot N) \right| \geq \exp(\varepsilon \cdot \operatorname{Im}\zeta_n)(1 + |\operatorname{Re}\zeta|)^{-a}.$$

Wir definieren zu ζ die holomorphe Funktion

$$g_\zeta(\lambda) := \hat{S}((1-\lambda)\zeta + \lambda(\eta + \operatorname{Re}\zeta + i \operatorname{Im}\zeta_n \cdot N)), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Wegen $|\eta + \operatorname{Re}\zeta + i \operatorname{Im}\zeta_n \cdot N - \zeta| \leq |\eta| + |\operatorname{Im}\zeta'| \leq (b+\beta)\log(2+|\zeta|)$ ist $g_\zeta(\lambda) \neq 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| < \gamma/(b+\beta)$.

Nach dem Minimum-Modulus-Theorem von Chou [5] (Théorème II.2.1.) erhalten wir mit - von $\zeta \in \Omega_{\beta,\gamma}$ unabhängigen Konstanten $\sigma, \tau > 0$ die Ungleichung

$$|g_\zeta(0)| \geq \frac{|g_\zeta(1)|^{1+\sigma}}{\sup\{|g_\zeta(\lambda)|^\sigma ;\ |\lambda| \leq \tau\}} .$$

Da $g_\zeta(0) = \hat{S}(\zeta)$, $g_\zeta(1) = \hat{S}(\eta + \operatorname{Re}\zeta + i \operatorname{Im}\zeta_n \cdot N)$ und

$$|g_\zeta(\lambda)| \leq c\,(1 + |\zeta| + |\lambda \cdot \operatorname{Im}\zeta'| + |\lambda\eta|)^\mu \exp(h_{\operatorname{supp} S}(\operatorname{Im}\zeta) + A|\lambda|(|\operatorname{Im}\zeta'| + |\eta|))$$

$$\leq c'(1+|\zeta|)^{\mu'}$$

für $\zeta \in \Omega_{\beta,\gamma}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| \leq \tau$, haben wir schließlich mit Konstanten $c, B > 0$

$$|\hat{S}(\zeta)| \geq c\,(1+|\zeta|)^{-b} \exp(\varepsilon(1+\sigma) \operatorname{Im}\zeta_n), \quad \zeta \in \Omega_{\beta,\gamma} .$$

Da σ nur von b, β und γ abhängt, ist das Lemma bewiesen. ■

Eine Fundamentallösung $E \in \mathcal{D}'_+$, $S * E = \delta$, für $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ wollen wir in der Integralform

$$\langle \check{E}, \varphi \rangle = (2\pi)^{-n} \int_\Gamma \frac{\hat{\varphi}(\zeta)}{\hat{S}(\zeta)}\, d\zeta \quad , \quad \varphi \in \mathcal{D},$$

konstruieren, wobei Γ eine reell-n-dimensionale Fläche in einem $\Omega_{\beta,\gamma}$ sein soll. Wie im Paley-Wiener-Theorem soll dann $\operatorname{supp} E \subset H_+$ daraus folgen, daß Γ in Richtung $-iN$ ins Unendliche verschoben werden kann. An dieser Stelle ist die Abschätzung von $|\hat{S}|$ nach unten aus Lemma 2.5. besonders wichtig. Um E konstruieren zu können, müssen wir daher topologische Voraussetzungen über $\Omega_{\beta,\gamma}$ machen. Und Vorausetzungen über $\Omega_{\beta,\gamma}$ sind im Grunde Voraussetzungen über die Nullstellenmenge $\mathcal{N}(\hat{S})$ von $\hat{S}$.

<u>SATZ 2.6.</u> Zu einem $b>0$ gebe es für jedes $\varepsilon>0$ ein $a>0$, so daß für alle $\xi\in\mathbb{R}^n$, $\tau\leq 0$

$$\sup\left\{|\hat{S}(\eta+\xi+i\tau N)|\,;\ \eta\in\mathbb{R}^n,\ |\eta|\leq b\log(2+|\xi|+|\tau|)\right\} > e^{\varepsilon\tau}\,(1+|\xi|)^{-a}.$$

Ferner existiere eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $\Gamma:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n\setminus\mathcal{N}(\hat{S})$, so daß für ein $c>0$ und alle $(t,\xi)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n$ gilt

$$|\operatorname{Im}\Gamma(t,\xi)+tN| \leq c\log(2+|\xi|) \quad\text{und}\quad \langle \operatorname{Im}\Gamma(t,\xi),N\rangle \leq 0,$$

$$\left|\frac{\partial\Gamma}{\partial(t,\xi)}\,\Big|\,(t,\xi)\right| \leq c\,(1+|t|+|\xi|)^c,$$

$$|\xi| \leq c\,(1+|\Gamma(t,\xi)|),$$

$$d(\Gamma(t,\xi),\mathcal{N}(\hat{S})) > c^{-1}\log(2+|\Gamma(t,\xi)|).$$

Dann gibt es ein $E\in\mathcal{D}'_+$ mit $S*E=\delta$.

<u>Beweis.</u> Definiert man $\Omega_{\beta,\gamma}$ wie in Lemma 2.5. so implizieren die Voraussetzungen über Γ: $\Gamma(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n)\subset\Omega_{c,1/c}$.

Nach Lemma 2.5. gibt es daher für jedes $\varepsilon>0$ ein $B>0$ mit

$$|\hat{S}(\Gamma(t,\xi))| \geq B^{-1}\exp(\varepsilon\langle N,\operatorname{Im}\Gamma(t,\xi)\rangle)\,(1+|\Gamma(t,\xi)|)^{-B}$$

für alle $(t,\xi)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n$.

E definieren wir durch das Integral

$$\langle \check{E}, \varphi \rangle := (2\pi)^{-n} \int_{\Gamma(t,.)} \frac{\hat{\varphi}(\zeta)}{\hat{S}(\zeta)} d\zeta = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\hat{\varphi}}{\hat{S}}(\Gamma(t,\xi)) \frac{D\Gamma}{D\xi}(t,\xi)\, d\xi$$

für jedes $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. $\frac{D\Gamma}{D\xi}$ ist die Jacobideterminante der Abbildung $\mathbb{R}^n \ni \xi \rightsquigarrow \Gamma(t,\xi) \in \mathbb{C}^n$. Daß diese Definition unabhängig von $t \in \mathbb{R}_+$ ist, zeigen wir weiter unten.

$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ erfüllt eine Paley-Wiener-Abschätzung

$$|\hat{\varphi}(\zeta)| \leq c_m(\varphi)\cdot(1+|\zeta|)^{-m} \exp(h_K(\operatorname{Im}\zeta)),\ \zeta \in \mathbb{C}^n,$$

wenn $\operatorname{supp}\varphi \subset K \Subset \mathbb{R}^n$, wobei $c_m(.)$ eine stetige Halbnorm auf $\mathcal{D}(K)$ ist. Da $|\partial\Gamma/\partial\xi| \leq c\,(1+t+|\xi|)^c$ haben wir für alle $\varphi \in \mathcal{D}(K)$ – $K \Subset \mathbb{R}^n$ fest gewählt –

$$\left|\frac{\hat{\varphi}}{\hat{S}}(\Gamma(t,\xi))\frac{D\Gamma}{D\xi}(t,\xi)\right| \leq c_m(\varphi)(1+|\Gamma(t,\xi)|)^{b-m}\cdot c(1+t+|\xi|)^c\cdot$$
$$\exp(h_K(\operatorname{Im}\Gamma(t,\xi)) - \varepsilon\langle \operatorname{Im}\Gamma(t,\xi),N\rangle)$$

$$\leq c_m(\varphi)\cdot c'(1+|\xi|)^{c'+b-m}(1+t)^c \exp(h_K(-tN)+t\varepsilon),$$

$(t,\xi)\ \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$, falls $b-m \leq 0$ und unter Berücksichtigung von $|\operatorname{Im}\Gamma(t,\xi)+tN| \leq c\log(2+|\xi|)$. Aus dieser Ungleichung folgt sofort, daß durch das obige Integral eine Distribution $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ definiert wird.

