Endomorphismen von Worten in einem Köcher

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades
der Fakultät für Mathematik
an der Universität Bielefeld

vorgelegt von

HENNING KRAUSE

Bielefeld 1990

Gutachter: Prof. Dr. Claus M. Ringel
Priv. Doz. Dr. Dieter Happel

Tag der mündlichen Prüfung: 29. Januar 1991

Inhalt

Mühsal der Besten

„Woran arbeiten Sie?" wurde Herr K. gefragt. Herr K. antwortete: „Ich habe viel Mühe, ich bereite meinen nächsten Irrtum vor."

B. BRECHT

1 Einführung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit Worten in einem Köcher und deren Endomorphismen. Ein Köcher Q ist ein orientierter Graph, bestehend aus einer Menge von Punkten Q_0 und einer Menge von Pfeilen Q_1, so daß jedem Pfeil α aus Q_1 ein Anfangspunkt $s(\alpha)$ und ein Endpunkt $t(\alpha)$ aus Q_0 zugeordnet werden. Wir fügen den Pfeilen $\alpha \in Q_1$ formale Inverse α^{-1} hinzu mit $(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$ und $s(\alpha^{-1}) = t(\alpha)$ sowie $t(\alpha^{-1}) = s(\alpha)$, deren Menge mit Q_{-1} bezeichnet wird.

Eine Sequenz $w = w_1 w_2 \ldots w_n$ von Pfeilen und formalen Inversen heißt ein Wort in Q der Länge $|w| = n$, falls $w_{i+1} \neq w_i{}^{-1}$ und $s(w_{i+1}) = t(w_i)$ für jedes $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ gilt. Mit $s(w) = s(w_1)$ und $t(w) = t(w_n)$ werden Anfangs- und Endpunkt von w bezeichnet. Sei $v = v_1 \ldots v_m$ ein weiteres Wort der Länge m in Q, so sei durch Aneinandersetzen das Kompositum $vw = v_1 \ldots v_m w_1 \ldots w_n$ erklärt, sofern die resultierende Sequenz wieder ein Wort in Q ist. Weiterhin benötigen wir für jeden Punkt x in Q das Wort e_x der Länge $|e_x| = 0$ mit $s(e_x) = x = t(e_x)$. Die Komposition $e_x w = w$ bzw. $we_x = w$ für ein Wort w ist genau dann erklärt, falls $s(w) = x$ bzw. $t(w) = x$ gilt. Die Menge aller Worte in Q bezeichnen wir mit Q^*.

Seien für ein Wort $a = a_1 \ldots a_n$ der Länge $n > 0$

$$\sigma(a) = \begin{cases} 1 & a_1 \in Q_1, \\ -1 & a_1 \in Q_{-1}, \end{cases} \qquad \tau(a) = \begin{cases} 1 & a_n \in Q_1, \\ -1 & a_n \in Q_{-1} \end{cases}$$

sowie $a^{-1} = a_n{}^{-1} \ldots a_1{}^{-1}$, und seien $\sigma(e_x) = \tau(e_x) = 0$ sowie $e_x{}^{-1} = e_x$. Dann lassen sich Faktoren, Quotienten und Divisoren von einem Wort w folgendermaßen definieren:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Fac}(w) &= \{\, (x, a, y) \in Q^* \times Q^* \times Q^* \mid w = xay \,\}, \\
\mathrm{Quot}(w) &= \{\, (x, a, y) \in \mathrm{Fac}(w) \mid \tau(x) \leq 0, \sigma(y) \geq 0 \,\} \text{ und} \\
\mathrm{Div}(w) &= \{\, (x, a, y) \in \mathrm{Fac}(w) \mid \tau(x) \geq 0, \sigma(y) \leq 0 \,\}.
\end{aligned}$$

Mit $\pi(\alpha) = a$ wird die Projektion von einem Faktor $\alpha = (x, a, y)$ bezeichnet. Nun können wir die Menge der Endomorphismen von einem Wort erklären:

$$\mathrm{End}(w) = \{\, (\varphi_s, \varphi_t) \in \mathrm{Quot}(w) \times \mathrm{Div}(w) \mid \pi(\varphi_s) = \pi(\varphi_t) \text{ oder } \pi(\varphi_s) = \pi(\varphi_t)^{-1} \,\} \cup \{0\}.$$

Zusammen mit der Komposition, die im nächsten Kapitel eingeführt wird, bilden die Endomorphismen ein Monoid.

Sei k ein Körper. Wir formulieren das Hauptergebnis dieser Arbeit für die von dem Monoid $\mathrm{End}(w)$ erzeugte k-Algebra $k\,\mathrm{End}(w)$. Darunter verstehen wir den k-Vektorraum mit Basis $\mathrm{End}(w) \setminus \{0\}$, versehen mit der induzierten Multiplikation.

