Das Fundamentalprinzip für Systeme linearer partieller Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Sönke Hansen

Paderborn

Dezember 1982

INHALTSVERZEICHNIS

Einführung 1

Kapitel 1: Noethersche Operatoren zu Polynommoduln 9

1.1 Noethersche Operatoren 9

1.2 Taylorentwicklung bezüglich einer irreduziblen algebraischen Varietät 13

1.3 Existenz Noetherscher Operatoren zu Untermoduln von $\mathbb{C}[z]^K$ 17

1.4 Primäre und normale Noethersche Operatoren 22

1.5 Einige Beispiele 30

Anmerkungen 35

Kapitel 2: Semilokale Division und Interpolation 37

2.1 Der Vorbereitungssatz 38

2.2 Der Noethersche Operator $(Q,\mathbb{C}^n)$ 42

2.3 Der Noethersche Operator $(\partial^{\alpha}_{z''},V), |\alpha| \leq s$ 50

2.4 Cauchyabschätzungen für tangentiale Differentialoperatoren 58

2.5 Semilokale Division 61

2.6 Semilokale Interpolation 65

Anmerkungen 69

Kapitel 3: Globale Division und Interpolation 70

3.1 Überdeckungen 70

3.2 $\bar{\partial}$-Kohomologie mit Gewichten 75

3.3 Globale Division und Interpolation 79

Anmerkungen 86

Kapitel 4: Differentialoperatoren auf LAU-Räumen 87

4.1 LAU-Strukturen und LAU-Räume 87

4.2 Die LAU-Räume $\mathcal{E}_\omega(X)$ und $\mathcal{A}(\Omega)$ 91

4.3 Der LAU-Raum $\mathcal{D}'_\omega(X)$ 1o2

4.4 Das Fundamentalprinzip und der Integraldarstellungssatz 114

4.5 Elliptische und hypoelliptische Differentialoperatoren 12o

Anmerkungen 126

Literaturverzeichnis 129

Bezeichnungen 132

Sachverzeichnis 135

EINFÜHRUNG

Die allgemeine Lösung einer homogenen linearen gewöhnlichen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten $P(d/dx)u = o$ hat bekanntlich die Gestalt

$$u(x) = \sum_{P(z)=o} e^{zx} A_z(x) \quad , \; x \in \mathbb{R},$$

wobei jedes A_z ein Polynom in $x \in \mathbb{R}$ ist, dessen Grad echt kleiner als die Vielfachheit der komplexen Nullstelle z des Polynoms P ist. Die natürliche Verallgemeinerung dieses Darstellungssatzes auf Systeme linearer partieller Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten wurde erst um 196o von L. Ehrenpreis [8] entdeckt: Zur Fourierdarstellung einer Lösung des homogenen Gleichungssystems benötigt man nur jene (komplexen) Frequenzen, die in der Nullstellenvarietät des zur Differentialgleichung gehörigen Symbols liegen. Dies ist Ehrenpreis' Fundamentalprinzip. Es ist ein ungleich tieferes Ergebnis als sein Spezialfall für gewöhnliche Differentialgleichungen. Ein Beweis des Fundamentalprinzips wurde von L. Ehrenpreis in [8] skizziert. Detaillierte Beweise wurden einige Jahre später gegeben von L. Ehrenpreis [9] und von V.P. Palamodov [2o]. In einer schwächeren Form wurde es von B. Malgrange [18] gezeigt. Wesentliche Teile des Beweises des Fundamentalprinzips vereinfachte L. Hörmander in [15] mit Hilfe seiner Lösung der Cauchy-Riemannschen Gleichungen.

Es ist das Ziel der vorliegenden Arbeit, eine Version des Fundamentalprinzips zu formulieren, welche vollständiger ist als die von Ehrenpreis und die von Palamadov gegebene, und diese zu beweisen. Um das Ergebnis vorstellen zu können und es zu erläutern, ist es hilfreich, zunächst einige Eigenschaften der Exponentialpolynomlösungen der zu betrachtenden Gleichungssysteme aufzuzeigen. Dazu sei $P = (P_{lk})$ eine $L \times K$-Matrix von Polynomen P_{lk} in n komplexen Veränderlichen. Betrachte den zu P assoziierten Differentialoperator $P(\partial/\partial x)$, der $\mathcal{E}^K$ in $\mathcal{E}^L$ abbildet, $\mathcal{E} = C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Für jedes $z \in \mathbb{C}^n$ und jedes $A = (A_1,..,A_K) \in \mathbb{C}[x]^K$ hat man

$$\sum_{k=1}^{K} P_{lk}(\partial/\partial x)e^{zx}A_k(x) = \sum_{k=1}^{K} A_k(\partial/\partial z)e^{zx}P_{lk}(z)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $l = 1,...,L$. (z ist ein zu x dualer Vektor). Daher gilt

$$P(\partial/\partial x)e^{zx}A(x) = o \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n$$

genau dann, wenn

$$A(\partial/\partial z)\ {}^tP(z)f(z) = o \qquad \text{für alle } f \in \mathbb{C}[z]^L.$$

Ist $z \in \mathbb{C}^n$ gegeben, so gibt es zu diesem Gleichungssystem genau dann eine nichttriviale Lösung A, wenn z ein Element der algebraischen Varietät

$$V(P(\partial/\partial x)) = \{z \in \mathbb{C}^n;\ \text{Rang}\ {}^tP(z) < K\}$$

ist (siehe (1.3)). Eine für die Integraldarstellung der allgemeinen Lösung von $P(\partial/\partial x)u = o$ ausreichende Teilmenge der Menge aller Exponentialpolynomlösungen $u(x) = A(\partial/\partial z)e^{zx} = e^{zx}A(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, dieser Gleichung erhält man durch Vorgabe eines zu

$P(\partial/\partial x)$ gehörigen Noetherschen Operators. Dies ist eine endliche Menge $\mathcal{N}$ von Paaren (A,V), $A = A(z,\partial/\partial z)$ ein Differentialoperator mit Polynomkoeffizienten, $V \subset V(P(\partial/\partial x))$ eine algebraische Varietät, welche $f \in \mathbb{C}[z]^K$ nach der Vorschrift

$$f \mapsto (Af|V)_{(A,V)\in\mathcal{N}}$$

abbildet und mit $P(\partial/\partial x)$ durch

$$(*) \qquad {}^tP\ \mathbb{C}[z]^L = \text{Kern}\ \mathcal{N}$$

verknüpft ist (vergleiche (1.2) mit $M = {}^tP\ \mathbb{C}[z]^L$).
Solch ein $\mathcal{N}$ gibt es immer (siehe (1.1o)). Ist (A,V) Element eines zu $P(\partial/\partial x)$ gehörigen Noetherschen Operators, und ist $d\mu$ ein Radonmaß auf V, so ist

$$u(x) = \int_V e^{zx} A(z,x)d\mu(z) \quad , \ x \in \mathbb{R}^n,$$

auch eine Lösung von $P(\partial/\partial x)u = o$, falls dies Integral in $\mathcal{E}^K$ konvergiert. Ehrenpreis folgend, garantiert man die absolute Konvergenz solcher Integrale durch eine Wachstumsbedingung an $|d\mu|$, welche durch die analytisch-uniforme Struktur $\mathcal{K}$ von $\mathcal{E}'$ gegeben wird. $\mathcal{K}$ ist eine (über den Satz von Paley-Wiener für $\mathcal{E}'$ gewonnene) Familie positiver, stetiger Funktionen auf $\mathbb{C}^n$.

INTEGRALDARSTELLUNGSSATZ oder FUNDAMENTALPRINZIP:

Ist $\mathcal{N}$ ein zu $P(\partial/\partial x)$ gehöriger Noetherscher Operator, so löst $u \in \mathcal{E}^K$ die Gleichung $P(\partial/\partial x)u = o$ genau dann, wenn gilt

$$u(x) = \sum_{(A,V)\in\mathcal{N}} \int_V A(z,\partial/\partial z)e^{zx}\, d\mu_{(A,V)}(z), \ x \in \mathbb{R}^n,$$

mit Radonmaßen $d\mu_{(A,V)}$ auf V, die für ein $\Phi \in \mathcal{K}$ die Abschätzung $\int_V \Phi|d\mu_{(A,V)}| < +\infty$ erfüllen.

Dieses Ergebnis wird in Kapitel 4 nicht nur für $\mathcal{E}$, sondern allgemeiner für lokalisierbare analytisch-uniforme Räume (LAU-Räume) bewiesen. (Wegen der Benutzung der Fouriertransformation werden in Kapitel 4 andere Bezeichnungen - insbesondere $D = -\sqrt{-1}\ \partial/\partial x$ an Stelle von $\partial/\partial x$ - verwendet.) Gegenüber anderen Darstellungen des Fundamentalprinzips enthält die hier gegebene die folgenden Verbesserungen. Erstens, die Noetherschen Operatoren mit denen es gilt, erhalten hier eine einfache algebraische Charakterisierung (im wesentlichen (*)), welche im Grunde optimal ist. Zweitens, durch eine neue Definition der Lokalisierbarkeit (siehe (4.1.ii)) analytisch-uniformen Strukturen werden Hörmanders Ergebnisse zum Verschwinden der Kohomologie mit Gewichten auf natürliche Weise in Ehrenpreis' Zugang zur Fourier Analysis integriert.

Im Mittelpunkt des Beweises des Fundamentalprinzips steht eine Untersuchung des Verhaltens eines zu $P(\partial/\partial x)$ gehörigen Noetherschen Operators $\mathcal{N}$ auf Räumen ganzer Funktionen mit Wachstumsbeschränkungen. Der globale Divisionssatz (siehe (3.11)) erweitert die Gültigkeit von (*) von Polynomen auf $\mathbb{C}^k$-wertige ganze Funktionen f: Es ist $f \in \text{Kern}\,\mathcal{N}$ genau dann wenn $f = {}^tPh$ für eine $\mathbb{C}^L$-wertige ganze Funktione h. Das Wachstum von $|h|$ auf $\mathbb{C}^n$ kann zudem durch das Wachstum von $|f|$ beschränkt werden. Der globale Interpolationssatz (siehe (3.12)) ermöglicht es, zu jedem Element $(Af|V)_{(A,V)\in\mathcal{N}}$ des Bildes von $\mathcal{N}$ ein Urbild unter $\mathcal{N}$ zu finden, dessen Wachstum auf $\mathbb{C}^n$ durch das Wachstum der Af auf V beschränkt wird. Die Wachstumsbedingungen werden durch logarithmisch-plurisubharmonische Gewichtsfunktionen gegeben.

Der globale Divisionssatz und der globale Interpolationssatz folgen aus ihren (semi-)lokalen Analoga (siehe (2.28) und (2.31)) und aus dem Verschwinden der ersten Cechschen Kohomologiegruppen mit Koeffizienten in der Kerngarbe bzw. in der Bildgarbe des durch ${}^{t}P$ definierten Homomorphismus. Die semilokalen Ergebnisse für allgemeine Noethersche Operatoren lassen sich zurückführen auf die für zwei spezielle Typen Noetherscher Operatoren, nämlich den Polynomrelationen auf $\mathbb{C}^n$ und den Restriktionen auf (irreduzible) algebraische Varietäten. Für diese beweist man die semilokalen Divisionssätze praktisch genauso wie die Kohärenzsätze von Oka und von Cartan. Verkürzt gesagt gelingt die Reduktion der semilokalen Sätze für allgemeine Noethersche Operatoren auf diese Spezialfälle durch folgende Vorgehensweise. Ein allgemeiner Noetherscher Operator ist äquivalent zu einer Vereinigung sogenannter normaler Noetherscher Operatoren (siehe (1.28)). Ist $\mathcal{N}$ ein normaler Noetherscher Operator bezüglich einer irreduziblen algebraischen Varietät $V \subset \mathbb{C}^n$ und ist f eine auf einer Kugel definierte holomorphe $\mathbb{C}^k$-wertige Funktion, so interpoliert man (nach Hermite-Lagrange) f auf V (bis zu genügend hoher Ordnung) durch eine holomorphe Funktion g, welche ein Polynom in den zu V transversalen Variablen z" ist $(z = (z',z'') \in \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{n-k})$. Die Operation von $\mathcal{N}$ auf g ist dann auf den Koeffizienten von g durch die Multiplikation mit einer Polynommatrix $\mathcal{N}'$ gegeben (vergleiche (1.25)).

$\mathcal{A}_{\mathcal{K}}$ ist der lokalkonvexe Raum aller ganzen Funktionen f, welche im Unendlichen o(Φ) sind für alle $\Phi \in \mathcal{K}$. Aus dem globalen Divisionssatz und dem globalen Interpolationssatz erhält man eine geometrische Beschreibung des Quotientenraumes $\mathcal{A}_{\mathcal{K}}^K/\overline{{}^tP\mathcal{A}_{\mathcal{K}}^L}$. Dieser wird durch $\mathcal{N}$ linear und homöomorph abgebildet auf einen Unterraum eines Raumes stetiger Funktionen, welche auf den zu $\mathcal{N}$ gehörigen Varietäten definiert sind (siehe (4.29)). Wesentlich hierfür ist die Lokalierbarkeit von $\mathcal{K}$ - eine Verträglichkeit von $\mathcal{K}$ mit der Familie aller logarithmisch-plurisubharmonischen Funktionen auf $\mathbb{C}^n$. Die Laplace- (oder Fourier-) Transformation bildet $\mathcal{E}'$ linear und homöomorph auf $\mathcal{A}_{\mathcal{K}}$ ab. Unter dieser Abbildung entsprechen den linearen stetigen Funktionalen auf $\mathcal{A}_{\mathcal{K}}^K/\overline{{}^tP\mathcal{A}_{\mathcal{K}}^L}$ genau die Lösungen von $P(\partial/\partial x)u = o$. Die behauptete Integraldarstellung dieser ist dann eine Konsequenz der Rieszschen Darstellungssatzes.

Diese Arbeit ist aufgeteilt in vier Kapitel - ein algebraisches, zwei funktionentheoretische (lokale und globale Theorie), und ein distributionentheoretisches. Jedem Kapitel folgen Anmerkungen. In diesen werden vor allem Literaturhinweise gegeben. Die hier gegebene Übersicht über die Literatur ist jedoch keineswegs vollständig.

Die Darstellung ist so gehalten, daß man zu ihrem Verständnis aus den beteiligten mathematischen Disziplinen im Grunde nur Ergebnisse und Methoden kennen muß, die schon seit langem in der jeweiligen Lehrbuchliteratur vorhanden sind. So wird im algebraisch-geometrischen Teil die Kenntnis einiger grundsätzlicher Tatsachen über den Polynomring $\mathbb{C}[z]$ - über seine Ideale und den zu ihnen gehörigen Varietäten - vorausgesetzt. Insbesondere wird häufig, ohne es explizit zu sagen, der Hilbertsche Basissatz über die endliche Erzeugtheit der Ideale in $\mathbb{C}[z]$ (und der Untermoduln von $\mathbb{C}[z]^K$) benutzt. Aus der Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher werden Ideen und Methoden der Theorie kohärenter Garben von Oka und Cartan, Hörmanders Lösung der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen und einige Tatsachen über plurisubharmonische Funktionen benutzt. Des weiteren wird die Kenntnis der Schwartzschen Distributionentheorie vorausgesetzt, insbesondere die des Satzes von Paley-Wiener-Schwartz. Allgemeiner werden in dieser Arbeit Beurlingsche Ultradistributionen studiert. Dieses bringt keine zusätzliche Schwierigkeiten mit sich, wenn man akzeptiert, daß für diese ähnliche Sätze gelten wie für Schwartzsche Distributionen. Wegen der hier betrachteten Räume werden funktional-analytische Kenntnisse über Fréchet-, (DF)- und (LF)-Räume vorausgesetzt.

Die hier gegebene Darstellung des Fundamentalprinzips ist in einigen Einzelheiten neu. In seiner Hauptaussage und in seiner Beweisstruktur folge ich aber dem von L. Ehrenpreis [8], [9] und von V.I. Palamadov [2o] gegebenen Vorbild. Die "cohomology with bounds" von L. Hörmander [15] habe ich ohne große Veränderungen übernommen. Während meiner Beschäftigung mit dem Fundamentalprinzip lernte ich die Arbeiten von J.-E. Björk [6], [7] und von O. Liess [17] zu diesem Thema

kennen. Diese halfen mir sehr, das Fundamentalprinzip besser zu verstehen, und sie haben daher auch die vorliegende Arbeit spürbar beeinflußt.

Auf das Fundamentalprinzip haben mich vor Jahren Dr. O. von Grudzinski und Prof. Dr. J. Wloka (beide in Kiel) aufmerksam gemacht. Einen hilfreichen Hinweis - hier verwendet in Abschnitt 4.2 - verdanke ich Prof. Dr. K. D. Bierstedt.
Herrn Prof. Dr. K. Deimling möchte ich für sein förderndes Interesse an meiner Arbeit herzlich danken.
Frau W. Kropp bin ich dankbar für die Sorgfalt, mit der sie das Manuskript getippt hat.

KAPITEL 1

NOETHERSCHE OPERATOREN ZU POLYNOMMODULN

In diesem Kapitel wird die Theorie Noetherscher Operatoren über dem Polynomring $\mathbb{C}[z]$ entwickelt. Noethersche Operatoren werden in Abschnitt 1.1 eingeführt. Das Hauptergebnis ist der Satz (1.1o), welcher besagt, daß jeder Untermodul von $\mathbb{C}[z]^K$ durch einen zugehörigen Noetherschen Operator beschrieben werden kann. Einige Beispiele hierfür sind im Abschnitt 1.5 ausgearbeitet.
In Vorbereitung zu dem Übergang vom Polynomring $\mathbb{C}[z]$ zum Ring der Keime holomorpher Funktionen $\mathcal{A}_z$, $z \in \mathbb{C}^n$, welcher in quantitativer Form im Kapitel 2 vollzogen wird, werden im Abschnitt 1.4 Primärzerlegungen Noetherscher Operatoren (dual zu Primärzerlegungen von Moduln) und normale Noethersche Operatoren studiert.

1.1 Noethersche Operatoren

Sei $K \in \mathbb{N}$. Sei $A = A(z,\partial/\partial z)$ ein K-tupel von linearen Differentialoperatoren mit Polynomkoeffizienten auf $\mathbb{C}^n$. A bildet den Modul $\mathbb{C}[z]^K$ in offensichtlicher Weise in den Polynomring $\mathbb{C}[z]$ ab. Sei V eine algebraische Untervarietät des $\mathbb{C}^n$. Man nennt

$$I(V) = \{f \in \mathbb{C}[z];\ f|V = o\}$$

das Verschwindungsideal von V. Betrachte die Abbildung

$$(A,V) : \mathbb{C}[z]^K \longrightarrow \mathbb{C}[z]/I(V),$$
$$f \longmapsto Af + I(V).$$

Sei $\mathcal{N}$ eine endliche Familie solcher Abbildungen (A,V). Der Durchschnitt

(1.1) $$\bigcap_{(A,V)\in\mathcal{N}} \text{Kern }(A,V)$$

ist im allgemeinen kein $\mathbb{C}[z]$-Untermodul von $\mathbb{C}[z]^K$. Jedoch, wenn mit (A,V) auch stets die Kommutatoren mit den Koordinaten, $([A,z_1],V),\ldots,([A,z_n],V)$, zu $\mathcal{N}$ gehören, dann ist (1.1) ein $\mathbb{C}[z]$-Modul. In der Tat, man sieht leicht ein, daß unter dieser Bedingung (1.1) abgeschlossen ist unter der Multiplikation mit den Koordinatenfunktionen $z_1,\ldots,z_n$.

(1.2) DEFINITION. Eine endliche Familie $\mathcal{N}$ von Operatoren $(A,V) : \mathbb{C}[z]^K \to \mathbb{C}[z]/I(V)$ heißt *Noetherscher Operator*, wenn mit $(A,V)\in\mathcal{N}$ auch $([A,z_1],V),\ldots,([A,z_n],V)\in\mathcal{N}$ gilt. Der $\mathbb{C}[z]$-Untermodul von $\mathbb{C}[z]^K$

$$M_{\mathcal{N}} = \bigcap_{(A,V)\in\mathcal{N}} \text{Kern }(A,V)$$

ist *der zu* $\mathcal{N}$ *gehörige Modul*, und $\mathcal{N}$ *ist ein zu* $M_{\mathcal{N}}$ *gehöriger Noetherscher Operator.*

Man nennt

$$A(z,\zeta) = e^{-z\zeta} A(z,\partial/\partial z)e^{z\zeta}$$

das Symbol des Differentialoperators $A(z,\partial/\partial z)$. Der Kommutator $[A,z_i]$ hat das Symbol $\partial A(z,\zeta)/\partial\zeta_i$. Führt man die Differentialoperatoren $A^{(\alpha)}$, $\alpha\in\mathbb{N}_o^n$, mit den Symbolen

$$A^{(\alpha)}(z,\zeta) = \partial^\alpha A(z,\zeta)/\partial\zeta^\alpha$$

ein, so sieht man, daß zu einem Noetherschen Operator $\mathcal{N}$ mit (A,V) auch stets $(A^{(\alpha)},V)$ gehört.

Unter der Abschließung eines Operators $\mathcal{N}$ zu einem Noetherschen Operator durch Hinzunahme der $(A^{(\alpha)},V)$ ändert sich die Menge der in (1.1) enthaltenen Moduln nicht.

(1.3) ***LEMMA.*** *Ist $M \subset \mathbb{C}[z]^K$ ein $\mathbb{C}[z]$-Untermodul , und ist (A,V) ein Operator mit $(A,V)M = o$, so ist auch $(A^{(\alpha)},V)M = o$, $\alpha \in \mathbb{N}_o^n$.*

Beweis. Die Produktregel

$$(1.4) \quad A(g\cdot f) = \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} (\partial^\alpha g/\partial z^\alpha)\cdot(A^{(\alpha)}f)$$

gilt für alle $g \in \mathbb{C}[z]$, $f \in \mathbb{C}[z]^K$. Sei $z_o \in V$. Betrachtet man (1.4) mit $g(z) = (z-z_o)^\alpha$ in $z = z_o$, so erhält man $(A^{(\alpha)}f)(z_o) = o$, $f \in M$, wie behauptet. ■

Man sieht leicht ein, daß $(A,V) = (B,V)$ genau dann gilt, wenn sich die Koeffizienten der Differentialoperatoren A und B nur um Elemente aus I(V) unterscheiden. Die Ordnung ord(A,V) wird daher definiert als das Maximum aller $|\alpha|$ für welche der Koeffient von $\partial^\alpha/\partial z^\alpha$ nicht zu I(V) gehört. Die Ordnung eines Noetherschen Operators $\mathcal{N}$ ist das Maximum der Ordnungen seiner Elemente.

BEMERKUNG. Die in (1.2) gegebene Definition Noetherscher Operatoren hängt von den Koordinaten $z_1,\ldots,z_n$ ab. Unter einem linearen Koordinatenwechsel ist ein Noetherscher Operator ebenfalls zu ändern. Jedoch bleibt für jedes V der von allen $(A,V) \in \mathcal{N}$ aufgespannte endlich dimensionale $\mathbb{C}$-Vektorraum unverändert.

(1.5) DEFINITION. Sei M ein $\mathbb{C}[z]$-Untermodul von $\mathbb{C}[z]^K$. Die Menge aller Punkte $z \in \mathbb{C}^n$, für welche die Dimension des $\mathbb{C}$-Vektorraumes $\{f(z) \in \mathbb{C}^K;\ f \in M\}$ echt kleiner als K ist, nennt man die *charakteristische Varietät V(M) des Untermoduls M.*

Die charakteristische Varietät eines Untermoduls von $\mathbb{C}[z]^K$ ist eine algebraische Untervarietät des $\mathbb{C}^n$. Dies folgt aus dem

(1.6) SATZ. Sei $M \subset \mathbb{C}[z]^K$ ein $\mathbb{C}[z]$-Untermodul. Dann gilt:

(i) Die charakteristische Varietät V(M) stimmt mit der Nullstellenvarietät des Ideals J überein, welches aus allen $f \in \mathbb{C}[z]$ mit $f \cdot \mathbb{C}[z]^K \subset M$ besteht.

(ii) Sei A ein Differentialoperator (mit K Komponenten) mit Polynomkoeffizienten. V_A sei die Nullstellenvarietät der Koeffizienten von A. Ist V eine Untervarietät des $\mathbb{C}^n$ mit $(A,V)M = o$, so ist $V \subset V(M) \cup V_A$.

Die Varietäten eines Noetherschen Operators sind also im wesentlichen in der charakteristischen Varietät des zugehörigen Moduls enthalten.

Beweis. (i) M werde von der $K \times L$-Polynommatrix P erzeugt. Nach der Cramerschen Regel gehören alle $K \times K$-Unterdeterminanten von P zu J. Also ist $V(J) \subset V(M)$. Die umgekehrte Inklusion ist trivial. Folglich ist $V(J) = V(M)$.

(ii) Zu $z_o \in V - V_A$ gibt es eine Komponente A_i von A und ein $\alpha \in \mathbb{N}^n$, so daß $A_i^{(\alpha)}(z,\zeta)$ nur ein Polynom in z ist, welches in z_o nicht verschwindet. Da $(o,\dots,f,o,\dots) \in M$ für alle $f \in J$, erhält man nach (1.3) $(A_i^{(\alpha)}f)(z_o) = o$, $f \in J$. Also ist $z_o \in V(J)$ wie behauptet. ∎

1.2 Taylorentwicklung bezüglich einer irreduziblen algebraischen Varietät

Ist $M \subset \mathbb{C}[z]^K$ ein $\mathbb{C}[z]$-Untermodul, und ist J das nach (1.6.i) zu M gehörige Transporteurideal, so gibt es nach dem Hilbertschen Nullstellensatz ein $s \in \mathbb{N}$ mit $I(V(M))^{s+1} \subset J$, d.h.

$$I(V(M))^{s+1} \cdot \mathbb{C}[z]^K \subset M.$$

Unter der Voraussetzung, daß $V(M)$ irreduzibel ist, wird im folgenden gezeigt, daß jedes $f \in \mathbb{C}[z]^K$ eine Taylorentwicklung in Potenzen geeigneter Elemente des Primideals $I(V(M))$ besitzt. Dies wird es später ermöglichen, die Zugehörigkeit von f zum Modul M über Relationen zwischen den Koeffizienten der Taylorentwicklung von f bis zur Ordnung s zu entscheiden.
Die analytische Handhabung von Varietäten wird ermöglicht durch den Normalisierungssatz. Dieser klassische Satz wird hier lediglich zitiert. Beweise findet man z.B. in Björk [7], S. 116 ff, oder - für Keime analytischer Varietäten - in Gunning-Rossi [11], III. A.

(1.7) __NORMALISIERUNGSSATZ.__ Sei $V \subsetneqq \mathbb{C}^n$ eine irreduzible algebraische Varietät. Nach einer geeigneten linearen Koordinatentransformation gilt dann mit den Koordinaten $z_1,\dots,z_n$:

(i) *Für ein* $o \leq k < n$ *gilt* $I(V) \cap \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_k] = o$.

(ii) *Es gibt für* $j = 1, \ldots, n-k$ *Polynome* $P_j \in I(V) \cap \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_{k+j}]$, *die in* z_{k+j} *normiert sind und deren Grad in* z_{k+j} *gleich dem Polynomgrad ist.* P_1 *ist zudem irreduzibel.*

(iii) *Es gibt Polynome* $Q_1, \ldots, Q_{n-k} \in I(V)$ *der Form* $Q_j(z') = \Delta(z')z_{k+j} - T_j(z', z_{k+1})$, $z' = (z_1, \ldots, z_k)$, *für* $j = 2, \ldots, n-k$. *Hier ist* Δ *die Diskriminante von* $Q_1 = P_1$ *als Polynom in* z_{k+1}.

(iv) $V - \Delta^{-1}(o) = \bigcap_{1}^{n-k} P_j^{-1}(o) - \Delta^{-1}(o) = \bigcap_{1}^{n-k} Q_j^{-1}(o) - \Delta^{-1}(o)$.

(v) $V_o = V - \Delta^{-1}(o)$ *ist eine offene und dichte Teilmenge von* V. *Die Projektion* $z \to \pi(z) = z'$ *restringiert zu einer e-fachen Überlagerungsabbildung von* V_o *auf* $\mathbb{C}^k - \Delta^{-1}(o)$. *Hier ist e der Grad von* P_1.

Die Dimension von V ist $\dim V = k$. Nach (v) ist dies wohldefiniert. Die Dimension einer beliebigen algebraischen Varietät ist das Maximum der Dimensionen der irreduziblen Komponenten dieser Varietät.

Sei jetzt $V \subsetneqq \mathbb{C}^n$ eine irreduzible algebraische Varietät, welche zusätzlich nach (1.7) normalisiert sei. Schreibe $z = (z', z'')$ mit $z' = (z_1, \ldots, z_k)$, $z'' = (z_{k+1}, \ldots, z_n)$, und $Q^\alpha = Q_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot Q_{n-k}^{\alpha_{n-k}}$ für $\alpha \in \mathbb{N}_o^{n-k}$. R sei ein $\mathbb{C}[z']$ umfassender Unterring des Ringes $\mathcal{A}(\Omega)$ aller holomorphen Funktionen auf Ω für ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}^k$. (In diesem Kapitel wird nur $R = \mathbb{C}[z']$ benötigt werden.)

(1.8) *<u>LEMMA.</u>* *Zu jedem $s \in \mathbb{N}$ gibt es ein $t \in \mathbb{N}$, so daß man jedes $f \in R[z'']$ entwickeln kann in*

$$(1.9)\qquad \Delta(z')^t \cdot f(z) =$$

$$\sum_{\substack{|\alpha| \le s \\ j < e}} f_{\alpha j}(z') \cdot z_{k+1}^j \cdot Q^\alpha(z) + \sum_{|\alpha| = s+1} h_\alpha(z) Q^\alpha(z), \quad z \in \mathbb{C}^n,$$

mit $f_{\alpha j} \in R$, $h_\alpha \in R[z'']$. Ist $\partial^\alpha f/\partial z''^\alpha = o$ auf $V \cap \Omega \times \mathbb{C}^{n-k}$, $|\alpha| \le s$, so ist $f_{\alpha j} = o$ für alle $|\alpha| \le s$, $j < e$.

<u>Beweis.</u>(Vergleiche [11], III. A. 5.) Es genügt, (1.9) für $s = 1$ zu beweisen, denn dann folgt das Lemma mit einer Induktion über s, wobei man die Induktionsvoraussetzung auf die h_α anzuwenden hat.

Sei $f \in R[z'']$. Sukzessive Polynomdivisionen - zuerst durch P_{n-k} und zuletzt durch P_1 - im Polynomring $R[z'']$ führen zur Darstellung

$$f = g + \sum_1^{n-k} h_i P_i$$

mit $h_i \in R[z'']$, $g \in R[z'']$. Der Polynomgrad von g ist durch $\sum_1^{n-k} (\deg P_i - 1)$ beschränkt. Für ein genügend großes $t \in \mathbb{N}$ sind $g' = \Delta^t \cdot g$ und $P_i' = \Delta^t \cdot P_i$ Polynome in $\Delta \cdot z''$. Nun kann man $\Delta(z') \cdot z_{k+j}$ durch $T_j(z', z_{k+1}) + Q_j(z)$ ersetzen und erhält

$$g' = g'' + \sum_2^{n-k} g_j' \cdot Q_j,$$

$$P_i' = P_i'' + \sum_2^{n-k} P_{ij}' \cdot Q_j,$$

wobei g'', $P_i'' \in R[z_{k+1}]$. Da P_i'' auf $V \cap (\Omega \times \mathbb{C}^{n-k})$ verschwindet, geht nach (1.7.ii) ,(1.7.v) die Polynomdivision P_i''/Q_1 in

$R[z_{k+1}]$ ohne Rest auf. Dividiert man auch noch g'' durch Q_1 in $R[z_{k+1}]$ so erhält man zusammenfassend

$$\Delta^t \cdot f = \sum_{o}^{e-1} f_j \cdot z_{k+1}^j + \sum_{1}^{n-k} h_i \cdot Q_i \ ,$$

mit $f_j \in R$ und (neuen) $h_i \in R[z'']$.

Es ist noch die Eindeutigkeit der $f_{\alpha j}$ zu zeigen. Sei $\partial^\alpha f/\partial z''^\alpha = o$ auf $V \cap \Omega \times \mathbb{C}^{n-k}$ für alle $|\alpha| \leq s$. Angenommen es wären nicht alle $f_{\alpha j}$ gleich Null. Dann gäbe es ein $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_{n-k})$ und ein $l < e$ mit $f_{\beta l} \neq o$, so daß β_1 bezüglich dieser Eigenschaft minimal ist. Auf $V \cap \Omega \times \mathbb{C}^{n-k}$ gelten dann die Gleichungen

$$\begin{aligned} o &= \partial^\beta (\Delta^t \cdot f)/\partial z''^\beta \\ &= \Sigma\ f_{\alpha j}(\partial^\beta (z_{k+1}^j Q^\alpha)/\partial z''^\beta) \\ &= \Sigma\ f_{\alpha j} z_{k+1}^j (\partial^\beta Q^\alpha/\partial z''^\beta) \end{aligned}$$

wobei die Summen über $|\alpha| \leq s$, $\beta_1 \leq \alpha_1$ und $o \leq j < e$ zu erstrecken sind. Wegen $\partial Q_j/\partial z_{k+i} = \delta_{ij} \cdot \Delta$, $i,j > 1$, vereinfachen sich diese Gleichungen auf $V \cap \Omega \times \mathbb{C}^{n-k}$ zu

$$o = q \cdot \sum_{j<e} f_{\beta j} \cdot z_{k+1}^j$$

mit $q = (\partial Q_1/\partial z_{k+1})^{\beta_1} \cdot \Delta^{\beta_2 + \ldots + \beta_{n-k}}$. Da $q \neq o$ auf V_o, ist daher $\sum_{j<e} f_{\beta j}(z') \cdot z_{k+1}^j = o$ auf $V_o \cap \Omega \times \mathbb{C}^{n-k}$.

Wegen (1.7.v) müssen folglich alle $f_{\beta j}$ verschwinden. Dieser Widerspruch zur Annahme $f_{\beta l} \neq o$ beendet den Beweis des Lemmas. ∎

1.3 Existenz Noetherscher Operatoren zu Untermoduln von $\mathbb{C}[z]^K$

Sei $M \subset \mathbb{C}[z]^K$ ein $\mathbb{C}[z]$-Untermodul.

(1.10) SATZ. *Es gibt einen zu M gehörigen Noetherschen Operator $\mathcal{N}$.*

Für diesen Satz werden zwei Beweise angegeben. In einem wird die charakteristische Varietät von M geeignet stratifiziert, während im anderen eine Primärzerlegung von M benutzt wird. Beide Beweise basieren aber auf dem folgenden Ergebnis, das die Existenz eines "fast" zu M gehörigen Noetherschen Operators sichert.

(1.11) LEMMA. *Die charakteristische Varietät $V = V(M)$ von M sei irreduzibel. Dann existiert ein Noetherscher Operator $\mathcal{N}$ mit $M \subset M_{\mathcal{N}}$ und $V(T) \subsetneq V$. Hier ist $V(T)$ die Nullstellenvarietät des Transporteurideals*

$$T = \{g \in \mathbb{C}[z];\ g \cdot M_{\mathcal{N}} \subset M\}.$$

Beweis. Wie bereits am Anfang des Abschnittes 1.2 bemerkt wurde, gibt es ein $s \in \mathbb{N}$ mit

(1.12) $I(V)^{s+1} \cdot \mathbb{C}[z]^K \subset M.$

Im Falle $V = \mathbb{C}^n$ kann man $s = o$ wählen.

Sei F der Quotientenkörper des Integritätsbereiches $\mathbb{C}[z]/I(V)$. F enthält $\mathbb{C}(z')$ als Unterkörper. Zu $f \in \mathbb{C}[z]$ bezeichne $\dot{f}$ die Klasse von f in F. Die Abbildung

$$D_s : \mathbb{C}[z]^K \to F^{K\sigma}, \ f \mapsto (\partial^\alpha f/\partial z''^\alpha)_{|\alpha|\le s},$$

mit $\sigma = \#\{\alpha \in \mathbb{N}_0^{n-k}; |\alpha| \le s\}$ ist $\mathbb{C}[z']$-linear. Nach (1.8) und (1.12) ist für ein $t \in \mathbb{N}$

(1.13) $\Delta^t \cdot \operatorname{Kern} D_s \subset M.$

Der von $D_s(M)$ in $F^{K\sigma}$ erzeugte F-Untervektorraum ist Durchschnitt endlich vieler Hyperebenen. Ohne Einschränkung kann man annehmen, daß diese Hyperebenen durch Funktionale

$$F^{K\sigma} \ni (\varphi_{\alpha j}) \longmapsto \sum_{\alpha,j} \dot{g}_{\alpha j}\cdot\varphi_{\alpha j} \in F$$

mit $(g_{\alpha j}) \in \mathbb{C}[z]^{K\sigma}$ gegeben werden. Setzt man

$$Af = \sum_{|\alpha|\le s}\sum_{j=1}^{K} g_{\alpha j}\cdot(\partial^\alpha f_j/\partial z''^\alpha), \ f \in \mathbb{C}[z]^K,$$

und definiert dann $\mathcal{N}$ als den von allen (A,V) erzeugten Noetherschen Operator, so ist $M \subset M_{\mathcal{N}}$. Ferner sind die von $D_s(M)$ und $D_s(M_{\mathcal{N}})$ in $F^{K\sigma}$ erzeugten F-Untervektorräume gleich. Man kann daher zu gegebenem $f \in M_{\mathcal{N}}$ endlich viele $f_1,..,f_L \in M$, $\varphi_1,\dots,\varphi_L \in \mathbb{C}[z]$ und $\psi \in \mathbb{C}[z]-I(V)$ finden mit

(1.14) $\psi\cdot(\partial^\alpha f/\partial z''^\alpha) - \sum_{l}^{L} \varphi_l(\partial^\alpha f_l/\partial z''^\alpha) \in I(V)\cdot\mathbb{C}[z]^K, |\alpha| \le s.$

Weiter unten wird gezeigt, daß hieraus die Existenz von $\psi' \in \mathbb{C}[z]-I(V)$ und $\tilde{f} \in M$ folgt mit

(1.15) $\dfrac{\partial^\alpha}{\partial z''^\alpha}(\psi'\cdot f - \tilde{f}) \in I(V)\cdot\mathbb{C}[z]^K, \ |\alpha| \le s.$

Mit (1.13) folgt hieraus $\Delta^t \psi' f \in M$. Da $M_{\mathcal{N}}$ endlich erzeugt ist, erhält man wie behauptet schließlich ein $g \in T - I(V)$. Es ist also noch (1.15) aus (1.14) herzuleiten. Nach (1.8) darf man annehmen, daß ψ und alle φ_l bereits zu $\mathbb{C}[z',z_{k+1}]$ gehören. Nach dem folgenden Lemma stimmen $\Delta^\tau \psi$ und $\Delta^\tau \varphi_l$, $\tau = 1+2+\ldots+s$, modulo $I(V)$ mit gewissen $\psi' \in \mathbb{C}[z',z_{k+1}] - I(V)$ bzw. $\varphi_k' \in \mathbb{C}[z',z_{k+1}]$ überein, die

$$\partial^i \psi'/\partial z_{k+1}^i \in I(V) \quad , \ 1 \leq i \leq s,$$
$$\partial^i \varphi_l'/\partial z_{k+1}^i \in I(V) \quad , \ 1 \leq i \leq s, \ 1 \leq l \leq L,$$

erfüllen. Mit diesem ψ' und mit $\tilde{f} = \sum_l^L \varphi_l' f_l$ folgt (1.15) sofort aus (1.14), denn die Differentiationen kommutieren hier mit den Multiplikationen mit ψ' und φ_l'.