Für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $K=\operatorname{supp}\varphi$, mit $h_K(-N) \leq -2\varepsilon$ gilt dann – wir benutzen dabei schon, daß die Definition von E unabhängig von $t \in \mathbb{R}_+$ ist –

$$|\langle \check{E},\varphi\rangle| \leq c\,(1+t)^c \exp(-\varepsilon t),\ t \in \mathbb{R}_+ .$$

Läßt man $t \longrightarrow +\infty$, so folgt $\langle \check{E},\varphi\rangle = 0$. Läßt man $\varepsilon \longrightarrow 0$, so erhalten wir $\operatorname{supp} E \subset H_+$.

Zum Beweis der Unabhängigkeit des E definierenden Integrals von t halten wir nun $0 \leq t_0 < t_1$ fest. Für $l > 0$ wird durch

$$\Gamma : [t_0,t_1] \times K(0,l) \longrightarrow \mathbb{C}^n \setminus \mathcal{N}(\hat{S})$$

eine 2-mal stetig differenzierbare (n+1)-Kette Δ_l in $\mathbb{C}^n \setminus \mathcal{N}(\hat{S})$ definiert. Weil $\hat{\varphi}/\hat{S}$ in einer Umgebung von Δ_l holomorph ist, ist die Differentialform $(\hat{\varphi}/\hat{S})(\zeta)\,d\zeta$ in einer Umgebung von Δ_l geschlossen, denn

$$d\left(\frac{\hat{\varphi}}{\hat{S}}\,d\zeta\right) = (\partial+\bar{\partial})\left(\frac{\hat{\varphi}}{\hat{S}}\,d\zeta\right) = \bar{\partial}\frac{\hat{\varphi}}{\hat{S}} \wedge d\zeta = o.$$

Nach Stokes' Theorem haben wir daher für alle $\varphi \in \mathcal{D}$ und alle l

$$\int_{\partial\Delta_l} \frac{\hat{\varphi}}{\hat{S}}(\zeta)\,d\zeta = \int_{\Delta_l} d\left(\frac{\hat{\varphi}}{\hat{S}}(\zeta)\,d\zeta\right) = o\,.$$

Der Rand $\partial\Delta_l$ von Δ_l besteht aus drei Teilen: dem unteren "Deckel" $\underline{K}_l = \Gamma(\{t_o\} \times K(o,l))$, dem oberen "Deckel" $\bar{K}_l = \Gamma(\{t_1\} \times K(o,l))$ und dem "Mantel" $M_l = \Gamma([t_o,t_1] \times l\cdot S^{n-1})$.

Da $$\lim_{l\to\infty} \int_{\underline{K}_l} \frac{\hat{\varphi}}{\hat{S}}\,d\zeta = \int_{\Gamma(t_o,\cdot)} \frac{\hat{\varphi}}{\hat{S}}\,d\zeta \quad,$$

bzw. $$\lim_{l\to\infty} \int_{\bar{K}_l} \frac{\hat{\varphi}}{\hat{S}}\,d\zeta = \int_{\Gamma(t_1,\cdot)} \frac{\hat{\varphi}}{\hat{S}}\,d\zeta \quad,$$

ist zu zeigen, daß

$$\lim_{l\to\infty} \int_{M_l} \frac{\hat{\varphi}}{\hat{S}}\,d\zeta = o\,.$$

Aufgrund der über die ersten Ableitungen von Γ nach ξ und t gemachten Voraussetzungen bekommen wir wieder eine Abschätzung der beim Zurückziehen der Differentialform auftretenden Determinanten durch $\text{const}\cdot(1+t+|\xi|)^c$. Mit der schon hergeleiteten Abschätzung für $|(\hat{\varphi}/\hat{S})(\Gamma(t,\xi))|$ erhalten wir, wenn wir bedenken, daß die $t \geq o$ nur im Kompaktum $[t_o,t_1]$ variieren – eine Konstante $c > o$ mit

$$\left| \int_{M_l} \frac{\hat{\varphi}}{\hat{S}}(\zeta)\,d\zeta \right| \leq c \int_{[t_o,t_1]} \int_{S^{n-1}} (1+|l\xi|)^{-n}\, l^{n-1}\, d\xi\, dt$$

$$\leq c'(1+l)^{-1}, \quad l \geq o;$$

also $\lim\limits_{l\to\infty} \int_{M_l} \frac{\hat{\varphi}}{\hat{S}}\,d\zeta \longrightarrow o$.

Es bleibt nur noch $S*E=\delta$ zu zeigen. Wegen

$$\langle \check{S}*\check{E}, \varphi\rangle = \langle \check{E}, S*\varphi\rangle = (2\pi)^{-n} \cdot \int_{\Gamma(o,.)} \hat{\varphi}(\zeta)\,d\zeta \quad , \varphi \in \mathcal{D},$$

ist daher die Gleichung

$$(2\pi)^{-n} \int_{\Gamma(o,.)} \hat{\varphi}(\zeta)\,d\zeta = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(\xi)\,d\xi = \varphi(o)$$

nachzuweisen. Da die Differentialform $\hat{\varphi}(\zeta)\,d\zeta$ in ganz $\mathbb{C}^n$ geschlossen ist, kann man wie oben mit Hilfe des Stokes'schen Satzes - statt $\Gamma(.,.)$ verwenden wir jetzt die Funktion $\gamma(t,\xi) := (1-t)\xi + t\cdot\Gamma(o,\xi),\ t\in[o,1]$ - die Gleichung

$$\int_{\Gamma(o,.)} \hat{\varphi}(\zeta)\,d\zeta = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(\xi)\,d\xi$$

beweisen. ■

3. Die globale Lösbarkeit in $\mathcal{E}_+$ und $\mathcal{D}'_{F+}$

Zusätzlich zu den notwendigen Bedingungen für die lokale lösbarkeit in H_+, welche in 2. hergeleitet wurden, gelten im Falle der globalen Lösbarkeit $\mathcal{E}_+ \subset S * \mathcal{D}'_+$ notwendigerweise noch weitere Bedingungen.

SATZ 3.1. Sei $\mathcal{E}_+ \subset S * \mathcal{D}'_+$. Dann gibt es zu jedem $K \Subset \mathbb{R}^n$ ein $K' \Subset \mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft

$$\left.\begin{array}{l} \varphi \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \\ \operatorname{int} H_+ \cap \operatorname{supp} \check{S} * \varphi \subset K \end{array}\right\} \Longrightarrow \operatorname{int} H_+ \cap \operatorname{supp} \varphi \subset K'.$$

Beweis. Zu der Äquivalenzrelation $\varphi \sim \psi \leftrightarrow [\varphi] = [\psi] \Longleftrightarrow \operatorname{supp}(\varphi - \psi) \subset H_-$ auf $\mathcal{D}$ definieren wir für $K \Subset \mathbb{R}^n$ mit $K = \overline{\operatorname{int} K}$ den Quotientenraum $\Phi_K := \left\{[\varphi]\,;\ \varphi \in \mathcal{D},\ \operatorname{int} H_+ \cap \operatorname{supp} \check{S} * \varphi \subset K\right\}$.
Mit den Halbnormen

$$p_s([\varphi]) := \sum_{|\alpha| \leq s} \sup \left\{|D^\alpha(\check{S} * \varphi)(x)|\,;\ x \in K \cap H_+\right\},\quad s \in \mathbb{N},$$

ist Φ_K dann ein separierter (Satz von Titchmarsh-Lions !) prä-(F)-Raum. Die Bilinearform $(f, [\varphi]) \rightsquigarrow \int f \cdot \varphi$ auf $\mathcal{E}_+ \times \Phi_K$ ist getrennt stetig. Die Stetigkeit in $\mathcal{E}_+$ ist klar. Sei daher $f \in \mathcal{E}_+$ fest. Nach Voraussetzung existiert ein $u \in \mathcal{D}'_+$ mit $S * u = f$. Also ist für $\varphi \in \mathcal{D}$ mit $[\varphi] \in \Phi_K$

$$\left|\int f \cdot \varphi\right| = |\langle u, \check{S} * \varphi\rangle| \leq c_K \sum_{|\alpha| \leq s_K} \sup \left\{|D^\alpha(\check{S} * \varphi)(x)|\,;\ x \in K \cap H_+\right\}$$

(wegen der Whitney-Regularität von ∂H_+).
Eine auf dem Produkt eines (F)- und eines prä-(F)-Raumes definierte, getrennt stetige Bilinearform ist stetig (Bourkaki [4], Chap. III, § 4, Prop. 2).