(1.16) <u>*LEMMA.*</u> *Sei $\psi \in \mathbb{C}[z',z_{k+1}]$. Dann kann man $\psi_s \in \mathbb{C}[z',z_{k+1}]$ rekursiv durch $\psi_o = \psi$ und $\psi_{s+1} = \Delta^{s+1} \cdot \psi_s + a_{s+1} \cdot Q_1^{s+1}$, $s \geq o$, so mit geeigneten $a_{s+1} \in \mathbb{C}[z',z_{k+1}]$ definieren, daß*

(1.17) $\quad \partial^i \psi_s/\partial z_{k+1}^i \in I(V) \quad , \ 1 \leq i \leq s.$

<u>Beweis.</u> Zur Abkürzung setze $\partial = \partial/\partial z_{k+1}$. Δ ist die Diskriminante von Q_1. Also gibt es $F, G \in \mathbb{C}[z',z_{k+1}]$ mit

(1.18) $\qquad \Delta = F \cdot \partial Q_1 + G Q_1.$

Sei ψ_s bereits definiert, so daß (1.17) gilt. ψ_{s+1} werde definiert durch die Wahl $a_{s+1} = -\frac{1}{s+1} F^{s+1}(\partial^{s+1}\psi_s)$. Dann gilt offenbar $\partial^i \psi_{s+1} \in I(V)$, $1 \leq i \leq s$, und $\partial^{s+1}\psi_{s+1} \in I(V)$ folgt aus

$$\partial^{s+1}\psi_{s+1} \equiv \Delta^{s+1}\partial^{s+1}\psi_s + (s+1)a_{s+1}(\partial Q_1)^{s+1} \mod I(V)$$

$$\equiv (\partial^{s+1}\psi_s)(\Delta^{s+1}-(F\cdot\partial Q_1)^{s+1}) \mod I(V)$$

$$\equiv o \mod I(V).$$

Folglich ist Lemma (1.16) - und damit auch Lemma (1.11) - bewiesen. ∎

Nun zu den Beweisen von Satz (1.1o).

Erster Beweis. (Via Stratifizierung.) Aufgrund des Hilbertschen Nullstellensatzes gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $I(V(M))^N\cdot\mathbb{C}[z]^K \subset M$. Sei V eine irreduzible Komponente von V(M) mit dim V = dim V(M). Man kann das Lemma (1.11) auf den Modul $M + I(V)^N\cdot\mathbb{C}[z]^K$ anwenden und erhält einen Noetherschen Operator $\mathcal{N}_V$ und ein Ideal $T_V \subset \mathbb{C}[z]$ mit $M \subset M_{\mathcal{N}_V}$, $T_V\cdot M_{\mathcal{N}_V} \subset M + I(V)^N\cdot\mathbb{C}[z]^K$, $V(T_V) \subsetneqq V$. Es ist also $\dim V(T_V) < \dim V$. Sei $\mathcal{N}$ die Vereinigung aller $\mathcal{N}_V$ wobei V die irreduziblen Komponenten maximaler Dimension von V(M) durchläuft. T sei das größte Ideal in $\mathbb{C}[z]$ mit

(1.19) $\quad T\cdot M_{\mathcal{N}} \subset M.$

Dann ist $V(T) \subset V(M)$ und

(1.2o) $\quad \dim V(T) < \dim V(M).$

Nach dem Artin-Rees Lemma (siehe z.B. Atiyah, MacDonald [1], Corollary 1o.1o) gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit

$$M_{\mathcal{N}} \cap T^m\cdot\mathbb{C}[z]^K \subset T\cdot M_{\mathcal{N}}.$$

Mit dem Modul $M^* = M + T^m \cdot \mathbb{C}[z]^K$ folgt dann unter Benutzung von (1.19) und (1.2o)

$$M_{\mathcal{N}} \cap M^* = M,$$
$$\dim V(M^*) < \dim V(M).$$

Also folgt der Satz mit einer Induktion über dim V(M). Den Induktionsanfang dim V(M) = o erhält man sofort aus (1.11). ∎

Zweiter Beweis. (Via Primärzerlegung.)
Ein Untermodul $M_o \subset \mathbb{C}[z]^K$ heißt primär, wenn für alle $f \in \mathbb{C}[z]^K$ und $g \in \mathbb{C}[z]$ aus $gf \in M_o$ folgt: $f \in M_o$ oder $g^m \cdot \mathbb{C}[z]^K \subset M_o$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Es ist wohlbekannt (siehe z.B. [1]), daß jeder Untermodul von $\mathbb{C}[z]^K$ endlicher Durchschnitt primärer Moduln ist. Es ist daher keine Einschränkung anzunehmen, daß M zusätzlich primär ist. Dann ist V(M) irreduzibel, denn das Radikal

$$\text{Rad}\ (M) = \{g \in \mathbb{C}[z]\,;\ g^m \mathbb{C}[z]^K \subset M \quad \text{für ein } m \in \mathbb{N}\}$$

ist ein Primideal, und es ist Rad(M) = I(V(M)) nach (1.6.i) und dem Hilbertschen Nullstellensatz. Nach Lemma (1.11) gibt es einen Noetherschen Operator $\mathcal{N}$ und ein $g \in \mathbb{C}[z]$-Rad(M), so daß $M \subset M_{\mathcal{N}}$ und $g \cdot M_{\mathcal{N}} \subset M$. Weil M primär ist, muß $M = M_{\mathcal{N}}$ sein. ∎

$\mathcal{A}_z$ sei der Ring der Keime holomorpher Funktionen in $z \in \mathbb{C}^n$. Die Abbildung von $f \in \mathbb{C}[z]$ auf seinen Keim $\gamma_z(f) \in \mathcal{A}_z$, $z \in \mathbb{C}^n$, ist eine Injektion. Ist M ein $\mathbb{C}[z]$-Untermodul von $\mathbb{C}[z]^K$ so bezeichne $\tilde{M}_z$, $z \in \mathbb{C}^n$, den von M in $\mathcal{A}_z^K$ erzeugten $\mathcal{A}_z$-Untermodul, und $\bar{M}$ sei der $\mathbb{C}[z]$-Untermodul

$$\bar{M} = \{f \in \mathbb{C}[z]^K ;\ \gamma_z(f) \in \tilde{M}_z \text{ für alle } z \in \mathbb{C}^n\} \ .$$

Eine Konsequenz der Existenz Noetherscher Operatoren ist die

(1.21) FOLGERUNG. *Für alle $\mathbb{C}[z]$-Untermoduln $M \subset \mathbb{C}[z]^K$ gilt $M = \bar{M}$.*

Beweis. $M \subset \bar{M}$ ist trivial. Aufgrund der Produktregel (1.4) annulliert ein Noetherscher Operator für M ebenfalls $\bar{M}$. Also ist $\bar{M} \subset M$ wie behauptet. ■

1.4 Primäre und normale Noethersche Operatoren

Noethersche Operatoren und Untermoduln von $\mathbb{C}[z]^K$ kann man als zueinander duale Objekte ansehen. Einer Vereinigung Noetherscher Operatoren entspricht ein Durchschnitt zugehöriger Moduln.

(1.22) DEFINITION. Sei $\mathcal{N}$ ein Noetherscher Operator und sei $V_o \subset \mathbb{C}^n$ eine irreduzible algebraische Varietät. $\mathcal{N}$ *heißt primär bezüglich* V_o genau dann, wenn $V = V_o$ für alle $(A,V) \in \mathcal{N}$ gilt.

Jeder Noethersche Operator ist offenbar Vereinigung primärer Noetherscher Operatoren.

Gerechtfertigt wird die Definition (1.22) durch den

(1.23) <u>SATZ.</u> Ein $\mathbb{C}[z]$-Untermodul $M \subset \mathbb{C}[z]^K$ ist genau dann primär, wenn es einen zugehörigen primären Noetherschen Operator $\mathcal{N}$ gibt.

<u>Beweis.</u> Aus dem zweiten Beweis für (1.1o) geht hervor, daß jeder primäre Modul M einen zugehörigen primären Noetherschen Operator besitzt. Zum Beweis der anderen Richtung sei $\mathcal{N}$ ein bezüglich V primärer Noetherscher Operator. Seien $f \in \mathbb{C}[z]^K$ und $g \in \mathbb{C}[z]-I(V)$ mit $g\cdot f \in M_{\mathcal{N}}$ gegeben. Weil $\mathrm{Rad}(M_{\mathcal{N}}) = I(V)$ ist, genügt es, $f \in M_{\mathcal{N}}$ zu zeigen. Die Operatoren

$$\mathcal{N}_j = \{(A,V) \in \mathcal{N};\ \mathrm{ord}\,(A,V) \le j\}\ ,\ j = o,1,2,..$$

sind ebenfalls Noethersch und primär bezüglich V. Für genügend großes j ist $\mathcal{N}_j = \mathcal{N}$.

Es ist $f \in M_{\mathcal{N}_o}$; denn $g\cdot Af = A(g\cdot f) \in I(V)$, $(A,V) \in \mathcal{N}_o$, impliziert mit $g \notin I(V)$, daß $Af \in I(V)$.

Sei $(A,V) \in \mathcal{N}_{j+1}$. Nach (1.4) ist

$$g\cdot Af = A(gf) - \sum_{\alpha \neq o} \frac{1}{\alpha!}(\partial^\alpha g/\partial z^\alpha)(A^{(\alpha)}f).$$

Weil $(A^{(\alpha)},V) \in \mathcal{N}_j$ für $\alpha \neq o$, folgt unter der Induktionsvoraussetzung $f \in M_{\mathcal{N}_j}$ wieder $g\cdot Af \in I(V)$. Wie oben schließt man hieraus $f \in M_{\mathcal{N}_{j+1}}$. Dies war zu zeigen. ∎

Im Hinblick auf die semilokale Theorie in Kapitel 2 ist es zweckmäßig, spezielle primäre Noethersche Operatoren einzuführen - die normalen Noetherschen Operatoren. Diese werden sich über eine Variablenreduktion als (im wesentlichen) äquivalent zu Polynomrelationen erweisen.

(1.24) DEFINITION. Sei $V \subset \mathbb{C}^n$ eine irreduzible algebraische Varietät. V sei wie im Normalisierungssatz (1.7) normalisiert. Ein bezüglich V primärer *Noetherscher Operator* $\mathcal{N}$ *heißt normal bezüglich V* (und seiner Normalisierung), wenn für jeden Operator $(A,V) \in \mathcal{N}$ der Differentialoperator A nur Differentiationen nach den (zu V transversalen) Variablen $z'' = (z_{k+1},\dots,z_n)$ enthält.

BEMERKUNG. Der in Lemma (1.11) konstruierte Noethersche Operator ist normal.

Sei $\mathcal{N}$ ein bezüglich V normaler Noetherscher Operator. Faßt man $\mathbb{C}[z]$ als einen Modul über seinem Unterring $\mathbb{C}[z']$ auf, so sieht man, daß $\mathcal{N}$ eine $\mathbb{C}[z']$-lineare Abbildung definiert

$$\mathbb{C}[z]^K \to (\mathbb{C}[z]/I(V))^N \ , \ f \mapsto (Af+I(V))_{A \in \mathcal{N}} \cdot$$

Hier ist $N = \# \mathcal{N}$, und zur Abkürzung wurde (und wird) A anstatt (A,V) geschrieben. Die Ordnung von $\mathcal{N}$ sei $\leq s$. Setze $\sigma = \#\{\alpha \in \mathbb{N}_o^{n-k}; |\alpha| \leq s\}$. Nach (1.8) sind für ein hinreichend großes $t \in \mathbb{N}$ die folgenden Abbildungen τ und τ_s wohldefiniert.

$$\tau : (\mathbb{C}[z]/I(V))^N \to \mathbb{C}[z']^{eN},$$
$$h + I(V)\cdot \mathbb{C}[z]^N \mapsto (h_o,\ldots,h_{e-1})$$

wenn $\Delta^t h - \sum_o^{e-1} h_j\, z_{k+1}^j \in I(V)\cdot\mathbb{C}[z]^N$.

$$\tau_s : \mathbb{C}[z]^K \to \mathbb{C}[z']^{Ke\sigma},$$
$$f \mapsto (f_{\alpha j}),$$

wenn $\Delta^t f - \sum_{|\alpha|\le s, j<e} f_{\alpha j}\cdot z_{k+1}^j \cdot Q^\alpha \in (I(V)^{s+1})\cdot\mathbb{C}[z]^K$.

Die Abbildungen τ und τ_s sind $\mathbb{C}[z']$-linear.

(1.25) <u>*LEMMA.*</u> *Es gibt genau eine $\mathbb{C}[z']$-lineare Abbildung $\mathcal{N}'$, welche gegeben wird durch Multiplikation mit einer Polynommatrix über $\mathbb{C}[z']$, so daß das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[z]^K & \xrightarrow{\mathcal{N}} & (\mathbb{C}[z]/I(V))^N \\ \downarrow{\scriptstyle\tau_s} & & \downarrow{\scriptstyle\tau} \\ \mathbb{C}[z']^{Ke\sigma} & \xrightarrow{\mathcal{N}'} & \mathbb{C}[z']^{eN} \end{array}$$

kommutativ ist. Es ist zudem $M_{\mathcal{N}} = \text{Kern}\ \mathcal{N}' \circ \tau_s$.

<u>Beweis.</u> Aus der Darstellung (1.9) folgt Kern $\tau_s \subset$ Kern $\mathcal{N} = M_{\mathcal{N}}$, denn Δ^t gehört nicht zum Primideal $I(V)$. Folglich ist $\mathcal{N}'$ wohldefiniert und $\mathbb{C}[z']$-linear auf dem $\mathbb{C}[z']$-Untermodul Bild $\tau_s \subset \mathbb{C}[z']^{Ke\sigma}$. Für

$$g = \sum_{|\alpha|\le s, j<e} g_{\alpha j}\, z_{k+1}^j\, Q^\alpha \in \mathbb{C}[z]^K$$

mit $(g_{\alpha j}) \in \mathbb{C}[z']^{Ke\sigma}$ ist $\tau_s(g) = \Delta^t(g_{\alpha j})$, $\tau \circ \mathcal{N}(g) \in \Delta^t \cdot \mathbb{C}[z']^{eN}$,
und daher

$$\mathcal{N}'(\Delta^t(g_{\alpha j})) \in \Delta^t \cdot \mathbb{C}[z']^{eN}.$$

Also kann man $\mathcal{N}'$ zu einer $\mathbb{C}[z']$-linearen Abbildung auf ganz $\mathbb{C}[z']^{Ke\sigma}$ fortsetzen. Eine solche Abbildung wird offenbar durch eine Polynommatrix gegeben.
Aus der Injektivität von τ folgt noch Kern $\mathcal{N}' \circ \tau_s = M_{\mathcal{N}}$. ∎

Zu jedem bezüglich einer irreduziblen Varietät V primären Noetherschen Operator kann man einen äquivalenten normalen Noetherschen Operator konstruieren. Dies geschieht durch Elimination zu V tangentialer Ableitungen.

(1.26) DEFINITION. Sei $V \subset \mathbb{C}^n$ eine algebraische Varietät. Ein linearer *Differentialoperator* T auf $\mathbb{C}^n$ mit Polynomkoeffizienten *heißt tangential zu V* wenn $T(I(V)) \subset I(V)$.

BEMERKUNG. Summen und Nacheinanderausführungen tangentialer Differentialoperatoren sind wieder tangential.

Sei $V \subset \mathbb{C}^n$ nun wieder eine irreduzible und nach (1.7) normalisierte algebraische Varietät. Die Vektorfelder $\partial/\partial z_1, \ldots, \partial/\partial z_k$ sind im allgemeinen noch nicht tangential zu V. Jedoch gilt das

(1.27) <u>*LEMMA.*</u> *Es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ und zu V tangentiale Differentialoperatoren erster Ordnung $L_1,\dots,L_k$ mit*

$$[L_i, z_j] = \delta_{ij}\cdot\Delta^m \;,\; 1 \le i,\; j \le k.$$

(δ_{ij} = Kroneckersymbol)

<u>Beweis.</u> Zunächst werden Vektorfelder L_i' mit $L_i'(Q_j) \in I(V)$, $1 \le i \le k$, $1 \le j \le n-k$, über den Ansatz

$$L_i' = \Delta^2(\partial/\partial z_i) + \sum_{k+1}^{n} c_{ij}(\partial/\partial z_j),\; 1 \le i \le k,$$

konstruiert. Seien F und G wie in (1.18).

Mit $c_{i,k+1} = -\Delta\cdot F\cdot(\partial Q_1/\partial z_i)$ erhält man

$$L_i'(Q_1) = \Delta\cdot(\partial Q_1/\partial z_i)\cdot(\Delta - F\cdot(\partial Q_1/\partial z_{k+1}))$$

$$= \Delta(\partial Q_1/\partial z_i)\cdot GQ_1 \in I(V).$$

Für $j = 2,\dots,n-k$ hat man

$$L_i'(Q_j) = \Delta^2(\partial Q_j/\partial z_i) - c_{i,k+1}(\partial T_j/\partial z_{k+1}) + \Delta\cdot c_{i,k+j}.$$

Also erhält man $L_i'(Q_j) = o$, wenn man

$$c_{i,k+j} = -\Delta(\partial Q_j/\partial z_i) - F(\partial Q_1/\partial z_i)(\partial T_j/\partial z_{k+1})$$

setzt. Die so konstruierten Differentialoperatoren L_i' bilden folglich das Ideal $(Q_1,\dots,Q_{n-k})$ in $I(V)$ ab. Nach Lemma (1.8) ist für ein geeignetes $m \in \mathbb{N}, m \ge 2$,

$$\Delta^{m-2}\cdot I(V) \subset (Q_1,\dots,Q_{n-k}).$$

Die durch $L_i(f) = L_i'(\Delta^{m-2}f)$, $f \in \mathbb{C}[z]$, definierten Differentialoperatoren L_i leisten das Gewünschte. ∎

(1.28) <u>*SATZ.*</u> ***Sei $\mathcal{N}$ ein bezüglich V primärer Noetherscher Operator. Dann gibt es einen bezüglich V normalen Noetherschen Operator $\mathcal{N}_o$, so daß mit geeigneten zu V tangentialen Differen-***

tialoperatoren T_{AB} und T°_{BA} die folgenden Darstellungen gelten:

(i) $\Delta^t A = \sum_{B \in \mathcal{N}_o} T_{AB} \circ B$

für alle $A \in \mathcal{N}$ *und ein* $t \in \mathbb{N}$.

(ii) $B = \sum_{A \in \mathcal{N}} T^{\circ}_{BA} \circ A$

für alle $B \in \mathcal{N}_o$.

Insbesondere ist $M_{\mathcal{N}_o} = M_{\mathcal{N}}$.

Beweis. Analog zur Aufspaltung $z = (z',z'')$ werden auch Multiindexes $\alpha \in \mathbb{N}_o^n$ geschrieben $\alpha = (\alpha',\alpha'')$. Ist $A = \sum_{\alpha} a_\alpha \, \partial/\partial z^\alpha$, so bezeichnet

$$\omega(A) = \max \{|\alpha'|;\ a_\alpha \notin I(V)\}$$

die Ordnung von (A,V) bezüglich der Variablen z'. Die Ordnung ω bezüglich z' eines bezüglich V primären Noetherschen Operators ist das Maximum der Ordnungen $\omega(A)$ über all seine Elemente (A,V).

Seien m und L_i wie in Lemma (1.27). Seien $\mathcal{N}_o, \mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \ldots$ die kleinsten (primären) Noetherscher Operatoren mit den Eigenschaften

$$\mathcal{N}_j = \mathcal{N} \text{ falls } j \geq \omega(\mathcal{N})$$

und

$$\{A \in \mathcal{N}_{j+1};\ \omega(A) \leq j\} \subset \mathcal{N}_j,$$

$$\{\Delta^m A - \frac{1}{j+1} \sum_1^k L_i[A,z_i];\ A \in \mathcal{N}_{j+1},\ \omega(A) = j+1\} \subset \mathcal{N}_j.$$

Es gilt

(1.29) $\quad \omega(\mathcal{N}_j) \leq j$ für alle j.

Dies folgt mit einer Induktion über fallendes j, wenn gezeigt ist, daß gilt

$$(1.3o)\qquad \omega(\Delta^m A - \frac{1}{j+1}\sum_1^k L_i[A,z_i]) \le j$$

für alle A mit $\omega(A) = j+1$. Seit A mit $\omega(A) = j+1$ gegeben. Wegen $\omega(L_i-\Delta^m(\partial/\partial z_i)) = o$ ist

$$\omega(\Delta^m A- \frac{1}{j+1}\sum_1^k L_i[A,z_i])$$
$$\le \max\,(j,\omega(A- \frac{1}{j+1}\sum_1^k (\partial/\partial z_i)[A,z_i])).$$

Das Symbol des Operators $A - \frac{1}{j+1}\sum_1^k (\partial/\partial z_i)\,[A,z_i]$ ist

$$(1.31)\qquad A(z,\zeta) - \frac{1}{j+1}\sum_1^k \zeta_i \frac{\partial A}{\partial\zeta_i}(z,\zeta) + B(z,\zeta)$$

mit $\omega(B) \le j$. Betrachtet man in (1.31) die in $\zeta' = (\zeta_1,\ldots,\zeta_k)$ vom Grade j+1 homogenen Terme, so erkennt man mit Eulers Formel, daß diese verschwinden. Es folgt (1.3o) und damit auch (1.29). Insbesondere ist $\mathcal{N}_o$ bezüglich V normal.

Es genügt offenbar, (ii) für $\mathcal{N}_{j+1}$ und $\mathcal{N}_j$ anstelle von $\mathcal{N}$ und $\mathcal{N}_o$ zu beweisen. Nach Definition von $\mathcal{N}_j$ gilt die Darstellung

$$(1.32)\qquad B = \sum_{A\in\mathcal{N}_{j+1}} S_{BA}\circ A$$

mit tangentialen Differentialoperatoren S_{BA} für eine $\mathcal{N}_j$ erzeugende Menge von $B \in \mathcal{N}_j$. Kommutiert man (1.32) mit den Koordinaten $z_1,\ldots,z_n$, so hat die resultierende Gleichung wieder dieselbe Gestalt. Also gilt (1.32) für alle $B \in \mathcal{N}_j$.

Aus der Definition der Folge $(\mathcal{N}_j)$ folgt sofort, daß (i) gilt, wenn man $\mathcal{N}$ und $\mathcal{N}_o$ durch $\mathcal{N}_{j+1}$ und $\mathcal{N}_j$ ersetzt. Dies impliziert

per Induktion über fallendes j bereits (i), denn zu jedem tangentialen Differentialoperator T und zu allen $m,s \in \mathbb{N}$ mit $s \geq m+\omega(T)$ gibt es einen tangentialen Differentialoperator $\tilde{T}$ mit $\Delta^s T = \tilde{T}\Delta^m$.
Wegen $\Delta \notin I(V)$ folgt $M_{\mathcal{N}} = M_{\mathcal{N}_o}$ sofort aus (i) und (ii). ∎

1.5 Einige Beispiele

Um zu einem Untermodul $M \subset \mathbb{C}[z]^K$, der von $P_1,..,P_L \in M$ über $\mathbb{C}[z]$ erzeugt wird, einen zugehörigen Noetherschen Operator zu konstruieren, sind hinreichend viele Lösungen $A = A(z,\partial/\partial z)$, $z \in \mathbb{C}^n$, von

(1.33) $A^{(\alpha)}P_1(z) = .. = A^{(\alpha)}P_L(z) = o$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}^n$

zu finden (vergleiche (1.3) und (1.4)). Dies ist ein homogenes lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten von A im Punkte z. Es hat nichttriviale Lösungen nur für $z \in V(M)$ (siehe (1.6.ii)). Weil ein zu M gehöriger Noetherscher Operator existiert, genügt es, für ein hinreichend großes $d \in \mathbb{N}$ alle Lösungen A,z von (1.33) mit $\mathrm{ord}(A) \leq d$ zu finden. Dies Gleichungssystem ist endlichdimensional.

(i) *Hauptideale in* $\mathbb{C}[z]$. Sei $P \in \mathbb{C}[z]$, $P \neq o$. P besitzt eine Primfaktorzerlegung

$$P = Q_1^{m_1}\cdot\ldots\cdot Q_L^{m_L}, \quad m_i \in \mathbb{N},\ Q_i \text{ irreduzibel.}$$

Für das von P erzeugte Hauptideal $(P) \subset \mathbb{C}[z]$ ergibt dies eine

Primärzerlegung (vgl. [25], Ch. III, § 9)

$$(P) = (Q_1^{m_1}) \cap \ldots \cap (Q_L^{m_L}).$$

$N \in \mathbb{C}^n - o$ heißt nichtcharakteristisch für P, falls N keine Nullstelle des Hauptteils von P ist. Mit der Notation

$$(\partial_N f)(z) = \frac{d}{d\lambda} f(z+\lambda N)|_{\lambda = o} \quad ,$$

$z \in \mathbb{C}^n$, f holomorph, $N \in \mathbb{C}^n - o$, erhält man dann:

(1.34) <u>*SATZ.*</u> *Sei $N \in \mathbb{C}^n - o$ nichtcharakterisch für P. Die Menge aller $(\partial_N^m, Q_i^{-1}(o))$, $i = 1,\ldots,L$ und $m = o,\ldots,m_i - 1$, ist ein zu (P) gehöriger Noetherscher Operator.*

<u>Beweis.</u> Sei $f \in \mathbb{C}[z]$ gegeben mit $\partial_N^m f | Q_i^{-1}(o) = o$ für alle i und m. Da die Q_i irreduzibel sind, heißt dies, daß $\partial_N^m f \in (Q_i)$ für alle i und m. Ist $f = g \cdot Q_i^m$, $g \in \mathbb{C}[z]$, so folgt $g \in (Q_i)$ wenn $\partial_N^m f \in (Q_i)$, denn $\partial_N Q_i \notin (Q_i)$. Mit einer Induktion über m erhält man also $f \in (Q_i^{m_i})$ für alle i. ∎

<u>BEMERKUNG.</u> Ist $P \in \mathbb{C}[z]$ ein Polynom vom Grade ≤ 2, das nicht Quadrat eines linearen Polynoms ist, so ist aufgrund des obigen Satzes $(Id, P^{-1}(o))$ ein zu P gehöriger Noetherscher Operator. Diese Situation liegt für $n \geq 2$ zum Beispiel dann vor, wenn $P = z_1^2 + \ldots + z_n^2$, $P = z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2 - z_n^2$ und $P = z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2 + c\, z_n$, $c \neq o$ wenn $n = 2$. Dies sind die Symbole des Laplaceoperators, des Wellenoperators und des Wärmeleitungsoperators.

(ii) Das Ideal $M = (z_2^2, z_1^2 z_2) \in \mathbb{C}[z_1, z_2]$. Die allgemeine Lösung A der Ordnung ≤ 2 des Gleichungssystems (1.33) für $P_1 = z_2^2$ und

$P_2 = z_1^2 z_2$ in $z = (z_1,z_2) \in V(M) = \{z_2 = o\}$ ist

$$A = a_{2o}(\partial^2/\partial z_1^2) + a_{1o}(\partial/\partial z_1) + a_{oo}$$

wenn $z_1 \neq o$ und

$$A = a_{11}(\partial^2/\partial z_1 \partial z_2) + a_{o1}(\partial/\partial z_2) + a_{2o}(\partial^2/\partial z_1^2) + a_{1o}(\partial/\partial z_1) + a_{oo}$$

wenn $z_1 = o$. Hierin ist bereits ein zu M gehöriger Noetherscher Operator enthalten, nämlich der von

$$(Id,V(M)),\ ((\partial^2/\partial z_1\partial z_2),\{o\}) \text{ und } ((\partial/\partial z_2),\{o\})$$

erzeugte. Dies folgt mit der (Primär-)Zerlegung

$$M = (z_2) \cap (z_1^2,z_2^2)$$

daraus, daß (z_2) das Verschwindungsideal von V(M) ist und daß $f \in \mathbb{C}[z_1,z_2]$ offenbar genau dann zum Ideal (z_1^2,z_2^2) gehört, wenn gilt

$$f(o) = (\partial f/\partial z_1)(o) = (\partial f/\partial z_2)(o) = (\partial^2 f/\partial z_1\partial z_2)(o) = o.$$

(iii) Das Ideal $M = (z_1^2, z_2^2, z_1z_2, z_2-z_1z_3) \subset \mathbb{C}[z_1,z_2,z_3]$. Dies Ideal besitzt keinen Noetherschen Operator mit konstanten Koeffizienten. Um dies zu sehen, suche man zunächst alle Lösungen A des Gleichungssystem (1.33) für $P_1 = z_1^2$, $P_2 = z_2^2$, $P_3 = z_1z_2$, $P_4 = z_2-z_1z_3$, welche bezüglich der charakteristischen Varietät $V(M) = \{z_1 = z_2 = o\}$ normal sind:

$$A(z,\partial/\partial z) = \sum_{i+j \leq d} a_{ij}(z)(\partial^{i+j}/\partial z_1^i\partial z_2^j).$$

Da $z_1^i z_1^j \in M$ für $i+j \geq 2$, muß $d \leq 1$ sein.
Die Gleichung $o = (AP_4)|V(M) = (a_{o1}-z_3a_{1o})|V(M)$ impliziert schließlich, daß die allgemeine - bezüglich V(M) normale - Lösung von (1.33) die folgende Gestalt hat

(1.35) $A = a(\partial/\partial z_1) + az_3(\partial/\partial z_2) + b$ auf $V(M)$.

Der von

$$(Id, V(M)) \text{ und } ((\partial/\partial z_1) + z_3(\partial/\partial z_2), V(M))$$

erzeugte (normale) Noethersche Operator $\mathcal{N}_o$ hat nichtkonstante Koeffizienten. Es ist $M = M_{\mathcal{N}_o}$. In der Tat, man hat für jedes $f \in \mathbb{C}[z_1,z_2,z_3]$ eine Taylorentwicklung

$$f \equiv f_{oo} + f_{1o}\cdot z_1 + f_{o1}\cdot z_2 \qquad \mathrm{mod}(P_1,P_2,P_3)$$

mit f_{oo}, f_{1o}, $f_{o1} \in \mathbb{C}[z_3]$, so daß $f_{oo} = o$ aus $(Id,V(M))f = o$ und $f_{1o} + z_3\cdot f_{o1} = o$ - also $f_{1o}\cdot z_1 + f_{o1}\cdot z_2 = f_{o1}\cdot P_4$ - aus $((\partial/\partial z_1) + z_3(\partial/\partial z_2), V(M))f = o$ folgt. Insbesondere ist M primär (siehe 1.23)).

Sei $\mathcal{N}$ ein beliebiger zu M gehöriger Noetherscher Operator. Betrachte die Noetherschen Operatoren $\mathcal{N}_1 = \{(A,V) \in \mathcal{N};\ V = V(M)\}$ und $\mathcal{N}_2 = \mathcal{N} - \mathcal{N}_1$. Wegen $V(M_{\mathcal{N}_2}) \subsetneqq V(M)$, gibt es ein $f \in \mathbb{C}[z]$-$I(V(M))$ mit $f\cdot\mathbb{C}[z] \subset M_{\mathcal{N}_2}$. Dann ist $f\cdot M_{\mathcal{N}_1} \subset M$ und folglich $M_{\mathcal{N}_1} \subset M$, denn M ist primär. Also ist auch $\mathcal{N}_1$ ein zu M gehöriger Noetherscher Operator. $\mathcal{N}_1$ ist primär.
Dem Beweis von (1.28.ii) folgend, erhält man jetzt einen Operator A wie in (1.35) mit $a \notin I(V(M))$ als $\mathbb{C}$-lineare Kombination endlich vieler Operatoren

$$(\partial/\partial z_3)^i\cdot[[\ldots[B,z_3],\ldots],z_3] \qquad (j \text{ Klammern}, i \le j)$$

mit $B \in \mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}$. (Die Diskriminante $\Delta \neq o$ ist hier eine Konstante.) Folglich kann $\mathcal{N}$ nicht nur aus Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten bestehen.

(iv) Der Fall $n = 1$. Sei P eine $K \times K$-Matrix von Polynomen in einer komplexen Variablen $z \in \mathbb{C}$. Die Determinante von P, $\det P$, sei nicht identisch Null. Ein Noetherscher Operator für den $\mathbb{C}[z]$-Modul $M := {}^tP \cdot \mathbb{C}[z]^K \subset \mathbb{C}[z]^K$ wird dann gegeben durch die Menge aller $(A, \{z_o\})$ mit

$$A = \sum_{o}^{m-1} A_j (d/dz)^j$$

wobei $z_o \in \mathbb{C}$ und $A_o, \ldots, A_{m-1} \in \mathbb{C}^K$ die Gleichungen

$$(1.36) \qquad \sum_{k}^{m-1} \frac{j!}{(j-k)!} P^{(j-k)}(z_o) \cdot {}^tA_j = o \qquad \text{für } k = o,1,\ldots,m-1$$

erfüllen. ($m > o$ ist die Ordnung der Nullstelle $\det P(z_o) = o$.) In der Tat, nach der Cramerschen Regel ist $\det({}^tP) \cdot \mathbb{C}[z]^K \subset M$, und die Gleichungen (1.36) besagen gerade, daß für $k = o,1,\ldots,m-1$

$$A((z-z_o)^k \cdot {}^tP)(z_o) = o.$$

Dem Spezialfall $P(z) = z \cdot I - Q$, Q eine konstante Matrix, entspricht per Fouriertransformation ein explizites gewöhnliches Differentialgleichungssystem erster Ordnung. Hier vereinfacht sich (1.36) zu den wohlbekannten Relationen ($A_m := o$)

$$(k+1)A_{k+1} + (z_o \cdot I - Q)A_k = o \qquad \text{für } k = o,1,\ldots,m-1.$$

Ist P eine $L \times K$-Matrix von Polynomen in $z \in \mathbb{C}$ mit Rang ${}^tP(z) < K$ für alle $z \in \mathbb{C}$, so ist $\mathbb{C}$ die charakteristische Varietät des Moduls $M := {}^tP \cdot \mathbb{C}[z]^L \subset \mathbb{C}[z]^K$. Mit linearer Algebra gewinnt man $A \in \mathbb{C}[z]^K$, $A \neq o$, mit $(A, \mathbb{C})M = o$. Wie in (iii) wird es im allgemeinen keinen zu M gehörigen Noetherschen Operator mit konstanten Koeffizienten geben.

(iv) Der Fall $n = 1$. Sei P eine $K \times K$-Matrix von Polynomen in einer komplexen Variablen $z \in \mathbb{C}$. Die Determinante von P, det P, sei nicht identisch Null. Ein Noetherscher Operator für den $\mathbb{C}[z]$-Modul $M := {}^tP \cdot \mathbb{C}[z]^K \subset \mathbb{C}[z]^K$ wird dann gegeben durch die Menge aller $(A, \{z_o\})$ mit

$$A = \sum_{o}^{m-1} A_j (d/dz)^j$$

wobei $z_o \in \mathbb{C}$ und $A_o, \ldots, A_{m-1} \in \mathbb{C}^K$ die Gleichungen

$$(1.36) \quad \sum_{k}^{m-1} \frac{j!}{(j-k)!} P^{(j-k)}(z_o) \cdot {}^tA_j = o \qquad \text{für } k = o,1,\ldots,m-1$$

erfüllen. ($m > o$ ist die Ordnung der Nullstelle $\det P(z_o) = o$.) In der Tat, nach der Cramerschen Regel ist $\det({}^tP) \cdot \mathbb{C}[z]^K \subset M$, und die Gleichungen (1.36) besagen gerade, daß für $k = o,1,\ldots,m-1$

$$A((z-z_o)^k \cdot {}^tP)(z_o) = o.$$

Dem Spezialfall $P(z) = z \cdot I - Q$, Q eine konstante Matrix, entspricht per Fouriertransformation ein explizites gewöhnliches Differentialgleichungssystem erster Ordnung. Hier vereinfacht sich (1.36) zu den wohlbekannten Relationen ($A_m := o$)

$$(k+1)A_{k+1} + (z_o \cdot I - Q)A_k = o \qquad \text{für } k = o,1,\ldots,m-1.$$

Ist P eine $L \times K$-Matrix von Polynomen in $z \in \mathbb{C}$ mit Rang ${}^tP(z) < K$ für alle $z \in \mathbb{C}$, so ist $\mathbb{C}$ die charakteristische Varietät des Moduls $M := {}^tP \cdot \mathbb{C}[z]^L \subset \mathbb{C}[z]^K$. Mit linearer Algebra gewinnt man $A \in \mathbb{C}[z]^K$, $A \neq o$, mit $(A, \mathbb{C})M = o$. Wie in (iii) wird es im allgemeinen keinen zu M gehörigen Noetherschen Operator mit konstanten Koeffizienten geben.