Also gibt es ein $K' \Subset \mathbb{R}^n$, $c > 0$, $l \in \mathbb{N}$, so daß

$$\left|\int f\cdot\varphi\right| \leq c\Big(\sum_{|\alpha|\leq l} \sup_{K'} |D^\alpha f|\Big)\Big(\sum_{|\alpha|\leq l} \sup_{K\cap H_+} |D^\alpha \check{S}*\varphi|\Big)$$

für alle $f \in \mathcal{E}_+$, $\varphi \in \mathcal{D}$ mit $\operatorname{int} H_+ \cap \operatorname{supp} \check{S}*\varphi \subset K$. Hieraus folgt: $\operatorname{supp}\varphi \cap \operatorname{int} H_+ \subset K'$ für alle $\varphi\in\mathcal{D}$ mit $\operatorname{supp}\check{S}*\varphi\cap\operatorname{int} H_+ \subset K$. Mittels Regularisierung sieht man, daß dieses auch für $\varphi \in \mathcal{E}'$ gilt. ■

Man beachte, daß $\mathcal{D}_+ \subset S * \mathcal{D}'_+$ für die Durchführbarkeit des obigen Beweises nicht ausreicht.

Wir zeigen nun, daß die lokale Lösbarkeit in H_+ und die in Satz 3.1. hergeleiteten Bedingungen einen Approximationssatz vom Rungeschen Typ für die Lösungen der homogenen Gleichung $S*u = 0$, $\operatorname{supp} u \subset H_+$, nach sich zieht. Hiermit erhält man dann nach dem von Malgrange [19] erweiterten Mittag-Leffler-Verfahren die Lösbarkeit $S * \mathcal{E}_+ = \mathcal{E}_+$.
Mit $\mathcal{F}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, bezeichnen wir einen Distributionenraum der Form

$$\mathcal{F}(\Omega) = \bigcap_{\alpha\in A} \mathcal{B}^{\,loc}_{p_\alpha,k_\alpha}(\Omega) \qquad \text{mit der projektiven Topologie.}$$

Hierbei seien $(k_\alpha)_{\alpha\in A} \subset \mathcal{K}$, $1 \leq p_\alpha < +\infty$, $\alpha \in A$, fest gewählte, aber ansonsten beliebige Familien (vgl. Hörmander [12], Chap. 2). Es ist $\mathcal{E}(\Omega) \subset \mathcal{F}(\Omega) \subset \mathcal{D}'_F(\Omega)$.

Zu $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ offen definieren wir den Raum

$$\mathcal{N}(\Omega_1,\Omega_2) := \left\{u \in \mathcal{F}(\Omega_1)\,;\, \exists\, v \in \mathcal{F}(\Omega_2):\ v|_{\Omega_1} = u,\ \operatorname{supp} v \subset H_+ \text{ und } S*v = 0 \text{ in } \Omega_2^S\right\}$$

und statten ihn mit der Topologie von $\mathcal{F}(\Omega)$ aus.

SATZ 3.2. (Approximationssatz). Sei $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ lokal lösbar in H_+ und für jedes $K \Subset \mathbb{R}^n$ gebe es ein $K' \Subset \mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft

$$\left.\begin{array}{l} \mu \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \\ \operatorname{int} H_+ \cap \operatorname{supp} \check{S} * \mu \subset K \end{array}\right\} \Longrightarrow \operatorname{int} H_+ \cap \operatorname{supp} \mu \subset K'.$$

Dann gibt es zu jedem $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen ein $\Omega_1 \Subset \mathbb{R}^n$ offen, so daß für alle $\Omega_2 \Subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\Omega_1 \subset \Omega_2$ $\mathcal{N}(\Omega,\Omega_2)$ dicht in $\mathcal{N}(\Omega,\Omega_1)$ ist.

Beweis. Zu $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ wähle $\Omega_1 \Subset \mathbb{R}^n$ mit $\Omega \subset \Omega_1$, so daß für ein $K' \Subset \Omega_1^S$ (d.h. $K' - \operatorname{supp} S \Subset \Omega_1$) gilt

$$\left.\begin{array}{l} \mu \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \\ \operatorname{int} H_+ \cap \operatorname{supp} \check{S} * \mu \subset \overline{\Omega} \end{array}\right\} \Longrightarrow \operatorname{int} H_+ \cap \operatorname{supp} \mu \subset K'.$$

Sei nun $\Omega_2 \Subset \mathbb{R}^n$ mit $\Omega_1 \subset \Omega_2$ und $L \in \mathcal{F}'(\Omega)$ mit $L(u)=0$, $u \in \mathcal{N}(\Omega,\Omega_2)$, gegeben. Nach dem Satz von Hahn-Banach ist zu zeigen, daß $L(u)=0$ für alle $u \in \mathcal{N}(\Omega,\Omega_1)$. Da $\mathcal{E}(\Omega)$ stetig in $\mathcal{F}(\Omega)$ eingebettet ist, ist die Restriktion von L auf $\mathcal{E}(\Omega)$ eine Distribution $\nu \in \mathcal{E}'(\Omega)$, ν senkrecht auf $\mathcal{E}(\Omega) \cap \mathcal{N}(\Omega,\Omega_2)$. Wir wählen nun $O_1 \subset O_2 \Subset \mathbb{R}^n$ offen so groß, daß O_1 eine offene Umgebung von $\overline{\Omega_2^S}$ mit $(\complement O_1 - \operatorname{supp} S) \cap \overline{\Omega_2^S} = \emptyset$ und $((\mathbb{R}^n \setminus O_2) + \overline{O_1}) \cap \overline{\Omega_2^S} = \emptyset$ ist. Weil S lokal in H_+ lösbar ist, finden wir nach 2. Distributionen $f, g \in \mathcal{E}'_+$ mit $S * f = \delta + g$ und $\operatorname{supp} g \cap \overline{O_2} = \emptyset$. Für $\varphi \in \mathcal{D}(\operatorname{int} H_+ \cap O_1 \cap (\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega_2^S}))$ setzen wir $\psi := f * \varphi$. Aufgrund von $S * \psi = \varphi + g * \varphi$ und der Voraussetzungen über g, O_1 und O_2 ist dann $\psi|_\Omega \in \mathcal{N}(\Omega,\Omega_2) \cap \mathcal{E}(\Omega)$. Also ist $0 = \langle \nu, \psi \rangle = \langle \nu, f * \varphi \rangle = \langle \check{f} * \nu, \varphi \rangle$, und damit gilt für die Distribution $\mu_0 := \check{f} * \nu \in \mathcal{E}'$

$$\operatorname{int} H_+ \cap \operatorname{supp} \mu_0 \subset (\mathbb{R}^n \setminus O_1) \cup \overline{\Omega_2^S}.$$

Folglich können wir μ_o in $\mu_o = \mu_1 + \mu_2$, $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$,

mit $\operatorname{int} H_+ \cap \operatorname{supp} \mu_1 \subset \overline{\Omega_2^S}$ und $\operatorname{int} H_+ \cap \operatorname{supp} \mu_2 \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega_2^S}$

zerlegen. Also ist $\operatorname{int} H_+ \cap \operatorname{supp}(\check{S} * \mu_1 - \nu) \subset \overline{\Omega_2}$ und

$\operatorname{int} H_+ \cap \operatorname{supp}(\check{g} * \nu - \check{S} * \mu_2) \cap \overline{\Omega_2} = \emptyset$ (o.B.d.A. sei

$\operatorname{supp} \check{g} \cap \overline{O_2} = \emptyset$ angenommen). Wegen $\check{S} * \mu_1 - \nu = \check{g} * \nu - \check{S} * \mu_2$

ist daher $\operatorname{supp}(\check{S} * \mu_1 - \nu) \subset H_-$, also $\operatorname{int} H_+ \cap \operatorname{supp} \check{S} * \mu_1 \subset \Omega$.

Nach Wahl von Ω_1 ist folglich $\operatorname{int} H_+ \cap \operatorname{supp} \mu_1 \Subset \Omega_1^S$.