Anmerkungen

(a) Statt des von Ehrenpreis verwendeten Begriffs "multiplicity variety" wird hier - Palamodov folgend - der des Noetherschen Operators verwendet. Mit dieser Namensgebung bezog sich Palamodov auf die Noetherschen Bedingungen in der algebraischen Geometrie. Diese geben ein geometrisches Kriterium für die Zugehörigkeit eines Polynoms zu einem gegebenen Ideal.

(b) Die von Ehrenpreis [9], Palamodov [2o] und Björk [7] betrachteten multiplicity varieties bzw. Noetherschen Operatoren sind im wesentlichen normale Noethersche Operatoren. In [21] gibt Palamodov eine Klasse von zu einem Modul gehörigen Noetherschen Operatoren an, welche allgemeiner als die in [2o] betrachtete ist. Die Definition dieser ist jedoch noch an die Vorgabe einer Primärzerlegung des Moduls geknüpft. Man erkennt aus der Theorie primärer Noetherscher Operatoren in Abschnitt 1.4, daß eine solche Einschränkung nicht nötig ist. O. Liess [17] definiert die Zugehörigkeit Noetherscher Operatoren zu Moduln über den Divisionssatz in den Keimen holomorpher Funktionen. Diese Definition ist im wesentlichen äuqivalent zu (1.2). Dies kann man aus (1.21) und dem (semi-)lokalen Divisionssatz in Kapitel 2 ersehen.

(c) Mit den offensichtlichen Änderungen gilt der Normalisierungssatz (1.7) auch für irreduzible Keime analytischer Varietäten (siehe Gunning-Rossi [11], III.A. oder Narasimhan [19], Chpt. III). Ferner ist der Ring $\mathcal{A}_z$ der Keime holomorpher Funktionen in $z \in \mathbb{C}^n$ ein Noetherscher Ring, für den der Nullstellensatz gilt. Also ist die in Kapitel 1 gegebene Theorie auch für $\mathcal{A}_z$ an Stelle von $\mathbb{C}[z]$ gültig.

(d) Palamodov wies darauf hin, daß man nicht zu jedem Modul einen Noetherschen Operator mit konstanten Koeffizienten finden kann. Das in (iii) gegebene Beispiel ist eine leichte Modifikation seines Beispiels in [2o], Chpt. IV, § 4.4°. Plausibel wird dieses Phänomen, wenn man bedenkt, daß sich der Kern des linearen Gleichungssystems (1.33) im Raum der möglichen Koeffizienten der Differentialoperatoren A in Abhängigkeit von $z \in V$ "drehen" kann. Eine vollständige Lösung von (1.33), d.h. ein Noetherscher Operator, kann daher nicht nur konstante Koeffizienten haben.

KAPITEL 2
SEMILOKALE DIVISION UND INTERPOLATION

In diesem Kapitel werden Noethersche Operatoren und Moduln über dem Ring der Keime holomorpher Funktionen $\mathcal{A}_z$ im Punkte $z \in \mathbb{C}^n$ untersucht. Im Divisionssatz (2.28) wird gezeigt, daß der zu einem Noetherschen Operator $\mathcal{N}$ gehörige $\mathcal{A}_z$-Untermodul Kern $\mathcal{N} \subset \mathcal{A}_z^K$ mit dem von $M_{\mathcal{N}}$ in $\mathcal{A}_z^K$ erzeugten $\mathcal{A}_z$-Untermodul übereinstimmt. Das zweite Hauptergebnis ist der Interpolationssatz (2.31). Dieser besagt im wesentlichen, daß jeder Noethersche Operator eine - geeignet beschränkte - Rechtsinverse besitzt.

Das Studium allgemeiner Noetherscher Operatoren wird über das primärer auf das normaler zurückgeführt. Die Untersuchung letzterer reduziert sich auf die spezieller normaler Noetherscher Operatoren, nämlich den Polynomrelationen auf $\mathbb{C}^n$ (in Abschnitt 2.2) und den Restriktionen - auch höherer Ordnung - auf irreduzible algebraische Varietäten (in Abschnitt 2.3). Der Reduktion primärer Noetherscher Operatoren auf normale dient die Untersuchung tangentialer Differentialoperatoren in Abschnitt 2.4.

Alle Ergebnisse dieses Kapitels werden in der benötigten semilokalen Fassung bewiesen. Das heißt, es werden auf Kugeln definierte holomorphe Funktionen konstruiert - die Repräsentanten der Keime - mit geeigneten Abschätzungen der Kugelradien von unten und der sup-Normen der Funktionen von oben.

2.1 Der Vorbereitungssatz

Im Folgenden wird eine quantitative Fassung des Weierstraßschen Vorbereitungssatzes für durch Polynome gegebene Keime gezeigt.

Sei $P \in \mathbb{C}[z]$ ein Polynom vom Grade m. P sei nichtcharakteristisch bezüglich des Vektors $(o,\cdot\cdot\cdot,o,1)$, d.h. der Koeffizient von z_n^m sei nicht Null.

Mit U wird hier und im ganzen Kapitel immer eine Kugel im $\mathbb{C}^n$ mit Mittelpunkt $\zeta(U) \in \mathbb{C}^n$ und mit Radius $o < \rho(U) < 1$ bezeichnet. Liegt eine Variablenaufspaltung $z = (z', z'')$, $z' \in \mathbb{C}^k$, $z'' \in \mathbb{C}^{n-k}$, für $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ vor, so sind U' und U_i - zu gegebenem U - Kugeln in den z'-bzw. z_i-Variablen mit Radien $o < \rho(U')$, $\rho(U_i) < 1$ und Mittelpunkten $\zeta(U') = \zeta'$, $\zeta(U_i) = \zeta_i$, wobei $\zeta = \zeta(U)$.

In diesem Abschnitt ist $z' = (z_1, \ldots, z_{n-1})$.

(2.1) ***LEMMA.*** *Sei $P \in \mathbb{C}[z]$ wie oben gegeben. Dann gibt es Konstanten c, $C > o$, so daß es zu jeder Kugel U Kugeln U' und U_n mit $U' \times U_n \subset\subset U$, und*

$$\rho(U_n) \geq \rho(U)/2\ ,\ \rho(U') \geq c(\rho(U)/(1+|\zeta(U)|))^m$$

gibt, mit denen folgendes gilt:

(i) $|P(z)| \geq c\cdot\rho(U)^m$ *für alle* $z \in U' \times \partial U_n$.

(ii) *Es gibt Polynome P^+ und P^- in der Variablen z_n mit Koeffizienten in $\mathcal{A}(U')$, so daß $P = P^-\cdot P^+$. P^+ hat 1 als führenden Koeffizienten, und die Nullstellen von $P^+(z',\cdot)$ liegen in U_n für jedes $z' \in U'$. Außerdem ist*

für alle $z \in U' \times U_n$

$$|P^-(z)| \geq c\cdot\rho(U)^m.$$

(iii) *Zu jedem* $f \in \mathcal{A}(U)$ *gibt es holomorphe Funktionen* $g \in \mathcal{A}(U' \times U_n)$ *und* $h_o,\ldots,h_{m^+-1} \in \mathcal{A}(U')$ (m^+ = *Polynomgrad von* P^+) *mit*

$$f = Pg + h \quad \text{in } U' \times U_n$$

wobei $h(z) = \sum_o^{m_+-1} h_{m_+-1-j}(z')z_n^j$. *Die Funktionen* g *und* h_j *sind hierdurch eindeutig bestimmt.*

Ferner gelten die Abschätzungen

$$\sup_{U'\times U_n} |g| \leq c\cdot\rho(U)^{-m}\cdot \sup_U |f|,$$

$$\sup_{U'} |h_j| \leq c\cdot\rho(U)^{-m_+}\cdot(1+|\zeta(U)|)^j\cdot\sup_U |f|$$

für $j = o,1,\ldots,m_+-1$.

<u>Beweis.</u> Setze $\zeta = \zeta(U)$ und $\rho = \rho(U)$. Die Radien $\rho' = \rho'(U)$ und $\rho_n = \rho(U_n)$ werden so bestimmt, daß mit einer Konstanten $C_1 > o$ gilt

(2.2) $\quad z' \in U',\ P(z',z_n) = o \Rightarrow \big|\rho_n - |z_n-\zeta_n|\big| \geq 2C_1\rho$.

Mit einer Linearfaktorzerlegung folgt hieraus

(2.3) $\quad |P(z',z_n)| \geq c\rho^m$ für $z' \in U', \big|\rho_n-|z_n-\zeta_n|\big| \leq C_1\rho$,

und insbesondere folgt dann (i).

Für $z' = \zeta'$ zeigt man (2.2) mit einem einfachen Überdeckungsargument: Weil das Polynom $P(\zeta',\cdot)$ im Kreisring $\rho/2 \leq |z_n-\zeta_n| \leq$ $\leq 3\rho/4$ höchstens m Nullstellen hat, findet man einen Radius ρ_n,

$\rho/2 \leq \rho_n \leq 3\rho/4$, so daß (2.2) in diesem Fall mit $2C_1 = 1/8(m+1)$ erfüllt ist. Setzt man $\rho' = c(\rho/(1+|\zeta|))^m < \rho/4$ mit genügend kleinem $c > o$ in die Mittelwertabschätzung

$$|P(z',z_n)-P(\zeta',z_n)| \leq C(1+|\zeta|)^{m-1}\cdot\rho', \quad |z'-\zeta'| < \rho', \ z \in U,$$

ein, so erhält man, da (2.3) für $z' = \zeta'$ bereits bewiesen ist,

$$(2.4) \quad |P(z',z_n)-P(\zeta',z_n)| < \tfrac{1}{2}|P(\zeta',z_n)|$$

$$\text{für alle } z' \in U', \ |\rho_n - |z_n-\zeta_n|| \leq C_1\rho .$$

Nach Halbierung von C_1 folgt (2.2).

Die Anzahl m_+ (bzw. m_-) der Nullstellen von $P(z',\cdot)$ in U_n (bzw. $\mathbb{C} - \bar{U}_n$) ist unabhängig von $z' \in U'$. Dies folgt aus (2.4) mit Rouché's Theorem. Ohne Einschränkung kann man annehmen, daß der Koeffizient von z_n^m in P gleich 1 ist. Ist $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und ist $\mathcal{P}$ die Menge der normierten Polynome vom Grade m in einer komplexen Variablen, welche keine Nullstellen auf dem Rand von Ω haben, so ist jedes symmetrische Polynom in den in Ω enthaltenen Nullstellen der $p \in \mathcal{P}$ eine holomorphe Funktion der Koeffizienten von p. In der Tat, diese Funktion ist nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz holomorph über die Diskriminantenmenge fortsetzbar. Die Koeffizienten der folgenden Polynome in z_n sind folglich holomorph in $z' \in U'$

$$P^-(z',z_n) = \prod_{\substack{P(z',\lambda)=o \\ |\lambda-z_n|>\rho_n}} (z_n-\lambda),$$

$$P^+(z',z_n) = \prod_{\substack{P(z',\lambda)=o \\ |\lambda-z_n|<\rho_n}} (z_n-\lambda) = \sum_{o}^{m_+} p^+_{m_+-j}(z')\cdot z_n^j .$$

Aus (2.2) schließt man für beide Vorzeichen auf

$(2.5)_\pm$ $|P^\pm(z)| \geq c\cdot\rho^{m_\pm}$ für $z' \in U'$, $|\rho_n - |z_n-\zeta_n|| \leq C_1\rho$.

Nach dem Maximumprinzip gilt die Abschätzung

$(2.5)_-$ auch auf $U' \times U_n$. Es ist natürlich $P = P^-P^+$. Damit ist (ii) gezeigt.

Zum Beweis von (iii) sei jetzt $f \in \mathcal{A}(U)$ gegeben. Durch die Integrale

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i\ P^-(z)} \int\limits_{|\lambda-\zeta_n|=\rho_n+C_1\rho} \frac{f(z',\lambda)}{P^+(z',\lambda)} \cdot \frac{d\lambda}{\lambda-z_n},$$

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda-\zeta_n|=\rho_n} \frac{f(z',\lambda)}{P^+(z',\lambda)} \cdot \frac{P^+(z',\lambda)-P^+(z',z_n)}{\lambda-z_n}\, d\lambda,$$

werden auf $U' \times U_n$ holomorphe Funktionen g und h definiert. Mit der Cauchyschen Integralformel erhält man

$$f = Pg + h \text{ in } U' \times U_n .$$

h ist ein Polynom vom Grade $<m_+$ in z_n, denn

$$\frac{P^+(z',\lambda)-P^+(z',z_n)}{\lambda - z_n} = \sum_{j=o}^{m_+-1} \Big(\sum_{i>j} P^+_{m^+-i}(z')\lambda^{i-j-1}\Big)\cdot z_n^j .$$

Die die Koeffizienten von h definierenden Integrale

$$h_{m_+-1-j}(z') = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda-\zeta_n|=\rho_n} \frac{f(z',\lambda)}{P^+(z',\lambda)} \Big(\sum_{i>j} P^+_{m^+-i}(z')\lambda^{i-j-1}\Big) d\lambda$$

kann man mit $(2.5)_+$ unter Verwendung von $|\lambda| \leq 1+|\zeta|$ und

(2.6) $|p_i^+(z')| \leq C(1+|\zeta|)^i$, $z' \in U'$, $i = o,1,\ldots,m^+-1$,

wie gewünscht abschätzen. (2.6) folgt leicht aus der Definition von P^+. Mit Hilfe von (2.5) kann man auch g über sein definierendes Integral, wie in (iii) behauptet, abschätzen. Das Nullpolynom ist das einzige Polynom vom Grade $< m_+$, das für ein $z' \in U'$ in den in U_n enthaltenen Nullstellen (mit Vielfachheiten) von $P(z',\cdot)$ verschwinden kann. Folglich sind g und h in (iii) eindeutig bestimmt. ■

2.2 Der Noethersche Operator $(Q,\mathbb{C}^n)$

In diesem Abschnitt wird eine quantitative Version der Flachheit des Ringes der holomorphen Keime $\mathcal{A}_z$ über dem Polynomring $\mathbb{C}[z]$ gezeigt.

Es wird oft nötig sein, Kugeln U geeignet zu verkleinern. Folgende Notation und Konvention ist hierfür zweckmäßig: U_* ist stets die zu U konzentrische Kugel mit Radius

$$\rho(U_*) = (\rho(U)/(2+|\zeta(U)|))^N$$

für ein $N \geq 1$. U'_* ist die zu U' konzentrische Kugel in den ζ'-Variablen mit Radius $\rho(U'_*) = (\rho(U')/(2+|\zeta(U)|))^N$, $N \geq 1$. Hierbei ist N stets eine Konstante, die nicht von der Vorgabe von U und von anderen von U abhängenden Daten (z.B. U' oder $f \in \mathcal{A}(U)$) abhängt. Jedoch wird N abhängen von eventuell gegebenen Varietäten, Noetherschen Operatoren, Moduln, Erzeugendensystemen von Moduln u.ä. Man beachte noch, daß $U_{**} := (U_*)_*$ nach Vergrößerung von N ein U_* enthält.

(2.7) SATZ. Sei $Q = (Q_{ij})$ eine $L \times K$-Matrix von Polynomen $Q_{ij} \in \mathbb{C}[z]$. Der $\mathbb{C}[z]$-Modul der Relationen

$$M = \{(f_1,..,f_K) \in \mathbb{C}[z]^K;\ \sum_1^K Q_{ij}\, f_j = o,\ \forall i = 1,\dots,L\}$$

werde von $P_1,..,P_r \in M$ erzeugt. Dann gibt es für jedes U und jedes $f = (f_1,..,f_K) \in \mathcal{A}(U)^K$ mit

$$\sum_1^K Q_{ij}\, f_j = o \text{ auf } U \text{ für } i = 1,\dots,L,$$

ein $v = (v_1,..,v_r) \in \mathcal{A}(U_*)^r$ mit

$$\sum_1^r v_i P_i = f \text{ auf } U_*\ ,$$

$$\rho(U_*)\cdot \sup_{U_*}|v| \ \le\ \sup_U |f|.$$

Dieser Satz ist ein Spezialfall des semilokalen Divisionssatzes (2.28).

Beweis. Der Satz wird mit einer Induktion über L und n bewiesen.

(a) Sei zunächst L > 1. Der Satz sei für kleinere L bereits bewiesen. Betrachte den $\mathbb{C}[z]$-Modul

$$M_1 = \{f \in \mathbb{C}[z]^K;\ \sum_1^K Q_{1j}\, f_j = o\}.$$

Wähle ein endliches Erzeugendensystem $R_1,\dots,R_s$ für M_1. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es ein $w = (w_1,\dots,w_s) \in \mathcal{A}(U_*)^s$ mit

$$\sum_1^s w_i R_{ji} = f_j \text{ in } U_* \quad \text{für } j = 1,\dots,K,$$

$$\rho(U_*) \cdot \sup_{U_*} |w| \leq \sup_U |f| \quad .$$

Hier ist $R_i = (R_{1i},\dots,R_{Ki})$.

Betrachte nun den $\mathbb{C}[z]$-Modul M' aller $g \in \mathbb{C}[z]^s$, welche die Relationen

$$\sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^s g_i R_{ji} Q_{lj} = o$$

für alle $l = 1,\dots,L$ erfüllen. Für $l = 1$ ist diese Gleichung automatisch erfüllt. Also ist auf M' die Induktionsvoraussetzung anwendbar. Wähle ein endliches Erzeugendensystem $S_1,\dots,S_t$ für den Modul M'. w erfüllt die M' definierenden Relationen. Folglich gibt es ein $u = (u_1,\dots,u_t) \in \mathcal{A}(U_{**})^t$ mit

$$\sum_1^t S_{il} u_l = w_i \text{ in } U_{**} \text{ für } i = 1,\dots,s,$$

$$\rho(U_{**}) \cdot \sup_{U_{**}} |u| \leq \sup_{U_*} |w|,$$

wobei $S_l = (S_{1l},\dots,S_{sl})$.

Somit erhält man

$$\sum_{i=1}^s \sum_{l=1}^t R_{ji} S_{il} u_l = f_j \text{ in } U_{**} \quad \text{für } j = 1,\dots,K.$$

Die Polynomvektoren $(\sum_1^s R_{1i}S_{il},\ldots,\sum_1^s R_{Ki}S_{il})$, $l = 1,\ldots,t$, gehören zu M. Stellt man sie linear über $\mathbb{C}[z]$ durch $P_1,\ldots,P_r$ dar, so gewinnt man schließlich das gewünschte v.

(b) Sei jetzt L = 1. Der Satz sei im (n-1)-dimensionalen Fall bereits für alle L bewiesen. (Der Induktionsanfang $n = o$ ist trivial.) Nach einer linearen Koordinatentransformation kann man annehmen, daß der Vektor $(o,\ldots,o,1)$ nichtcharakteristisch für $Q_1,\ldots,Q_K$ ist und daß Q_1 den maximalen Polynomgrad m aller Q_j in z_n hat. Wendet man Lemma (2.1) auf $P = Q_1$ an, so erhält man Kugeln U' und U_n mit $U_* \subset U' \times U_n \subset U$ und Funktionen $g_j \in \mathcal{A}(U' \times U_n)$, $h_{ji} \in \mathcal{A}(U')$ mit

$$f_j = Q_1 \cdot g_j + h_j \text{ in } U' \times U_n \text{ für } j = 2,\ldots,K,$$

$$h_j = \sum_o^{m_+-1} h_{j,m_+-1-i} \cdot z_n^i,$$

und

$$\rho(U_*) \cdot \sup_{U' \times U_n} |g_j| \leq \sup_U |f|,$$

$$\rho(U_*) \cdot \sup_{U'} |h_{ij}| \leq \sup_U |f|,$$

für alle i und j. Mit $h_1 = f_1 + \sum_2^K Q_j g_j$ gilt dann

$$(f_1,\ldots,f_K) = (-Q_2,Q_1,o,\ldots)\, g_2 + \ldots + (-Q_K,o,\ldots,Q_1) \cdot g_K + (h_1,\ldots,h_K).$$

Weil $(-Q_2,Q_1,o,\ldots),\ldots,(-Q_K,o,\ldots,Q_1) \in M$, folgt $Q_1h_1 + \ldots + Q_Kh_K = o$. Mit der Faktorisierung $Q_1 = Q^+Q^-$ nach (2.1.ii) hat man daher

$$(2.8) \qquad (h_1Q^-) \cdot Q^+ + \sum_2^K h_jQ_j = o.$$

h_1Q^- ist ein Polynom in z_n; denn dividiert man im Polynomring $\mathcal{A}(U')[z_n]$ das Polynom $-\sum_2^K h_jQ_j$ durch Q^+, so erhält man

$a,b \in \mathcal{A}(U')[z_n]$ mit

$$\sum_2^K h_j Q_j + a \cdot Q^+ + b = o, \text{ Grad } b < m^+.$$

Subtrahiert man diese Gleichung von (2.8), so schließt man aus der Eindeutigkeitsaussage in (2.1.iii), daß $b = o$ und $a = h_1 Q^-$. Außerdem erkennt man, daß $h_1 Q^-$ höchstens den Grad $m-1$ besitzt. Also ist

$$h' = (h_1',\dots,h_K') = Q^-(h_1,\dots,h_K)$$

ein Polynom(-vektor) in z_n vom Grade $< m$, das die Relation

$$(2.9) \qquad \sum_1^K Q_j h_j' = o$$

erfüllt. Durch Koeffizientenvergleich in dem z_n-Potenzen erhält man ein zu (2.9) äquivalentes System $\mathbb{C}[z']$-linearer homogener Bedingungen für die Koeffizienten der Polynome h_j' $(z' = (z_1,\dots,z_{n-1}))$. Dieses Gleichungssystem wird durch eine Matrix von Polynomen aus $\mathbb{C}[z']$ gegeben, welche sich allein aus den Q_j bestimmt. Der zugehörige $\mathbb{C}[z']$-Modul der Relationen werde von $(B_{ij}^1),\dots,(B_{ij}^s) \in \mathbb{C}[z']^{mK}$, $o \le i < m$, $1 \le j \le K$, erzeugt. Dann ist also

$$\sum_1^K Q_j B_j^l = o \text{ für } l = 1,\dots,s,$$

wobei $B_j^l = \sum_{i<m} B_{ij}^l z_n^i$, und nach Induktionsvoraussetzung gibt es, da (2.9) gilt, ein $a = (a_1,\dots,a_s) \in \mathcal{A}(U_*')^s$ mit

$$h_j' = \sum_1^s a_l B_j^l \text{ in } U_*' \text{ für } j = 1,\dots,K,$$

$$\rho(U_*') \cdot \sup_{U_*'} |a| \le \sup_{U'} |h'|.$$

Zusammenfassend läßt sich f auf $U'_* \times U_n$ also so darstellen:

$$f = \sum_2^K g_j(-Q_j,o,\ldots,Q_1,o,\ldots) + \sum_1^s \frac{a_l}{Q^-}(B_1^l,\ldots,B_K^l).$$

Die Polynomvektoren $(-Q_j,o,\ldots,Q_1,o,\ldots)$ und $(B_1^l,\ldots,B_K^l)$ sind $\mathbb{C}[z]$-Linearkombinationen der $P_1,\ldots,P_r$. Setzt man diese in die erhaltende Darstellung für f ein, so erhält man das gesuchte v. Die behauptete Abschätzung an v folgt aus den für g_j, h_j and a_l erhaltenen Abschätzungen zusammen mit $|Q^-(z)| \geq c\rho(U)^m$, $z \in U' \times U_n$ (siehe (2.1.ii). ∎

Eine Konsequenz der Flachheit von $\mathcal{A}_z$ bezüglich des Polynomrings $\mathbb{C}[z]$ ist die Tatsache, daß endliche Durchschnittsbildung von Moduln mit dem Tensorieren mit $\mathcal{A}_z$ über $\mathbb{C}[z]$ kommutiert. Eine quantitative Version hiervon ist die

(2.1o) <u>*FOLGERUNG.*</u> *Seien M_1 und M_2 $\mathbb{C}[z]$-Untermoduln von $\mathbb{C}[z]^K$. M_l werde von $P_1^l,\ldots,P_{s_l}^l$, $l = 1,2$, erzeugt. $M_1 \cap M_2$ werde von $R_1,\ldots,R_r$ erzeugt. Sei U eine Kugel. Seien $v^l = (v_1^l,\ldots,v_{s_l}^l) \in \mathcal{A}(U)^{s_l}$, $l = 1,2$, gegeben mit*

$$\sum_1^{s_1} v_j^1 P_j^1 = \sum_1^{s_2} v_j^2 P_j^2 = f \text{ auf } U .$$

Dann gibt es ein $u = (u_1,\ldots,u_r) \in \mathcal{A}(U_*)^r$ mit

$$\sum_1^r u_i R_i = f \text{ auf } U_* ,$$

$$\rho(U_*)\cdot \sup_{U_*}|u| \leq \max_l \sup_U |v^l| \quad .$$

Beweis. Betrachte den $\mathbb{C}[z]$-Untermodul von $\mathbb{C}[z]^{s_1+s_2}$

$$M_o = \{(w^1,w^2) \in \mathbb{C}[z]^{s_1+s_2} \; ; \; \sum_1^{s_1} w_j^1 P_j^1 - \sum_1^{s_2} w_j^2 P_j^2 = o\} .$$

Wähle ein Erzeugendensystem $(Q_1^1,Q_1^2),\ldots,(Q_t^1,Q_t^2) \in \mathbb{C}[z]^{s_1+s_2}$ für M_o. Da (v^1,v^2) die M_o definierenden Relationen erfüllt, gibt es aufgrund von (2.7) $u' = (u_1',\ldots,u_t') \in \mathcal{A}(U_*)$ mit

$$v^l = \sum_1^t u_k' Q_k^l \text{ auf } U_* \text{ für } l = 1,2,$$

$$\rho(U_*) \sup_{U_*} |u'| \leq \max_l \sup_U |v^l| .$$

Also ist auf U_* für $l = 1,2$

$$f = \sum_1^{s_l} \sum_1^t u_k' Q_{jk}^l \; P_j^l$$

wobei $Q_k^l = (Q_{1k}^l,\ldots,Q_{s_l k}^l)$. Für $k = 1,\ldots,t$ gilt

$$\sum_1^{s_1} Q_{jk}^1 \; P_j^1 = \sum_1^{s_2} Q_{jk}^2 \; P_j^2 \in M_1 \cap M_2 .$$

Drückt man diese Elemente durch $R_1,\ldots,R_r$ aus, so erhält man die gesuchten u_i als $\mathbb{C}[z]$-Linearkombinationen der u_k'. ∎

Ist $M \subset \mathbb{C}[z]^K$ ein $\mathbb{C}[z]$-Untermodul und ist $d \in \mathbb{C}[z]-\{o\}$, dann definiert man den Modulquotienten

$$(M:d) = \{f \in \mathbb{C}[z]^K ; \; d \cdot f \in M\}.$$

Dies ist ein M umfassender $\mathbb{C}[z]$-Modul.

Es ist eine weitere Konsequenz der Flachheit von $\mathcal{A}_z$ bezüglich $\mathbb{C}[z]$, daß die Division (:) mit dem Tensorieren mit $\mathcal{A}_z$ über $\mathbb{C}[z]$ kommutiert. Eine quantitative Fassung hiervon ist die

(2.11) ***FOLGERUNG.*** *Sei $M \subset \mathbb{C}[z]^K$ ein $\mathbb{C}[z]$-Modul. Sei $d \in \mathbb{C}[z]$, $d \neq o$. M werde von $P_1, \ldots P_p$ und $(M:d)$ werde von $R_1, \ldots, R_r$ erzeugt. Sei U eine Kugel. Seien $f \in \mathcal{A}(U)^K$ und $v = (v_1, \ldots, v_p) \in \mathcal{A}(U)^p$ mit*

$$df = \sum_1^p v_j P_j \text{ auf } U \tag{2.12}$$

gegeben. Dann gibt es ein $u = (u_1, \ldots, u_r) \in \mathcal{A}(U_*)^r$ mit

$$f = \sum_1^r u_i R_i \text{ auf } U_* , \tag{2.13}$$

$$\rho(U_*) \cdot \sup_{U_*} |u| \leq \sup_U |v| .$$

Beweis. Betrachte den $\mathbb{C}[z]$-Modul der Relationen

$$M_o = \{(f, v_1, \ldots, v_p) \in \mathbb{C}[z]^{K+P};\ df - \sum_1^p v_j P_j = o\} .$$

M_o werde von $(S_1, T_1), \ldots, (S_s, T_s)$ erzeugt, $S_l \in \mathbb{C}[z]^K$, $T_l \in \mathbb{C}[z]^P$. Alle S_l gehören offenbar zu $(M:d)$. Nach Voraussetzung (2.12) erfüllt (f,v) die M_o definierenden Relationen. Aufgrund von (2.7) kann man daher $a = (a_1, \ldots, a_s) \in \mathcal{A}(U_*)^s$ finden mit

$$f = \sum_1^s a_l S_l \text{ auf } U_* ,$$

$$\rho(U_*) \cdot \sup_{U_*} |a| \leq \sup_U \max(|f|, |v|) .$$

Drückt man die S_l $\mathbb{C}[z]$-linear durch die R_i aus, so erhält man ein u mit (2.13) und

$$\rho(U_*)\cdot\sup_{U_*}|u| \leq \sup_{U} \max\,(|f|,|v|),$$

wobei die durch $*$ implizierte Konstante eventuell vergrößert werden muß. Ersetzt man in dieser Ungleichung U durch U_* und U_* durch U_{**}, so gewinnt man hieraus die gewünschte Abschätzung von $|u|$ mit Hilfe von (2.12) und

$$\rho(U_*)\cdot\sup_{U_*}|f| \leq \sup_{U}|df|.$$

Die vorstehende Ungleichung erhält man aus (2.1.iii) mit $P = d$, $g = f$, $h = o$ (Ehrenpreis-Malgrange Ungleichung). ∎

2.3 Der Noethersche Operator $(\partial^{\alpha}_{z''},V), |\alpha| \leq s$.

Es wird in diesem Abschnitt eine quantitative Form des Cartanschen Kohärenzsatzes für irreduzible algebraische Varietäten gezeigt.

Sei $V \subset \mathbb{C}^n$ eine irreduzible algebraische Varietät. V sei nach (1.7) normalisiert. Es werden auch die in (1.7) eingeführten Bezeichnungen verwendet. Insbesondere ist π die Projektion

$$\pi\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^k,\ z \mapsto z'.$$

(2.14) ***LEMMA.*** *Zu jeder Kugel U gibt es eine Kugel U' und einen Polykreis $D \subset \mathbb{C}^{n-k}$ mit Mittelpunkt ζ'', so daß $U_* \subset U' \times D \subset U$, $V \cap U' \times \partial D = \emptyset$ und*

(2.15) $\pi(V \cap U' \times D) = \pi(Q_1^{-1}(o) \cap U' \times D)$ *wenn* $V \cap U' \times D \neq \emptyset$.
Hier ist $\zeta = (\zeta', \zeta'') = \zeta(U)$.

Beweis. Setze $\delta_{n+1} = \rho(U)$. Man kann dann Radien $\rho_{k+1}, \ldots, \rho_n$ und $\delta_{k+1}, \ldots, \delta_n$ finden, so daß mit geeigneten Zahlen $N_j \geq 1$ gilt

$$\delta_j^2 + \rho_j^2 < \delta_{j+1}^2 \quad , \quad \delta_{j+1} \leq 2\rho_j,$$
$$(\delta_{j+1}/(2+|\zeta|))^{N_j} \leq \delta_j \quad ,$$

und

$$P_{j-k}(z) \neq o \text{ wenn } \sum_1^{j-1} |z_i - \zeta_i|^2 < \delta_j^2, \ |z_j - \zeta_j| = \rho_j,$$

für alle $j = k+1, \ldots, n$. In der Tat, es genügt, (2.1.i) nacheinander auf $P_{n-k}, P_{n-k-1}, \ldots, P_1$ anzuwenden. Setze nun

$$U' = \{z' \in \mathbb{C}^k; \ |z' - \zeta'| < \delta_{k+1}\},$$

$$D = U_{k+1} \times \ldots \times U_n,$$

mit $U_i = \{z_i \in \mathbb{C}; \ |z_i - \zeta_i| < \rho_i\}$, $i = k+1, \ldots, n$.
Dann hat man für alle i

(2.16) $\quad P_i(z) \neq o$ wenn $z \in U' \times U_{k+1} \times \ldots \times \partial U_{k+i} \times U_{k+i+1} \times \ldots \times U_n$.

Wegen $P_i \in I(V)$ folgt hieraus $V \cap U' \times \partial D = \emptyset$.

Es ist noch (2.15) zu zeigen. Die Inklusion "$\subset$" ist trivial. Sei $V \cap U' \times D \neq \emptyset$. Wähle $y \in V \cap U' \times D$. Sei nun $(z', z_{k+1}) \in U' \times U_{k+1}$ mit $Q_1(z', z_{k+1}) = P_1(z', z_{k+1}) = o$ gegeben. Es ist ein $z'' \in D$ mit $(z', z'') \in V$ zu finden. $z'' = (z_{k+1}, \ldots, z_n)$ wird mit einer Induktion über $j = 1, \ldots, n-k$ so konstruiert, daß gilt

(2.17) $\quad P_i(z',z_{k+1},\ldots,z_{k+i}) = o$ für $i = 1,\ldots,j$.

z_{k+1} ist schon gefunden. Angenommen, $z_{k+1} \in U_{k+1},\ldots,z_{k+j} \in U_{k+j}$ wären bereits gefunden, so daß (2.17) gilt.
In U_{k+j+1} haben $P_{j+1}(y_1,\ldots,y_{k+j},\lambda)$ und $P_{j+1}(z_1,\ldots,z_{k+j},\lambda)$ als Polynome in λ die gleiche Anzahl von Nullstellen. Da die Nullstellen eines (normierten) Polynoms stetig von seinen Koeffizienten abhängen, folgt dies aus (2.16). Wegen $P_{j+1}(y) = o$ gibt es daher ein $z_{k+j+1} \in U_{k+j+1}$, so daß (2.17) auch für $i = j+1$ gilt. Daher ist $z'' \in D$ mit $P_1(z',z'') = \ldots = P_{n-k}(z',z'') = o$ gefunden. Nach (1.7.iv) ist somit $(z',z'') \in V$ falls $\Delta(z') \neq o$. Da $\pi|V$ eigentlich ist, erhält man daher auch ein $z'' \in D$ mit $(z',z'') \in V$ wenn $z' \in U'$, $\Delta(z') = o$. ∎

Mit einer Hermite-Lagrange Interpolation kann man holomorphe Keime auf V durch Polynome in den bezüglich V transversalen Variablen $z'' = (z_{k+1},\ldots,z_n)$ interpolieren.

(2.18) ***LEMMA.*** *Seien eine Kugel U und eine holomorphe Funktion $f \in \mathcal{A}(U)$ gegeben. Seien U', D und U_* wie in (2.14).*
Sei $s \in \mathbb{N}_o$. Dann gibt es $g_{\beta j} \in \mathcal{A}(U')$, $\beta \in \mathbb{N}_o^{n-k}$, $|\beta| \le s$, $j = o,1,\ldots,e-1$ mit

$$(\partial^\alpha g/\partial z''^\alpha)(z) = \begin{cases} d(z')\ (\partial^\alpha f/\partial z''^\alpha)(z) & \text{für } z \in V \cap U' \times D \\ o & \text{für } z \in V \cap U' \times (\mathbb{C}^{n-k} - \bar{D}) \end{cases}$$

für alle $\alpha \in \mathbb{N}_o^{n-k}$, $|\alpha| \le s$, wobei

$$g = \sum_{|\beta|\leq s} \sum_{j<e} g_{\beta j}\cdot z_{k+1}^{j}\, Q^{\beta} \text{ auf } U' \times \mathbb{C}^{n-k}.$$

Ferner gilt die Abschätzung

$$(2.19) \quad \rho(U_*)\cdot \max_{\beta,j} \sup_{U'} |g_{\beta j}| \leq \max_{|\alpha|\leq s} \sup_{V\cap U} |\partial^{\alpha} f/\partial z''^{\alpha}|.$$

Das Polynom $d \in \mathbb{C}[z']-\{o\}$ kann unabhängig von U und f gewählt werden.

Beweis. (a) Betrachte zunächst den Fall $s = o$. Sei $z' \in U' - \Delta^{-1}(o)$. Dann gibt es genau e Vektoren $z'' = (z_{k+1},..,z_n) \in \mathbb{C}^{n-k}$ mit paarweise verschiedenen z_{k+1}-Komponenten, so daß $(z',z'') \in V$. Betrachte das lineare Gleichungssystem für $g_o(z'),...,g_{e-1}(z')$

$$(2.2o) \quad \sum_{j<e} g_j(z')z_{k+1}^{j} = \begin{cases} d_o(z')\cdot f(z',z'') & \text{für } (z',z'') \in V,\ z'' \in D, \\ o & \text{für } (z',z'') \in V,\ z'' \notin \bar{D}. \end{cases}$$

Hier ist $d_o(z') \neq o$ das Quadrat der Determinante - eine Vandermonde-Determinante - dieses Gleichungssystems. $d_o(z')$ ist wohldefiniert, denn eine Permutation der z'' ändert die Determinante nur um den Faktor ± 1. Um denselben Faktor ändern sich die Kofaktoren von (2.2o), wenn unter der Permution nur solche z'', $(z',z'') \in V$, miteinander vertauscht werden, die in derselben Komponente von $\mathbb{C}^{n-k} - \partial D$ liegen. Es gibt also eine eindeutige Lösung $g_o(z'),...,g_{l-1}(z')$ von (2.2o). d_o und alle g_j sind auf $U' - \Delta^{-1}(o)$ holomorph und beschränkt, denn man hat (da $P_j(z) = o$ impliziert: $|z_{k+j}| \leq C(1+|(z_1,..,z_{k+j-1})|)$)

(2.21) $\quad \sup\{|z''|;\ (z',z'') \in V\} \leq (2+|z'|)^N, \quad z' \in \mathbb{C}^k$,

für ein $N \in \mathbb{N}$. Also sind d_o und g_j nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz holomorph auf U' fortsetzbar. Da d_o nur von V abhängt, ist d_o eine ganze Funktion, die wegen (2.2o) nur polynomial wächst. Also ist $d_o \in \mathbb{C}[z']$, $d_o \neq o$. Da die $g_j(z')$ linear von den $f(z',z'')$, $(z',z'') \in V$, $z'' \in D$, abhängen, folgt mit (2.21)

$$\max_{j<e} \sup_{U'} |g_j| \leq (2+|\zeta(U)|)^N \cdot \sup_{V \cap U' \times D} |f|$$

mit einem anderen $N \geq 1$. Wegen der Dichte von $V-\Delta^{-1}(o)$ in V gilt (2.2o) für alle $z' \in U'$. Damit ist das Lemma für $s = o$ gezeigt.

(b) Sei jetzt $s > o$. Nach (a) gibt es $h_{\alpha j} \in \mathcal{A}(U')$ mit

$$\sum_{j<e} h_{\alpha j}(z') z_{k+1}^j = \begin{cases} d_o(z') \cdot (\partial^\alpha f/\partial z''^\alpha)(z) & \text{für } z \in V,\ z'' \in D, \\ o & \text{für } z \in V,\ z'' \notin \bar{D}, \end{cases}$$

für alle $z' \in U'$ und $\alpha \in \mathbb{N}_o^{n-k}$, $|\alpha| \leq s$, und

(2.22) $$\max_{\alpha,j} \sup_{U'} |h_{\alpha j}| \leq (2+|\zeta(U)|)^N \cdot \max_{|\alpha| \leq s} \sup_{V \cap U' \times D} |\partial^\alpha f/\partial z''^\alpha|.$$

Betrachte das Gleichungssystem für die $g_{\beta j} \in \mathcal{A}(U')$

$$(\partial^\alpha/\partial z''^\alpha) \Big(\sum_{|\beta| \leq s} \sum_{j<e} g_{\beta j}\, z_{k+1}^j\, Q^\beta \Big)$$

$$= d_1 \cdot \sum_{j<e} h_{\alpha j} z_{k+1}^j \quad \text{wenn } z \in V \cap U' \times \mathbb{C}^{n-k},\ |\alpha| \leq s.$$

Hier ist $d_1 \in \mathbb{C}[z']$ die Determinante dieses Gleichungssystem. Aufgrund der Eindeutigkeitsaussage in (1.8) ist $d_1 \neq o$. Die $g_{\beta j}$ und $d = d_o d_1$ sind die gewünschten Lösungen. Die Abschätzung (2.19) folgt aus (2.22) und

$$\max_{\beta,j} \sup_{U'} |g_{\beta j}| \leq (2+|\zeta(U)|)^N \max_{\alpha,j} \sup_{U'} |h_{\alpha j}|.$$

Damit ist das Lemma bewiesen. ∎

Zu $s \in \mathbb{N}_o$ definiere

$$I_s = \{f \in \mathbb{C}[z];\quad (\partial^\alpha f/\partial z''^\alpha) \in I(V) \text{ für alle } \alpha \in \mathbb{N}_o^{n-k}, |\alpha| \leq s\}.$$

Nach (1.23) ist I_s ein Primärideal.

(2.23) <u>*SATZ.*</u> *Sei $s \in \mathbb{N}_o$. Das Ideal I_s werde von $H_1,\ldots,H_L \in I_s$ erzeugt. Sei U eine Kugel, und sei $f \in \mathcal{A}(U)$ mit $(\partial^\alpha f/\partial z''^\alpha)|V = o$ für $\alpha \in \mathbb{N}_o^{n-k}, |\alpha| \leq s$, gegeben. Dann gibt es $g_1,\ldots,g_L \in \mathcal{A}(U_*)$ mit*

$$f = \sum_1^L g_l H_l \quad \text{auf} \quad U_*,$$

$$\rho(U_*) \cdot \max_l \sup_{U_*} |g_l| \leq \sup_U |f|.$$

<u>Beweis.</u> (a) Sei zunächst $s = o$. Beginnend mit einer Division von f durch P_{n-k} nach (2.1.iii),

$$f = g_{n-k}\, P_{n-k} + h_{n-k}\ ,$$

und fortfahrend über $j = n-k, n-k-1,\ldots,2$ mit Divisionen

$$h_j = g_{j-1}P_{j-1} + h_{j-1},$$

welche als Divisionen der Koeffizienten der h_j nach (2.1.iii) ausgeführt werden, erhält man holomorphe Funktionen g_j und Polynome h_j in den Variablen $z_{k+j},\ldots,z_n$ (mit holomorphen Koeffizienten), so daß

$$f = \sum_1^{n-k} g_iP_i + h_1 \text{ in } U' \times D,$$

$$\rho(U_*)\cdot\max_i \sup_{U'\times D} |g_i| \leq \sup_U |f|,$$

$$\rho(U_*)\cdot\max_{|\gamma|<\mu} \sup_{U'} |\tilde{h}_\gamma| \leq \sup_U |f|,$$

wobei $\tilde{h}_\gamma \in \mathcal{A}(U')$, $\gamma \in \mathbb{N}_o^k, |\gamma| < \mu := \sum_1^{n-k} m_i$, m_i = Grad P_i, mit

$$h_1 = \sum_{|\gamma|<\mu} \tilde{h}_\gamma\cdot(z'')^\gamma.$$

Hier sind U', $D = U_{k+1}\times\ldots\times U_n$ und U_* wie im Beweis von (2.14). Aufgrund von (2.1.i) hat man außerdem noch

$$|P_j(z)| \geq c\rho(U)^{m_j}, \quad z \in U'\times U_{k+1}\times\ldots\times\partial U_{k+j}\times U_{k+\rho+1}\times\ldots\times U_n.$$

Hat P_j keine Nullstellen in $U'\times D$, kann man folglich f/P_j über das Maximumprinzip abschätzen, so daß in diesem Fall der Satz für $s = o$ bewiesen ist.

Betrachte daher jetzt den Fall, daß jedes P_j in $U'\times D$ eine Nullstelle besitzt. Dann gibt es sogar zu jedem $(z',z_{k+1}) \in U'\times U_{k+1}$ mit $Q_1(z',z_{k+1}) = o$ noch $z_{k+2} \in U_{k+2},\ldots,z_n \in U_n$ mit $z = (z',z_{k+1},\ldots,z_n) \in V$. In der Tat, dies schließt man wie im Beweis von (2.15), wenn man noch beachtet, daß das dort verwendete $y \in U'\times D$ mit $P_j(y) = o$ ruhig von j abhängen darf. Ein Polynom $h \in \mathcal{A}(U')[z_{k+1}]$, welches auf $V \cap U'\times D$ verschwindet, kann man dann (ohne Rest) durch Q_1 dividieren, d.h. h/Q_1 ist holomorph in $U' \times D$. Dies folgt mit einer Anwendung von (2.1.iii) auf $P = Q_1$, $f = h$. $\Delta^\mu \cdot h_1$ ist ein Polynom in $(z', \Delta \cdot z'')$. Setzt man $\Delta \cdot z_{k+j} = Q_j + T_j$, $j \geq 2$, nach (1.7.iii) ein, so erhält man $\tilde{g}_2, \ldots, \tilde{g}_{n-k}$ und $h \in \mathcal{A}(U')[z_{k+1}]$ mit

$$\begin{aligned} \Delta^\mu h_1 &= \sum_2^{n-k} \tilde{g}_i \cdot Q_i + h \\ &= \sum_1^{n-k} \tilde{g}_i \cdot Q_i \end{aligned}$$

und $\tilde{g}_1 = h/Q_1$; denn $h|V \cap U' \times D = o$. Geeignete Abschätzungen für $\tilde{g}_2, \ldots, \tilde{g}_{n-k}$ erhält man aus denen für die $\tilde{h}_\gamma$, und für $\tilde{g}_1$ erhält man sie nach (2.1.iii). Man hat also die Darstellung

$$\Delta^\mu f = \sum_1^{n-k} (\Delta^\mu g_i P_i + \tilde{g}_i Q_i).$$

Weil $(I(V) : \Delta^\mu) = I(V)$ ist, folgt die behauptete Darstellung von f aus (2.11). Somit ist der Satz für $s = o$ bewiesen.

(b) Sei nun $s > o$. Nach Induktionsannahme sei der Satz bereits für $s-1$ bewiesen. Nach (1.8) ist $\Delta^t \cdot I_{s-1}$ in dem von allen Q^α, $|\alpha| = s$, erzeugten Ideal enthalten. Also gibt es $h_\beta \in \mathcal{A}(U_*)$, $|\beta| = s$, mit

$$(2.24) \qquad \Delta^t f = \sum_{|\beta|=s} h_\beta Q^\beta \text{ in } U_*,$$

$$\rho(U_*) \cdot \max_\beta \sup_{U_*} |h_\beta| \leq \sup_U |f|.$$

Es ist $(I_s : \Delta) = I_s$. Nach (2.11) genügt es daher $g_{\beta i} \in \mathcal{A}(U_{**})$, $|\beta| = s$, $i = 1, \ldots, n-k$ zu finden mit

$$\Delta^{\mu} h_{\beta} = \sum_{1}^{n-k} \tilde{g}_{\beta i}\, Q_i \text{ in } U_{**}\ ,$$

$$\rho(U_{**})\cdot \max_i \sup_{U_{**}} |g_{\beta i}| \leq \sup_{U_*} |h_{\beta}|\,.$$

Aufgrund von (a) reicht es hierfür, $h_{\beta}|V \cap U_* = o$, $|\beta| = s$, zu zeigen. Differenziert man (2.24) nach z", so erhält man für alle $\alpha \in \mathbb{N}_o^{n-k}, |\alpha| = s$, auf $V \cap U_*$

$$\begin{aligned} o &= (\partial^{\alpha}/\partial z''^{\alpha}) \left(\sum_{|\beta|=s} h_{\beta}\, Q^{\beta} \right) \\ &= (\partial^{\alpha}/\partial z''^{\alpha})\, (h_{\alpha}\, Q^{\alpha}) \\ &= h_{\alpha}\cdot q_{\alpha}, \end{aligned}$$

wobei q_{α} ein $|\alpha|$-faches Produkt der Polynome $(\partial Q_1/\partial z_{k+1})$ und Δ ist. Folglich ist $q_{\alpha} \neq o$ auf $V_o = V - \Delta^{-1}(o)$. Nach (1.7.v) erhält man daher wie gewünscht $h_{\alpha}|V \cap U_* = o$. ∎

2.4 Cauchyabschätzungen für tangentiale Differentialoperatoren

Ein zu einer algebraischen Untervarietät $V \subset \mathbb{C}^n$ tangentialer Differentialoperator T bildet das von I(V) in dem Ring $\mathcal{A}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ offen, erzeugte Ideal in sich ab. Dies folgt aus der Produktregel (1.4), denn mit T sind auch alle $[T, z_i]$ tangential zu V. Wegen (2.23) bildet T daher auch die Menge aller holomorphen Funktionen, die auf V verschwinden, in sich selbst ab. Der folgende Satz gibt - für irreduzible Varietäten -

eine quantitative Verallgemeinerung dieser Tatsache.

Sei $V \subset \mathbb{C}^n$ eine irreduzible algebraische Varietät. Normalisiere V nach (1.7).

(2.25) <u>SATZ.</u> *Sei T ein zu V tangentialer Differentialoperator. Für alle Kugeln U und alle $f \in \mathcal{A}(U)$ gilt dann*

$$\rho(U_*)\cdot \sup_{V\cap U_*} |Tf| \le \sup_{V\cap U} |f|.$$

<u>Beweis.</u> Der Satz wird mit einer Induktion über die Ordnung von T bewiesen.

Operatoren o-ter Ordnung sind Multiplikationen mit Polynomen. Für diese ist die Behauptung trivial.

Sei $f \in \mathcal{A}(U)$. Aus (2.18) und (2.23) erhält man ein von U und f unabhängiges $d \in \mathbb{C}[z']$, $d \neq o$, und $H_l \in I(V)$, $g_l \in \mathcal{A}(U_*)$, $f_j \in \mathcal{A}(U')$, mit

$$(2.26)\qquad d\cdot f = \sum_{j<e} f_j\cdot z_{k+1}^j + \sum_1^L g_l\cdot H_l \text{ auf } U_*\ ,$$

$$\rho(U_*)\cdot\max_j \sup_{U'} |f_j| \le \sup_{V\cap U} |f|.$$

Hier ist wieder $U_* \subset U' \times D \subset U$ wie in (2.14). Wendet man T auf (2.26) an, so ergibt sich wegen der am Anfang dieses Abschnitts gemachten Bemerkung

$$T(df) = \sum_{j<e} T(f_j\cdot z_{k+1}^j) \text{ auf } V\cap U_*\ .$$

Cauchyabschätzung der Summanden liefert

$$\rho(U_{**})\cdot \sup_{V\cap U_{**}} |T(df)| \leq \max_j \sup_{U'} |f_j| .$$

Nach Induktionsvoraussetzung hat man bereits

$$\rho(U_*)\cdot \sup_{V\cap U_*} |[T,d]f| \leq \sup_{V\cap U} |f| .$$

Mit $d\cdot Tf = T(df)-[T,d]f$ erhält man zusammenfassend

$$\rho(U_*)\cdot \sup_{V\cap U_*} |d\cdot Tf| \leq \sup_{V\cap U} |f|$$

mit einem anderen U_* . Den Beweis des Satzes beendet daher die folgende Verallgemeinerung des Ehrenpreis-Malgrangeschen Lemmas.

(2.27) ***LEMMA.*** *Sei $d \in \mathbb{C}[z']$, $d \neq o$. Für alle Kugeln U und alle $f \in \mathcal{A}(U)$ gilt dann*

$$\rho(U_*)\cdot \sup_{V\cap U_*} |f| \leq \sup_{V\cap U} |df| .$$

Beweis. Sei $f \in \mathcal{A}(U)$. Seien U' und D wie in (2.14). Sei $V \cap U'\times D \neq \emptyset$, denn nur dieser Fall ist interessant.
Für $z' \in U' - \Delta^{-1}(o)$ betrachte die Polynome in $\lambda \in \mathbb{C}$

$$P_f(z',\lambda) = \prod_{(z',z'')\in V\cap U'\times D} (\lambda - f(z',z'')) = \lambda^m + \sum_{o}^{m-1} a_{m-j}(z')\cdot\lambda^j$$

$$P_{df}(z',\lambda) = \prod_{(z',z'')\in V\cap U'\times D} (\lambda - (d\cdot f)(z',z'')) = \lambda^m + \sum_{o}^{m-1} d(z')^{m-j} a_{m-j}(z')\lambda^j$$

Der Grad $m > o$ hängt nicht von z' ab. Die Koeffizienten a_j sind mit dem Riemannschen Hebbarkeitssatzes holomorph auf U'

fortsetzbar. Aus

$$|P_f(z',\lambda)-\lambda^m| < |\lambda^m| \text{ wenn } |\lambda| > \max_j (m\cdot|a_j(z')|)^{1/j}.$$

folgt mit Rouché's Theorem und (1.7.v)

$$\sup_{V\cap U'\times D} |f| \le \max_j \sup_{U'} (m\cdot|a_j|)^{1/j}.$$

Andererseits kann man auch die Koeffizienten eines Polynoms durch seine Nullstellen abschätzen. Für P_{df} hat man mit einer Konstanten $C > o$

$$\sup_{U'} |d^j a_j| \le C\cdot \sup_{V\cap U'\times D} |d\cdot f|^j$$

für $j = 1,\dots,m$. Das Lemma folgt nun, wenn man die obigen Abschätzungen mit

$$\rho(U'_*)\cdot\sup_{U'_*}|a_j| \le \sup_{U'}|d^j a_j| \text{ für } j = 1,\dots,m$$

kombiniert. Diese Ungleichung folgt aus (2.1.iii) mit $f = d^j a_j$ und $P = d^j$ (Ehrenpreis-Malgrange Ungleichung). ■

2.5 Semilokale Division

Noethersche Operatoren operieren in kanonischer Weise auf holomorphen Funktionen und ihren Keimen. Ist $M\subset\mathbb{C}[z]^K$ ein $\mathbb{C}[z]$-Modul, und ist $\mathcal{N}$ ein zugehörigen Noetherscher Operator, so annulliert $\mathcal{N}$ auch den von M in $\mathcal{A}(\Omega)^K, \Omega\subset\mathbb{C}^n$ offen, erzeugten $\mathcal{A}(\Omega)$-Modul, d.h. für alle $P\in M$ und $v\in\mathcal{A}(\Omega)$ gilt

$$A(vP)|V \cap \Omega = o \text{ für alle } (A,V) \in \mathcal{N}.$$

Dies folgt sofort aus der Produktregel (1.4).
Es gilt hierzu die folgende Umkehrung.

(2.28) *SEMILOKALER DIVISIONSSATZ.* *Sei $M \subset \mathbb{C}[z]^K$ ein $\mathbb{C}[z]$-Modul. Sei $\mathcal{N}$ ein zu M gehöriger Noetherscher Operator. M werde als $\mathbb{C}[z]$-Modul von $P_1,\dots,P_L \in M$ erzeugt. Sei U eine Kugel. Sei $f \in \mathcal{A}(U)^K$ gegeben mit $Af|V \cap U = o$ für alle $(A,V) \in \mathcal{N}$. Dann gibt es ein $v = (v_1,\dots,v_L) \in \mathcal{A}(U_*)^L$ mit*

$$f = \sum_1^L v_j P_j \qquad \text{in } U_*,$$

$$\rho(U_*)\cdot \sup_{U_*}|v| \le \sup_U |f|.$$

Beweis. $\mathcal{N}$ ist eine endliche Vereinigung primärer Noetherscher Operatoren. M ist daher Durchschnitt der zugehörigen - und nach (1.23) primären - Moduln. Somit genügt es nach (2.1o), den Satz für primäre M und $\mathcal{N}$ zu beweisen. Ein zu einer Varietät V tangentialer Differentialoperator bildet die Menge der auf V verschwindenden holomorphen Funktionen in sich ab. Wegen (1.28) darf man daher primäre Noethersche Operatoren durch äquivalente normale Noethersche Operatoren ersetzen.

Sei also M primär, und sei $\mathcal{N}$ normal bezüglich der charakteristischen Varietät V von M. (V ist irreduzibel und nach (1.7) normalisiert.) Sei $s \in \mathbb{N}_o$ die Ordnung von $\mathcal{N}$. Seien τ, τ_s

und $\mathcal{N}'$ die $\mathbb{C}[z']$-linearen Abbildungen aus (1.25). τ_s und $\mathcal{N}'$ haben kanonische $\mathcal{A}(U')$-lineare Fortsetzungen. Sei $M' \subset \mathbb{C}[z']^{Ke\sigma}$ der Modul der Relationen von $\mathcal{N}'$, d.h. $M' = \text{Kern } \mathcal{N}'$. Nach (1.25) wird M' von $\tau_s(P_1),\ldots,\tau_s(P_L)$ über $\mathbb{C}[z']$ erzeugt. Betrachte $G = \tau_s(g) = (\Delta^t g_{\alpha j}) \in \mathcal{A}(U')^{Ke\sigma}$, wobei

$$g = \sum_{|\alpha|\leq s} \sum_{j<e} g_{\alpha j}\, z_{k+1}^j\, Q^\alpha \in \mathcal{A}(U')[z'']^K$$

für alle $\alpha \in \mathbb{N}_o^{n-k}$, $|\alpha| \leq s$, die Gleichungen

$$(\partial^\alpha/\partial z''^\alpha)(d\cdot f-g)\,|\,V \cap U' \times D = o,$$
$$(\partial^\alpha g/\partial z''^\alpha)\,|\,V \cap U' \times (\mathbb{C}^{n-k}-\bar{D}) = o$$

löst. Nach (2.18) findet man solche $g_{\alpha j} \in \mathcal{A}(U')^K$, so daß auch noch gilt

$$\rho(U_*)\cdot\max_{\alpha,j}\sup_{U'}|g_{\alpha j}| \leq \sup_U|f|.$$

Hier sind d, U', D und U_* wie in (2.18). Zur Cauchyabschätzung der rechten Seite von (2.19) wurde außerdem vorausgesetzt, daß der Abstand zwischen $U' \times D$ und ∂U größer als $\rho(U)/2$ ist. Die Voraussetzung an f impliziert

$$Ag\,|\,V \cap U' \times \mathbb{C}^{n-k} = o \qquad \text{für alle } (A,V) \in \mathcal{N}.$$

Diese Bedingung ist äquivalent zu $\mathcal{N}'(G) = o$, denn die Polynome aus $\mathcal{A}(U')[z_{k+1}]$ vom Grade $<e$, welche auf $V \cap U' \times \mathbb{C}^{n-k}$ mit $\Delta^t Ag$, $(A,V) \in \mathcal{N}$, übereinstimmen, sind eindeutig bestimmt. Nach (2.7) gibt es $u_1,\ldots,u_L \in \mathcal{A}(U_*')$ mit

$$G = \sum_1^L u_j\cdot\tau_s(P_j) \qquad \text{in } U_*' ,$$

$$\rho(U_*')\cdot\max_j \sup_{U_*'}|u_j| \leq \sup_{U'}|G|.$$

Mit der $\mathcal{A}(U_*')$-Linearität von τ_s folgt

$$(\partial^\alpha/\partial z''^\alpha)(g-\sum_1^L u_j P_j)|V \cap U_*' \times \mathbb{C}^{n-k} = o, \ |\alpha| \leq s.$$

Folglich

$$(\partial^\alpha/\partial z''^\alpha)(d\cdot f-\sum_1^L u_j P_j)|V \cap U_*' \times D = o, \ |\alpha| \leq s.$$

Hieraus folgt mit (2.23)

$$(2.29) \qquad df - \sum_1^L u_j P_j = \sum_1^N w_i H_i \quad \text{in} \quad U_{**}$$

für $w_1,\ldots,w_N \in \mathcal{A}(U_{**})^K$ mit

$$\rho(U_{**})\cdot \max_i \sup_{U_{**}} |w_i| \leq \sup_U |f|,$$

wobei $H_1,\ldots,H_N$ das Ideal I_s - definiert vor (2.23) - über $\mathbb{C}[z]$ erzeugen. Hier wurde die linke Seite von (2.29) über die bisher erhaltenen Abschätzungen mittels $\sup_U |f|$ abgeschätzt. Es ist offenbar $I_s\cdot\mathbb{C}[z]^K \subset M$. Folglich ist

$$(H_i,o,\ldots),\ldots,(o,\ldots,H_i) \in M \qquad \text{für } i = 1,\ldots,N.$$

Somit ist (2.29) eine Darstellung von df durch ein $\mathbb{C}[z]$-Erzeugendensystem für M. Weil M primär ist, ist (M:d) = M. Eine Anwendung von (2.11) beendet nun den Beweis des Satzes. ∎

Mit $\varphi_z(f)$ wird die von der in z zentrierten Taylorreihe einer in einer Umgebung von z holomorphen Funktion f definierte formale Potenzreihe bezeichnet.

(2.3o) <u>*FOLGERUNG.*</u> *Seien* $P_1,\dots,P_L \in \mathbb{C}[z]^K$ *gegeben. Sei* U *eine Kugel. Sei* $f \in \mathcal{A}(U)^K$*, so daß es zu jedem* $z \in U$ *formale Potenzreihen* $\psi_1,\dots,\psi_L$ *gibt mit*

$$\varphi_z(f) = \sum_1^L \psi_l \cdot \varphi_z(P_l).$$

Dann gibt es ein $v = (v_1,\dots,v_L) \in \mathcal{A}(U_*)^L$ *mit*

$$f = \sum_1^L v_l \, P_l \qquad \text{in} \quad U_*,$$

$$\rho(U_*)\cdot \sup_{U_*}|v| \le \sup_U |f|.$$

<u>Beweis.</u> Sei $\mathcal{N}$ ein zu dem von $P_1,..,P_L$ erzeugten $\mathbb{C}[z]$-Untermodul in $\mathbb{C}[z]^K$ gehöriger Noetherscher Operator. Ein solcher existiert nach (1.1o). Für jedes $z \in \mathbb{C}^n$ gibt es eindeutig eine natürliche Operation $\mathcal{N}_z$ auf dem Ring der formalen Potenzreihen, so daß $\mathcal{N}_z(\varphi_z(g)) = \varphi_z(\mathcal{N}(g))$ für alle Polynome g. Da hierfür auch die Produktregel gilt, impliziert die Voraussetzung an f, daß $Af \mid V \cap U = o$ für alle $(A,V) \in \mathcal{N}$. Die Behauptung folgt nun aus dem semilokalen Divisionssatz. ∎

2.6 <u>Semilokale Interpolation</u>

Eine holomorphe Funktion f ist natürlich nicht durch ihre Restriktion auf eine echte Untervarietät $V \subsetneq \mathbb{C}^n$ bestimmt. Indem man jedoch zu f ein geeignetes Element aus dem Verschwindungsideal von V addiert, erhält man eine Funktion g deren Betrag sich durch den Betrag ihrer Restriktion $g|V$ abschätzen läßt.

Dies ist eine spezielle Konsequenz aus dem semilokalen Divisionssatz und dem folgenden Resultat.

(2.31) SEMILOKALER INTERPOLATIONSSATZ. Sei $\mathcal{N}$ ein Noetherscher Operator (auf $\mathbb{C}[z]^K$). Für jede Kugel U und jedes $f \in \mathcal{A}(U)^K$ gibt es dann ein $g \in \mathcal{A}(U_*)^K$ mit

$$(Af-Ag)|V \cap U_* = o \text{ für alle } (A,V) \in \mathcal{N} ,$$

$$\rho(U_*)\cdot\sup_{U_*}|g| \leq \max_{(A,V)\in\mathcal{N}} \sup_{V\cap U} |Af| .$$

Beweis. Ist der Satz für zwei Noethersche Operatoren $\mathcal{N}_1$ und $\mathcal{N}_2$ richtig, so gilt er auch für ihre Vereinigung $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2$. In der Tat, dann gibt es zu $f \in \mathcal{A}(U)^K$ Funktionen $g_1, g_2 \in \mathcal{A}(U_*)^K$ mit

$$(Af-Ag_i)|V \cap U_* = o \qquad \text{für } (A,V) \in \mathcal{N}_i \ , \ i = 1,2,$$

$$\rho(U_*)\cdot\sup_{U_*} \max(|g_1|,|g_2|) \leq \max_{(A,V)\in\mathcal{N}} \sup_{V\cap U} |Af| .$$

Folglich erfüllt $g_1-g_2 = (g_1-f)-(g_2-f)$ die Kompatibilitätsbedingungen für den Modul $M_{\mathcal{N}_1} + M_{\mathcal{N}_2}$. Fixiert man Erzeugendensysteme $R_1^i,\dots,R_{r_i}^i$ für $M_{\mathcal{N}_i}$, $i = 1,2$, so erhält man daher nach (2.3o) $h_i = \Sigma\, v_j\, R_j^i \in \mathcal{A}(U_{**})^K$ für $i = 1,2$ mit

$$g_1 - g_2 = h_1 - h_2 \qquad \text{in } U_{**} ,$$

$$\rho(U_{**})\cdot\sup_{U_{**}} \max(|h_1|,|h_2|) \leq \sup_{U_*}|g_1 - g_2| .$$

Dann ist $g = g_1 - h_1 = g_2 - h_2 \in \mathcal{A}(U_{**})^K$ offenbar die gesuchte Lösung.

Da $\mathcal{N}$ eine endliche Vereinigung primärer Noetherscher Operatoren ist, darf man also eine Einschränkung $\mathcal{N}$ als primär bezüglich einer irreduziblen - und nach (1.7) normalisierten - Varietät V annehmen. $\mathcal{N}_o$ sei der zu $\mathcal{N}$ äquivalente normale Noethersche Operator aus (1.28). Es genügt, den Satz für $\mathcal{N}_o$ zu beweisen. In der Tat, dann folgt $\mathcal{N}(f-g) = o$ aus $\mathcal{N}_o(f-g) = o$ mit (1.28.i), in die zu zeigende Abschätzung an g für $\mathcal{N}$ erhält man aus der für $\mathcal{N}_o$ aus der Darstellung (1.28.ii) mit Hilfe von (2.25).

Ohne Einschränkung wird daher jetzt angenommen, daß $\mathcal{N}$ normal bezüglich V ist, wobei V immer noch nach (1.7) normalisiert ist. Sei $s \in \mathbb{N}_o$ die Ordnung von $\mathcal{N}$. Sei $f \in \mathcal{A}(U)^K$ gegeben. Nach (2.18) gibt es ein

$$h = \sum_{|\alpha| \leq s} \sum_{j < e} h_{\alpha j} \cdot z_{k+1}^j \, Q^\alpha \in \mathcal{A}(U')[z'']^K$$

wobei $h_{\alpha j} \in \mathcal{A}(U')^K$, $\alpha \in \mathbb{N}_o^{n-k}$, $|\alpha| \leq s$, $o \leq j < e$, so daß gilt

$$(\partial^\alpha / \partial z''^\alpha)\,(d \cdot f - h) | V \cap U' \times D = o \ , \ |\alpha| \leq s,$$

$$(\partial^\alpha h / \partial z''^\alpha) | V \cap U' \times (\mathbb{C}^{n-k} - \bar{D}) = o, \ |\alpha| \leq s.$$

Setze $H = \tau_s(h) = (\Delta^t h_{\alpha j}) \in \mathcal{A}(U')^{Ke\sigma}$. ($\tau_s$ und $\mathcal{N}'$ sind wieder die - von $\mathbb{C}[z', z'']$ auf $\mathcal{A}(U')[z'']$ fortgesetzten - Operatoren aus (1.25).) Wendet man (2.3o) auf die Spaltenvektoren der $\mathcal{N}'$ definierenden Matrix an, so erhält man ein $G = (\tilde{g}_{\alpha j}) \in \mathcal{A}(U_*')^{Ke\sigma}$ mit

$$\mathcal{N}'(G) = \mathcal{N}'(H) \quad \text{auf } U_*' \;,$$

$$\rho(U_*')\cdot \sup_{U_*'\times D} |\tilde{g}| \le \sup_{U'} |\mathcal{N}'(H)| \;,$$

wobei

$$\tilde{g} = \sum_{|\alpha|\le s} \sum_{j<e} \tilde{g}_{\alpha j} \cdot z_{k+1}^{j} \cdot Q^{\alpha} \in \mathcal{A}(U_*')[z'']^{K} \,.$$

Dann ist $(\mathcal{N}' \circ \tau_s)(\tilde{g}-\Delta^t h) = o$ in $\mathcal{A}(U_*')^{eN}$, $N = \#\mathcal{N}$.
Dies ist - wie bereits im Beweis von (2.28) bemerkt - äquivalent zu

$$(A\tilde{g}-A(\Delta^t h))|V \cap U_*' \times \mathbb{C}^{n-k} = o \text{ für alle } (A,V) \in \mathcal{N}.$$

Folglich ist

$$A(\tilde{g}-\Delta^t df)|V \cap U_*' \times D = o \qquad \text{für alle } (A,V) \in \mathcal{N}.$$

$\tilde{g} = \Delta^t df + (\tilde{g}-\Delta^t df)$ erfüllt also die Kompatibilitätsbedingungen für den von $M_{\mathcal{N}}$ und $\Delta^t d\cdot\mathbb{C}[z]^K$ erzeugten $\mathbb{C}[z]$-Modul. Wähle ein Erzeugendensystem $P_1,\dots,P_L$ für $M_{\mathcal{N}}$. Nach (2.3o) gibt es dann $v_1,\dots,v_L \in \mathcal{A}(U_{**})$ und $g \in \mathcal{A}(U_{**})^K$ mit

$$\tilde{g} = \sum_{1}^{L} v_j\, P_j + \Delta^t dg \qquad \text{in } U_{**},$$

$$\rho(U_{**})\cdot \sup_{U_{**}} |g| \le \sup_{U_*'\times D} |\tilde{g}| \;,$$

wobei $U_{**} \subset U_*' \times D$. Somit kann man den Faktor $\Delta^t d$ eliminieren und erhält

$$(Ag - Af)|V \cap U_{**} = o \qquad \text{für alle } (A,V) \in \mathcal{N}.$$

Es ist noch die behauptete Abschätzung an g zu beweisen.
Weil für alle $(A,V) \in \mathcal{N}$

$$\sup_{V \cap U' \times D} |d \cdot Af| = \sup_{V \cap U' \times \mathbb{C}^{n-k}} |Ah|,$$

genügt es aufgrund der bisher erhaltenen Abschätzungen zu zeigen, daß

$$\sup_{U'} |(\mathcal{N}' \circ \tau_s)(h)| \leq (2+|\zeta(U)|)^N \cdot \max_{(A,V)\in\mathcal{N}} \sup_{V\cap U' \times \mathbb{C}^{n-k}} |Ah|$$

mit einer von U und $h \in \mathcal{A}(U')[z'']^K$ unabhängigen Konstanten $N \geq o$ gilt. Diese Ungleichung folgt aus der Lagrangeschen Interpolationsformel - siehe (2.18) für $s = o$ zusammen mit der Eindeutigkeitsaussage in (1.8) - unter Berücksichtigung der Definition von τ_s und $\mathcal{N}'$. ■

Anmerkungen

(a) Die hier benutzten Techniken sind aus der lokalen Theorie komplexanalytischer Varietäten, insbesondere von den Kohärenzsätzen von Oka und Cartan her, bekannt. Siehe hierzu z.B. Gunning-Rossi [11] oder Narasimhan [19]. Den Übergang zu quantitativen Ergebnissen ermöglicht das Divisionslemma von Ehrenpreis und Malgrange. Dieses kann man als einen Spezialfall einer quantitativen Version des Weierstraßschen Vorbereitungssatzes ansehen (hier (2.1); siehe Hörmander [15], 7.6).

(b) In der vorliegenden Darstellung wird - im Unterschied zu anderen Darstellungen - die Definition und die Konstruktion der zu einem Modul gehörigen Noetherschen Operatoren (in Kapitel 1) getrennt von ihrer lokalen (bzw. semilokalen) Theorie (in Kapitel 2).

KAPITEL 3

GLOBALE DIVISION UND INTERPOLATION

Dem Beweis des Verschwindens der Kohomologie kohärenter Garben folgend wird hier in quantitativer Form gezeigt, daß die p-ten Kohomologiegruppen, $p \geq 1$, mit Werten in der Kerngarbe eines Noetherschen Operators verschwinden. Dies ermöglicht es, die semilokalen Ergebnisse des Kapitels 2 auszudehnen zu globalen Resultaten auf pseudokonvexen Gebieten im $\mathbb{C}^n$.

3.1 Überdeckungen

Es werden Überdeckungen offener Teilmengen des $\mathbb{C}^n$ durch Kugeln gegeben, welche mit den in der semilokalen Theorie vorkommenden Verkleinerungen von Kugeln kompatibel sind.

Für $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, Ω offen, setze

$$d_\Omega(z) = \min(1, \inf_{\tilde{z} \in \mathbb{C}^n - \Omega} |\tilde{z} - z|), \quad z \in \Omega .$$

Für $p \in \mathbb{N}$ bezeichne $I_p \subset \mathbb{N}^p$ die Teilmenge aller p-Tupel mit paarweise verschiedenen Komponenten.

Ist $\mathfrak{U} = (U_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Überdeckung von Ω durch Kugeln und ist $s = (s_o, \ldots, s_{p-1}) \in I_p$, dann wird gesetzt

$$U_s = U_{s_o} \cap \ldots \cap U_{s_{p-1}} .$$

Die für Kugeln in Kapitel 2 eingeführten Bezeichnungen werden weiterhin benutzt.

(3.1) LEMMA. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ offen und nichtleer. Dann gibt es eine Folge $\mathfrak{U}^{(1)}, \mathfrak{U}^{(2)}, \ldots$ von Überdeckungen $\mathfrak{U}^{(\nu)} = (U_j^{(\nu)})_{j \in \mathbb{N}}$ von Ω durch Kugeln $U_j^{(\nu)} \subset \Omega$, so daß gilt:

(i) Für jedes $\nu \in \mathbb{N}$ wird Ω bereits durch die zu $U_j^{(\nu)}$ konzentrischen Kugeln mit halbem Radius $\rho(U_j^{(\nu)})/2$ überdeckt.

(ii) Es gibt eine Zahl $p_o \in \mathbb{N}$, so daß für jedes $\nu \in \mathbb{N}$ der Durchschnitt von $p_o + 1$ verschiedenen Kugeln aus $\mathfrak{U}^{(\nu)}$ leer ist.

(iii) Es gibt eine Konstante $C \geq 2$, so daß für alle $\nu, j \in \mathbb{N}$ und alle $z \in U_j^{(\nu)}$ gilt
$C^{-1}(d_\Omega(z)/(C+|z|))^\nu \leq \rho(U_j^{(\nu)}) < 2^{-\nu+1} d_\Omega(z)$.