Schneiden wir nun μ_1 mit einer Funktion aus $\mathcal{D}(\Omega_1^S)$ ab, welche gleich 1 in einer Umgebung von $\operatorname{int} H_+ \cap \operatorname{supp} \mu_1$ ist, so erhalten wir ein $\mu \in \mathcal{E}'(\Omega_1^S)$ mit

$$\check{S} * \mu = \lambda + \nu, \quad \lambda \in \mathcal{E}'(\Omega_1), \quad \operatorname{supp} \lambda \subset H_- .$$

Für $u \in \mathcal{E}(\Omega_1)$ mit $\operatorname{supp} u \subset H_+$ und $S * u = o$ in einer Umgebung von $\operatorname{supp} \mu$ gilt $\langle \nu, u \rangle = \langle \check{S} * \mu - \lambda, u \rangle = \langle \mu, S * u \rangle = o$.

Also steht ν senkrecht auf $\mathcal{N}(\Omega, \Omega_1) \cap \mathcal{E}(\Omega)$.

Die Definition der Topologie von $\mathcal{F}(\Omega)$ impliziert, daß es ein Kompaktum $K \Subset \Omega$ gibt, so daß $L(v) = o$ für alle für alle $v \in \mathcal{F}(\Omega)$, $\operatorname{supp} v \cap K = \emptyset$. Wählen wir nun ein $\psi \in \mathcal{D}(\Omega_1)$ mit $\psi = 1$ in einer Umgebung von $K \cup (\operatorname{supp} \mu - \operatorname{supp} S)$, dann gilt $L(u) = L(\psi \cdot u)$, $\psi \cdot u \in \mathcal{E}_+'(\Omega_1)$ und $S * (\psi \cdot u) = o$ in einer Umgebung von $\operatorname{supp} \mu$ für alle $u \in \mathcal{F}(\Omega_1)$ mit $\operatorname{supp} u \subset H_+$ und $S * u = o$ in Ω_1^S.

Regularisiert man $\psi \cdot u$ jetzt mit einer Diracfolge $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}$, $\varphi_k \longrightarrow \delta$ in $\mathcal{E}'$, $\operatorname{supp} \varphi_k \subset \{x ; |x| \le k^{-1}\} \cap H_+$, so erhält man wegen der Stetigkeit von L

$$L(u) = L(\psi \cdot u) = \lim_{k \to \infty} L(\varphi_k * \psi \cdot u) = \lim_{k \to \infty} \nu(\varphi_k * \psi \cdot u) = o ,$$

für alle $u \in \mathcal{N}(\Omega, \Omega_1)$, da $\varphi_k * \psi u \in \mathcal{D}_+(\Omega_1)$ und $S * (\varphi_k * \psi \cdot u) = o$ in einer Umgebung von $\operatorname{supp} \mu$ für große k. ∎

<u>SATZ 3.3.</u> (globale Lösbarkeit in $\mathcal{E}_+$). Sei $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ lokal in H_+ lösbar und zu jedem $K \Subset \mathbb{R}^n$ gebe es ein $K' \Subset \mathbb{R}^n$ mit

$$\left.\begin{array}{l} \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \\ \operatorname{int} H_+ \cap \operatorname{supp} \check{S} * \varphi \subset K \end{array}\right\} \Longrightarrow \operatorname{int} H_+ \cap \operatorname{supp} \varphi \subset K'.$$

Dann ist $S * \mathcal{E}_+ = \mathcal{E}_+$.

<u>Beweis.</u> Sei $K_\nu = \{x \in \mathbb{R}^n;\ |x| \leq \nu\}$, $\nu \in \mathbb{N}$. Wähle $\Omega_\nu \Subset \mathbb{R}^n$ offen nach Satz 3.2. mit $\operatorname{int} K_{\nu+1} \subset \Omega_\nu \Subset \Omega_{\nu+1}$, so daß $\mathcal{N}(\operatorname{int} K_{\nu+1}, \Omega_{\nu+2}) \subset \mathcal{N}(\operatorname{int} K_{\nu+1}, \Omega_\nu)$ dicht ist ($\mathcal{F}(\Omega) = \mathcal{E}(\Omega)$).

Wir konstruieren nun Folgen $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_+$, $(g_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ mit $S * u_\nu = f + g_\nu$, $\operatorname{supp} g_\nu \cap \Omega_\nu^S = \emptyset$ und

$$\sum_{|\alpha| \leq \nu} \sup\left\{\left|D^\alpha(u_{\nu+1} - u_\nu)(x)\right|;\ x \in K_\nu\right\} < 2^{-\nu}.$$

zu beliebigem, festgewählten $f \in \mathcal{E}_+$. Dann existiert $u = \lim_{\nu \to \infty} u_\nu$ in $\mathcal{E}_+$. Da $S * u = f$, ist der Satz dann bewiesen.

Die Konstruktion der Folgen wird per Induktion durchgeführt. Sei also $f \in \mathcal{E}_+$ gegeben. Dann erhalten wir aus der lokalen Lösbarkeit $u_1 \in \mathcal{D}_+$, $g_1 \in \mathcal{E}_+$ mit $S * u_1 = f + g_1$, $\operatorname{supp} g_1 \cap \Omega_1^S = \emptyset$ (Man beachte, daß u_1 - und damit auch g_1 - aus C^∞ gewählt werden können. Dies folgt aus den Sätzen 2.2. und 2.3.).

Seien nun $u_\nu \in \mathcal{D}_+$, $g_\nu \in \mathcal{E}_+$ mit $S * u_\nu = f + g_\nu$, $\operatorname{supp} g_\nu \cap \Omega_\nu^S = \emptyset$ gegeben. Wegen der lokalen Lösbarkeit von S in H_+ finden wir wieder $u'_{\nu+1} \in \mathcal{D}_+$, $g'_{\nu+1} \in \mathcal{E}_+$ mit $S * u'_{\nu+1} = f + g'_{\nu+1}$ und $\operatorname{supp} g'_{\nu+1} \cap \Omega_{\nu+1}^S = \emptyset$. Definieren wir $u := u'_{\nu+1} - u_\nu$, dann ist $S * u = g'_{\nu+1} - g_\nu$, folglich

$$u|_{\operatorname{int} K_{\nu+1}} \in \mathcal{N}(\operatorname{int} K_{\nu+1}, \Omega_\nu).$$

Da $\mathcal{N}(\operatorname{int} K_{\nu+1}, \Omega_{\nu+2})$ dicht in $\mathcal{N}(\operatorname{int} K_{\nu+1}, \Omega_\nu)$ ist, gibt es ein $v' \in C^{\infty}(\Omega_{\nu+2})$ mit $\operatorname{supp} v' \subset H_+$, $S*v' = o$ in $\Omega^S_{\nu+2}$ und

$$\sum_{|\alpha|\leq\nu} \sup \left\{ |D^{\alpha}(u-v')(x)|;\ x \in K_{\nu} \right\} < 2^{-\nu} .$$

Wählt man $\psi \in \mathcal{D}(\Omega_{\nu+2})$ mit $\psi = 1$ in einer Umgebung von $\overline{\Omega}_{\nu+1}$ und setzt $v = \psi \cdot v'$, dann ist $v \in \mathcal{D}_+$ und $S*v = o$ in $\Omega^S_{\nu+1}$. Definiert man schließlich $u_{\nu+1} = u'_{\nu+1} - v$, dann ist

$$\sum_{|\alpha|\leq\nu} \sup \left\{ |D^{\alpha}(u_{\nu+1} - u_{\nu})(x)|\ ;\ x \in K_{\nu} \right\} < 2^{-\nu} ,$$

$S * u_{\nu+1} = f + g_{\nu+1}$, $\operatorname{supp} g_{\nu+1} \cap \Omega^S_{\nu+1} = \emptyset$, denn $g_{\nu+1} = g'_{\nu+1} - S*v$. Damit ist alles gezeigt. ∎

Um $S * \mathcal{D}'_{F_+} = \mathcal{D}'_{F_+}$ zu erhalten, müssen wir offenbar einen stärkeren Begriff für die lokale Lösbarkeit als bisher voraussetzen. Denn notwendigerweise muß es ein $\mu_S \in \mathbb{N}$ geben, so daß es zu jedem $K \Subset \mathbb{R}^n$ Distributionen $u, g \in \mathcal{E}'_+$ mit $S*u = \delta + g$, $\operatorname{supp} g \cap K = \emptyset$, $\operatorname{ord}_{\mathcal{E}'} u \leq \mu_S$ gibt.