(iv) Ist $\nu < \mu$, so ist $\mathfrak{U}^{(\mu)}$ feiner als $\mathfrak{U}^{(\nu)}$. Die Verfeinerungsabbildung $r_{\nu\mu}$ is transitiv, d.h.
$r_{\nu\lambda} = r_{\nu\mu} \circ r_{\mu\lambda}$ wenn $\nu < \mu < \lambda$.
Seien $\nu \in \mathbb{N}$ und $N \geq 1$ gegeben. Dann gibt es ein $\mu \in \mathbb{N}$, $\mu > \nu$, so daß für alle $p \in \mathbb{N}$ und alle $s \in I_p$ mit $U_s^{(\mu)} \neq \emptyset$ gilt

$$U_s^{(\mu)} \subset U_* \subset U \subset U^{(\nu)}_{r_{\nu\mu}(s)},$$

wobei U und U_* konzentrische Kugeln um $\zeta(U)$ sind, deren Radien

$$\rho(U_*) = (\rho(U)/(C+|\zeta(U)|)^N,$$
$$C^{-1}(d_\Omega(\zeta(U))/(C+|\zeta(U)|)^\nu \leq \rho(U)$$

erfüllen. Hier ist $C \geq 2$ *eine von* ν *und* s *unabhängige Konstante.*

Die Verfeinerungsabbildung $r_{\nu\mu} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist hier in natürlicher Weise auf I_p fortgesetzt.

Beweis. Sei $\nu \in \mathbb{N}$. Wähle eine Folge von Punkten $\zeta_1^{(\nu)}, \zeta_2^{(\nu)}, \ldots \in \Omega$ mit

$$|\zeta_i^{(\nu)} - \zeta_j^{(\nu)}| \geq \tfrac{1}{2}(d_\Omega(\zeta_j^{(\nu)})/(C+|\zeta_j^{(\nu)}|))^\nu \quad \text{wenn } i > j,$$

welche bezüglich dieser Eigenschaft maximal ist. Hier ist $C \geq 2$ eine noch zu bestimmende Konstante. Die Wahl einer solchen Folge ist möglich, da die obige Bedingung auf einer kompakten Teilmenge von Ω nur von endlich vielen Punkten erfüllt werden kann. Dann ist $\mathcal{U}^{(\nu)} = (U_j^{(\nu)})_{j \in \mathbb{N}}$ mit

$$U_j^{(\nu)} = \{z \in \Omega; |z-\zeta_j^{(\nu)}| < (d_\Omega(\zeta_j^{(\nu)})/(C+|\zeta_j^{(\nu)}|))^\nu\}, j \in \mathbb{N},$$

eine Überdeckung von Ω, die zudem (i) erfüllt.

Zum Beweis von (ii) betrachte einen Punkt $z_o \in U_j^{(\nu)}$. Dann gilt

$$|z_o - \zeta_j^{(\nu)}| < 2^{-\nu} \cdot d_\Omega(\zeta_j^{(\nu)}).$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt hieraus

$$(1-2^{-\nu})d_\Omega(\zeta_j^{(\nu)}) \leq d_\Omega(z_o) \leq (1+2^{-\nu})d_\Omega(\zeta_j^{(\nu)})$$

und

$$(1-2^{-\nu})(C+|\zeta_j^{(\nu)}|) \leq C+|z_o| \leq (1+2^{-\nu})(C+|\zeta_j^{(\nu)}|).$$

Da $((1+2^{-\nu})/(1-2^{-\nu}))^{\nu} \leq 3$, erhält man nun

$$(3.2)\quad 1/3 \leq (d_\Omega(z_o)/(C+|z_o|))^{\nu} \cdot (d_\Omega(\zeta_j^{(\nu)})/(C+|\zeta_j^{(\nu)}|))^{-\nu} \leq 3 .$$

Also ist

$$|z_o-\zeta_j^{(\nu)}| \leq 3(d_\Omega(z_o)/(C+|z_o|))^{\nu} ,$$

und wenn außerdem noch $z_o \in U_i^{(\nu)}$, $i \neq j$, so gilt

$$|\zeta_i^{(\nu)}- \zeta_j^{(\nu)}| \geq 6^{-1}(d_\Omega(z_o)/(C+|z_o|))^{\nu} .$$

Hieraus folgt (ii), denn es gibt eine Schranke p_o+1 für die Anzahl von Punkten, welche in der Einheitskugel des $\mathbb{C}^n$ liegen und voneinander einen Abstand $\geq 18^{-1}$ haben.

(iii) ist offenbar erfüllt.

Zum Beweis von (iv) ist zunächst die Verfeinerungsabbildung anzugeben. Nach (i) kann man $r_{\nu,\nu+1}:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ so wählen, daß

$$|\zeta_i^{(\nu+1)}-\zeta_j^{(\nu)}| < \tfrac{1}{2}(d_\Omega(\zeta_j^{(\nu)})/(C+|\zeta_j^{(\nu)}|))^{\nu} \text{ wenn } j = r_{\nu,\nu+1}(i).$$

Für $j = r_{\nu,\nu+1}(i)$ folgt aus (3.2) mit $z_c = \zeta_i^{(\nu+1)}$

$$(d_\Omega(\zeta_i^{(\nu+1)})/(C+|\zeta_i^{(\nu+1)}|))^{\nu+1} \leq C^{-1}\cdot 3\,(d_\Omega(\zeta_j^{(\nu)})/(C+|\zeta_j^{(\nu)}|))^{\nu}.$$

Wählt man $C \geq 12$, so hat man

$$(3.3)\quad U_i^{(\mu)} \subset \{ z \in \mathbb{C}^n;\ |z-\zeta_j^{(\nu)}| < \tfrac{3}{4}(d_\Omega(\zeta_j^{(\nu)})/(C+|\zeta_j^{(\nu)}|))^{\nu}\}$$

wenn $j = r_{\nu,\mu}(i)$ und $\mu = \nu+1$. Setzt man jetzt

$$r_{\nu\mu} = r_{\nu,\nu+1} \circ \cdots \circ r_{\mu-1,\mu} \quad , \nu < \mu,$$

so gilt (3.3) für alle $\mu > \nu$. Damit ist $r_{\nu\mu}$ eine Verfeinerungsabbildung.

Sei jetzt $\nu < \mu$. Sei $U_s^{(\mu)} \neq \emptyset$ $(s \in I_p, p \in \mathbb{N})$. Wähle $z_o \in U_s^{(\mu)}$. Aus (3.2) folgt $U_s^{(\mu)} \subset U_*$ für

$$U_* = \{z \in \mathbb{C}^n; |z-z_o| < C_*(d_\Omega(z_o)/(C+|z_o|))^\mu\}$$

wenn $C_* \geq 6$. Aufgrund von (3.2) und (3.3) ist

$$U = \{z \in \mathbb{C}^n;\ |z-z_o| < \tfrac{1}{12}\,(d_\Omega(z_o)/(C+|z_o|))^\nu\}$$

enthalten in $U^{(\nu)}_{r_{\nu\mu}(s)}$. (iv) folgt nun, wenn $\mu-\nu$ genügend groß ist. ∎

Wählt man eine nichtnegative Funktion $\psi \in C_o^\infty(\mathbb{C}^n)$ mit $\operatorname{supp}\psi \subset \{z \in \mathbb{C}^n;\ |z| < 1\}$ und $\psi(z) > o$ falls $|z| \leq \frac{1}{2}$, so erhält man in üblicher Weise eine zu $\mathcal{U}^{(\nu)}$ gehörige Zerlegung der Eins $(\alpha_j^{(\nu)})_{j \in \mathbb{N}} \subset C_o^\infty(\Omega)$,

$$\alpha_j^{(\nu)}(z) = \psi((z-\zeta(U_j^{(\nu)}))/\rho(U_j^{(\nu)}))/\sum_{i \in \mathbb{N}} \psi((z-\zeta(U_i^{(\nu)}))/\rho(U_i^{(\nu)})),$$
$$z \in \Omega .$$

In diesem Kapitel wird zu jeder offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ stets eine feste Folge von Überdeckungen $\mathcal{U}^{(1)}, \mathcal{U}^{(2)},\ldots$ mit den in (3.1) angegebenen Eigenschaften gewählt.

Ist $\mathcal{G}$ eine Garbe auf $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, so bezeichnet $\mathcal{C}^p(\mathcal{U}^{(\nu)},\mathcal{G})$ die Menge der alternierenden p-Koketten bezüglich der Überdeckung $\mathcal{U}^{(\nu)}$ mit Werten in $\mathcal{G}$.

Die durch

$$(\delta f)_s = \sum_{j=o}^{p+1} (-1)^j f_{s_o \ldots \hat{s}_j \ldots s_{p+1}} , \quad s = (s_o, \ldots, s_{p+1}) \in I_{p+2},$$

definierte Abbildung $\delta : \mathcal{C}^p(\mathcal{U}^{(\nu)}, \mathcal{G}) \to \mathcal{C}^{p+1}(\mathcal{U}^{(\nu)}, \mathcal{G})$, $f \to \delta f$, nennt man den Korandoperator. Hier bedeutet $\hat{s}_j$, daß der Index s_j ausgelassen wird. Es ist $\delta \circ \delta = o$.
Die Verfeinerungsabbildung $r_{\nu\mu}, \nu < \mu$, induziert eine Abbildung von Koketten durch Zurückziehen der Schnitte mittels $r_{\nu\mu}$

$$r^*_{\nu\mu} : \mathcal{C}^p(\mathcal{U}^{(\nu)}, \mathcal{G}) \to \mathcal{C}^p(\mathcal{U}^{(\mu)}, \mathcal{G}).$$

$r^*_{\nu\mu}$ kommutiert mit δ.

3.2 $\bar{\partial}$-Kohomologie mit Gewichten

Hier wird eine quantitative Version des Dolbeault-Theorems gezeigt.

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ offen. Sei $\mathcal{G}$ eine Untergarbe der Garbe der lokal integrierbaren Funktionen auf Ω. Sei φ ein reellwertige oberhalb stetige Funktion auf Ω. Setze dann für $f = (f_s)_{s \in I_{p+1}} \in \mathcal{C}^p(\mathcal{U}^{(\nu)}, \mathcal{G})$

$$\|f\|^2_\varphi = \sum_{s \in I_{p+1}} \int_{U_s^{(\nu)}} |f_s|^2 e^{-\varphi} d\lambda ,$$

wobei $d\lambda$ das Lebesguesche Maß auf $\mathbb{C}^n$ ist.

Es werden im Folgenden (o,q)-Formen

$$g = \sum_{|J|=q}{}' g_J \cdot d\bar{z}^J \qquad \text{(Summation über streng wachsende J)}$$

mit lokal quadratintegrablen Koeffizienten g_J verwendet. Diese bilden eine Garbe, welche mit $\mathcal{L}_{o,q}$ bezeichnet wird. Wie oben definiert man $\|f\|_\varphi$ für $f \in \mathcal{C}^p(\mathcal{U}^{(\nu)}, \mathcal{L}_{o,q})$, wobei $|f_s|^2 = \sum_J{}' |f_{sJ}|^2$, wenn $f_s = \sum_J{}' f_{sJ}\, d\bar{z}^J$, $s \in I_{p+1}$.
Der Cauchy-Riemann Operator $\bar\partial$ bildet (o,q)-Formen in (o,q+1)-Formen ab (Ableitung im Distributionensinne). Es ist $\bar\partial \circ \bar\partial = o$. Ferner kommutiert $\bar\partial$ mit dem Korandoperator δ und den von Verfeinerungen induzierten Operatoren $r^*_{\nu\mu}$.

Eine oberhalb stetige Funktion auf einer offenen Teilmenge Ω des $\mathbb{C}^n$, welche auf jeder komplexen Geraden subharmonisch ist, heißt plurisubharmonisch. Beispiele plurisubharmonischer Funktionen sind $\log(2+|z|^2)$ auf $\mathbb{C}^n$ und die Funktion $d_\Omega(z)$ auf Ω, wenn Ω pseudokonvex ist (siehe [15],2.6).
Für weitere Eigenschaften plurisubharmonischer Funktionen siehe z.B. [14] und [15].

(3.4) <u>*SATZ.*</u> *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ein pseudokonvexes Gebiet. Sei φ eine plurisubharmonische Funktion auf Ω. Sei $p, \nu \in \mathbb{N}$ gegeben. Zu jedem $f \in \mathcal{C}^p(\mathcal{U}^{(\nu)}, \mathcal{A})$ mit $\delta f = o$ und $\|f\|_\varphi < +\infty$ gibt es ein $g \in \mathcal{C}^{p-1}(\mathcal{U}^{(\mu)}, \mathcal{A})$ mit $\delta g = r^*_{\nu\mu} f$ und $\|g\|_{\tilde\varphi} \le \|f\|_\varphi$, wobei*

$$\tilde\varphi(z) = \varphi(z) + C\cdot \log(2+|z|^2) - C\cdot \log d_\Omega(z), \quad z \in \Omega .$$

Hier sind $\mu > \nu$ und $C > o$ unabhängig von φ und f.

Der Beweis dieses Satzes beruht auf der Lösbarkeit der Cauchy-Riemann-Gleichungen in pseudokonvexen Gebieten. Insbesondere wird die folgende Tatsache benötigt (für einen Beweis siehe Hörmander [15], Lemma 7.6.2, und beachte, daß dort φ nur auf Ω definiert zu sein braucht):

Ist q > o, so gibt es eine Konstante $C > o$, so daß es für jede Kugel $U \subset \mathbb{C}^n$ (mit Radius < 1), jede plurisubharmonische Funktion φ auf U und für jeden Schnitt f von $\mathcal{L}_{(o,q)}$ über U mit $\bar{\partial} f = o$ einen Schnitt u von $\mathcal{L}_{(o,q-1)}$ über U_* mit $\bar{\partial} u = f$ in U_* und

$$\int_{U_*} |u|^2 e^{-\varphi} d\lambda \leq C \cdot \int_U |f|^2 \, e^{-\varphi} d\lambda$$

gibt. Hier ist U_* die zu U konzentrische Kugel mit halbem Radius $\rho(U_*) = \rho(U)/2$.

Satz (3.4) ist offenbar der Spezialfall q = o des folgenden Ergebnisses.

(3.5) LEMMA. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ein pseudokonvexes Gebiet. Sei φ eine plurisubharmonische Funktion auf Ω . Seien $p, \nu \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{N}_o$ gegeben. Zu jedem $f \in \mathcal{C}^p(\mathcal{U}^{(\nu)}, \mathcal{L}_{o,q})$ mit $\delta f = o$, $\bar{\partial} f = o$ und $\|f\|_\varphi < +\infty$ gibt es ein $g \in \mathcal{C}^{p-1}(\mathcal{U}^{(\mu)}, \mathcal{L}_{o,q})$ mit $\bar{\partial} g = o$, $\delta g = r^*_{\nu\mu} f$ und $\|g\|_{\tilde{\varphi}} \leq \|f\|_\varphi$, wobei

$$(3.6) \quad \tilde{\varphi}(z) = \varphi(z) + C \cdot \log(2+|z|^2) - C \cdot \log d_\Omega(z), \quad z \in \Omega .$$

Hier sind $\mu > \nu$ und $C > o$ unabhängig von φ und f.

Beweis. Das Lemma wird mit einer Induktion über p bewiesen.

Sei $(\alpha_j^{(\nu)})_{j\in\mathbb{N}}$ die in Abschnitt 3.1 angegebene zu $\mathcal{U}^{(\nu)}$ gehörige Zerlegung der Eins. Aus (3.1.ii) und (3.1.iii) folgt

(3.7) $$|\bar\partial\alpha_j^{(\nu)}(z)| \leq C(d_\Omega(z)/(C+|z|))^{-\nu}$$

mit einer von $z \in \Omega$ und $j \in \mathbb{N}$ unabhängigen Konstanten $C \geq 2$.

Sei $f = (f_s) \in \mathcal{C}^p(\mathcal{U}^{(\nu)}, \mathcal{L}_{o,q})$ mit $\delta f = o$ und $\|f\|_\varphi < +\infty$ gegeben. Setze für $s \in I_p$

$$h_s = \sum_j \alpha_j^{(\nu)} f_{js} ,$$

wobei die Summe nur über jene j zu erstrecken ist, die nicht in s vorkommen. Die Summanden und damit auch h_s sind auf $U_s^{(\nu)}$ definiert. Man erhält so eine Kokette $h = (h_s) \in \mathcal{C}^{p-1}(\mathcal{U}^{(\nu)}, \mathcal{L}_{o,q})$. Man rechnet nach, daß $\delta h = f$ (Verschwinden der Kohomologie feiner Garben).

Weiter sei $\bar\partial f = o$. Dies zieht noch nicht das Verschwinden von $\bar\partial h \in \mathcal{C}^{p-1}(\mathcal{U}^{(\nu)}, \mathcal{L}_{o,q+1})$ nach sich. Jedoch hat man $\bar\partial(\bar\partial h) = o$, $\delta(\bar\partial h) = \bar\partial f = o$, und wegen (3.7) gilt mit $\tilde\varphi$ wie in (3.6)

$$\|\bar\partial h\|_{\tilde\varphi} \leq \|f\|_\varphi .$$

Ist $p = 1$, so gibt es eine lokal quadratintegrable (o,q)-Form u auf Ω mit $\bar\partial u = \bar\partial h$ und

$$\int_\Omega |u|^2 e^{-\tilde\varphi} (1+|z|^2)^{-2} d\lambda \leq \int_\Omega |\bar\partial h|^2 e^{-\tilde\varphi} d\lambda .$$

(Siehe Hörmander [15], Thm. 4.4.2.) Dann ist $g = h-u \in \mathcal{C}^o(\mathcal{U}^{(\nu)}, \mathcal{L}_{o,q})$ die gesuchte Lösung; denn $\delta g = \delta h = f$ und $\bar\partial g = \bar\partial h - \bar\partial u = o$.

Ist $p > 1$, und ist das Lemma für kleinere p bereits bewiesen, dann gibt es nach Induktionsvoraussetzung ein $\tilde{h} \in \mathcal{C}^{p-2}(\mathcal{U}^{(\lambda)}, \mathcal{L}_{o,q+1})$ mit $\delta\tilde{h} = r^*_{\nu\lambda}(\bar{\partial}h)$, $\bar{\partial}\tilde{h} = o$ und

$$\|\tilde{h}\|_{\tilde{\varphi}} \leq \|f\|_{\varphi}$$

nach eventueller Vergrößerung der in $\tilde{\varphi}$ vorkommenden Konstante C. Aufgrund der vor (3.5) gemachten Bemerkung über die $\bar{\partial}$-Lösbarkeit auf Kugeln kann man eine (nach Antisymmetrisierung alternierende) Kokette $\tilde{g} \in \mathcal{C}^{p-2}(\mathcal{U}^{(\mu)}, \mathcal{L}_{o,q})$ finden, so daß $\bar{\partial}\tilde{g} = r^*_{\lambda\mu}\tilde{h}$ und

$$\|\tilde{g}\|_{\tilde{\varphi}} \leq C\|\tilde{h}\|_{\tilde{\varphi}}.$$

Hierzu wird (3.1.iv) mit $\lambda < \mu$ und $N = 1$ benutzt. Jetzt ist $g = r^*_{\nu\mu}h - \delta\tilde{g} \in \mathcal{C}^{p-1}(\mathcal{U}^{(\mu)}, \mathcal{L}_{o,q})$ die gesuchte Lösung; denn $\delta g = \delta r^*_{\nu\mu}h = r^*_{\nu\mu}f$ und $\bar{\partial}g = o$ wegen

$$\bar{\partial}\delta\tilde{g} = \delta r^*_{\lambda\mu}\tilde{h} = r^*_{\lambda\mu} \circ r^*_{\nu\lambda}(\bar{\partial}h) = r^*_{\nu\mu}(\bar{\partial}h).$$

Das Lemma - und insbesondere der Satz - ist nun bewiesen. ∎

3.3 Globale Division und Interpolation

Hier werden die Hauptresultate über Noethersche Operatoren auf ganzen Funktionen formuliert und bewiesen.

Sei $\mathcal{N}$ ein Noetherscher Operator auf $\mathbb{C}[z]^K$. Die aus allen Keimen $f \in \mathcal{A}^K$ mit

$$Af|V = o \qquad \text{für alle } (A,V) \in \mathcal{N}$$

(Interpretation über Repräsentanten für f) bestehende Untergarbe von $\mathcal{A}^K$ wird Kerngarbe $\mathcal{R}_{\mathcal{N}}$ von $\mathcal{N}$ genannt. Ist Q eine J × K-Polynommatrix über $\mathbb{C}[z]$, so ist die Kerngarbe des durch Q definierten Garbenhomomorphismus von $\mathcal{A}^K$ nach $\mathcal{A}^J$ gleich der Kerngarbe des Noetherschen Operators $\{(Q^1,\mathbb{C}^n),\ldots,(Q^J,\mathbb{C}^n)\}$, wobei $Q^1,\ldots,Q^J$ die Zeilen von Q sind. Diese Garbe wird häufig auch als Garbe der Relationen von Q bezeichnet.

Es ist nötig, auch die sup-Norm

$$\|f\|_{\varphi,\infty} = \sup_s \sup_{z,\tilde{z}\in U_s^{(\nu)}} |f_s(z)|\, e^{-\varphi(\tilde{z})/2}$$

einer Kokette $f = (f_s) \in \mathcal{C}^p(\mathcal{U}^{(\nu)},\mathcal{A}^K)$ bezüglich einer (stetigen) Funkion $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ zu benutzen. Wegen (3.1.ii) gilt mit einer von f, φ und ν unabhängigen Konstanten C

$$\|f\|_{\tilde{\varphi}} \le C\cdot\|f\|_{\varphi,\infty}, \qquad (\tilde{\varphi} = \varphi+(2n+1)\log(1+|\cdot|)).$$

Für eine auf einer Kugel U holomorphe Funktion h gilt bekanntlich

$$\sup_{U_*}|h| \le C_n\, \rho(U)^{-n/2}\left(\int_U |h|^2 d\lambda\right)^{1/2},$$

wenn U_* eine zu U konzentrische Kugel mit Radius $\rho(U_*) \le \rho(U)/2$ ist. Hieraus folgt eine Abschätzung der sup-Normen von Koketten $f \in \mathcal{C}^p(\mathcal{U}^{(\nu)},\mathcal{A}^K)$ durch L^2-Normen

$$(3.8) \qquad \|r^*_{\nu\mu} f\|_{\varphi_N,\infty} \le \|f\|_{\varphi} \qquad .$$

Hier sind $\mu > \nu$ und $N \ge 1$ unabhängig von φ und f. Es ist hier

$$\varphi_N(z) = \sup_{|\tilde{z}|\le N} \varphi(z+\tilde{z}) + N\cdot\log(2+|z|^2),\ z \in \mathbb{C}^n,$$

falls $\Omega = \mathbb{C}^n$ und

$$\varphi_N(z) = \varphi(z) + N\cdot C_\varphi + N\cdot\log(2+|z|^2) - N\log d_\Omega(z),\ z \in \Omega\ ,$$

falls $\Omega \neq \mathbb{C}^n$ und falls φ die Abschätzung

$$(3.9) \quad \varphi(z+\tilde{z}) < \varphi(z) + C_\varphi \ , \ z \in \Omega \ , \quad |\tilde{z}| < d_\Omega(z)/2,$$

mit einer Konstanten C_φ erfüllt. (Man beachte, daß (3.9) von $\varphi = \log(2+|\cdot|^2)$ und $\varphi = -\log d_\Omega$ erfüllt wird.) Zum Beweis von (3.8) verwendet man die untere Schranke für den Radius der Kugel U aus (3.1.iv) und benutzt die für alle φ und alle Kugeln U mit Mittelpunkt $\zeta \in \Omega$ und Radius $\rho(U) < d_\Omega(\zeta)/8$ gültige Ungleichung

$$\inf_U \varphi_N \geq \sup_U \varphi_{N-1} - C_N \ , \quad N \geq 1,$$

$C_N \geq o$ eine Konstante.

Mit φ ist auch φ_N (halb-)stetig. Ist Ω pseudokonvex, so ist mit φ auch φ_N plurisubharmonisch.

(3.1o) <u>*SATZ.*</u> *Sei $\mathcal{N}$ ein Noetherscher Operator. Der $\mathbb{C}[z]$-Untermodul $M_{\mathcal{N}} \subset \mathbb{C}[z]^K$ werde von der $K \times L$-Polynommatrix P erzeugt, d.h. $M_{\mathcal{N}} = P\cdot\mathbb{C}[z]^L$. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ein pseudokonvexes Gebiet. Sei φ eine plurisubharmonische Funktion auf Ω, welche (3.9) erfüllt, wenn $\Omega \neq \mathbb{C}^n$. Sei $p \in \mathbb{N}_o$ und sei $\nu \in \mathbb{N}$. Zu jedem $f \in \mathcal{C}^p(\mathfrak{U}^{(\nu)}, \mathcal{R}_{\mathcal{N}})$ mit $\delta f = o$ und $\|f\|_\varphi < +\infty$ gibt es ein $g \in \mathcal{C}^p(\mathfrak{U}^{(\mu)}, \mathcal{A}^L)$ mit $\delta g = o$ und*

$$r^*_{\nu\mu} f = Pg,$$
$$\|g\|_{\varphi_N} \leq \|f\|_\varphi.$$

N und $\mu > \nu$ sind unabhängig von φ und f.

<u>Beweis.</u> Der Beweis wird mit einer Induktion über fallendes p gezeigt. Wegen (3.1.ii) sind alle p-Koketten trivial, wenn $p \geq p_o$.

Also ist der Satz für $p \geq p_o$ richtig.

Sei nun $p \geq o$, und sei der Satz für echt größere p und alle Noetherschen Operatoren bereits bewiesen. Insbesondere gilt der Satz also schon für $p+1$ und den durch die Zeilen von P definierten Noetherschen Operator.

Sei $f \in \mathcal{C}^p(\mathcal{U}^{(\nu)}, \mathcal{R}_{\mathcal{N}})$ gegeben mit $\delta f = o$ und $\|f\|_{\varphi} < +\infty$.
Mit μ und N wie in (3.8) gilt für alle $s \in I_{p+1}$

$$\sup_{U_s^{(\mu)}} |(r^*_{\nu\mu} f)_s| \leq \|f\|_{\varphi} \cdot \exp(\sup_{U_s^{(\mu)}} \varphi_N/2).$$

Mit Hilfe des semilokalen Divisionssatzes (2.28) erhält man eine (nach Antisymmetrisierung alternierende) Kokette $u = (u_s) \in \mathcal{C}^p(\mathcal{U}^{(\lambda)}, \mathcal{A}^L)$ mit $Pu = r^*_{\nu\lambda} f$ und

$$\rho(U^*) \cdot \sup_{U_s^{(\lambda)}} |u_s| \leq \sup_{U_s^{(\mu)}} |(r^*_{\nu\mu} f)_{s'}|, \quad s' = r_{\mu\lambda}(s),\ s \in I_{p+1}.$$

Hier ist U_* wie in (3.1.iv), wobei $\lambda - \mu > o$ genügend groß. Mit einem größeren N erhält man dann

$$\|u\|_{\varphi_N} \leq \|f\|_{\varphi} .$$

Die Kokette $\delta u \in \mathcal{C}^{p+1}(\mathcal{U}^{(\lambda)}, \mathcal{A}^L)$ wird im allgemeinen nicht Null sein. Jedoch ist $P(\delta u) = \delta(r^*_{\nu\lambda} f) = o$ und $\delta(\delta u) = o$, so daß man die Induktionsvoraussetzung auf den durch P definierten Noetherschen Operator anwenden kann. Damit gibt es ein $h \in \mathcal{C}^{p+1}(\mathcal{U}^{(\sigma)}, \mathcal{A}^M)$, $\sigma > \lambda$, mit $\delta h = o$ und

$$Qh = r^*_{\lambda\sigma}(\delta u),$$

$$\|h\|_{\varphi_{N_1}} \leq \|\delta u\|_{\varphi_N} .$$

Hier ist Q eine (festgewählte) $L \times M$-Polynommatrix, mit der die Komposition $P \circ Q = o$ exakt in $\mathbb{C}[z]^L$ ist.

Mit (3.4) erhält man jetzt eine Kokette $\tilde{h} \in \mathcal{C}^p(\mathcal{U}^{(\tau)}, \mathcal{A}^M), \tau > \sigma$, mit $\delta\tilde{h} = r^*_{\sigma\tau} h$ und

$$\|\tilde{h}\|_{\varphi_{N_2}} \leq \|h\|_{\varphi_{N_1}} \quad .$$

Dann ist $g = r^*_{\lambda\tau} u - Q\tilde{h}$ die gesuchte Lösung, denn $Pg = r^*_{\lambda\tau} Pu = r^*_{\nu\tau} f$ und

$$\delta g = r^*_{\lambda\tau} \delta u - Q\delta\tilde{h} = r^*_{\lambda\tau} \delta u - r^*_{\sigma\tau} Qh = o.$$

Der Satz ist bewiesen. ∎

Für $p = o$ erhält man aus dem obigen Satz, wenn man von L^2- zu sup - Abschätzungen für die holomorphen Funktionen übergeht, sofort eine Globalisierung von Satz (2.28).

(3.11) <u>GLOBALER DIVISIONSSATZ.</u> Sei $M \subset \mathbb{C}[z]^K$ ein $\mathbb{C}[z]$-Modul. Sei $\mathcal{N}$ ein zu M gehöriger Noetherscher Operator. M werde als $\mathbb{C}[z]$-Modul von $P_1, \ldots, P_L \in M$ erzeugt. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ein pseudokonvexes Gebiet. Sei φ eine plurisubharmonische Funktion auf Ω , welche (3.9) erfüllt, wenn $\Omega \neq \mathbb{C}^n$. Zu jedem $f \in \mathcal{A}(\Omega)^K$ mit

$$Af|V \cap \Omega = o \text{ für alle } (A,V) \in \mathcal{N}$$

gibt es ein $v = (v_1, \ldots, v_L) \in \mathcal{A}(\Omega)^L$ mit

$$f = \sum_1^L v_j P_j \text{ in } \Omega,$$

$$\sup_\Omega |v| e^{-\varphi_N} \leq \sup_\Omega |f| e^{-\varphi}.$$

Hierbei ist $N > o$ eine von φ und f unabhängige Konstante.

Schließlich kann noch eine Globalisierung von (2.31) angegeben werden.

(3.12) <u>GLOBALER INTERPOLATIONSSATZ.</u> Sei $\mathcal{N}$ ein Noetherscher Operator (auf $\mathbb{C}[z]^K$). Sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ein pseudokonvexes Gebiet. Sei φ eine plurisubharmonische Funktion auf Ω, welche (3.9) erfüllt, wenn $\Omega \neq \mathbb{C}^n$. Zu jedem $f \in \mathcal{A}(\Omega)^K$ gibt es dann ein $g \in \mathcal{A}(\Omega)^K$ mit

$$(3.13) \qquad (Af - Ag)|V \cap \Omega = o \text{ für alle } (A,V) \in \mathcal{N},$$

$$\sup_{\Omega} |g| e^{-\varphi_N} \leq \max_{(A,V)\in\mathcal{N}} \sup_{V\cap\Omega} |Af| e^{-\varphi}.$$

Hierbei ist $N > o$ eine von φ und f unabhängige Konstante.

<u>Beweis.</u> Den Unterschied zwischen sup - und L^2 - Normen für Koketten kann man wieder ignorieren, wenn man zu geeigneten Überdeckungen übergeht.
Sei $f \in \mathcal{A}(\Omega)^K$ mit

$$\max_{(A,V)\in\mathcal{N}} \sup_{V\cap\Omega} |Af| e^{-\varphi} = a < +\infty$$

gegeben. (Im Falle $a = +\infty$ ist nichts zu zeigen).
Aus dem semilokalen Interpolationssatz (2.31) erhält man eine Kokette $\tilde{g} = (\tilde{g}_j) \in \mathcal{C}^o(\mathcal{U}^{(\nu)}, \mathcal{A}^K)$ mit

$$(Af - A\tilde{g}_j)|V \cap U_j^{(\nu)} = o \qquad \text{für alle } (A,V)\in\mathcal{N} \quad \text{und } j \in \mathbb{N},$$

und $\|\tilde{g}\|_{\varphi_N} \leq a$. Also ist $\delta\tilde{g} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}^{(\nu)}, \mathcal{R}_{\mathcal{N}})$. Weil $\delta^2\tilde{g} = o$ erhält man nach (3.1o) ein $\tilde{h} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}^{(\mu)}, \mathcal{A}^L)$, $\mu > \nu$, mit $\delta\tilde{h} = o$, $P\tilde{h} = r^*_{\nu\mu}\,\delta\tilde{g}$ und $\|\tilde{h}\|_{\varphi_{N_1}} \leq a$. Hier ist P eine (festgewählte) $K \times L$-Polynommatrix, die den Modul $M_{\mathcal{N}}$ erzeugt. Mit (3.4) erhält man eine Kokette $h \in \mathcal{C}^o(\mathcal{U}^{(\lambda)}, \mathcal{A}^L)$, $\lambda > \mu$, mit $\delta h = r^*_{\mu\lambda}\tilde{h}$ und $\|h\|_{\varphi_{N_2}} \leq a$. Dann ist

$$g = r^*_{\nu\lambda}\tilde{g} - Ph$$

die gesuchte Lösung; denn wegen

$$\delta g = r^*_{\nu\lambda}\ \delta\tilde{g} - r^*_{\mu\lambda}P\tilde{h} = o$$

ist g eine holomorphe Funktion auf Ω, und aus $APh|V = o$, $(A,V) \in \mathcal{N}$, folgt (3.13). ∎

(3.14) <u>ERGÄNZUNG</u> (zum globalen Interpolationssatz).
Seien $\mathcal{N}$ und Ω wie in (3.12). Seien stetige Funktionen $h_{(A,V)}: V \cap \Omega \to \mathbb{C}$, $(A,V) \in \mathcal{N}$, gegeben.
Es gibt eine global definierte holomorphe Funktion $f \in \mathcal{A}(\Omega)^K$ mit

$$Af|V \cap \Omega = h_{(A,V)} \qquad \text{für alle} \quad (A,V) \in \mathcal{N},$$

wenn es eine offene Überdeckung (U_j) von Ω und holomorphe Funktionen $f_j \in \mathcal{A}(U_j)^K$ gibt mit

$$Af_j|V \cap U_j = h_{(A,V)}|U_j \quad \text{für alle } (A,V) \in \mathcal{N} \text{ und alle } j.$$

Dies folgt mit einer nicht quantitativen Version des Beweises von (3.12). Hierbei wird der semilokale Interpolationssatz durch die Existenz der f_j und (3.1o) durch Cartan's Theorem B ersetzt. Mit dem globalem Interpolationssatz folgt dann, daß man für solch ein f - nach eventueller Änderung von f - noch Schranken angeben kann.

Anmerkungen

(a) Der hier vollzogene Übergang vom Lokalen aufs Globale stammt von Hörmander [15], 7.6. Von dieser Darstellung wird hier nur geringfügig abgewichen. Der größte Unterschied besteht in der Wahl allgemeinerer (aber noch "temperierter") Überdeckungen vom Whitneyschen Typ. Außerdem werden die plurisubharmonischen Funktionen keiner Lipschitzabschätzung unterworfen wenn $\Omega = \mathbb{C}^n$. Die Verallgemeinerung von $\mathbb{C}^n$ auf pseudokonvexe Gebiete $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ bereitet keine Schwierigkeiten, wenn man von Hörmanders [15] Theorie des $\bar{\partial}$-Operators in pseudokonvexen Gebieten ausgeht. Eine solche Verallgemeinerung wurde auch von de Roever [22] gegeben.

(b) Hörmanders "cohomology with bounds" existierte noch nicht, als Ehrenpreis um 196o das Fundamentalprinzip aufstellte. Ehrenpreis [9] und Palamodov [2o] benutzten eine quantitative Version des klassischen Beweises (Induktion über die Dimension) von Cartans Theorem B, um den Übergang vom Lokalen aufs Globale zu schaffen. Dieses Verfahren ist umständlicher und liefert nicht so allgemeine Wachstumsabschätzungen wie das Hörmandersche (vgl. Anmerkungen (a) und (b) zu Kapitel 4).

KAPITEL 4
DIFFERENTIALOPERATOREN AUF LAU-RÄUMEN

In diesem Kapitel wird das Fundamentalprinzip und der zugehörige Integraldarstellungssatz für lineare partielle Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten bewiesen. Er wird in abstrakter Form für lokalisierbare analytisch-uniforme Räume (=LAU-Räume) im Abschnitt 4.4 formuliert und gezeigt. LAU-Räume werden im Abschnitt 4.1 eingeführt. Sie sind nach (abstrakter) Fourier-Laplace-Transformation dual zu gewichteten Räumen ganzer Funktionen, wobei die Familie der Gewichtsfunktionen mit den in Kapitel 3 vorkommenden Gewichten und deren Modifikationen verträglich ist. Konkrete Räume wie $\mathcal{E}(X)$ und $\mathcal{D}'(X)$, $X \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex, werden in den Abschnitten 4.2 bzw. 4.3 als LAU-Räume aufgefaßt. Aus dem Fundamentalprinzip werden im Abschnitt 4.5 noch Regularitätssätze für Differentialgleichungen hergeleitet.

4.1 LAU-Strukturen und LAU-Räume

Das Hauptanliegen dieses Abschnitts ist die Einführung gewisser Familien $\mathcal{K}$ von Gewichtsfunktionen auf $\mathbb{C}^n$ - den LAU-Strukturen - und hierzu assoziierten Räumen ganzer Funktionen $A_{\mathcal{K}}$.
Die Bedeutung von LAU-Strukturen $\mathcal{K}$ wird in Abschnitt 4.4 klar: Der Quotientenraum $A_{\mathcal{K}}^K/\overline{PA_{\mathcal{K}}^L}$, P eine $K \times L$-Polynommatrix, kann mit Hilfe eines zu $P\cdot\mathbb{C}[z]^L$ gehörigen Noetherscher Operators $\mathcal{N}$ mit einem Unterraum eines Raumes stetiger Funktionen auf den Varietäten V, $(A,V) \in \mathcal{N}$, identifiziert werden.

Stetige, positive Funktionen auf $\mathbb{C}^n$ werden im Folgenden Gewichtsfunktionen genannt. Für eine Gewichtsfunktion ϕ ist $\mathcal{A}(\phi)$ (bzw. $\mathcal{C}(\phi)$) der Raum aller holomorphen (bzw. stetigen) Funktionen f auf $\mathbb{C}^n$ mit

$$\lim_{z \to \infty} f(z)/\phi(z) = o.$$

Mit der Norm $\|f\|_\phi = \sup_{\mathbb{C}^n} |f|/\phi$ ist $\mathcal{A}(\phi)$ (bzw. $\mathcal{C}(\phi)$) ein Banachraum. (Gelegentlich wird auch $\mathcal{A}(\phi)$ für oberhalb stetige Funktionen ϕ mit $\inf_{|z| \le r} \phi(z) > o$, $\forall r > o$, betrachtet werden.)

Im Folgenden ist $\mathcal{K}$ stets eine Familie von Gewichtsfunktionen, die gerichtet ist, d.h. es gibt zu $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{K}$ ein $\phi \in \mathcal{K}$ mit $\phi \le \min(\phi_1, \phi_2)$. Dann ist

$$\mathcal{A}_{\mathcal{K}} := \operatorname{proj\,lim}_{\phi \in \mathcal{K}} \mathcal{A}(\phi) = \bigcap_{\phi \in \mathcal{K}} \mathcal{A}(\phi)$$
$$(\text{bzw. } \mathcal{C}_{\mathcal{K}} = \operatorname{proj\,lim}_{\phi \in \mathcal{K}} \mathcal{C}(\phi))$$

ein lokalkonvexer Raum mit den Halbnormen $\|\cdot\|_\phi$, $\phi \in \mathcal{K}$.

Zu jeder Familie von Gewichtsfunktionen, $\mathcal{K}$, gehört die Menge $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{K})$ aller nichtnegativen oberhalb stetigen Funktionen b auf $\mathbb{C}^n$, für die

$$\sup_{\mathbb{C}^n} b/\phi < +\infty \quad \text{für alle } \phi \in \mathcal{K}.$$

Es ist klar, daß es zu jeder beschränkten Teilmenge $B \subset \mathcal{C}_{\mathcal{K}}$ ein $b \in \mathcal{B}$ mit $B \subset \{f \in \mathcal{C}_{\mathcal{K}}; |f| \le b\}$ gibt.

(4.1) <u>DEFINITION.</u> Eine Familie von Gewichtsfunktionen, $\mathcal{K}$, heißt *LAU-Struktur*, wenn es zu jedem $\phi \in \mathcal{K}$ und jedem $N > o$, ein $\tilde{\phi} \in \mathcal{K}$ gibt, so daß gilt:

(i) $\sup_{|\tilde{z}| \leq N} \tilde{\Phi}(z+\tilde{z}) \cdot (2+|z|^2)^N \leq \Phi(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}^n$

(ii) Zu jedem $b \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ mit $b \leq \tilde{\Phi}$ gibt es eine plurisubharmonische Funktion φ mit $b \leq e^{\varphi} \leq \Phi$, so daß

$$\mathcal{A}(e^{\varphi_N}) \subset \overline{\mathcal{A}_{\mathcal{K}}}^{\mathcal{A}(\Phi)}$$

(Abschluß in $\mathcal{A}(\Phi)$). Hier ist

$$\varphi_N(z) = \sup_{|\tilde{z}| \leq N} \varphi(z+\tilde{z}) + N \cdot \log(2+|z|^2), \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

(4.2) <u>BEMERKUNG.</u> Eine stärkere Bedingung als (ii) ist:

(ii)' Zu jedem $b \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ mit $b \leq \tilde{\Phi}$ gibt es eine plurisubharmonische Funktion φ mit $b \leq e^{\varphi} \leq \Phi$ und $e^{\varphi} \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$.

Einige grundlegende Eigenschaften von LAU-Strukturen sind im folgenden Satz zusammengefaßt.

(4.3) <u>SATZ.</u> Sei $\mathcal{K}$ eine LAU-Struktur. Dann ist $\mathcal{A}_{\mathcal{K}}$ abgeschlossen unter Translationen, unter Differentiationen und unter Multiplikationen mit Polynomen. Diese Operationen sind auch stetig auf $\mathcal{A}_{\mathcal{K}}$. u ist ein stetiges lineares Funktional auf $\mathcal{A}_{\mathcal{K}}$ genau dann, wenn es ein Radonmaß $d\mu$ auf $\mathbb{C}^n$ gibt mit $\int \Phi \cdot |d\mu| < \infty$ für ein $\Phi \in \mathcal{K}$, so daß

$$u(f) = \int_{\mathbb{C}^n} f(z)\,d\mu(z) \qquad \text{für alle } f \in \mathcal{A}_{\mathcal{K}}.$$

Der Raum $\mathcal{A}_{\mathcal{K}}$ enthält eine Funktion $f \neq 0$.

<u>Beweis.</u> Die Abgeschlossenheit von $\mathcal{A}_{\mathcal{K}}$ unter den genannten Operationen und ihre Stetigkeit folgt leicht aus (4.1.i).

Sei u ein stetiges lineares Funktional auf $\mathcal{A}_{\mathcal{K}}$. Dann gibt es ein $\Phi \in \mathcal{K}$ mit

$$|u(f)| \le \|f\|_{\Phi} \quad \text{für alle } f \in \mathcal{A}_{\mathcal{K}}.$$

Nach dem Hahn-Banach Theorem kann u fortgesetzt werden zu einem stetigen linearen Funktional auf dem Banachraum aller stetigen Funktionen f auf $\mathbb{C}^n$ mit $f(z)/\Phi(z) \to 0$ für $z \to \infty$. Ein u darstellendes Radonmaß $d\mu$ erhält man nun aus dem Rieszschen Darstellungssatz. Umgekehrt definiert ein Radonmaß $d\mu$ mit $\int \Phi |d\mu| < +\infty$ für ein $\Phi \in \mathcal{K}$ offenbar ein stetiges lineares Funktional auf $\mathcal{A}_{\mathcal{K}}$.

Um $\mathcal{A}_{\mathcal{K}} \neq \{0\}$ zu erhalten, genügt es wegen (4.1.ii) zu zeigen, daß $\mathcal{A}(e^{\varphi_N}) \neq \{0\}$ wenn $N \ge 3n/2$ und wenn φ eine beliebige stetige plurisubharmonische Funktion ist. Für solche φ gibt es nach Theorem 4.4.4 in [15] eine holomorphe Funktion $f \neq 0$ auf $\mathbb{C}^n$ mit

$$\int_{\mathbb{C}^n} |f(z)|^2 \, e^{-2\varphi(z)} (1+|z|^2)^{-3n} \, d\lambda(z) < +\infty.$$

Hieraus erhält man in gewohnter Weise eine sup-Abschätzung

$$|f(z)| \le C \cdot \sup_{|\tilde{z}| \le 1} e^{\varphi(z+\tilde{z})} (1+|z+\tilde{z}|^2)^{3n/2}, \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

Also ist $f \in \mathcal{A}(e^{\varphi_N})$ wenn $N \ge 3n/2$. ∎

(4.4) <u>DEFINITION.</u> Sei $\mathcal{K}$ eine LAU-Struktur. Sei $\mathcal{F}: F \to \mathcal{A}_{\mathcal{K}}$, $\varphi \mapsto \hat{\varphi}$, ein linearer Homöomorphismus eines lokalkonvexen Raumes F auf $\mathcal{A}_{\mathcal{K}}$. Dann wird gesagt, daß *F mittels der abstrakten Fourier-Laplace Transformation* $\mathcal{F}$ *die LAU-Struktur* $\mathcal{K}$ *trägt.*

Die starken Dualräume von lokalkonvexen Räumen mit LAU-Struktur (und abstrakter Fourier-Laplace Transformation) heißen *LAU-Räume*.

In den weiter unten angegebenen Beispielen ist die abstrakte Fourier-Laplace Transformation gleich der konkreten. Dies rechtfertigt die folgende Terminologie.

(4.5) DEFINITION. Sei F' ein LAU-Raum mit LAU-Struktur $\mathcal{K}$ und abstrakter Fourier-Laplace Transformation $\mathcal{F} : F \to \mathcal{A}_{\mathcal{K}}$, $\varphi \mapsto \hat{\varphi}$. Sei P eine L × K-Matrix über dem Polynomring $\mathbb{C}[z]$. Der via $\mathcal{F}$ zu $\mathcal{A}_{\mathcal{K}}^L \to \mathcal{A}_{\mathcal{K}}^K$, $f \mapsto {}^t\check{P}f$, duale Operator $P(D): F'^K \to F'^L$ wird als *linearer Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten* bezeichnet. Die Polynommatrix P ist sein *Symbol*. Einen zum Untermodul ${}^t\check{P} \cdot \mathbb{C}[z]^L \subset \mathbb{C}[z]^K$ gehörigen Noetherschen Operator nennt man auch einen *zum Differentialoperator P(D) gehörigen Noetherschen Operator*. (Hier ist $\check{P}(z) = P(-z), z \in \mathbb{C}^n$, und ${}^tP$ ist die zu P transponierte Matrix).

4.2 Die LAU-Räume $\mathcal{E}_\omega(X)$ und $\mathcal{A}(\Omega)$.

Hier werden einige (DF)-Räume angegeben, die eine LAU-Struktur tragen. Diese sind auf Grund von Paley-Wiener Sätzen unter der (konkreten und abstrakten) Fourier-Laplace Transformation isomorph zu einem induktiven Limes

$$\operatorname*{ind\,lim}_{j \to \infty} \mathcal{A}(\Phi_j)$$

mit $\sup_{\mathbb{C}^n} \Phi_j/\Phi_{j+1} < +\infty$ für alle j.

Sei $(\Phi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Gewichtsfunktionen mit

(4.6) $\lim_{z \to \infty} \Phi_j(z)/\Phi_{j+1}(z) = o$ für alle $j \in \mathbb{N}$,

Sei $\mathcal{K} = \mathcal{K}_{(\Phi_j)}$ die Menge aller Gewichtsfunktionen Φ mit

$$\sup_{\mathbb{C}^n} \Phi_j/\Phi < +\infty \text{ für alle } j \in \mathbb{N}.$$

(4.7) SATZ. *Seien $(\Phi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ und $\mathcal{K} = \mathcal{K}_{(\Phi_j)}$ wie oben. Dann ist*

$$\operatorname{ind\,lim}_{j \to \infty} \mathcal{A}(\Phi_j) = \mathcal{A}_{\mathcal{K}}$$

(Gleichheit lokalkonvexer Räume). $\mathcal{K}$ ist eine LAU-Struktur, wenn es zu jedem $j \in \mathbb{N}$ ein $l \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $\Phi_j(z+\tilde{z})(2+|z|^2) \leq \Phi_l(z)$ für alle z, $\tilde{z} \in \mathbb{C}^n$ mit $|\tilde{z}| \leq 1$, und wenn es plurisubharmonische Funktionen $\log \Phi_j'$ gibt mit $\Phi_j \leq \Phi_j'$ und $\Phi_j' = o(\Phi_{j+1})$ für jedes $j \in \mathbb{N}$.

Beweis. Zum Beweis von $\operatorname{ind\,lim} \mathcal{A}(\Phi_j) = \mathcal{A}_{\mathcal{K}}$ ist es zweckmäßig, zuerst die analoge Gleichung für die lokalkonvexen Räume stetiger Funktionen zu zeigen,

(4.8) $\operatorname{ind\,lim}_{j \to \infty} \mathcal{C}(\Phi_j) = \mathcal{C}_{\mathcal{K}}$.

Natürlich ist der induktive limes stetig in $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}$ eingebettet. Er ist aber auch ein Unterraum von $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}$. Zum Beweis dieser Behauptung sei eine Nullumgebung U in $\operatorname{ind\,lim} \mathcal{A}(\Phi_j)$ gegeben. Es ist ein $\Phi \in \mathcal{K}$ zu finden mit

$$\{f \in \operatorname{ind\,lim} \mathcal{A}(\Phi_j);\ \|f\|_{\Phi} < 1\} \subset U.$$

Ohne Einschränkung kann man annehmen, daß U abgeschlossen und absolutkonvex ist. Es gibt eine Folge positiver reeller Zahlen $(\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{N}}$, so daß

$$\{f \in \mathcal{C}(\Phi_j);\ \|f\|_{\Phi_j} \le \varepsilon_j\} \subset U \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N}.$$

Wähle eine lokalendliche Partition der Eins,

$$\sum_1^\infty \alpha_l = 1 \qquad \text{auf } \mathbb{C}^n,$$

stetiger Funktionen α_l mit kompaktem Träger supp α_l, so daß für jedes $l > 1$ gilt

$$(4.9) \qquad \Phi_{l-1}(z)/\Phi_l(z) \le 2^{-l}\varepsilon_l \qquad \text{wenn } \alpha_l(z) \ne 0.$$

Wähle $0 < \delta_j \le 1$, $j = 1,2,..$, so daß

$$(4.10) \quad \delta_j \cdot \Phi_j(z)/\Phi_l(z) \le \min(\delta_l, 2^{-l}\varepsilon_l) \text{ wenn } \alpha_l(z) \ne 0,\ 1 \le l \le j.$$

Eine solche Wahl ist möglich, da jedes δ_j nur für endlich viele l Bedingungen zu erfüllen hat. Setze

$$\Phi(z) = \sup_{j\in\mathbb{N}} \delta_j \Phi_j(z) , \qquad z \in \mathbb{C}^n.$$

Wegen (4.10) ist das Supremum lokal ein Maximum. Somit ist Φ stetig und folglich $\Phi \in \mathcal{K}$. Sei nun $f \in \operatorname{ind}\lim \mathcal{C}(\Phi_j)$ mit $|f(z)| < \Phi(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$, gegeben. Ohne Einschränkung darf man annehmen, daß $\Phi_j \le \Phi_{j+1}$ für alle j. Mit $\Phi_0 := \Phi_1$ gilt dann

$$\|\alpha_l f\|_{\Phi_l} \le \sup_{\alpha_l(z) \ne 0} \Phi(z)/\Phi_l(z)$$

$$\le \sup_{\alpha_l(z) \ne 0} \max\,(\Phi_{l-1}(z)/\Phi_l(z),\ \sup_{l \le j} \delta_j\Phi_j(z)/\Phi_l(z)).$$

Mit (4.9) und (4.1o) erhält man hieraus

$$\|\alpha_l f\|_{\Phi_l} \leq 2^{-l}\varepsilon_l \text{ für alle } l = 1,2,\ldots .$$

Folglich ist $f = \sum_1^\infty 2^{-l}(2^l\alpha_l f) \in U$, wenn diese Reihe in der Topologie des induktiven Limes konvergiert. Für ein j sind die Partialsummen beschränkt in $\mathcal{E}(\Phi_j)$. Wegen (4.6) konvergiert die Reihe daher in $\mathcal{E}(\Phi_{j+1})$.
Zum Beweis von (4.8) bleibt noch $\mathcal{E}_{\mathcal{K}} \subset \bigcup_j \mathcal{E}(\Phi_j)$ zu zeigen. Allgemeiner wird jetzt gezeigt, daß jede in $\mathcal{E}_{\mathcal{K}}$ beschränkte Teilmenge bereits in einem Raum $\mathcal{E}(\Phi_j)$ enthalten und dort beschränkt ist. Dazu sei $b \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ gegeben. Angenommen, es gäbe eine Folge (z_l), $z_l \in \mathbb{C}^n$, so daß

(4.11) $$\sup_l b(z_l)/\Phi_l(z_l) = +\infty .$$

Es gibt dann $0 < \delta_j \leq 1$ für alle $j \in \mathbb{N}$ mit

$$\delta_j\Phi_j(z_l) \leq \Phi_l(z_l) \qquad \text{für } 1 \leq l \leq j.$$

Wähle $\Phi \in \mathcal{K}$ mit $\Phi \leq \sup_j \delta_j\Phi_j$. Dann ist $\Phi(z_l) \leq \Phi_l(z_l)$ für alle $l \in \mathbb{N}$. (Beachte, daß $\Phi_j \leq \Phi_{j+1}$ für alle j.) Im Widerspruch zu (4.11) ist $\sup_{\mathbb{C}^n} b/\Phi < +\infty$. Also ist für ein $l \in \mathbb{N}$

$$\sup_{\mathbb{C}^n} b/\Phi_l < +\infty .$$

Insbesondere ist die obige Behauptung über beschränkte Mengen gezeigt.
Hiermit ist auch gezeigt, daß ind lim $\mathcal{E}(\Phi_j) = \mathcal{E}_{\mathcal{K}}$ und ind lim $\mathcal{A}(\Phi_j)$ (DF)-Räume sind (siehe z.B. [16], § 29).

ind lim $\mathcal{A}(\Phi_j)$ ist zudem ein Montelraum, denn die Einbettungen $\mathcal{A}(\Phi_j) \hookrightarrow \mathcal{A}(\Phi_{j+1})$ sind kompakt. Dies folgt mit (4.6) aus Montel's Theorem.

Auf die Inklusion

$$\operatorname{ind}\lim_{j} \mathcal{A}(\Phi_j) \hookrightarrow \mathcal{C}_\chi$$

ist daher der folgende Homomorphiesatz von A. Baernstein II ([2], Lemma in § 2) anwendbar. Mit ihm folgt

$$\operatorname{ind}\lim_{j} \mathcal{A}(\Phi_j) = \mathcal{A}_\chi \quad .$$

(4.12) <u>*LEMMA.*</u> *Seien E und F (DF)-Räume. E sei außerdem ein Montelraum. Sei $T : E \to F$ ein stetiger linearer Operator, so daß jede in TE beschränkte Teilmenge Bild unter T einer beschränkten Teilmenge in E ist. Dann ist T ein Homomorphismus, d.h. eine offene Abbildung auf TE.*

<u>Beweis.</u> Die starken Dualräume E'_β und F'_β sind Fréchetäume (siehe z.B. [16], § 29.3). Der zu T duale Operator $T' : F'_\beta \to E'_\beta$ ist ein Homomorphismus. Zum Beweis betrachte den starken Abschluß R des Bildes von T'. Die starke Topologie auf E' ist die Mackeytopologie bezüglich der Dualität $< E', E >$. Folglich ist der starke Abschluß einer absolutkonvexen Teilmenge in E' gleich dem schwach-*-Abschluß dieser Teilmenge. Also ist $R = (\text{Kern } T)^\circ$ (= Polare von Kern T). Sei V eine Nullumgebung in F'_β. Es gibt ein $B_F \subset F$, B_F beschränkt, mit $B_F^\circ \subset V$. Nach Voraussetzung über T findet man eine beschränkte Teilmenge B_E in E mit $T^{-1}(B_F) \subset B_E + \text{Kern } T$. Mit dem Bipolarensatz folgt

$$\overline{T'(B_F^o)} = (T^{-1}(B_F))^o \supset B_E^o \cap (\text{Kern } T)^o .$$

$\overline{T'B_F^o}$ ist auch der starke Abschluß von $T'B_F^o$. T' ist somit eine fast offene Abbildung von F'_β in den Fréchetraum R. Nach dem Banach-Schauder-Theorem ist T' folglich eine offene Abbildung auf R.

Sei jetzt $U \subset E$ eine absolutkonvexe, abgeschlossene Nullumgebung mit Kern $T \subset U$. Die schwach-$*$-kompakte Polare $U^o \subset R$ ist auch kompakt in E'_β, denn auf gleichstetigen Teilmengen von E' stimmen die schwach-$*$-Topologie und die starke Topologie überein (siehe z.B. [1o], § 22.2). Da R ein Fréchetraum ist, ist U^o enthalten in der absolutkonvexen, abgeschlossenen Hülle einer Nullfolge (ξ_n), $\xi_n \in R$ (siehe z.B. [16], § 21.1o(3)). Da T' offen auf R ist, findet man eine Nullfolge (η_n) in F'_β mit $T\eta_n = \xi_n$ für alle n. Setze

$$V = \bigcap_n \{y \in F; |\langle y, \eta_n\rangle| \le 1\} .$$

Dann ist $U^o \subset T'V^o$, also $V \subset TU$. Da F ein (DF)-Raum ist, ist V eine Nullumgebung in F. ∎

Fortsetzung des Beweises von (4.7). Zu jedem $j \in \mathbb{N}$ gebe es ein $l \in \mathbb{N}$, so daß

$$\phi_j(z+\tilde{z})(2+|z|)^2 \le \phi_l(z) \quad \text{für alle } z, \tilde{z} \in \mathbb{C}^n,\ |\tilde{z}| \le 1 .$$

Es gebe eine plurisubharmonische Funktion $\log\phi'_j$ mit $\phi_j \le \phi'_j$ und $\phi'_j = o(\phi_{j+1})$ für jedes $j \in \mathbb{N}$. Zum Beweis, daß $\mathcal{K}$ eine LAU-Struktur ist, seien $\phi \in \mathcal{K}$ und $N > o$ gegeben.

Wähle $\delta_j > o$ mit $\sup_{\mathbb{C}^n} \phi'_j/\phi \le 1/\delta_j$, $j \in \mathbb{N}$. Wähle eine Folge $(l(j))_{j \in \mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen mit

$$\Phi_j(z+\tilde{z})(2+|z|^2)^N \leq \Phi_{l(j)}(z) \quad \text{für alle } z,\tilde{z} \in \mathbb{C}^n,\ |\tilde{z}| \leq N.$$

Für jedes $\tilde{\Phi} \in \mathcal{K}$ mit

$$\tilde{\Phi}(z) \leq \sup_j \delta_{l(j)} \cdot \Phi_j(z), \quad z \in \mathbb{C}^n ,$$

gilt dann (4.1.i).

Nach geeigneter Verkleinerung der $\delta_j > o$ kann man annehmen, daß zusätzlich für alle $l > 1$ gilt

$$\delta_l \Phi_l^!(z) \leq \delta_{l-1} \Phi_{l-1}^!(z) \quad \text{wenn } z \in \mathbb{C}^n,\ |z| \leq l.$$

Betrachte $\tilde{\Phi} \in \mathcal{K}$ und $b \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ mit

$$b \leq \tilde{\Phi} \leq \sup_j \delta_j \Phi_j^! \qquad (\text{auf } \mathbb{C}^n).$$

Wie bereits gezeigt wurde, gibt es ein $l_o \in \mathbb{N}$ mit $\sup_{\mathbb{C}^n} (b/\Phi_{l_o}) < +\infty$. Nach (4.6) gibt es dann ein $l \in \mathbb{N}$, $l > l_o$, mit

$$b(z) \leq \delta_{l_o+1} \Phi_{l_o+1}(z) \qquad \text{wenn } z \in \mathbb{C}^n,\ |z| \geq l.$$

Also gilt auf ganz $\mathbb{C}^n$

$$b \leq e^{\varphi} := \max_{j \leq l} \delta_j \Phi_j^! \leq \Phi.$$

Es ist $e^{\varphi} \in \mathcal{B}$. Außerdem ist φ plurisubharmonisch. Wie in (4.2) bemerkt, bedeutet dies, daß $\mathcal{K}$ eine LAU-Struktur ist. ∎

Mit Hilfe des eben gezeigten Satzes kann man konkrete Beispiele von LAU-Räumen angeben.

(i) Der Raum der Beurlingschen ultradifferenzierbaren Funktionen $\mathcal{E}_\omega(X)$ auf einer offenen und konvexen Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ ist ein LAU-Raum. Hier ist ω eine stetige reellwertige Funktion

auf $\mathbb{R}^n$ mit den Eigenschaften

$$
(4.13)\quad
\begin{aligned}
&1 \leq \omega(\xi+\eta) \leq \omega(\xi)+\omega(\eta) \qquad \text{für alle } \xi, \eta \in \mathbb{R}^n, \\
&\int_{\mathbb{R}^n} \omega(\xi)(1+|\xi|)^{-n-1} d\xi < +\infty, \\
&\omega(\xi) \geq b\cdot\log(1+|\xi|), \ \xi \in \mathbb{R}^n, \text{ für ein } b > 0.
\end{aligned}
$$

Sei K eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Dann ist der Raum aller $\varphi \in C_0^\infty(K)$ mit

$$\|\varphi\|_\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\varphi}(\xi)| e^{\lambda\omega(\xi)} d\xi < +\infty \quad \text{für alle } \lambda > 0$$

ein Fréchetraum $\mathcal{D}_\omega(K)$ mit den Halbnormen $\|\cdot\|_\lambda$.
($\hat{\varphi}(\xi) = \int e^{-ix\xi}\varphi(x)dx$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, ist die Fouriertransformierte von φ.) Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen. Die Elemente des (LF)-Raumes

$$\mathcal{D}_\omega(X) = \operatorname*{ind\,lim}_{K \subset\subset X} \mathcal{D}_\omega(K)$$

werden Beurling-Testfunktionen genannt.
$\mathcal{E}_\omega(X)$ ist der Raum aller $\psi \in C^\infty(X)$ für die $\varphi\cdot\psi \in \mathcal{D}_\omega(X)$, wenn $\varphi \in \mathcal{D}_\omega(X)$. Mit den Halbnormen $\|\psi\|_{\lambda,\varphi} = \|\varphi\cdot\psi\|_\lambda$, $\psi \in \mathcal{E}_\omega(X)$, (für alle $\lambda > 0$ und alle $\varphi \in \mathcal{D}_\omega(X)$) ist $\mathcal{E}_\omega(X)$ ein reflexiver Fréchetraum. Sein Dualraum $\mathcal{E}'_\omega(X)$ besteht aus den Beurling-Ultradistributionen mit kompaktem Träger in X.
Für $\omega(\xi) = \log(e+|\xi|)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, sind $\mathcal{D}_\omega(X)$ und $\mathcal{E}_\omega(X)$ gerade die üblichen Schwartzschen Räume $\mathcal{D}(X)$ und $\mathcal{E}(X)$. (Eine detaillierte Darstellung der Theorie der Beurling-Ultradistributionen findet man in Björck [5], Chap. I.)
Sei X jetzt zusätzlich konvex. Wähle eine Ausschöpfung von X durch konvexe, kompakte Teilmengen K_j, $j \in \mathbb{N}$, mit $K_j \subset\subset \mathring{K}_{j+1}$ für alle j. Für jedes j setze

$$H_j(\eta) = \sup_{y \in K_j} \eta \cdot y \ , \ \eta \in \mathbb{R}^n \ .$$

Dann gibt es eine Folge positiver Zahlen $(\delta_j)_{j \in \mathbb{N}}$ mit

$$H_j(\eta) + \delta_j |\eta| < H_{j+1}(\eta) \quad \text{für alle } \eta \in \mathbb{R}^n - o \text{ und alle } j \in \mathbb{N}.$$

Das Paley-Wiener-Theorem für $\mathcal{E}'_\omega(X)$ (siehe Björck [5], Thm. 1.8.14) besagt, daß die Fourier-Laplace Transformation

$$(4.14) \qquad (\mathcal{F}u)(z) = \hat{u}(z) = \langle u_x, e^{-i\, z \cdot x} \rangle \quad , \ z \in \mathbb{C}^n \quad ,$$

$u \in \mathcal{E}'_\omega(X)$, den Raum $\mathcal{E}'_\omega(X)$ linear und homöomorph auf

$$\widehat{\mathcal{E}'_\omega(X)} = \operatorname*{ind\,lim}_{j \to \infty} \mathcal{A}(\Phi_j)$$

abbildet. Hier ist für $j \in \mathbb{N}$

$$\Phi_j(z) = \exp(j \cdot \omega(\operatorname{Re} z) + H_j(\operatorname{Im} z)) \ , \ z \in \mathbb{C}^n,$$

(Φ_j) erfüllt alle Annahmen in (4.7). Dies einzusehen ist nur für die letzte Annahme in (4.7) nicht trivial. Hier wähle nach dem unten angegebenen Lemma (4.15) $\varphi_j = \varphi_+$ zu $\varepsilon = \delta_j/2j$, $j \in \mathbb{N}$, und setze

$$\log \Phi'_j = j \cdot \varphi_+(z) + H_j(\operatorname{Im} z) + j\varepsilon|\operatorname{Im} z|, \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

Dann ist $\log \Phi'_j$ plurisubharmonisch, denn alle Summanden sind es, und $\Phi_j \le \Phi'_j$, $\Phi'_j = o(\Phi_{j+1})$. Mit (4.7) folgt nun, daß $\mathcal{E}_\omega(X)$ ein LAU-Raum mit der Fourier-Laplace Transformation $\mathcal{F}$ und mit einer LAU-Struktur $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\widehat{\mathcal{E}'_\omega(X)})$ ist, welche aus allen Gewichtsfunktionen Φ besteht, für die

$$\sup_{\mathbb{C}^n} \exp\,(j \cdot \omega(\operatorname{Re} z) + H_j(\operatorname{Im} z))/\Phi(z) < +\infty$$

für alle $j \in \mathbb{N}$.

(4.15) <u>LEMMA.</u> *Sei ω eine stetige, reellwertige Funktion, die (4.13) erfüllt. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es plurisubharmonische Funktionen φ_+ und φ_- auf $\mathbb{C}^n$ mit*

(a) $\quad -\varepsilon|Im\, z| \leq \varphi_+(z) - \omega(Re z) \leq \varepsilon|Im z| + C$ *für alle* $z \in \mathbb{C}^n$,

(b) $\quad -\varepsilon|Im\, z| \leq \varphi_-(z) + \omega(Re z) \leq \varepsilon|Im z| + C$ *für alle* $z \in \mathbb{C}^n$.

Hier ist C eine von z unabhängige Konstante.

<u>Beweis.</u> Wähle eine ganze Funktion $f \neq 0$ mit

$$|f(z)| \leq \exp(-\omega(-\mathrm{Re}\, z) + \varepsilon|\mathrm{Im} z|), \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

Da es ein $\varphi \in \mathcal{D}_\omega(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \neq 0$, mit $\mathrm{supp}\, \varphi \subset \{|x| < \varepsilon\}$, gibt (siehe [5], Thm. 1.3.7), existiert auch solch ein f (z.B. $f = \hat{\varphi}$). Nach eventueller Translation von f ist $f(0) \neq 0$. Wähle $\delta > 0$, so daß $|f(z)| > \delta$ wenn $|z| < \delta$. Wähle eine Folge $(z_j)_1^\infty$, $z_j \in \mathbb{C}^n$, so daß die Kugeln mit Mittelpunkt z_j und Radius δ den $\mathbb{C}^n$ überdecken. Definiere φ_+ als die kleinste oberhalb stetige Majorante der Funktion

$$\mathbb{C}^n \ni z \longmapsto \sup_j\, (\log|f(z-z_j)| + \omega(\mathrm{Re}\, z_j) - \varepsilon|\mathrm{Im}\, z_j|) + C.$$

φ_+ ist plurisubharmonisch auf $\mathbb{C}^n$ (siehe [14], Lemma 33). Mit $\omega(\mathrm{Re}\, z_j) \leq \omega(-\mathrm{Re}(z-z_j)) + \omega(\mathrm{Re}\, z)$ folgt

$$\log|f(z-z_j)| \leq -\omega(\mathrm{Re}\, z_j) + \omega(\mathrm{Re}\, z) + \varepsilon|\mathrm{Im}\, z| + \varepsilon|\mathrm{Im}\, z_j| .$$

Hieraus erhält man die rechte Ungleichung in (a). Ist $|z-z_j| < \delta$, so ist

$$\log|f(z-z_j)| + \omega(\mathrm{Re}\, z_j) - \varepsilon|\mathrm{Im}\, z_j| \geq -C + \omega(\mathrm{Re} z) - \varepsilon|\mathrm{Im} z|,$$

wenn $C \geq -\log\delta + \varepsilon\delta + \omega(\mathrm{Re}(z-z_j))$. Damit ist auch die linke Ungleichung in (a) gezeigt.

Wählt man eine ganze Funktion f mit $f(o) \neq o$ und

$$|f(z)| \leq \exp(-\omega(\operatorname{Re} z)+\varepsilon|\operatorname{Im} z|), \quad z \in \mathbb{C}^n,$$

so erfüllt die kleinste oberhalb stetige Majorante φ_- der Funktion

$$\mathbb{C}^n \ni z \longmapsto \sup_j (\log|f(z-z_j)| - \omega(\operatorname{Re} z_j)-\varepsilon|\operatorname{Im} z_j|) + C$$

die Ungleichungen (b). Dies beweist man wie im Fall (a). Der Beweis wird dem Leser überlassen. Da φ_- auch plurisubharmonisch auf $\mathbb{C}^n$ ist, ist das Lemma bewiesen. ■

(ii) Der Raum aller holomorpher Funktionen $\mathcal{A}(\Omega)$ auf einer offenen und konvexen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ist ein LAU-Raum. $\mathcal{A}(\Omega)$ ist bekanntlich ein reflexiver Fréchetraum. Sein Dualraum $\mathcal{A}'(\Omega)$ ist der Raum der analytischen Funktionale auf Ω. Wähle eine Ausschöpfung des konvexen Gebiets Ω durch konvexe, kompakte Teilmengen $K_j \subset\subset \Omega$, $j \in \mathbb{N}$, mit $K_j \subset\subset \mathring{K}_{j+1}$ für alle j. Setze für jedes j

$$H_j(z) = \sup_{\zeta \in K_j} \operatorname{Re} \langle z,\zeta \rangle \quad , z \in \mathbb{C}^n$$

($\langle z,\zeta \rangle = z_1\zeta_1 + \ldots + z_n\zeta_n$). Die Laplacetransformation $\mu \mapsto \tilde{\mu}$, $\tilde{\mu}(z) = \mu_\zeta(e^{\langle \zeta,z \rangle})$, $z \in \mathbb{C}^n$, bildet $\mathcal{A}'(\Omega)$ linear und homöomorph ab auf den Raum

$$\operatorname{ind}\lim_{j \to \infty} \overset{\exp}{\mathcal{A}}(H_j) .$$

Dies folgt aus dem Ehrenpreis-Martineau-Theorem. (Siehe z.B. [9], Thm. 5.21 oder [15], Thm. 4.5.3.) Alle H_j sind plurisubharmonisch. (4.7) ist voll anwendbar mit $(\Phi_j) = (H_j)$. Also ist $\mathcal{A}(\Omega)$ ein LAU-Raum mit der (abstrakten) Fourier-Laplace-Transformation $\mathcal{F}\mu = \tilde{\mu}$ und mit der LAU-Struktur $\mathcal{X}$ aller Gewichtsfunktionen Φ mit

$$\sup_{z \in \mathbb{C}^n, \zeta \in K} \exp(\mathrm{Re} < z, \zeta >)/\Phi(z) < + \infty \quad \text{für alle } K \subset\subset \Omega \quad .$$

4.3 Der LAU-Raum $\mathcal{D}'_\omega(X)$.

Hier wird gezeigt, daß die (LF)-Räume $\mathcal{D}_\omega(X)$, $X \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex, eine kanonische LAU-Struktur tragen.

Sei ω eine stetige reellwertige Funktion auf $\mathbb{R}^n$ mit den Eigenschaften (4.13). Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen. Die Elemente des Dualraumes $\mathcal{D}'_\omega(X)$ von $\mathcal{D}_\omega(X)$ heißen Beurling-Ultradistributionen auf X. Für $\omega = \log(e+|\cdot|)$ ist $\mathcal{D}'(X) = \mathcal{D}'_\omega(X)$ der Raum der Schwartzschen Distributionen auf X.
Sei X außerdem konvex. Wähle wieder eine Ausschöpfung von X durch konvexe, kompakte $K_j \subset\subset X$ mit $K_j \subset\subset \overset{\circ}{K}_{j+1}$ für alle $j \in \mathbb{N}$, und setze für jedes j

$$H_j(\eta) = \sup_{y \in K_j} \eta \cdot y \quad , \eta \in \mathbb{R}^n.$$

Aufgrund des Paley-Wiener Theorems für $\mathcal{D}_\omega(K)$, $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex und kompakt, (siehe [5], Thm. 1.4.1), bildet die Fourier-Laplace Transformation $\varphi \mapsto \mathcal{F}\varphi = \hat{\varphi}$ (definiert wie in 4.14) den Raum $\mathcal{D}_\omega(X)$ linear und homöomorph ab auf den Raum

$$\widehat{\mathcal{D}_\omega(X)} = \operatorname*{ind\,lim}_{j \to \infty} \operatorname*{proj\,lim}_{\lambda \to +\infty} \mathcal{A}(\Phi_{j,\lambda}),$$

wobei für $j \in \mathbb{N}$ und $\lambda > 0$

$$\Phi_{j,\lambda}(z) = \exp(-\lambda\omega(\mathrm{Re}\, z) + H_j(\mathrm{Im}\, z)), \ z \in \mathbb{C}^n.$$

Betrachte die Menge $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\widehat{\mathcal{D}_\omega(X)})$ aller Gewichtsfunktionen Φ für die es eine Folge $\lambda_j \longrightarrow + \infty$ gibt mit

$$\sup_j \left(-\lambda_j \omega(\operatorname{Re} z) + H_j(\operatorname{Im} z)\right) \le \log \Phi(z), \; z \in \mathbb{C}^n.$$

Offenbar ist der Raum $\widehat{\mathcal{D}_\omega(X)}$ stetig in $\mathcal{A}_{\mathcal{K}}$ eingebettet. Tatsächlich sind diese lokalkonvexen Räume gleich.

(4.16) <u>SATZ.</u> Sei ω eine stetige reellwertige Funktion auf $\mathbb{R}^n$, die (4.13) erfüllt. Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex. Dann ist $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\widehat{\mathcal{D}_\omega(X)})$ eine LAU-Struktur. Es ist $\widehat{\mathcal{D}_\omega(X)} = \mathcal{A}_{\mathcal{K}}$ (topologisch und linear). Das heißt, $\mathcal{D}_\omega'(X)$ ist ein LAU-Raum mit der LAU-Struktur $\mathcal{K}$ und der Fourier-Laplace Transformation $(\mathcal{F}\varphi)(z) = \int e^{-izx}\varphi(x)dx$, $z \in \mathbb{C}^n$, für alle $\varphi \in \mathcal{D}_\omega(X)$.