<u>SATZ 3.4.</u> Für $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $o \in \operatorname{supp} S \subset H_+$, sind äquivalent:

(i) Es gibt ein $\mu \in \mathbb{N}$, so daß es für jedes $K \Subset \mathbb{R}^n$ ein $K' \Subset \mathbb{R}^n$ und $u, g \in \mathcal{E}'_+$ gibt mit $S*u = \delta + g$, $\operatorname{supp} g \cap K = \emptyset$, $\operatorname{ord}_{\mathcal{E}'} u \leq \mu$ und
$\varphi \in \mathcal{D}$, $\operatorname{int} H_+ \cap \operatorname{supp} \check{S} * \varphi \subset K \Longrightarrow \operatorname{int} H_+ \cap \operatorname{supp} \varphi \subset K'$.

(ii) $S * \mathcal{D}'_{F_+} = \mathcal{D}'_{F_+}$.

<u>Beweis.</u> Nach den obigen Überlegungen und wegen Satz 3.1. folgt (i) aus (ii). Der Beweis von "(i) $\Longrightarrow$ (ii)" ist fast dergleiche wie der von Satz 3.3. Nur ist jetzt $\mathcal{F}(\Omega) = \mathcal{B}^{loc}_{p,k}(\Omega)$ (Man beachte, daß $\mathcal{D}'_F(\Omega) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{B}^{loc}_{2,k_j}(\Omega)$ für eine geeignete

Folge $(k_j) \subset \mathcal{K}$) ; und daher sind im Beweis andere Halbnormen zu wählen. ■

Falls S ein Differentialoperator ist (d.h. $S = P(D)\delta$), erfüllt S stets die Bedingung der globalen Lösbarkeit:

Zu $K \Subset \mathbb{R}^n$ gibt es ein $K' \Subset \mathbb{R}^n$ mit:

$\varphi \in \mathcal{D}$, $\operatorname{int} H_+ \cap \operatorname{supp} \check{S} * \varphi \subset K \longrightarrow \operatorname{int} H_+ \cap \operatorname{supp} \varphi \subset K'$.

Dieses folgt mit dem Holmgrenschen Eindeutigkeitssatz (siehe: Hörmander [12], p. 154, Beweis von Thm. 5.8.5.). Wir zeigen, daß dieses auch für Differential-Differenzen-Operatoren mit konstanten Koeffizienten zutrifft.

<u>SATZ 3.5.</u> Sei $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ ein Differential-Differenzen-Operator mit konstanten Koeffizienten mit $o \in \operatorname{supp} S \subset H_+$. Dann gibt es zu jedem $K \Subset \mathbb{R}^n$ ein $K' \Subset \mathbb{R}^n$, so daß für $\varphi \in \mathcal{D}$ mit $\operatorname{int} H_+ \cap \operatorname{supp} \check{S} * \varphi \subset K$ folgt: $\operatorname{int} H_+ \cap \operatorname{supp} \varphi \subset K'$.

<u>Beweis.</u> Sei $S = \sum_{k=1}^{s} P^k(D)\,\delta(\cdot - a_k) + T$ mit $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp} T \Subset \operatorname{int} H_+$ und $a_k \in \mathbb{R}^n$, $\langle a_k, N\rangle = o$ $(N = (o,\dots,o,1))$.

Es gibt n Vektoren $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}^n$, so daß jeder Vektor $\xi \in \mathbb{R}^n$ eine Linearkombination mit nichtnegativen Koeffizienten der Vektoren $\xi_1, \dots, \xi_n, -N$ ist, und für alle $j=1,\dots,n$, $k, k' = 1,\dots,s$ gilt $\langle \xi_j, a_k - a_{k'}\rangle \neq o$ für $k \neq k'$, $\bar{P}^k(\xi_j) \neq o$ ($\bar{P}^k$ ist der Hauptteil von P^k). Da die Polynome $\bar{P}^k(N + \tau\xi_j)$ in τ nicht identisch verschwinden, gibt es ein $\varepsilon > o$, so daß $\bar{P}^k(N + \tau\xi_j) \neq o$ für alle $k=1,\dots,s$, $j=1,\dots,n$ und $o < \tau \leq \varepsilon$.

Nach eventueller Verkleinerung von $\varepsilon > o$ können wir noch annehmen, daß $\operatorname{supp} T \Subset \{x \in \mathbb{R}^n ;\ \langle x, N + \varepsilon\xi_j\rangle > o,\ j=1,\dots,n\}$.

Definieren wir nun für $j=1,\dots,n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ das offene Winkelgebiet $\Omega_\alpha^j := \{x \in \mathbb{R}^n \; ; \; \langle x,N\rangle > 0 \, , \; \langle x, N+\varepsilon\xi_j\rangle > \alpha\}$, dann ist Ω_α^j $\check{S}$-rund und für $\alpha \leq \beta$ ist $\Omega_\beta^j \subset \Omega_\alpha^j$ und diejenigen Hyperebenen, die Ω_α^j aber nicht Ω_β^j treffen, haben als Normalenvektor einen Vektor der Form $\tau N + \sigma(N+\varepsilon\xi_j) = (\tau+\sigma)N + \sigma\varepsilon\xi_j$ mit $\tau \geq 0, \sigma > 0$. Nach Wahl von ξ_j und ε sind diese Vektoren nichtcharakteristisch für $\check{S}$ (vgl. Satz 1.9.).

Sei nun $K \Subset \mathbb{R}^n$ vorgegeben. Wir wählen $\alpha \geq 0$ so groß, daß $(\Omega_\alpha^j)^{\check{S}} \cap \overline{K} = \emptyset$ für alle $j=1,\dots,n$. Ist jetzt $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{int} H_+ \cap \operatorname{supp} \check{S} * \varphi \subset K$ gegeben, so ist $\check{S} * \varphi = 0$ in $(\Omega_\alpha^j)^{\check{S}}$ und $\varphi = 0$ in Ω_β^j für ein $\beta = \beta(\varphi) \geq \alpha$. Mit Theorem 1.8. folgt dann, daß $\varphi = 0$ in Ω_α^j. Die Menge

$$K' := \bigcap_{j=1}^{n} \Omega_\alpha^j = \{x \in \mathbb{R}^n \; ; \; \langle x,N\rangle \geq 0, \; \langle x, N+\varepsilon\xi_j\rangle \leq \alpha \text{ für } j=1,\dots,n\}$$

ist beschränkt, denn da sich jedes $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $\tau_j \geq 0$, $j=0,1,\dots,n$, als $\xi = -\tau_0 N + \sum_{j=1}^{n} \tau_j (N+\varepsilon\cdot\xi_j)$ darstellen läßt, ist K' schwach-beschränkt. Also haben wir zu $K \Subset \mathbb{R}^n$ ein $K' \Subset \mathbb{R}^n$ gefunden mit: $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{int} H_+ \cap \operatorname{supp} \check{S} * \varphi \subset K \implies \operatorname{int} H_+ \cap \operatorname{supp} \varphi \subset K'$. ∎

Zusammen mit Satz 3.3. folgt aus Satz 3.5. das

<u>KOROLLAR 3.6.</u> Sei $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ ein Differential-Differenzen-Op. mit konstanten Koeffizienten mit $0 \in \operatorname{supp} S \subset H_+$.

Dann sind äquivalent:

(i) S ist lokal in H_+ lösbar,

(ii) $S * \mathcal{E}_+ = \mathcal{E}_+$.

4. Das Cauchyproblem für spezielle Klassen von Convolutoren

(a) Hyperbolische Convolutoren

Hyperbolische Convolutoren wurden von Ehrenpreis in [8] eingeführt. Sie sind per definitionem dadurch gekennzeichnet, daß sie eine Fundamentallösung $E \in \mathcal{D}'_+$ mit $\operatorname{supp} E \subset \Gamma$ besitzen, wobei Γ ein Emissionskegel ist, d.h. im zu dualen Kegel ist $N = (0, \dots, 0, 1)$ ein innerer Punkt. Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Hyperbolizität von $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ wurden von Ehrenpreis [8], Kakita [18] und Gårding [10] gefunden.
Wir führen nun Kriterien für die Hyperbolizität an und zeigen, daß hyperbolische Operatoren der durch Satz 2.6. definierten Klasse von Convolutoren angehören.