Der Beweis des Satzes wird mit einigen Hilfssätzen vorbereitet. Dabei sind ω, X und $\mathcal{K}$ stets wie oben.
Zuerst wird eine Aussage über die Reichhaltigkeit von $\mathcal{K}$ gemacht.

(4.17) <u>LEMMA.</u> Sei eine reelle Folge $\lambda_j \to +\infty$ gegeben. Dann gibt es ein $\Phi \in \mathcal{K}$ mit

$$\Phi(z) \le \sup_j \exp(-\lambda_j \omega(\operatorname{Re} z) + H_j(\operatorname{Im} z)), \; z \in \mathbb{C}^n.$$

Außerdem kann man noch eine plurisubharmonische Funktion φ finden mit $\tilde{\Phi} \le e^{\varphi} \le \Phi$ für ein $\tilde{\Phi} \in \mathcal{K}$.

<u>Beweis.</u> Nach Vergrößerung der λ_j darf man annehmen, daß für alle j gilt

$$-\lambda_{j+1}\omega(\operatorname{Re} z) + H_{j+1}(\operatorname{Im} z) \le -\lambda_j \omega(\operatorname{Re} z) + H_j(\operatorname{Im} z) \text{ wenn } |z| \le j.$$

Dann ist

$$\Phi(z) = \sup_j \exp(-\lambda_j \omega(\operatorname{Re} z) + H_j(\operatorname{Im} z)), \quad z \in \mathbb{C}^n,$$

sicherlich eine stetige Funktion, also $\Phi \in \mathcal{K}$.
Zu einer geeigneten Folge positiver Zahlen (ε_j) wähle mit Hilfe von (4.15.b) plurisubharmonische Funktionen φ_j auf $\mathbb{C}^n$ mit

$$-C_j - \varepsilon_j |\operatorname{Im} z| \leq \varphi_j(z) + \lambda_{j+1}\omega(\operatorname{Re} z) \leq \varepsilon_j |\operatorname{Im} z|, \quad z \in \mathbb{C}^n,$$

für alle j. Die oberhalb stetige Majorante φ der Funktion

$$\mathbb{C}^n \ni z \mapsto \sup_j (\varphi_j(z) + H_j(\operatorname{Im} z))$$

ist plurisubharmonisch. Ist $H_j + \varepsilon_j |\cdot| \leq H_{j+1}$ für alle j, so folgt $e^{\varphi} \leq \Phi$. Gilt ferner $H_j + \varepsilon_{j+1} |\cdot| \leq H_{j+1}$ für alle j, so erhält man mit der obigen Konstruktion ein $\tilde{\Phi} \in \mathcal{K}$ mit $\tilde{\Phi} \leq e^{\varphi}$. ∎

Aus Halbnormabschätzungen kann man explizite Abschätzungen auf den Flächen $|\operatorname{Im} z|/\omega(\operatorname{Re} z) = c > 0$, erhalten.

(4.18) <u>*LEMMA.*</u> *Sei $\lambda > 0$. Seien $a_j \nearrow +\infty$ und $b_j \to +\infty$ mit $\lim b_j/a_j = 0$ gegeben. Dann gibt es ein $\Phi \in \mathcal{K}$, so daß*

(4.19) $$\log \Phi(z) \leq -b_j - \lambda \cdot \omega(\operatorname{Re} z) + H_j(\operatorname{Im} z)$$

wenn $a_j \leq |\operatorname{Im} z| \leq a_{j+1}\omega(\operatorname{Re} z)$, $j \in \mathbb{N}$, *und*

(4.2o) $$\log \Phi(z) \leq -\lambda \cdot \omega(\operatorname{Re} z) + H_j(\operatorname{Im} z)$$

wenn $|\operatorname{Im} z| \leq a_{j+1} \cdot \omega(\operatorname{Re} z)$, $j \in \mathbb{N}$.

<u>Beweis.</u> Es genügt, eine Folge $\lambda_i \nearrow +\infty$ zu finden, so daß für alle i und j gilt

(4.21) $$-\lambda_i \omega(\operatorname{Re} z) + H_i(\operatorname{Im} z) \leq -b_j - \lambda \cdot \omega(\operatorname{Re} z) + H_j(\operatorname{Im} z)$$

wenn $a_j \le |\operatorname{Im} z| \le a_{j+1} \cdot \omega(\operatorname{Re} z)$ und

(4.22) $\quad -\lambda_i \omega(\operatorname{Re} z) + H_i(\operatorname{Im} z) \le -\lambda \cdot \omega(\operatorname{Re} z) + H_j(\operatorname{Im} z)$

wenn $|\operatorname{Im} z| \le a_{j+1} \cdot \omega(\operatorname{Re} z)$. Ist $\lambda_i \ge \lambda$ und ist $i < j$, so gilt (4.21) in $a_j \le |\operatorname{Im} z|$ wenn $b_j/a_j \le \delta_i$, wobei

$$\delta_i = \inf_{\eta \neq 0} (H_{i+1}(\eta) - H_i(\eta))/|\eta| > 0,$$

und (4.22) gilt für alle $z \in \mathbb{C}^n$. Zu jedem i sind die obigen Ungleichungen also nur für endlich viele j nichttrivial. Für diese kann man die Ungleichungen mit geeigneten λ_i erfüllen, wenn man die Abschätzungen $|H_1(\operatorname{Im} z)| \le A_1 |\operatorname{Im} z| \le A_1 a_{j+1} \cdot \omega(\operatorname{Re} z)$ benutzt. ∎

Die inverse Fouriertransformierte

$$(\mathcal{F}^{-1} f)(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} f(\xi) d\xi \ , \ x \in \mathbb{R}^n,$$

einer Funktion $f \in \mathcal{A}(\Phi)$, ist eine stetige Funktion, wenn $\Phi|\mathbb{R}^n$ integrabel ist. Für geeignete $\Phi \in \mathcal{K}$ verschwindet $\mathcal{F}^{-1} f$ für jedes $f \in \mathcal{A}(\Phi)$ sogar am Rand von X.

(4.23) *<u>LEMMA.</u>* *Sei $(\varepsilon_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Folge positiver reeller Zahlen. Dann gibt es ein $\Phi \in \mathcal{K}$, so daß für jedes $f \in \mathcal{A}(\Phi)$*

$$\sup_{\mathbb{R}^n - K_j} |\mathcal{F}^{-1} f| \le \varepsilon_j \cdot \sup_{\mathbb{C}^n} |f|/\Phi \quad \textit{für alle } j \in \mathbb{N}.$$

<u>Beweis.</u> Ohne Einschränkung kann man annehmen, daß alle $\varepsilon_j < 1/2$ und $\varepsilon_j \searrow 0$. Setze $a_j = -j \cdot \log \varepsilon_j$ und $b_j = -\log \varepsilon_j$ für $j \in \mathbb{N}$. Mit einem noch zu bestimmenden $\lambda > n$ wähle $\Phi \in \mathcal{K}$ wie in (4.18). Sei $f \in \mathcal{A}(\Phi)$, $|f| \le \Phi$. Sei $x \in \mathbb{R}^n - K_j$ gegeben. Wähle ein $\eta \in \mathbb{R}^n, |\eta| = 1$, mit $H_j(\eta) \le \eta \cdot x$. Be-

trachte die n-Kette $\Gamma = \Gamma_x$ aller $z \in \mathbb{C}^n$ mit $\operatorname{Im} z = a_j \cdot \eta$. Mit (4.20) erhält man $|e^{ixz} f(z)| \leq e^{-\lambda\omega(\operatorname{Re} z)}$ falls $\operatorname{Im} z = a \cdot \eta$, $0 \leq a \leq a_j$. Mit dem Cauchyschen Integralsatz folgt daher

$$(\mathcal{F}^{-1} f)(x) = (2\pi)^{-n} \int_\Gamma e^{ixz} f(z) dz.$$

Auf Γ gilt wegen (4.19)

$$|e^{izx} f(z)| \leq \exp(-a_j \eta \cdot x - b_j - \lambda\omega(\operatorname{Re} z) + a_j H_j(\eta))$$
$$\leq \varepsilon_j \cdot e^{-\lambda \cdot \omega(\operatorname{Re} z)} \quad .$$

Ist λ genügend groß, so folgt die behauptete Abschätzung von $|(\mathcal{F}^{-1} f)(x)|$ nach Integration dieser Ungleichung. ∎

Im folgenden Lemma wird ein Resultat ähnlicher Art angegeben.

(4.24) <u>LEMMA.</u> Sei $\sum_k \alpha_k = 1$ auf X, $\alpha_k \in \mathcal{D}_\omega(X)$ für alle $k \in \mathbb{N}$, eine Partition der Eins, für die die konvexen Hüllen aller supp α_k eine lokalendliche Überdeckung von X bilden. Sei $\lambda_j \nearrow +\infty$ gegeben. Dann gibt es ein $\Phi \in \mathfrak{X}$, so daß für alle ganzen Funktionen f auf $\mathbb{C}^n$ mit $|f| \leq \Phi$ und alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} \hat{\alpha}_k(z-y) f(y) dy\right| \leq 2^{-k} \cdot \exp(-\lambda_j \omega(\operatorname{Re} z) + H_j(\operatorname{Im} z)), z \in \mathbb{C}^n,$$

wenn supp $\alpha_k \subset \mathring{K}_j$ aber supp $\alpha_k \not\subset \mathring{K}_{j-1}$.

<u>Beweis.</u> Sei $k \in \mathbb{N}$. Setze

$$G_k(\eta) = \sup_{\alpha_k(y) \neq 0} \eta \cdot y \;, \quad \eta \in \mathbb{R}^n.$$

Sei $j = j(k)$ der kleinste Index j mit supp $\alpha_k \subset \mathring{K}_j$. Wähle

$\varepsilon_k > o$ mit $G_k + \varepsilon_k|\cdot| \leq H_j$. Nach dem Paley-Wiener-Theorem (siehe [5], Thm. 1.4.1) gilt

$$|\hat{\alpha}_k(z)| \leq C_k \exp(-\lambda_j \omega(\mathrm{Re}\, z) + G_k(\mathrm{Im}\, z) + \varepsilon_k |\mathrm{Im}\, z|), \; z \in \mathbb{C}^n.$$

Sei $\lambda > \lambda_j + n$ so groß, daß

$$C_k \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \exp((\lambda_j - \lambda)\omega(y))dy \leq 2^{-k}.$$

Sei f eine ganze Funktion auf $\mathbb{C}^n$ mit

$$|f(y)| \leq e^{-\lambda\omega(y)}, \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

Mit der Subadditivität von ω folgt dann

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\alpha}_k(z-y)f(y)|dy \leq 2^{-k} \exp(-\lambda_j \omega(\mathrm{Re}\, z) + H_j(\mathrm{Im}\, z)), \; z \in \mathbb{C}^n.$$

(Ohne Einschränkung ist $\lambda_j > o$.) Also kann man die behaupteten Abschätzungen für endlich viele k's stets erfüllen. Für fast alle k gibt es ein i mit

$$\mathrm{ch}\; \mathrm{supp}\; \alpha_k \cap K_i = \emptyset$$

(ch = konvexe Hülle von). i = i(k) bezeichne in diesem Fall den größten Index i mit dieser Eigenschaft. Nach Voraussetzung genügt es also, jetzt nur noch k mit $i = i(k) \geq 1$ zu betrachten. Dann gibt es eine ch supp α_k und K_i trennende Hyperebene, d.h. es gibt ein $\eta = \eta(k) \in \mathbb{R}^n, |\eta| = 1$, mit

$$G_k(-\eta) + H_i(\eta) \leq -2\varepsilon_k < o$$

nach eventueller Verkleinerung von ε_k.

Sei f eine ganze Funktion auf $\mathbb{C}^n$ mit

$$|f(\zeta)| \le \exp(-\lambda\omega(\mathrm{Re}\zeta) + H_i(\mathrm{Im}\zeta)) \quad \text{für } |\mathrm{Im}\,\zeta| \le a_{i+1}\omega(\mathrm{Re}\zeta),$$
$$|f(\zeta)| \le \exp(-b_i - \lambda\omega(\mathrm{Re}\zeta) + H_i(\mathrm{Im}\zeta)) \text{ für } a_i \le |\mathrm{Im}\zeta| \le a_{i+1}\cdot\omega(\mathrm{Re}\zeta).$$

Hier ist $\lambda > n$, und $a_l \nearrow +\infty$ und $b_l \to +\infty$ sind noch zu wählende Folgen. Es ist

$$G_k(\xi-\eta) + \varepsilon_k|\xi-\eta| + H_i(\eta) \le H_j(\xi) - \varepsilon_k|\eta| \ , \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Aus den Abschätzungen an $|\hat{\alpha}_k|$ und $|f|$ folgt daher (mit $\lambda_j \ge o$)

$$|\hat{\alpha}_k(z-\zeta)f(\zeta)| \le C_k \exp(-\lambda\cdot\omega(\mathrm{Re}\zeta) + H_j(\mathrm{Im}\,z))$$

für $z,\zeta \in \mathbb{C}^n$, $\mathrm{Im}\,\zeta = a\cdot\eta$ mit $o \le a \le a_{i+1}\omega(\mathrm{Re}\zeta)$.
Mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes (im $\mathbb{C}^n$) erhält man folglich

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{\alpha}_k(z-y)f(y)dy = \int_{\Gamma_k} \hat{\alpha}_k(z-\zeta)f(\zeta)d\zeta$$

wobei Γ_k die n-Kette $\xi \mapsto \xi + ia_i\tilde{\omega}(\xi)\cdot\eta(k), \xi \in \mathbb{R}^n$, ist.
Hier ist $\tilde{\omega}: \mathbb{R}^n \to [1,+\infty)$ eine C^∞-Funktion, für die die Quotienten $\tilde{\omega}/\omega$, $\omega/\tilde{\omega}$ und $|\mathrm{grad}\tilde{\omega}|/\omega$ auf $\mathbb{R}^n$ beschränkt sind.
($\tilde{\omega} = \omega * \psi$ mit $\psi \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\psi \ge o$, $\int \psi\, dx = 1$, ist eine solche Funktion.) Die Folge (a_l) erfülle $a_l\tilde{\omega} \le a_{l+1}\omega$ für alle l.

Für $z \in \mathbb{C}^n$ und $\zeta \in \Gamma_k$ erhält man die Abschätzung

$$|\hat{\alpha}_k(z-\zeta)f(\zeta)| \le C_k \exp(-b_i - \lambda_j\omega(\mathrm{Re}\,z) + H_j(\mathrm{Im}\,z)) \cdot$$
$$\cdot \exp((\lambda_j - \lambda)\omega(\mathrm{Re}\,\zeta) - \varepsilon_k|\mathrm{Im}\,\zeta|).$$

Für $a_i \ge (\text{Konst.})\lambda_j/\varepsilon_k$ ist $(\lambda > n)$

$$\int_{\Gamma_k} \exp((\lambda_j-\lambda)\omega(\mathrm{Re}\,\zeta) - \varepsilon_k|\mathrm{Im}\,\zeta|)|d\zeta|$$
$$\le \int_{\Gamma_k} e^{-\lambda\omega(\mathrm{Re}\zeta)}|d\zeta| \le \tilde{C}_k\cdot a_i \ ,$$

denn $|d\zeta| \le (\text{Konst.}) a_i \cdot \omega(\xi) d\xi$, $\xi = \operatorname{Re} \zeta$, auf Γ_k.

Zusammengefaßt:

$$\Big|\int_{\Gamma_k} \hat{\alpha}_k(z-\zeta) f(\zeta) d\zeta\Big| \le C_k' \cdot a_i e^{-b_i} \cdot \exp(-\lambda_j \omega(\operatorname{Re} z) + H_j(\operatorname{Im} z))$$

für alle $z \in \mathbb{C}^n$. Da $i(k) \to +\infty$ wenn $k \to +\infty$, kann man $a_i \nearrow +\infty$ und $b_i \to +\infty$ mit $b_i/a_i \to 0$, $a_i \ge (\text{Konst.}) \lambda_j/\varepsilon_k$ und $C_k' a_i e^{-b_i} \le 2^{-k}$ finden. Zu diesen Folgen wähle jetzt $\Phi \in \mathcal{X}$ nach Lemma (4.18). Mit diesem Φ gelten die behaupteten Abschätzungen wenn $i(k) \ge 1$. ∎

<u>Beweis des Satzes.</u> Es ist bereits klar, daß $\mathcal{F}: \mathcal{D}_\omega(X) \to \mathcal{A}_{\mathcal{X}}$ stetig und injektiv ist. Zum Beweis der Surjektivität von $\mathcal{F}$ sei $f \in \mathcal{A}_{\mathcal{X}}$ gegeben. Es folgt aus (4.23), daß die Folge

$$(\sup_{\mathbb{R}^n - K_j} |\mathcal{F}^{-1} f|)_{j \in \mathbb{N}}$$

von allen Nullfolgen dominiert wird. Also muß $\operatorname{supp} \mathcal{F}^{-1} f$ in einem K_j enthalten sein. Zu jedem $\lambda > 0$ gibt es ein $\Phi \in \mathcal{X}$ mit $\Phi \le e^{-\lambda\omega}$ auf $\mathbb{R}^n$. Folglich ist $\mathcal{F}^{-1} f \in \mathcal{D}_\omega(X)$.

Zum Beweis der Stetigkeit von $\mathcal{F}^{-1}: \mathcal{A}_{\mathcal{X}} \to \mathcal{D}_\omega(X)$ sei eine absolutkonvexe Nullumgebung $U \subset \mathcal{D}_\omega(X)$ gegeben. Aufgrund des Paley-Wiener Theorems findet man eine Folge $\lambda_j \nearrow +\infty$, so daß für alle j

$$U_j := \{\varphi \in \mathcal{D}_\omega(X);\ |(\mathcal{F}\varphi)(z)| \le \exp(-\lambda_j \omega(\operatorname{Re} z) + H_j(\operatorname{Im} z)), z \in \mathbb{C}^n\} \subset U.$$

Wähle eine Partition der Eins $\sum \alpha_k = 1$ auf X, $\alpha_k \in \mathcal{D}_\omega(X)$, für die die Überdeckung durch die konvexen Hüllen der $\operatorname{supp} \alpha_k$ lokalendlich ist. Wähle $\Phi \in \mathcal{X}$ nach (4.24), d.h. für alle $f \in \mathcal{A}(\Phi)$ mit $|f| \le \Phi$ gilt

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^n} \hat{\alpha}_k(z-y)f(y)dy\Big| \le 2^{-k}\exp(-\lambda_j\omega(\mathrm{Re}\, z)+H_j(\mathrm{Im}\, z)),\ z\in\mathbb{C}^n,$$

wobei j der kleinste Index j mit supp $\alpha_k \subset \overset{\circ}{K}_j$ ist.

Sei $\varphi \in \mathcal{D}_\omega(X)$ mit $|\mathcal{F}\varphi| \le \Phi$ gegeben. die Summe

$$\varphi = \sum_k 2^{-k}(2^k\alpha_k\varphi)$$

ist endlich. Da $2^k\alpha_k\varphi \subset U_j \subset U$, ist $\varphi \in U$. Also ist $\mathcal{F}^{-1}$ stetig.

Es ist noch zu zeigen, daß $\mathcal{K}$ eine LAU-Struktur ist. Seien $\Phi \in \mathcal{K}$ und $N > o$ gegeben. Mit Hilfe von (4.24) erhält man ein $\Phi_1 \in \mathcal{K}$, $\Phi_1 \le \Phi$, und eine Folge positiver reeller Zahlen (δ_k), so daß

(4.25) $$\exp(\omega(\mathrm{Re}\, z)+\delta_k|\mathrm{Im}\, z|)\cdot\Big|\int \hat{\alpha}_k(z-y)f(y)dy\Big| \le 2^{-k}\Phi(z),\ z\in\mathbb{C}^n,$$

wenn f eine ganze Funktion mit $|f| \le \Phi_1$ ist ($\Sigma\,\alpha_k = 1$ wie oben). Sei $f \in \mathcal{A}(\Phi_1)$. Dann konvergiert die Summe $\sum_k \hat{\alpha}_k * f = \sum_k \mathcal{F}(\alpha_k\cdot\mathcal{F}^{-1}f)$ in $\mathcal{A}(\Phi)$. Ihr Grenzwert ist f, wenn - wie man annehmen darf - für Φ_1 die Behauptung in (4.23) mit einer Folge $\varepsilon_j \to o$ gilt. Wähle jetzt ein $\psi \in \mathcal{D}_\omega(\mathbb{R}^n)$ mit $\psi \ge o$, supp $\psi \subset \{|x| < 1\}$ und $\int \psi\, dx = 1$. Für $\delta > o$ setze $\psi_\delta(x) = \delta^{-n}\psi(x/\delta)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Für jedes $\delta_o > o$ gilt dann

$$\sup_{z\in\mathbb{C}^n} |1-\hat{\varphi}(\delta z)|e^{-\omega(\mathrm{Re}\, z)-\delta_o|\mathrm{Im}\, z|} \to o \quad \text{wenn } \delta\to o.$$

Mit (4.25) folgt $\hat{\psi}_\delta(\hat{\alpha}_k * f) \to \hat{\alpha}_k * f$ in $\mathcal{A}(\Phi)$ wenn $\delta \to o$ für jedes k. Weil $\psi_\delta * (\alpha_k\cdot\mathcal{F}^{-1}f) \in \mathcal{D}_\omega(X)$ für kleine $\delta > o$, ist somit gezeigt

$$\mathcal{A}(\Phi_1) \subset \overline{\mathcal{A}_{\mathcal{K}}}^{\mathcal{A}(\Phi)}.$$

Aufgrund von (4.17) findet man eine plurisubharmonische Funktion φ und ein $\tilde{\Phi} \in \mathcal{K}$ mit $\tilde{\Phi} \leq e^{\varphi}$ und

$$\varphi(z+\tilde{z}) + N \log(2+|z|^2) \leq \log\Phi_1(z) \text{ für } z,\tilde{z} \in \mathbb{C}^n \text{ mit } |\tilde{z}| \leq N.$$

Also ist $\mathcal{K}$ eine LAU-Struktur. ∎

Die LAU-Strukturen der LAU-Räume $\mathcal{E}_\omega(X)$ und $\mathcal{D}'_\omega(X)$ sind auf gewissen Teilmengen des $\mathbb{C}^n$ äquivalent. Dies impliziert - in Abschnitt 4.5 - ein Hypoelliptizitätskriterium für lineare partielle Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.

(4.26) <u>*SATZ.*</u> *Es gilt stets $\mathcal{K}(\widehat{\mathcal{E}'_\omega(X)}) \subset \mathcal{K}(\widehat{\mathcal{D}_\omega(X)})$. Sei $V \subset \mathbb{C}^n$. Genau dann gibt es zu jedem $\Phi \in \mathcal{K}(\widehat{\mathcal{D}_\omega(X)})$ ein $\tilde{\Phi} \in \mathcal{K}(\widehat{\mathcal{E}'_\omega(X)})$ mit $\tilde{\Phi} \leq \Phi$ auf V, wenn für jede Folge $(z_j) \subset V$ gilt*

$$|\mathrm{Im}\, z_j|/\omega(\mathrm{Re}\, z_j) \to \infty \text{ falls } z_j \to \infty .$$

Ist $|\mathrm{Im}\, z| \leq c\, \omega(\mathrm{Re}\, z)$ auf V für ein $c > 0$, so gibt es ein $\Phi \in \mathcal{K}(\widehat{\mathcal{D}_\omega(X)})$ mit $\Phi \leq 1$ auf V und

$$\Phi(z)/\tilde{\Phi}(z) \to 0 \text{ wenn } V \ni z \to \infty$$

für jedes $\tilde{\Phi} \in \mathcal{K}(\widehat{\mathcal{E}'_\omega(X)})$.

<u>Beweis.</u> Die erste Aussage folgt unmittelbar aus der Definition der beiden LAU-Strukturen.

Sei $\Phi \in \mathcal{K}(\widehat{\mathcal{D}_\omega(X)})$. Dann gibt es eine reelle Folge $\lambda_j \nearrow +\infty$ mit

$$\sup_j \exp(-\lambda_j \omega(\mathrm{Re}\, z) + H_j(\mathrm{Im}\, z)) \leq \Phi(z) \quad , \; z \in \mathbb{C}^n.$$

Sei $i \in \mathbb{N}$ gegeben. Ist $|\mathrm{Im}\, z|/\omega(\mathrm{Re}\, z)$ genügend groß, so ist

$$i \cdot \omega(\mathrm{Re}\, z) + H_i(\mathrm{Im}\, z) \leq -\lambda_{i+1}\omega(\mathrm{Re}\, z) + H_{i+1}(\mathrm{Im}\, z).$$

Alle $V_C = \{z \in V; |\mathrm{Im}\, z| \leq C \cdot \omega(\mathrm{Re}\, z)\}$, $C > 0$, seien jetzt beschränkt. Folglich findet man ein $\mu_i \geq 0$, so daß

$$-\mu_i + i\cdot\omega(\mathrm{Re}\ z) + H_i(\mathrm{Im}\ z) \le -\lambda_{i+1}\omega(\mathrm{Re}\ z) + H_{i+1}(\mathrm{Im}\ z)$$

für alle $z \in V$. Wähle ein $\tilde{\Phi} \in \mathcal{K}(\widehat{\mathcal{E}'(X)})$ mit

$$\tilde{\Phi}(z) \le \sup_i \exp(-\mu_i + i\cdot\omega(\mathrm{Re}\ z) + H_i(\mathrm{Im}\ z)),\ z \in \mathbb{C}^n.$$

Offenbar gilt dann $\tilde{\Phi} \le \Phi$ auf V.

Zum Beweis der letzten Behauptung, gelte jetzt für ein $C > o$: $|\mathrm{Im}\ z| \le C\ \omega(\mathrm{Re}\ z)$ wenn $z \in V$. Der Einfachheit halber wird $o \in \overset{o}{K}_1$ angenommen. Mit $A_j = \sup_{\eta \neq o} H_j(\eta)/|\eta| > o$, $j \in \mathbb{N}$, wähle $\Phi \in \mathcal{K}(\widehat{\mathcal{D}_\omega(X)})$ mit

$$\log \Phi(z) \le \sup_j (-CA_j\omega(\mathrm{Re}\ z) + H_j(\mathrm{Im}\ z)),\ z \in \mathbb{C}^n.$$

Dann ist Φ beschränkt auf V (nämlich durch 1). Andererseits gilt für alle $\tilde{\Phi} \in \mathcal{K}(\widehat{\mathcal{E}'(X)})$

$$\tilde{\Phi}(z) \to +\infty \text{ wenn } z \to \infty .$$

Damit ist der Satz bewiesen. ■

Die LAU-Strukturen der Beispiele des Abschnitts 4.2 erfüllen sogar die Bedingung (4.2)(ii)'. Ein etwas schwächeres Resultat gilt auch für $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\widehat{\mathcal{D}_\omega(X)})$.

(4.27) ***SATZ.*** *Sei $b : \mathbb{C}^n \to [o,+\infty)$ oberhalb stetig. Dann und nur dann ist $b \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$, $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\widehat{\mathcal{D}_\omega(X)})$, wenn für ein $l \in \mathbb{N}$ und alle $\lambda > o$ gilt*

$$(4.28)\qquad \sup_{z \in \mathbb{C}^n} b(z)\exp(\lambda\omega(\mathrm{Re}\ z) - H_l(\mathrm{Im}\ z)) < +\infty.$$

Zu jedem $b \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ gibt es eine plurisubharmonische Funktion φ mit $b \le e^\varphi$ und $e^\varphi \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$.

Beweis. Es ist klar, daß $b \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ wenn (4.28) für ein l und alle $\lambda > 0$ gilt. Sei daher nun $b \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$. Aus (4.18), (4.20) folgt, daß für jede Folge $a_j \nearrow +\infty$ gilt

$$\sup_j \sup_{|\operatorname{Im} z| \le a_{j+1}\omega(\operatorname{Re} z)} b(z)e^{-H_j(\operatorname{Im} z)} < +\infty.$$

Also muß für ein $l > 1$ gelten

$$\sup_{z \in \mathbb{C}^n} b(z) \exp(-H_{l-1}(\operatorname{Im} z)) < +\infty.$$

Sei $\lambda > 0$. Ist $|\operatorname{Im} z|/\omega(\operatorname{Re} z)$ groß genug, so ist $H_{l-1}(\operatorname{Im} z) \le -\lambda\omega(\operatorname{Re} z) + H_l(\operatorname{Im} z)$. Zusammen mit einer nochmaligen Anwendung von (4.20) folgt hieraus (4.28).

Sei $b \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$. Sei l wie in (4.28). Wähle $\varepsilon > 0$ mit $H_l + \varepsilon|\cdot| \le H_{l+1}$ und $H_{l+1} + \varepsilon|\cdot| \le H_{l+2}$. Wähle $\psi \in \mathcal{D}_\omega(\{|x| < \varepsilon\})$ mit $|\hat{\psi}(0)| > 1$. Betrachte die kleinste oberhalb stetige Majorante φ der Funktion in $z \in \mathbb{C}^n$

$$\sup_{\zeta \in A} (\log|\hat{\psi}(z-\zeta)| + \log b(\zeta) - \varepsilon|\operatorname{Im} \zeta| - H_l(\operatorname{Im} \zeta) + H_{l+1}(\operatorname{Im} z)),$$

wobei $A = (\mathbb{Q}^n + i\mathbb{Q}^n) \cap b^{-1}(0,+\infty)$.

Es ist $b \le e^\varphi$. (Betrachte zunächst $z = \zeta \in A$.)

Mit (4.28) und einer geeigneten Paley-Wiener-Abschätzung folgt unter Benutzung der Subadditivität von ω

$$\log|\hat{\psi}(z-\zeta)| + \log b(\zeta) \le c_\lambda - \lambda\omega(\operatorname{Re} z) + \varepsilon|\operatorname{Im}(z-\zeta)| + H_l(\operatorname{Im}\zeta)$$

für jedes $\lambda > 0$. Also ist $e^\varphi \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$. Schließlich ist φ auch plurisubharmonisch (siehe [14], Lemma 3.3). ∎

4.4 Das Fundamentalprinzip und der Integraldarstellungssatz

Jede Lösung eines Systems homogener linearer partieller Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten ist ein Integral der zu diesem Gleichungssystem gehörigen Exponentialpolynomlösungen. Dies ist die Aussage des Integraldarstellungssatzes, der hier bewiesen wird. Der Integraldarstellungssatz ist dual zum Fundamentalprinzip - einer geometrischen Beschreibung der Quotientenräume $\mathcal{A}_{\mathcal{K}}^{K}/\overline{Q\mathcal{A}_{\mathcal{K}}^{L}}$, Q eine $K \times L$-Polynommatrix, $\mathcal{K}$ eine LAU-Struktur.

Eine spezielle Konsequenz des Integraldarstellungssatzes ist die Lösbarkeit inhomogener Gleichungen $P(D)u = f$, wenn f die hierzu notwendigen Kompatibilitätsbedingungen erfüllt.

Sei $V \subset \mathbb{C}^n$ abgeschlossen. Für jede Gewichtsfunktion Φ definiere $\mathcal{C}(V,\Phi)$, den Banachraum aller stetigen Funktionen $f : V \to \mathbb{C}$, $f = o(\Phi)$ im Unendlichen, mit der Norm

$$f \longmapsto \sup_V |f|/\Phi \qquad , \quad f \in \mathcal{C}(V,\Phi).$$

Ist $\mathcal{K}$ eine Familie von Gewichtsfunktionen, so setzt man

$$\mathcal{C}_{\mathcal{K}}(V) = \operatorname*{proj\,lim}_{\Phi \in \mathcal{K}} \mathcal{C}(V,\Phi) = \bigcap_{\Phi \in \mathcal{K}} \mathcal{C}(V,\Phi).$$

(4.29) *SATZ (Fundamentalprinzip). Sei $\mathcal{K}$ eine LAU-Struktur. Sei Q eine $K \times L$-Matrix über $\mathbb{C}[z]$. Sei $\mathcal{N}$ ein zu $Q \cdot \mathbb{C}[z]^L$ gehöriger Noetherscher Operator. Der Kern der linearen stetigen Abbildung*

$$\rho_{\mathcal{N}} : \mathcal{A}_{\mathcal{K}}^{K} \to \prod_{(A,V)\in\mathcal{N}} \mathcal{C}_{\mathcal{K}}(V), \; f \mapsto (Af|V)_{(A,V)\in\mathcal{N}},$$

stimmt mit $\overline{Q\mathcal{A}_{\mathcal{K}}^{L}}$ *überein, dem Abschluß von* $Q\mathcal{A}_{\mathcal{K}}^{L}$ *in* $\mathcal{A}_{\mathcal{K}}^{K}$. $\rho_{\mathcal{N}}$ *ist ein Homomorphismus, das heißt, unter der Abbildung* $\rho_{\mathcal{N}}$ *ist*

$$\mathcal{A}_{\mathcal{K}}^{K}/\overline{Q\mathcal{A}_{\mathcal{K}}^{L}} \hookrightarrow \prod_{(A,V)\in\mathcal{N}} \mathcal{C}_{\mathcal{K}}(V)$$

ein topologischer Unterraum.

Beweis. Es ist klar, daß $\rho_{\mathcal{N}}$ stetig ist und daß $Q\mathcal{A}_{\mathcal{K}}^{L} \subset \operatorname{Kern} \rho_{\mathcal{N}}$. Somit ist auch $\overline{Q\mathcal{A}_{\mathcal{K}}^{L}} \subset \operatorname{Kern}\rho_{\mathcal{N}}$.

Mit $\dot{f}$ wird stets das durch $f \in \mathcal{A}_{\mathcal{K}}^{K}$ repräsentierte Element in $\mathcal{A}_{\mathcal{K}}^{K}/\overline{Q\mathcal{A}_{\mathcal{K}}^{L}}$ bezeichnet. Sei $\Phi_o \in \mathcal{K}$, und sei p die zugehörige Halbnorm auf $\mathcal{A}_{\mathcal{K}}^{K}/\overline{Q\mathcal{A}_{\mathcal{K}}^{L}}$

$$p(\dot{f}) = \inf_{\dot{g}=\dot{f}} \sup_{\mathbb{C}^n} |g|/\Phi_o \ , \ f \in \mathcal{A}_{\mathcal{K}}^{K}.$$

Gesucht wird ein $\tilde{\Phi} \in \mathcal{K}$, so daß

$$(4.3o) \quad p(\dot{f}) \le \max_{(A,V)\in\mathcal{N}} \sup_{V} |Af|/\tilde{\Phi} \quad , \ f \in \mathcal{A}_{\mathcal{K}}^{K} \ .$$

Wähle $\Phi \in \mathcal{K}$, $\Phi \le \Phi_o$, so daß $Q : \mathcal{A}(\Phi)^L \to \mathcal{A}(\Phi_o)^K$ definiert und stetig ist. Zu Φ und einem $N > o$, das nur von Q und $\mathcal{N}$ abhängt, wähle $\tilde{\Phi} \in \mathcal{K}$ nach (4.1). Sei $f \in \mathcal{A}_{\mathcal{K}}^{K}$ gegeben mit

$$\max_{(A,V)\in\mathcal{N}} \sup_{V} |Af|/\tilde{\Phi} \le 1.$$

Wähle nach (4.1) eine plurisubharmonische Funktion φ mit $e^{\varphi_N} \le \Phi_o$ und

$$\max_{(A,V)\in\mathcal{N}} \sup_{V} |Af|e^{-\varphi} \le 1,$$

$$\mathcal{A}(e^{\varphi_{2N}}) \subset \overline{\mathcal{A}_{\mathcal{K}}}^{\mathcal{A}(\Phi)},$$

$$|f| \le (\text{Konst.})\cdot e^{\varphi} \text{ auf } \mathbb{C}^n.$$

Aus dem globalen Interpolationssatz (3.12) erhält man eine ganze Funktion $g \in \mathcal{A}(e^{\varphi_N})^K$, $|g| \leq \Phi_o$, mit

$$(Af - Ag)|V = o \qquad \text{für alle } (A,V) \in \mathcal{N}.$$

Weiter erhält man aus dem globalen Divisionssatz (3.11) eine ganze Funktion $h \in \mathcal{A}(e^{\varphi_{2N}})^L$ mit $f\text{-}g = Qh$ auf $\mathbb{C}^n$. Wähle ein Netz (h_α) in $\mathcal{A}_{\mathcal{K}}^L$ mit

$$h_\alpha \to h \qquad \text{in} \quad \mathcal{A}(\Phi)^L.$$

Dann ist

$$p(\dot{f}) \leq \liminf_{\alpha} \sup_{\mathbb{C}^n} |f-Qh_\alpha|/\Phi_o$$

$$\leq \sup_{\mathbb{C}^n}|g|/\Phi_o + C\cdot \liminf_{\alpha} \sup_{\mathbb{C}^n} |h-h_\alpha|/\Phi.$$

$$\leq 1.$$

Also ist (4.3o) gezeigt. Aus (4.3o) folgen alle Behauptungen des Satzes. ∎

(4.31) BEMERKUNG. Sei $\mathcal{K}$ eine LAU-Struktur für die zusätzlich gilt: Zu jedem $b \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ gibt es eine plurisubharmonische Funktion φ mit $b \leq e^{\varphi}$ und $e^{\varphi} \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$. (In den Abschnitten 4.2 und 4.3 wurde gezeigt, daß die dort angegebenen LAU-Strukturen diese Bedingung erfüllen.) Mit dem globalen Divisionssatz (3.11) folgt dann $Q\mathcal{A}_{\mathcal{K}}^L = \text{Kern } \rho_{\mathcal{N}}$. Insbesondere ist $Q\mathcal{A}_{\mathcal{K}}^L$ abgeschlossen in $\mathcal{A}_{\mathcal{K}}^K$. Aus dem globalen Interpolationssatz (3.12) und seiner Ergänzung (3.14) folgt, daß das Bild von $\rho_{\mathcal{N}}$ gerade aus dem Unterraum $\mathcal{A}_{\mathcal{K}}(\mathcal{N}) \subset \prod_{(A,V)\in\mathcal{N}} \mathcal{C}_{\mathcal{K}}(V)$ aller $(h_{(A,V)})$ besteht, die lokal Restriktion unter $\mathcal{N}$ von holomorphen Funktionen sind. Das Fundamentalprinzip besagt dann, daß $\rho_{\mathcal{N}}$ einen linearen Homöomorphismus

$$\mathcal{A}_{\mathcal{K}}^{K}/Q\mathcal{A}_{\mathcal{K}}^{L} \cong \mathcal{A}_{\mathcal{K}}(\mathcal{N})$$

definiert. Den Raum $\mathcal{A}_{\mathcal{K}}(\mathcal{N})$ mag man als einen Raum analytischer Funktionen auf der zu $\mathcal{N}$ gehörigen "multiplicity variety" (Ehrenpreis) ansehen.