SATZ 4.1. Sei $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ mit $0 \in \operatorname{supp} S \subset H_+$. Dann sind äquivalent:

(i) S ist hyperbolisch bezüglich H_+,

(ii) Es gibt $F, G \in \mathcal{E}'_+$ mit $S * F = \delta - G$ und $\operatorname{supp} G \Subset \operatorname{int} H_+$,

(iii) Es gibt $a, \delta > 0$ mit

$$|\hat{S}(\xi - i\tau\tilde{N})| \geq a^{-1}(1+|\xi|+\tau)^{-a}$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\tau \geq a \cdot \log(2+|\xi|)$ und $\tilde{N} \in \dot{\mathbb{R}}^n$ mit $|\tilde{N} - N| < \delta$.

Ist S hyperbolisch bezüglich H_+, so erfüllt S die Voraussetzungen von Satz 2.6.

Beweis. Daß (ii) aus (i) folgt, erkennt man sofort, wenn man die Fundamentallösung E mit einer Funktion $\psi \in \mathcal{D}$, $\psi = 1$ in einer Umgebung von 0, zu $F = \psi \cdot E$ abschneidet.
Seien jetzt $F, G \in \mathcal{E}'_+$ mit $S * F = \delta - G$, $\operatorname{supp} G \Subset \operatorname{int} H_+$, gegeben.

Dann gibt es ein $\delta > 0$, so daß für alle $\tilde{N} \in \dot{\mathbb{R}}^n$ mit $|\tilde{N} - N| < \delta$

$$-h_{\operatorname{supp} G}(-\tilde{N}) = \min \{ \langle x, \tilde{N} \rangle \; ; \; x \in \operatorname{supp} G \} \geq 2\alpha > 0.$$

Nach dem Paley-Wiener-Theorem ist dann für $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\tau \geq 0$, $\tilde{N} \in \dot{\mathbb{R}}^n$ mit $|\tilde{N} - N| < \delta$,

$$|\hat{G}(\xi - i\tau\tilde{N})| \leq c\,(1 + |\xi| + \tau)^m \exp(-2\alpha\tau).$$

Für $\tau \geq a \cdot \log(2 + |\xi|)$ ist daher – wenn $a > 0$ groß genug gewählt wird –

$$|\hat{G}(\xi - i\tau\tilde{N})| \leq 1/2 \;, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \; \tilde{N} \in \dot{\mathbb{R}}^n \text{ mit } |\tilde{N} - N| < \delta .$$

Aufgrund des Titchmarsh-Lions-Theorems haben wir auch noch $-h_{\operatorname{supp} F}(-\tilde{N}) \geq 0$; denn wegen $0 \in \operatorname{supp} S$ muß $\operatorname{supp} F \subset \operatorname{ch} \operatorname{supp}(\delta - G)$ sein. Also gilt nach einer Paley-Wiener-Abschätzung von $\hat{F}$

$$\begin{aligned} |\hat{S}(\xi - i\tau\tilde{N})| &= |1 - \hat{G}(\xi - i\tau\tilde{N})| \cdot |\hat{F}(\xi - i\tau\tilde{N})|^{-1} \\ &\geq (2c)^{-1} (1 + |\xi| + \tau)^{-m} \end{aligned}$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\tau \geq a \cdot \log(2 + |\xi|)$, $\tilde{N} \in \dot{\mathbb{R}}^n$ mit $|\tilde{N} - N| < \delta$.

D.h. aus (ii) folgt (iii).

Indem wir ansetzen

$$\langle \check{E}, \varphi \rangle = (2\pi)^{-n} \int_{\Gamma_{\tilde{N}}(t,\cdot)} \frac{\hat{\varphi}(\zeta)}{\hat{S}(\zeta)} \, d\zeta \quad , \; \varphi \in \mathcal{D} \; ,$$

mit $\Gamma_{\tilde{N}}(t, \xi) := \xi - i\,(1+t)\, a \cdot \log(2 + |\xi|^2)\, \tilde{N}$, $(t, \xi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ und $\tilde{N} \in \dot{\mathbb{R}}^n$ mit $|\tilde{N} - N| < \delta$, erhalten wir eine Fundamentallösung $E \in \mathcal{D}'_+$, $S * E = \delta$, mit Träger in einem Emissionskegel. Denn ähnlich wie im Beweis von Satz 2.6. können wir mit Hilfe von Stokes' Theorem die Unabhängigkeit der Integrale von t und $\tilde{N}$ beweisen. Wie im Beweis von Satz 2.6. können wir dann weiter schließen, indem wir $t \longrightarrow +\infty$ lassen, daß

$$\operatorname{supp} E \subset \{ x \in \mathbb{R}^n \; ; \; \langle x, \tilde{N} \rangle \geq 0 \text{ für alle } \tilde{N} \in \dot{\mathbb{R}}^n \text{ mit } |\tilde{N} - N| < \delta \}.$$

Um unnötige Wiederholungen zu vermeiden, wollen wir die Details nicht weiter ausführen. Damit ist "(iii) $\Longrightarrow$(i)" gezeigt.
Ist S hyperbolisch, so erfüllt S die Voraussetzungen von Satz 2.4. ; also folgt hiermit die in Satz 2.6. vorausgesetzte Langsam-Fallend-Eigenschaft von $\hat{S}$. Nach dem Paley-Wiener-Theorem erhalten wir noch einmal für $\hat{G}$

$$|\hat{G}(\zeta)| \leq (2+|\zeta|)^{\mu}\cdot\exp(\delta\cdot\operatorname{Im}\zeta_n + A\,|\operatorname{Im}\zeta'|),\quad \zeta\in\mathbb{C}^n,\ \operatorname{Im}\zeta_n \leq o,$$

mit gewissen Konstanten μ, A > o. Also gibt es ein b > o, so daß $|\hat{G}(\zeta)| < 1$, und wegen $\hat{S}(\zeta)\,\hat{F}(\zeta) = 1-\hat{G}(\zeta)$ ist daher auch $\hat{S}(\zeta) \neq o$, für alle $\zeta\in\mathbb{C}^n$ mit

$$-\operatorname{Im}\zeta_n > b|\operatorname{Im}\zeta'| + b\cdot\log(2+|\zeta|).$$

Setzen wir für ein $t_o > o$

$$\Gamma(t,\xi) := \xi - i\,(t+t_o)\cdot\log(2+|\xi|^2)\cdot N,\quad (t,\xi)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n,$$

so ist für ein c > o

$$d(\Gamma(t,\xi),\mathcal{N}(\hat{S})) > c^{-1}\cdot\log(2+|\Gamma(t,\xi)|),\quad (t,\xi)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n,$$

wenn man t_o groß genug gewählt hat.
Γ erfüllt daher die in Satz 2.6. aufgeführten Voraussetzungen. Folglich gehört ein hyperbolischer Convolutor S zu der in Satz 2.6. charakterisierten Klasse von Convolutoren. ■

Bemerkungen:

(i) Ehrenpreis [8] hat die folgende notwendige und hinreichende Bedingung für die Hyperbolizität eines Convolutors $S\in\mathcal{E}'$ angegeben:

$\hat{S}$ ist langsam fallend (d.h. S ist $\mathcal{D}'$-invertierbar),

$$\mathcal{N}(\hat{S}) \subset \{\zeta=(\zeta',\zeta_n)\in\mathbb{C}^n\,;\ -\operatorname{Im}\zeta_n \leq b|\operatorname{Im}\zeta'| + b\cdot\log(2+|\zeta|)\}$$

für ein b > o.

Siehe auch: Chou [5], pp. 50, Théorème d'Ehrenpreis.

(ii) Ist S hyperbolisch bzgl. H_+, dann ist $S * \mathcal{E}_+ = \mathcal{E}_+$ und $S * \mathcal{D}'_+ = \mathcal{D}'_+$; denn man kann die Fundamentallösung E in diesem Fall mit allen Distributionen aus $\mathcal{D}'_+$ falten.

(iii) Beispiele für hyperbolische Convolutoren sind nach Satz 4.1. die Convolutoren $S = P(D)\delta + T$, P(D) ein hyperbolischer Differentialoperator (vgl. Hörmander [12], pp. 13o) und $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp} T \Subset \operatorname{int} H_+$. Damit Operatoren dieser Gestalt hyperbolisch sind, muß P(D) notwendigerweise auch hyperbolisch sein (Satz 4.1.).

(iv) Ist $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ mit $o \in \operatorname{supp} S \subset H_+$ hyperbolisch, so erkennt man mit Hilfe der Titchmarsh-Lions-Gleichung aus der in Satz 4.1. auftretenden Gleichung $S * F = \delta - G$, daß $\operatorname{supp} S \cap \partial H_+ = \operatorname{supp} F \cap \partial H_+ = \{o\}$.