(4.32) <u>INTEGRALDARSTELLUNGSSATZ.</u> Sei F' ein LAU-Raum mit der LAU-Struktur $\mathcal{K}$ und der abstrakten Fourier-Laplace Transformation $\mathcal{F}$. Sei $P(D) : F'^K \to F'^L$ ein linearer Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten. Sei $\mathcal{N}$ ein zu $P(D)$ gehöriger Noetherscher Operator. Sei $u \in F'^K$. Genau dann ist u Lösung der homogenen Gleichung $P(D)u = o$, wenn es Radonmaße $d\mu_{(A,V)}$ auf V zu jedem $(A,V) \in \mathcal{N}$ gibt, so daß $\int_V \Phi|d\mu_{(A,V)}| < +\infty$. für ein $\Phi \in \mathcal{K}$ und

$$(4.33) \qquad u(\varphi) = \sum_{(A,V)\in\mathcal{N}} \int_V A\hat{\varphi}\, d\mu_{(A,V)} \quad \text{für alle } \varphi \in F^K \ (\hat{\varphi} = \mathcal{F}\varphi).$$

<u>Beweis.</u> Es gilt $(P(D)u)(\psi) = u(\mathcal{F}^{-1}\,{}^t\check{P}\hat{\psi})$ für alle $\psi \in F^L$. Da $\mathcal{N}$ ein zu ${}^t\check{P}\,\mathbb{C}[z]^L$ gehöriger Noetherscher Operator ist, gilt $A\,{}^t\check{P}\hat{\psi}|V = o$ für alle $\psi \in F^L$ und alle $(A,V) \in \mathcal{N}$. Folglich ist $P(D)u = o$ wenn u eine Darstellung (4.33) hat.

Es gelte jetzt $P(D)u = o$. Dann ist $(u \circ \mathcal{F}^{-1})({}^t\check{P}\mathcal{A}_{\mathcal{K}}^L) = o$. Also definiert $u \circ \mathcal{F}^{-1}$ ein lineares stetiges Funktional auf dem Quotientenraum

$$\mathcal{A}_{\mathcal{K}}^{K}/\overline{{}^t\check{P}\,\mathcal{A}_{\mathcal{K}}^{L}}\,.$$

Nach dem Fundamentalprinzip (4.29) induziert dieses Funktional ein stetiges lineares Funktional auf einem Unterraum von

$\prod_{(A,V)\in\mathcal{N}} \mathcal{C}_{\mathcal{K}}(V)$. Dieses kann linear und stetig auf den ganzen Raum mit Hilfe des Hahn-Banach Theorems fortgesetzt werden. Nach dem Rieszschen Darstellungssatz wird dieses schließlich durch Radonmaße $d\mu_{(A,V)}$ auf V, $(A,V) \in \mathcal{N}$, gegeben. Mit diesen Radonmaßen gilt also

$$(u \circ \mathcal{F}^{-1})(f) = \sum_{(A,V)\in\mathcal{N}} \int_V Af \, d\mu_{(A,V)} , \qquad f \in \mathcal{A}_{\mathcal{K}}^K .$$

Damit ist der Integraldarstellungssatz bewiesen. ■

<u>BEMERKUNG.</u> Geeignet gewählte zu (4.33) gehörige Riemann-summen sind beschränkt in F'^K. Ist $\mathcal{A}_{\mathcal{K}}^K$ ein Montelraum, so konvergieren diese gegen u in der starken Topologie von F'^K (siehe [1o], § 22.2). $\mathcal{A}_{\mathcal{K}}$ ist bereits dann ein Montelraum wenn er nur tonneliert ist, denn aufgrund von Montel's Theorem sind die Spektralabbildungen $\mathcal{A}(\Phi) \hookrightarrow \mathcal{A}(\tilde{\Phi})$ von $\mathcal{A}_{\mathcal{K}}$ kompakt wenn $\tilde{\Phi}/\Phi = o(1)$ im Unendlichen (siehe [1o],§ 22.1 und 2).

Für die in den Abschnitten 4.2 und 4.3 betrachteten Beispiele ist $\mathcal{A}_{\mathcal{K}}$ stets tonneliert. Insbesondere konvergiert - wenn $F' = \mathcal{E}_\omega(X)$ - das Integral

$$u(x) = \sum_{(A,V)\in\mathcal{N}} \int_V A(z,\partial/\partial z) \, e^{-izx} \, d\mu_{(A,V)}(z), \ x \in X,$$

in der Topologie von $\mathcal{E}_\omega(X)^K$.

(4.34) <u>*FOLGERUNG.*</u> *Sei F' ein LAU-Raum. Sei $P(D) : F'^K \to F'^L$ ein linearer Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten. Sei $f \in F'^L$. Genau dann gibt es eine Lösung $u \in F'^K$ der inhomogenen Gleichung $P(D)u = f$, wenn $Q(D)f = o$ gilt für jeden*

linearen Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten $Q(D):F'^{L}\to F'$ *für den* $Q(D)\circ P(D) = o$.

<u>Beweis.</u> Betrachte zunächst den Fall, daß es ein $Q_o(D) \neq o$ mit $Q_o(D)\circ P(D) = o$ gibt. Wähle dann eine $J \times L$-Matrix Q über $\mathbb{C}[z]$, so daß die Komposition ${}^{t}P \circ {}^{t}Q = o$ exakt ist. Dann ist $\{({}^{t}\check{P}_1,\mathbb{C}^n),\ldots,({}^{t}\check{P}_k,\mathbb{C}^n)\}$ - $P_1,\ldots,P_k$ die Spalten von P - ein zu $Q(D)$ gehöriger Noetherscher Operator. Da $Q(D)f = o$ erhält man aus dem Integraldarstellungssatz Radonmaße $d\mu_1,\ldots,d\mu_K$ auf $\mathbb{C}^n$, die stetig auf $\mathcal{C}_{\mathcal{X}}$ sind, so daß

$$f(\varphi) = \sum_{1}^{K} \int_{\mathbb{C}^n} {}^{t}\check{P}_j\, \hat{\varphi}\, d\mu_j \quad , \qquad \varphi \in F^{L}.$$

Für $u = (u_1,\ldots,u_K) \in F'^{K}$ mit

$$u_j(\psi) = \int_{\mathbb{C}^n} \hat{\psi}\, d\mu_j \ , \ \psi \in F,$$

gilt dann $P(D)u = f$, denn für alle $\varphi \in F^{L}$ gilt

$$(P(D)u)(\varphi) = u(\mathcal{F}^{-1}\,{}^{t}\check{P}\hat{\varphi}) = \sum_{1}^{K} \int_{\mathbb{C}^n} {}^{t}\check{P}\, \hat{\varphi}\, d\mu_j = f(\ ) \ .$$

Es bleibt noch der Fall zu betrachten, in dem ${}^{t}PQ = 0$, $Q \in \mathbb{C}[z]^{L}$, nur gilt wenn $Q = o$. Dann gibt es auch keine nicht-trivialen ganzen $\mathbb{C}^{L}$-wertigen Funktionen g mit ${}^{t}Pg = o$. In der Tat, nach der Cramerschen Regel kann man g sogar als einen Quotienten gewisser Kofaktoren und der Determinante einer $L \times L$-Untermatrix maximalen Ranges von ${}^{t}P$ schreiben. Diesen Quotienten kann man mit der Ehrenpreis-Malgrange Ungleichung (siehe (2.1.iii) mit $h = o$) abschätzen

$$|g(z)| \leq (2+|z|^2)^N \cdot \sup_{|\tilde{z}|\leq 1} |{}^tP(-z-\tilde{z})g(z+\tilde{z})|, \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

$w = f \circ \mathcal{F}^{-1}$ ist ein lineares stetiges Funktional aus $\mathcal{A}_{\mathcal{K}}^L$, d.h. es gibt ein $\Phi \in \mathcal{K}$ mit $|w(g)| \leq \sup_{\mathbb{C}^n} |g|/\Phi$, $g \in \mathcal{A}_{\mathcal{K}}^L$. Wählt man $\tilde{\Phi}$ nach (4.1.i) so erhält man mit der obigen Abschätzung

$$(4.35) \quad |w(g)| \leq \sup_{\mathbb{C}^n} |{}^t\check{P}g|/\tilde{\Phi} \qquad , g \in \mathcal{A}_{\mathcal{K}}^L .$$

Hieraus folgt mit dem Hahn-Banach Theorem die Existenz eines linearen stetigen Funktionals v auf $\mathcal{A}_{\mathcal{K}}^K$ mit $v({}^t\check{P}g) = w(g)$, $g \in \mathcal{A}_{\mathcal{K}}^L$. $u = v \circ \mathcal{F}$ ist dann eine Lösung von $P(D)u = f$. ∎

<u>BEMERKUNG.</u> Man kann (4.34) auch ohne direkte Benutzung des Integraldarstellungssatzes beweisen, indem man dies allgemeine Gültigkeit von (4.35) für $w = f \circ \mathcal{F}^{-1}$ zeigt, wenn f die Voraussetzungen in (4.34) erfüllt. An Stelle des Ehrenpreis-Malgrange Lemmas hat man dann jedoch den globalen Divisionssatz (3.11) zu benutzen. Ein geeignetes $\tilde{\Phi} \in \mathcal{K}$ findet man nach (4.1.ii).

4.5 <u>Elliptische und hypoelliptische Differentialoperatoren.</u>

Hier wird die Regularität der Lösungen homogener linearer Differentialgleichungen mit Hilfe ihrer Darstellung als Integral über Exponentiallösungen untersucht.

(4.36) DEFINITIONEN. Sei P(D) ein linearer Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten auf einem LAU-Raum. P sei das Symbol von P(D). Dann nennt man $V = \{z \in \mathbb{C}^n;\ \mathrm{Kern}\ {}^tP(-z) \neq \{0\}\}$ die *zu P(D) gehörige Varietät.*

(i) ω sei eine stetige reellwertige Funktion auf $\mathbb{R}^n$, die (4.13) erfüllt. Dann heißt P(D) *ω-hypoelliptisch* genau dann, wenn

$$|\mathrm{Im}\, z|/\omega(\mathrm{Re}\, z) \to +\infty \text{ falls } V \ni z \to \infty .$$

(ii) P(D) heißt *elliptisch* genau dann, wenn

$$\sup_{z \in V} |\mathrm{Re}\, z|/(1+|\mathrm{Im}\, z|) < +\infty.$$

(4.37) SATZ. Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen, konvex und nichtleer. Sei ω eine stetige reellwertige Funktion auf $\mathbb{R}^n$ mit (4.13). Sei $P(D) : \mathcal{D}'_\omega(X)^K \to \mathcal{D}'_\omega(X)^L$ ein linearer Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten. Dann sind äquivalent:

(i) P(D) ist ω-hypoelliptisch,

(ii) $\mathrm{Kern}\ P(D) = \{u \in \mathcal{D}'_\omega(X)^K;\ P(D)u = 0\} \subset \mathcal{E}_\omega(X)^K$.

Beweis. Ist P(D) ω-hypoelliptisch, so sind nach (4.26) die LAU-Strukturen $\mathcal{K}(\widehat{\mathcal{E}'_\omega(X)})$ und $\mathcal{K}(\widehat{\mathcal{D}_\omega(X)})$ auf der zu P(D) gehörigen Varietät äquivalent. Mit dem Integraldarstellungssatz (4.32) folgt sofort (ii).

Es gelte jetzt (ii). Dann gibt es zu jedem $\Phi \in \mathcal{K}(\widehat{\mathcal{D}_\omega(X)})$ und jedem $b \in \mathcal{B}(\mathcal{K}(\widehat{\mathcal{E}'_\omega(X)}))$ eine Konstante $c_0 > 0$, so daß für alle $u \in \mathcal{D}'_\omega(X)^K$ mit $P(D)u = 0$ gilt

$$(4.38) \quad \sup_{|\hat{\varphi}| \le b} |u(\varphi)| \le c_o \cdot \sup_{|\hat{\psi}| \le \Phi} |u(\psi)| ,$$

falls die rechte Seite endlich bleibt. Zum Beweis von (4.38) betrachte man zu Φ den stetig in $\mathcal{D}'_\omega(X)^K$ eingebetteten Banachraum

$$N_\Phi = \{u \in \mathcal{D}'_\omega(X)^K;\ P(D)u = o,\ \|u\|_\Phi = \sup_{|\hat{\psi}| \le \Phi} |u(\psi)| < +\infty\}$$

mit der Norm $\|\cdot\|_\Phi$. Nach Voraussetzung ist $N_\Phi \subset \mathcal{E}_\omega(X)^K$. Mit dem Satz vom abgeschlossenen Graphen erhält man die Stetigkeit dieser Inklusion - also (4.38). Speziell für $u(x) = e^{-iz\cdot x}$, $x \in X$, $z \in V$, folgt aus (4.38)

$$(4.39) \quad \sup_{|f| \le b} |f(z)| \le c_o \cdot \Phi(z) \qquad \text{für alle } z \in V$$

(mit ganzen Funktionen f).

Sei $C > o$. Wähle $\Phi \in \mathcal{K}(\widehat{\mathcal{D}_\omega(X)})$ nach (4.26) mit $\Phi \le 1$ auf $V_C = \{z \in V; |\mathrm{Im}\, z| \le C\, \omega(\mathrm{Re}\, z)\}$. Für ein fest gewähltes $g \in \widehat{\mathcal{D}_\omega(X)}$ mit $g(o) = 1$ betrachte $f_\zeta = g(\zeta - \cdot)\Phi(\zeta)e^{\omega(\mathrm{Re}\zeta)} \in \widehat{\mathcal{D}_\omega(X)}$ für $\zeta \in V_C$. Mit Hilfe der Subadditivität von ω und einer Paley-Wiener Abschätzung an $|g|$ schließt man, daß für ein geeignetes $b \in \mathcal{B}(\mathcal{K}(\widehat{\mathcal{E}'_\omega(X)}))$ gilt

$$|f_\zeta| \le b \text{ auf } \mathbb{C}^n \qquad \text{für alle } \zeta \in V_C.$$

Ferner ist $|f_z(z)|/\Phi(z) = e^{\omega(\mathrm{Re}\, z)}$ wenn $z \in V_C$. Mit (4.39) impliziert dies die Beschränktheit von V_C. ■

<u>BEMERKUNGEN.</u> (1) Der obige Regularitätssatz ist lokaler Natur. Er gilt daher auch für nichtkonvexe offene $X \subset \mathbb{R}^n$.

(2) Die Radonmaße in (4.33) sind nicht eindeutig durch u bestimmt. Daher kann man (i) nicht unmittelbar mit (4.26) und dem Integraldarstellungssatz aus (ii) folgern.

(4.4o) <u>*SATZ.*</u> *Sei* ω *eine stetige reellwertige Funktion auf* $\mathbb{R}^n$*, die die Bedingungen (4.13) erfüllt. Sei* $X \subset \mathbb{R}^n$ *offen, konvex und nichtleer. Sei* $P(D) : \mathcal{D}'_\omega(X)^K \to \mathcal{D}'_\omega(X)^L$ *ein linearer Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten.*

Ist $P(D)$ *elliptisch, so besitzt jede Lösung der homogenen Gleichung* $P(D)u = o$ *eine holomorphe Fortsetzung* $\tilde{u} \in \mathcal{A}(\tilde{X})^K$,

$$\tilde{X} = \{z \in \mathbb{C}^n;\ |Im\ z| < c_o \cdot d(Re\ z, \mathbb{R}^n - X)\},$$

d.h. $\tilde{u}|X = u$ *und* $\tilde{u}$ *erfüllt die homogene Gleichung in* $\tilde{X}$*. Hierbei kann man wählen*

$$c_o = \liminf_{V \ni z \to \infty} |Im\ z|/|Re\ z| > o.$$

($c_o = +\infty$ *, wenn V beschränkt ist.)*

Ist $P(D)$ *nicht elliptisch, so gibt es eine Lösung* $u \in \mathcal{E}_\omega(\mathbb{R}^n)^K$ *zu* $P(D)u = o$*, die in keiner offenen Teilmenge von* $\mathbb{R}^n$ *reellanalytisch ist.*

<u>Beweis.</u> Sei P(D) elliptisch. Sei $o < c < c_o$, so daß außerhalb einer kompakten Teilmenge der zu P(D) gehörigen Varietät V gilt $c|Re\ z| < |Im\ z|$. Sei $U \subset\subset X$ offen, konvex, $U \neq \emptyset$. Sei $o < \delta < d(U,\mathbb{R}^n - X)$. Betrachte $\tilde{U} = \{x \in \mathbb{C}^n: Re\ x \in U, Im\ x < c\}$.
Für jedes $\phi \in \mathcal{K}(\widehat{\mathcal{D}_\omega(X)})$ gilt dann

$$(4.41) \quad \sup_{z \in V} \sup_{x \in \tilde{U}} |e^{-i<z,x>}|/\phi(z) < +\infty.$$

In der Tat, für ein $z \in V$ mit $c|\mathrm{Re}\, z| < |\mathrm{Im}\, z|$ und für $x \in \tilde{U}$ gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(-i\langle z,x\rangle) &\leq |\mathrm{Re}\, z|\,|\mathrm{Im}\, x| + \mathrm{Re}\, x\cdot \mathrm{Im}\, z \\ &\leq \delta\, |\mathrm{Im}\, z| + \mathrm{Re}\, x\cdot \mathrm{Im}\, z \\ &\leq H_{K_o}(\mathrm{Im}\, z), \end{aligned}$$

wobei $H_{K_o}(\eta) = \sup_{y\in K_o} \eta\cdot y$, $\eta \in \mathbb{R}^n$, zu $K_o = \bar{U} + \{y \in \mathbb{R}^n; |y| \leq \delta\}$. Wähle $K_1 \subset\subset X$ mit $K_o \subset\subset \overset{\circ}{K}_1$. Für alle $\lambda > o$ gilt dann

$$\mathrm{Re}(-i\langle z,x\rangle) \leq c_\lambda - \lambda\omega(\mathrm{Re}\, z) + H_{K_1}(\mathrm{Im}\, z),\ z \in V,\ x \in \tilde{U}.$$

Hier wurde benutzt, daß $\omega(\xi) = o(|\xi|)$ für $\xi \to \infty$(siehe [5], Cor.1.2.8). Also gilt (4.41). Aufgrund von (4.41) kann man die Integraldarstellung

$$u(x) = \sum_{(A,V)\in\mathcal{N}} \int_V A(z,-ix)e^{-i\langle z,x\rangle}\, d\mu_{(A,V)}(z)$$

für $u \in \mathcal{D}'_\omega(X)^K$ mit $P(D)u = o$ holomorph in $x \in \tilde{U}$ - und damit schließlich auf ganz $\tilde{X}$ - fortsetzen.

Zum Beweis der letzten Behauptung sei jetzt jedes $u \in \mathbb{N} := \{u \in \mathcal{E}_\omega^K;\ P(D)u = o\}$ ($\mathcal{E}_\omega = \mathcal{E}_\omega(\mathbb{R}^n)$) in einer nichtleeren offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ reellanalytisch. Man kann dann mit einem Baireschen Kategorienargument - dem Grothendieckschen Faktorisationssatz, siehe z.B. [16], § 19.5(4) - eine Kugel finden, in der alle $u \in N$ reellanalytisch sind:
Für eine offene Kugel $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ mit $\Omega \cap \mathbb{R}^n \neq \emptyset$ ist das Bild des Fréchetraums

$$N_\Omega = \{(u,\tilde{u}) \in \mathcal{E}_\omega^K \times \mathcal{A}(\Omega)^K;\ P(D)u = o,\ u|\Omega\cap\mathbb{R}^n = \tilde{u}|\Omega\cap\mathbb{R}^n$$

unter der Projektion $(u,\tilde{u}) \mapsto u$ von zweiter Kategorie im Fréchetraum N. Nach dem Banach-Schauder Theorem ist diese Projektion sogar ein linearer Homöomorphismus. Ohne Einschränkung darf man annehmen, daß $\{z \in \mathbb{C}^n; |z| \leq \delta\} \subset\subset \Omega$ für ein $\delta > o$. Für eine Konstante $c > o$ erhält man folglich mit

$$b(z) = \exp(c\cdot\omega(\mathrm{Re}\ z)+c|\mathrm{Im}\ z|),\ z \in \mathbb{C}^n,$$

die Ungleichung

$$(4.42)\quad \sup_{|\tilde{\mu}|\leq \exp\delta|\cdot|} |\tilde{u}(\mu)| \leq \sup_{|\tilde{\psi}|\leq b} |u(\psi)|\ ,\ (u,\tilde{u}) \in N_\Omega\ .$$

Hier sind die μ's analytische Funktionale auf Ω ($\tilde{\mu}$ = Laplacetransformierte von μ) und die ψ's sind Distributionen in $\mathcal{E}'^K_\omega$. Für $\tilde{u} = e^{-i<z,\cdot>}$, $z \in V$, erhält man aus (4.42)

$$\sup_{|\tilde{\mu}|\leq \exp\delta|\cdot|} |\tilde{\mu}(-iz)| \leq b(z) \qquad \text{für alle } z \in V.$$

Die linke Seite dieser Ungleichung ist größer als

$$\sup_{|\zeta|\leq\delta} |\exp<\zeta,-iz>| = e^{\delta|z|}\ ,\quad z \in V.$$

Somit gilt

$$\delta|z| \leq c\ \omega(\mathrm{Re}\ z) + c|\mathrm{Im}\ z|$$

für alle $z \in V$. Wegen $\omega = o(|\cdot|)$ folgt hieraus die Elliptizität von P(D). ■

Anmerkungen

(a) Die Lokalisierbarkeit einer analytisch-uniformen Struktur $\mathcal{K}$ (d.h. (4.1.i) gilt) ist eine Aussage über die Reichhaltigkeit von $\mathcal{A}_{\mathcal{K}}$: Zu jedem $z_o \in \mathbb{C}^n$ gibt es eine ganze Funktion in $\mathcal{A}_{\mathcal{K}}$, die in z_o "groß" ist aber global "klein" gehalten werden kann. Dies wird deutlich in Ehrenpreis' Definition der Lokalisierbarkeit (vgl. [9], IV. 1.(d)):

Zu jedem $\Phi \in \mathcal{K}$ existiert ein $\tilde{\Phi} \in \mathcal{K}$, so daß es zu jedem $b \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ mit $b \leq \tilde{\Phi}$ eine beschränkte Teilmenge $B \subset \mathcal{A}_{\mathcal{K}}$ gibt mit

$$b \leq \sup_{f \in B} |f| \leq \Phi .$$

Diese Bedingung impliziert (4.2.ii') und damit auch, daß $\mathcal{K}$ eine LAU-Struktur im Sinne von Definition (4.1) ist. In der Tat, ist B abzählbar, so ist die kleinste oberhalb stetige Majorante φ von $\sup_{f \in B} \log|f|$ eine plurisubharmonische Funktion (siehe [14], Lemma 3.3). Da b oberhalb stetig ist, kann man B durch eine geeignete abzählbare Teilmenge ersetzen, so daß immer noch $b \leq e^{\varphi}$ gilt (vergleiche [12], Prop. 2). Weil er das Verschwinden der Kohomologie mit einer Induktion über die (reelle) Dimension des $\mathbb{C}^n$ beweist (vgl.d. Anmerkung (b) zu Kapitel 3), fordert Ehrenpreis noch eine Zerlegbarkeit der Gewichtsfunktionen aus $\mathcal{K}$ in Produkte (PLAU-Struktur).

(b) Palamodov betrachtet Familien von Majoranten $\mathcal{M} = \{M_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$ und zugehörige Familien ${}^{\nu}\mathcal{H}_{\mathcal{M}}$ von Räumen holomorpher ν-Koketten. Er zeigt die Trivialität der zugehörigen $\mathcal{M}$-Kohomologie (siehe [2o], Chpt. III, § 4, Thm. 1) unter

Voraussetzung, daß $\mathcal{M}$ vom Typ $\mathcal{J}$ ist (siehe [2o], Chpt. III, § 1.4°). Die wichtigste Forderung dieser Bedingung (Existenz der e_α) entspricht der Lokalisierbarkeit analytisch-uniformer Strukturen. Man kann dann die M_α durch logarithmisch-plurisubharmonische Gewichtsfunktion ersetzen, nämlich - im wesentlichen - durch

$$\mathbb{C}^n \ni z \mapsto \sup_{M_\alpha(\lambda)<+\infty} |e_\alpha(z-\lambda)|\, M_\alpha(\lambda).$$

(c) Für die Grundlagen der Theorie der Distributionen sei hier auf L. Schwartz [23] und L. Hörmander [13] und für die der Beurlingschen Ultradistributionen auf G. Björck [5] verwiesen. Daß die in den Abschnitten 4.2 und 4.3 betrachteten Räume analytisch uniform sind, ist nicht neu. Für $\omega = \log(e+|\cdot|)$, $X = \mathbb{R}^n$ und $\Omega = \mathbb{C}^n$ wurde dies von L. Ehrenpreis in [9], Chpt. IV, gezeigt. Berenstein und Dostal [3] verallgemeinerten dieses Ergebnis auf Beurlingsche Ultradistributionen. B.A. Taylor [24] bewies einen allgemeinen Satz über die Existenz analytisch-uniformer Strukturen, der auf $\mathcal{E}_\omega(X)$ und $\mathcal{A}(\Omega)$ - X und Ω konvex - anwendbar ist. Ein einfacher Beweis für Taylors Satz wurde von Bierstedt, Meise und Summers [4] gefunden. Dieser Zugang wurde hier in Abschnitt 4.2 übernommen. Die Lokalisierbarkeit dieser AU-Strukturen - zunächst im Ehrenpreis'schen Sinne (vgl. (a)) - war dagegen weniger untersucht. Daß die analytisch-uniformen Strukturen der Räume $\mathcal{E}_\omega(X)$ und $\mathcal{A}(\Omega)$ lokalisierbar sind in dem Sinne, daß (4.2.ii') gilt, wurde in [12] gezeigt. Der Fall $\mathcal{D}'_\omega(X)$ konnte in [12] jedoch nicht behandelt werden. Deshalb ist in der vorliegenden Arbeit die allgemeinere Bedingung (4.1ii) eingeführt worden.

(d) Die Regularitätssätze im Abschnitt 4.5 sind nicht neu. Zu ihrem Beweis benötigt man auch nicht das Fundamentalprinzip in seiner stärksten Form. Insbesondere ist die detaillierte Beschreibung der Polynomfaktoren in der Exponentialdarstellung (4.33) durch Noethersche Operatoren hierzu nicht erforderlich.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] M.F. Atiyah, I.G. Mac Donald, *Introduction to commutative algebra*. Addison-Wesley Publ. Co., Reading, Mass., 1969.

[2] A. Baernstein II, *Representation of holomorphic functions by boundary integrals*. Trans. Amer. Math. Soc. 16o (1971), 27-37.

[3] C.A.Berenstein, M.A. Dostal, *Analytically uniform spaces and their applications to convolution equations*. Lecture Notes in Math. 256, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1972.

[4] K.D. Bierstedt, R. Meise, W.H. Summers, *A projective description of weighted inductive limits*. Trans. Amer. Math. Soc. 272 (1982), 1o7-16o.

[5] G. Björck, *Linear partial differential operators and generalized distributions*. Ark. Mat. 6 (1966), 351-4o7.

[6] J.-E. Björk, *The fundamental principle*. Summer School at Grebbestad, 1975 (Preprint).

[7] J.-E. Björk, *Rings of differential operators*. North-Holland mathematical library, vol. 21, North-Holland Publ. Co., Amsterdam Oxford New York, 1979.

[8] L. Ehrenpreis, *A fundamental principle for systems of linear partial differential equations with constant coefficients, and some of its applications*. Proc. Internat. Sympos. Linear Spaces, Jerusalem, 196o, pp. 161-174.

[9] L. Ehrenpreis, *Fourier analysis in several complex variables*. Pure and Appl. Math., vol. 17, Wiley-Interscience, New York, 197o.

[1o] K. Floret, J. Wloka, *Einführung in die Theorie der lokalkonvexen Räume*. Lecture Notes in Math. 56, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1968.

[11] R.C. Gunning, H. Rossi, *Analytic functions of several complex variables*. Prentice-Hall,Englewood Cliffs, N.J., 1965.

[12] S. Hansen, *Localizable analytically uniform spaces and the fundamental principle*. Trans. Amer. Math. Soc. 264 (1981), 235-25o.

[13] L. Hörmander, *Linear Partial Differential Operators*. Grundlagen d. math. Wiss, Bd. 116, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1963.

[14] L. Hörmander, *Supports and singular supports of convolutions*. Acta Math. 11o (1963), 279-3o2.

[15] L. Hörmander, *An introduction to complex analysis in several variables*. North-Holland mathematical Library, vol. 7, North-Holland Publ. Co., Amsterdam London, 1973, (second edition).

[16] G. Köthe, *Topologische lineare Räume. I.* Grundl. der math. Wiss, Bd. 1o7, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1966,(2. Aufl.).

[17] O. Liess, *The fundamental principle of Ehrenpreis-Pala-*

modov. Inst. of Math., Bukarest, 1976 (preprint).

[18] B. Malgrange, *Sur les systèmes différentiels à coefficients constants.* Coll. C.N.R.S., 113-122, Paris, 1963.

[19] R. Narasimhan, *Introduction to the theory of analytic spaces.* Lecture Notes in Math. 25, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York,1966.

[2o] V.P. Palamodov, *Linear differential operators with constant coefficients.* Grundl. d. math. Wiss., Bd. 168, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 197o.

[21] V.P. Palamodov, *A remark on exponential representation of solutions of differential equations with constant coefficients.* Math. USSR Sbornik, 5 (1968), 4o1-416.

[22] J.W. de Roever, *Complex Fourier Transformation and analytic functionals with unbounded carriers.* Math. Centre Tracts 89, Amsterdam, 1978.

[23] L. Schwartz, *Théorie des distributions.* Paris, 195o-51.

[24] B.A. Taylor, *A seminorm topology for some DF-spaces of entire functions.* Duke Math. J. 38 (1971), 379-385.

[25] O. Zariski, P. Samuel, *Commutative algebra. I.* Van Nostrand, New York, 1958.

lu

BEZEICHNUNGEN

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ sind die Mengen der natürlichen,rationalen, reellen und komplexen Zahlen. $\mathbb{N}_o = \mathbb{N} \cup \{o\}$.

$i = \sqrt{-1}$

$\mathbb{C}[z]$ ist der Ring der komplexen Polynome in $z = (z_1,..,z_n) \in \mathbb{C}^n$.

$\mathbb{C}(z)$ ist der Körper der rationalen Funktionen (Quotientenkörper von $\mathbb{C}[z]$).

$\partial^\alpha/\partial z^\alpha = \partial^{|\alpha|}/\partial z_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \partial z_n^{\alpha_n}$ für $\alpha = (\alpha_1,..,\alpha_n) \in \mathbb{N}_o^n$,

$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ (Multiindexschreibweise). $D = -i\partial/\partial x$.

$[A,B] = AB - BA$ ist der Kommutator der (Differential-)Operatoren A und B.

$|\cdot|$ ist die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$.

$d(x,A) = \inf\{|x-y|;\ y \in A\}$, $A \subset \mathbb{R}^n$.

$z \cdot \zeta = \langle z,\zeta \rangle = \sum_1^n z_j \zeta_j$ für $z,\zeta \in \mathbb{C}^n$.

$\partial K = \bar{K} - \overset{o}{K}$ ist der topologische Rand von $K \subset \mathbb{R}^n$ (oder $\mathbb{C}^n$).

$\subset\subset$ bedeutet: relativ kompakt enthalten in.

$\bar{\partial}$ ist der Cauchy-Riemann-Operator (auf Formen).

dx und $d\lambda$ -Lebesguesches Maß auf $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$.

${}^tP$ ist die Transponierte einer Matrix P.

$\check{f}$: $\check{f}(z) = f(-z)$ für alle z (f eine Funktion).

o ist das Landausche Symbol ("klein o").

$f * g$ ist die Faltung der Funktionen f,g.

$B^o = \{x;\ |\langle x,B \rangle| \le 1\}$ ist die Polare einer Teilmenge B eines lokalkonvexen Raumes bezüglich der Dualität $\langle\ ,\ \rangle$.

$C_0^\infty(\Omega)$ ist der Raum der Schwartzschen Testfunktionen auf einer offenen Teilmenge Ω des $\mathbb{R}^n$ (oder des $\mathbb{C}^n$). supp φ ist der Träger einer (Test-)Funktion φ.

$\mathcal{A}$ ist die Garbe der Keime holomorpher Funktionen auf $\mathbb{C}^n$.

$\mathcal{A}_z$ ist der Halm von $\mathcal{A}$ im Punkt $z \in \mathbb{C}^n$.

∎ kennzeichnet das Ende eines Beweises.

$I(V)$ - 9

$V(M)$ - 12 (1.5)

$(M:d)$ - 48

A - 9

(A,V) - 9

$\mathcal{N}$ - 1o (1.2)

$\dim V$ - 14

$\mathrm{Rad}(M)$ - 21

I_s - 55

$A^{(\alpha)}$ - 1o

$\mathrm{ord}(A,V)$ - 11

$M_{\mathcal{N}}$ - 1o (1.2)

Δ, e, P_j, Q_j, T_j - 14 (1.7)

τ, τ_s, $\mathcal{N}'$ - 25 (1.25)

U, $\zeta(U)$, $\rho(U)$, U' - 38

U_*, $\rho(U_*)$, U_{**} - 42 f

d_Ω - 7o

$\mathcal{C}^p(\mathfrak{U},\mathcal{G})$ - 74

$\|\cdot\|_\varphi$ - 75

$\mathcal{L}_{o,q}$ - 76

φ_N - 8o

I_p - 7o

δ - 75

$\|\cdot\|_{\varphi,\infty}$ - 8o

$\mathcal{R}_{\mathcal{N}}$ - 8o

$\mathcal{A}(\Omega)$ für $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ offen - 14 , 1o1

$\mathcal{M}(\Phi)$ für Φ: $\mathbb{C}^n \to (o \neq \infty)$ stetig - 88

$\|\cdot\|_\Phi$ - 88

$\mathcal{K}$ - 88

$\mathcal{A}_{\mathcal{K}}$ - 88

$\mathcal{B}(\mathcal{K})$ - 88

$\mathcal{A}_{\mathcal{K}}(\mathcal{N})$ - 116

$\mathcal{C}(\Phi)$, $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}$ - 88 $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}(V)$ - 114

ω - 98 (4.13)

$\mathcal{D}_{\omega}(X)$, $\mathcal{E}_{\omega}(X)$, $\mathcal{E}'_{\omega}(X)$ - 98

$\mathcal{A}'(\Omega)$ - 1o1 $\mathcal{D}'_{\omega}(X)$ - 1o2

$\mathcal{F}$, $\wedge$ - 9o (4.4), 99 (4.14), 1o3

$\mathcal{K}(\widehat{\mathcal{E}'_{\omega}(X)})$ - 99 $\mathcal{K}(\widehat{\mathcal{D}_{\omega}(X)})$ - 1o2 f

SACHVERZEICHNIS

analytisch-uniforme Struktur 126, 127

Differentialoperator
- auf einem LAU-Raum 91
- elliptischer D. 121
- ω-hypoelliptischer D. 121
- tangentialer D. an V 26

Diskriminante 14

Distributionen 98, 1o2

Division
- semilokale D. 62
- globale D. 83

Exponentialpolynomlösung 2

Fourier-Laplacetransformation 9o, 99, 1o3

Fundamentalprinzip 3, 114 ff

Garbe der Relationen 8o

Gewichtsfunktionen 88

Integraldarstellung 3, 117 f

Interpolation
- Hermite-Lagrange-I. 52
- semilokal 66
- global 84

Koketten 74

Korandoperator 75

LAU-Raum 91

LAU-Struktur 88

Lokalisierbarkeit 126 f

Modul

  primärer M. 21

  zu einem Noetherschen Operator gehöriger M. 1o

  M. der Relationen 43

multiplicity variety 35, 117

nichtcharakteristischer Vektor 31, 38

Noetherscher Operator 1o

  zu einem Modul gehöriger N.O. 1o

  zu einem Differentialoperator gehöriger N.O. 91

  primärer N.O. 22

  normaler N.O. 24

  Ordnung eines N.O. 11

  Kerngarbe eines N.O. 8o

Paley-Wiener, Satz von 99, 1o2

plurisubharmonische Funktion 76

Primärzerlegung 21

Symbol eines Differentialoperators

  mit Polynomkoeffizienten 1o

  auf einem LAU-Raum 91

Varietät

charakteristische V. 12

Normalisierung einer V. 13 f

zu P(D) gehörige V. 121

Verschwindungsideal 9

Vorbereitungssatz 38 f