(b) Parabolische Convolutoren

Ein Convolutor $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ mit $o \in \operatorname{supp} S \subset H_+$ heißt parabolisch, wenn er hypoelliptisch ist und eine Fundamentallösung $E \in \mathcal{D}'_+$, $S * E = \delta$, besitzt.

Für die Eigenschaften hypoelliptischer Convolutoren verweisen wir auf Ehrenpreis [7] und Hörmander [14]. Dort ist gezeigt, daß S genau dann hypoelliptisch ist, wenn es Konstanten B_1 und M_1 gibt, so daß

$$|\hat{S}(\xi)| \geq |\xi|^{-B_1} \quad , \quad |\xi| \geq M_1 \ , \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

und $|\operatorname{Im} \zeta| / \log|\zeta| \longrightarrow \infty$ falls $\zeta \longrightarrow \infty$ in $\mathbb{C}^n$, $\hat{S}(\zeta) = o$.

Aus (iv) im folgenden Satz entnehmen wir, daß die in Satz 2.6. angegebene Klasse von Convolutoren auch die parabolischen umfaßt. In der Tat beweisen wir "(iv) $\Longrightarrow$ (i)" mit Satz 2.6.

<u>SATZ 4.2.</u> Für einen hypoelliptischen Convolutor $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ sind äquivalent:

(i) S ist parabolisch,

(ii) Es gibt $F \in \mathcal{E}'_+$, $G \in \mathcal{D}_+$ mit $S * F = \delta - G$.

(iii) Es gibt Konstanten $a > 0$, $\tau_0 > 0$, so daß

$$|\hat{S}(\xi - i\tau N)| \geq a^{-1}(1+|\xi|+\tau)^{-a} \quad , \; \xi \in \mathbb{R}^n, \; \tau \geq \tau_0 .$$

(iv) Für ein $b > 0$ und jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $a > 0$, so daß für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\tau \leq 0$

$$\sup\{|\hat{S}(\eta + \xi + i\tau N)| ; \; \eta \in \mathbb{R}^n, |\eta| \leq b \cdot \log(2+|\xi|+|\tau|)\} > e^{\varepsilon\tau}(1+|\xi|)^{-a}.$$

Und es gibt Konstanten $c, d > 0$, so daß $\hat{S}(\zeta) \neq 0$ für alle $\zeta \in \mathbb{C}^n$ mit $|\zeta| \geq c$, $\operatorname{Im} \zeta_n \leq d \cdot \log(2+|\zeta|)$ und $|\operatorname{Im} \zeta'| \leq d \cdot \log(2+|\zeta|)$.

<u>Beweis.</u> Sei $E \in \mathcal{D}'_+$ mit $S * E = \delta$. Da S hypoelliptisch ist, ist E außerhalb eines Kompaktums eine C^∞-Funktion. Indem man E mit einer Funktion $\psi \in \mathcal{D}$, welche $= 1$ in einer Umgebung dieses Kompaktums ist, abschneidet, erhält man $F = \psi \cdot E \in \mathcal{E}'_+$ und $G \in \mathcal{D}_+$ mit $S * F = \delta - G$. Also folgt (ii) aus (i).

Seien nun $F \in \mathcal{E}'_+$, $G \in \mathcal{D}_+$ mit $S * F = \delta - G$ gegeben. Anwendung des Paley-Wiener-Theorems auf $\hat{G}$ liefert für $c_m, A > 0$, $m \in \mathbb{N}$, die Abschätzung

$$|\hat{G}(\zeta)| \leq c_m (1+|\zeta|)^{-m+dA} \exp(A\,|\operatorname{Im}\zeta'|), \; \zeta \in \mathbb{C}^n, \; \operatorname{Im} \zeta_n \leq d \cdot \log(2+|\zeta|).$$

Wählt man zu $d > 0$ ein $m > 2dA$, so findet man ein $c > 0$, so daß $|\hat{G}(\zeta)| \leq 1/2$ für alle $\zeta \in \mathbb{C}^n$ mit $|\zeta| \geq c$, $|\operatorname{Im}\zeta'| \leq d \cdot \log(2+|\zeta|)$, $\operatorname{Im} \zeta_n \leq d \cdot \log(2+|\zeta|)$. Für diese ζ ist dann

$$|\hat{S}(\zeta)| = |(1-\hat{G}(\zeta))|\,|\hat{F}(\zeta)|^{-1} \geq (2|\hat{F}(\zeta)|)^{-1} \quad ,$$

also insbesondere $\hat{S}(\zeta) \neq 0$. Zusammen mit der Paley-Wiener-Abschätzung von $\hat{F}$ erhalten wir hieraus Konstanten $c, \mu > 0$ mit

$c^{-1}(1+|\xi|+\tau)^{-\mu} \leq |\hat{S}(\xi - i\tau N)|$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\tau \geq 0$, $|\xi|+\tau \geq c$.

Also folgen (iii) und (iv) aus (ii).

Aus (iii) folgt (i), denn durch

$$\langle \check{E}, \varphi \rangle = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\hat{\varphi}}{\hat{S}}(\xi - i\tau N)\, d\xi\,, \quad \varphi \in \mathcal{D}, \quad \tau > c\,,$$

wird eine Distribution $E \in \mathcal{D}'_+$ mit $S * E = \delta$ konstruiert.

Der Beweis ist dergleiche wie derjenige von Satz 2.6., mit der Vereinfachung, daß es zum Beweis der Unabhängigkeit des Integrales von τ genügt, den Cauchyschen Integralsatz statt des Stokes'schen Satzes zu benutzen.

Wir definieren für ein festes $t_0 > 0$

$$\Gamma(t,\xi) := \xi - i(t+t_0)N\,, \quad (t,\xi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n\,.$$

Wenn wir $t_0 > 0$ so wählen können, daß für ein $c > 0$ und alle $t \geq 0$, $\xi \in \mathbb{R}^n$: $d(\Gamma(t,\xi), \mathcal{N}(\hat{S})) > c \cdot \log(2+|\Gamma(t,\xi)|)$, dann folgt (i) aus (iv) mittels Satz 2.6. Nach Voraussetzung von (iv) gilt: Es gibt $c, d > 0$, so daß $\hat{S}(\zeta) \neq 0$ für alle $\zeta \in \mathbb{C}^n$ mit $|\zeta| \geq c$, $|\mathrm{Im}\,\zeta'| \leq d \log(2+|\zeta|)$, $\mathrm{Im}\,\zeta_n \leq d \log(2+|\zeta|)$.

Zu $(t,\xi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ sei $\zeta \in \mathbb{C}^n$ mit $|\zeta| \leq d \cdot \log(2+|\zeta + \Gamma(t,\xi)|)$ gegeben. Dann ist $|\mathrm{Im}(\zeta + \Gamma(t,\xi))'| \leq d \cdot \log(2+|\zeta + \Gamma(t,\xi)|)$.

Wegen

$$t_0 \leq |\Gamma(t,\xi)| \leq |\zeta + \Gamma(t,\xi)| + |\zeta| \leq |\zeta + \Gamma(t,\xi)| + d \cdot \log(2+|\zeta + \Gamma(t,\xi)|)$$
$$\leq d + (1+d)|\zeta + \Gamma(t,\xi)|\,,$$

ist $|\zeta + \Gamma(t,\xi)| \geq \max(c, d)$, wenn t_0 groß genug ist.

Da $\log(2+|\Gamma(t,\xi)|) \leq \log(1+d) + \log(2+|\zeta + \Gamma(t,\xi)|)$, gilt für alle $\zeta \in \mathbb{C}^n$ mit $|\zeta| \leq (d/2)\log(2+|\Gamma(t,\xi)|)$ schon die Ungleichung $|\zeta| \leq d \cdot \log(2+|\Gamma(t,\xi) + \zeta|)$ und daher nach Obigem

$\hat{S}(\zeta + \Gamma(t,\xi)) \neq 0$. Wählt man daher $t_0 > 0$ wie oben angegeben, dann ist $d(\Gamma(t,\xi), \mathcal{N}(\hat{S})) \geq (d/2)\cdot\log(2+|\Gamma(t,\xi)|)$. ■

Beispiele für parabolische Convolutoren sind nach Satz 4.2. durch

$$S = P(D)\delta + \varphi \quad ,$$

mit P(D) ein parabolischer Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten (vgl. Hörmander [12], pp. 151) und $\varphi \in \mathcal{D}_+$, gegeben.

(c) Convolutoren in $\mathbb{R}^1$

Ist ein Convolutor $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ mit $0 \in \operatorname{supp} S \subset \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R}\,;\, x \geq 0\}$ lokal in $\mathbb{R}_+$ lösbar, dann gibt es nach den Sätzen 2.2. und 2.3. $F, G \in \mathcal{E}'_+(\mathbb{R})$ mit $S * F = \delta - G$ und $\operatorname{supp} G \subset \{x \in \mathbb{R}\,;\, x \geq 1\}$.
Nach Satz 4.1. ist ein lokal in $\mathbb{R}_+$ lösbarer Convolutor folglich schon hyperbolisch, und als notwendige und hinreichende Bedingung für die lokale Lösbarkeit erhalten wir (Satz 4.1.(iii))

$$|\hat{S}(\zeta)| \geq c^{-1}(1+|\zeta|)^{-\mu}$$

für alle $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im}\zeta \leq -c\log(2+|\zeta|)$; $c, \mu > 0$ fest.
Die (eindeutige !) Fundamentallösung $E \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ wird für genügend große τ gegeben durch

$$\langle \check{E}, \varphi \rangle = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{\varphi}}{\hat{S}}(\xi - i\tau\log(2+\xi^2))\, d(\xi - i\tau\log(2+\xi^2)),$$

für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.
Da wir E mit jedem $f \in \mathcal{D}'_+$ falten können, impliziert die lokale Lösbarkeit schon $S * \mathcal{E}_+ = \mathcal{E}_+$ und $S * \mathcal{D}'_+ = \mathcal{D}'_+$.

(d) Differential - Differenzen - Operatoren mit konstanten Koeffizienten

Hörmander hat in [17] genau diejenigen Differentialoperatoren $P(D)$ mit konstanten Koeffizienten durch die Nullstellen von P charakterisiert, die lokal in H_+ lösbar sind. Er nennt sie Evolutionsoperatoren. Für diese gilt nicht nur die lokale, sondern auch die globale Lösbarkeit $P(D)\,\mathcal{E}_+ = \mathcal{E}_+$ und $P(D)\,\mathcal{D}'_{F_+} = \mathcal{D}'_{F_+}$. In Korollar 3.6. sahen wir bereits, daß die lokale Lösbarkeit in H_+ auch für Differential - Differenzen - Operatoren S schon die globale Lösbarkeit $S * \mathcal{E}_+ = \mathcal{E}_+$ nach sich zog.

Ein Kriterium für die lokale Lösbarkeit von S in H_+, ausgedrückt durch die Fouriertransformierte $\hat{S}$, haben wir nicht gefunden. Die in Satz 2.4. hergeleitete Langsam-Fallend-Abschätzung, die ja für die lokale Lösbarkeit notwendig war, ist schon für alle Differential - Differenzen - Operatoren mit $o \in \operatorname{supp} S \subset H_+$ erfüllt, denn nach Grudzinski [11] (Thm. 8) gilt für ein $c > o$

$$\sup \left\{ |\hat{S}(z+y)|\,;\ y \in \mathbb{R}^n,\ |y| \leq 1 \right\} \geq c \cdot \exp(h_{\operatorname{supp} S}(\operatorname{Im} z)),\quad z \in \mathbb{C}^n.$$

Hinreichende Bedingungen für die lokale Lösbarkeit dagegen hatten wir in Satz 2.6. gefunden.

Aus den Bemerkungen (iii) und (iv) im Anschluß an Satz 4.1. ersehen wir: Ein Differential - Differenzen - Operator $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ mit konstanten Koeffizienten, $o \in \operatorname{supp} S \subset H_+$, ist genau dann hyperbolisch bzgl. H_+, wenn er die Gestalt $S = P(D)\,\delta + T$ mit einem hyperbolischen Differentialoperator $P(D)$ und $T \in \mathcal{E}'$ mit $\operatorname{supp} T \in \operatorname{int} H_+$ hat. Insbesondere sind alle Differential - Differenzen - Operatoren $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^1)$ hyperbolisch ($o \in \operatorname{supp} S \subset \mathbb{R}_+$).

Literaturverzeichnis

[1] Berenstein, C., und Dostal, M.: On Convolution Equations I. in Lecture Notes in Mathematics No. 336, Berlin-Heidelberg-New York, Springer 1972, 79 - 94

[2] Berenstein, C., und Dostal, M.: On Convolution Equations II. in "Analyse Fonctionelle", Act. Sci. et Industr., Hermann et Cie, 1974, 9 - 2o

[3] Bochner, S.: Lectures on Fourier Integrals. Ann. of Math. Studies No. 42, Princeton, 1959

[4] Bourbaki, N.: Espaces vectoriels topologiques, Chap. III - V. Hermann, Paris 1955

[5] Chou, C.-C.: La Transformation de Fourier Complexe et L'Equation de Convolution. Lecture Notes in Mathematics No. 325, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1973

[6] Courant, R., und Hilbert, D.: Methoden der mathematischen Physik I. Heidelberger Taschenbücher 3o, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1968, 3. Aufl.

[7] Ehrenpreis, L.: Solutions of some problems of division IV. Am. J. Math. 82 (196o), 522 - 588

[8] Ehrenpreis, L.: Solutions of some problems of division V. Am. J. Math. 84 (1962), 324 - 348

[9] Ehrenpreis, L.: Fourier Analysis in Several Complex Variables. Wiley - Interscience, New York 197o

[1o] Gårding, L.: Reviewers Remark. Math. Reviews 31, No. 3722 (1966)

[11] Grudzinski, O. v.: Einige elementare Ungleichungen für
Exponentialpolynome.
Math. Annalen 221 (1976), 9 - 34

[12] Hörmander, L.: Linear Partial Differential Operators.
Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1969,
3. Aufl.

[13] Hörmander, L.: An Introduction to Complex Analysis in
Several Variables.
North Holland - Elsevier, Amsterdam-London 1973

[14] Hörmander, L.: Hypoelliptic Convolution Equations.
Math. Scand. 9 (1961), 178 - 184

[15] Hörmander, L.: On the Range of Convolution Operators.
Ann. of Math. 76 (1), (1962), 148 - 170

[16] Hörmander, L.: Supports and Singular Supports of
Convolutions.
Acta. Math. 110 (1965), 279 - 302

[17] Hörmander, L.: On the characteristic Cauchy Problem.
Ann. of Math. 88(2), (1968), 341 - 370

[18] Kakita, T.: Hyperbolic Convolution Operators.
Canad. J. Math. 17 (1965), 559 - 582

[19] Malgrange, B.: Existence et approximation des solutions
des équations aux dérivées partielles et des
équations de convolution.
Ann. Inst. Fourier Grenoble 6 (1955 - 56), 271 - 355

[20] Schwartz, L.: Théorie des distributions.
Hermann, Paris 1950

[21] Watson, G. N.: A Treatise on the Theory of Bessel Functions.
Cambridge University Press 1966

Lebenslauf

Am 2o. Juli 1949 wurde ich, Sönke Hansen, als Sohn des Malermeisters Alfred Hansen und seiner Ehefrau Olga, geb. Hoff, in Jübek, Kreis Schleswig, geboren. Ich besitze die deutsche Staatsangehörigkeit.

Von 1956 - 6o besuchte ich die Grundschule in Jübek und anschließend von 196o - 64 die Realschule in Schleswig. Im Frühjahr 1964 wechselte ich zur Domschule, dem Gymnasium in Schleswig, über, wo ich im Juni 1968 die Reifeprüfung ablegte. Nach Beendigung der Wehrdienstzeit im Oktober 1969 begann ich im Wintersemester 1969/7o mein Studium der Mathematik und der Physik an der Universität Kiel. Hier legte ich im Wintersemester 1971/72 die Vordiplom- und im Wintersemester 1974/75 die Diplomprüfungen in Mathematik und dem Nebenfach Physik ab. Seit April 1975 erhalte ich ein Promotionsstipendium.

Meine mathematische Ausbildung förderten besonders die Herren Prof. Deimling, Prof. Floret, Doz. Dr. Wolff und Prof. Wloka.