Theorem 1. *Sei w ein Wort in einem Köcher und k ein Körper. Dann ist die von den Endomorphismen von w erzeugte k-Algebra $k\,\mathrm{End}(w)$ lokal. Für eine von zwei Elementen erzeugte Faktoralgebra A von $k\,\mathrm{End}(w)$ und eine natürliche Zahl n gilt:*

(a) *Die Dimension $\dim_k A/\mathrm{rad}^n A$ ist durch $2n^2 - 2n + 1$ beschränkt.*

(b) *Sind A und $k\langle x,y\rangle/(x,y)^n$ isomorph, wobei $k\langle x,y\rangle$ die freie assoziative k-Algebra in zwei Erzeugenden sei, dann ist $n \leq 3$.*

Sei M ein Monoid, $\mathrm{rad}\, M$ die Teilmenge der nicht invertierbaren Elemente und $\mathrm{rad}^n M = (\mathrm{rad}\, M)^n$. Wir nennen M lokal, falls nur das Einselement invertierbar ist und die Menge $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{rad}^n M$ einelementig ist. Die kombinatorische Fassung des Ergebnisses lautet nun folgendermaßen:

Theorem 2. *Sei w ein Wort in einem Köcher. Dann ist das Monoid $\mathrm{End}(w)$ der Endomorphismen von w lokal. Für ein von zwei Elementen erzeugtes Faktormonoid M von $\mathrm{End}(w)$ und eine natürliche Zahl n gilt:*

(a) *Die Kardinalität $\mathrm{card}(M/\mathrm{rad}^n M)$ ist durch $2n^2 - 2n + 2$ beschränkt.*

(b) *Sind M und $M\langle x,y\rangle/\mathrm{rad}^n M\langle x,y\rangle$ isomorph, wobei $M\langle x,y\rangle$ das freie Monoid in zwei Erzeugenden sei, dann ist $n \leq 3$.*

Die Motivation für die Untersuchung von $\mathrm{End}(w)$ ergibt sich aus der Darstellungstheorie von Algebren. Sei ein Körper k gegeben, so ist jedem Wort w in einem Köcher Q in kanonischer Weise ein Modul $M(w)$ über der Wegealgebra kQ von Q assoziiert (siehe Abschnitt 7.1). Wir folgen nun Wald und Waschbüsch sowie Crawley-Boevey, die bereits gezeigt haben, daß die Menge $\mathrm{End}(w) \setminus \{0\}$ eine Basis der Endomorphismen von $M(w)$ liefert (siehe [WW], [C]).

Korollar 1. *Sei k ein Körper, w ein Wort in einem Köcher Q und $M(w)$ der assoziierte Modul über der Wegealgebra kQ. Dann gilt für die Endomorphismenalgebra von $M(w)$*

$$\mathrm{End}_{kQ}(M(w)) \cong k\,\mathrm{End}(w).$$

Insbesondere gelten für eine von zwei Elementen erzeugte Faktoralgebra A von $\mathrm{End}_{kQ}(M(w))$ *und eine natürliche Zahl n die Aussagen* (a) *und* (b) *des Theorem* 1.

Moduln der Form $M(w)$ treten auf bei der Klassifikation der unzerlegbaren Moduln über Stringalgebren (siehe [BR]), also ebenso bei speziell zweireihigen Algebren (siehe [WW]): Jeder unzerlegbare Modul über einer Stringalgebra Λ ist entweder ein Stringmodul oder ein Bandmodul. Die Stringmoduln entsprechen Moduln der Form $M(w)$ für gewisse Worte im Köcher Q_Λ der Algebra. Die Bandmoduln treten nur in homogenen Röhren des Auslander-Reiten-Köchers Γ_Λ von Λ auf. Stringalgebren sind zahme Algebren (im Sinne von [D]), so daß sich als Ergebnis dieser Arbeit festhalten läßt, daß eine wichtige Klasse von zahmen Algebren sich auch bezüglich der Endomorphismenringe unzerlegbarer Moduln 'zahm' verhält. Wilde Algebren verhalten sich entsprechend 'wild'. Beispielsweise hat S. Brenner in [B] gezeigt, daß für $\Lambda = k\langle x, y\rangle$ jede endlichdimensionale k-Algebra sich als Endomorphismenring eines Λ-Moduls realisieren läßt.

Wir skizzieren nun den Aufbau dieser Arbeit. Im folgenden 2. Kapitel vervollständigen wir die Notation und zeigen, daß $\mathrm{End}(w)$ ein lokales Monoid bzw. $k\,\mathrm{End}(w)$ eine lokale k-Algebra ist. Weil Theorem 1 von zwei Elementen erzeugte Faktoralgebren von $k\,\mathrm{End}(w)$ behandelt, stehen wir vor der Aufgabe, für Paare (α, β) von Endomorphismen das Erzeugnis $\langle\alpha, \beta\rangle \subseteq \mathrm{End}(w)$ zu untersuchen. Insbesondere interessiert uns eine Abschätzung von

$$c_n(\alpha, \beta) = \mathrm{card}(\langle\alpha, \beta\rangle \setminus \mathrm{rad}^n\langle\alpha, \beta\rangle),$$

denn es gilt $\dim_k A/\mathrm{rad}^n A \leq c_n(\alpha, \beta)$ für eine von α und β erzeugte Faktoralgebra A.

Als erstes Ergebnis erhalten wir im 3. Kapitel eine 13-dimensionale Algebra, die sich nicht als Faktoralgebra von $k\,\mathrm{End}(w)$ realisieren läßt. Dann folgt eine Aufteilung der Endomorphismenpaare in reduzierbare und nicht reduzierbare Paare. Nicht reduzierbare Paare entziehen sich einer geschlossenen Behandlung, d.h. drei Fälle müssen zunächst gesondert betrachtet werden.

Jedem reduzierbaren Paar (α, β) wird ein - von Ausnahmen abgesehen - einfaches Paar (α_0, β_0) von Transformationen zugeordnet. Im 4. Kapitel beschreiben wir zwei Operationen r_n und r, um ein einfaches Paar (α_0, β_0) sukzessive zu einem minimalen Paar (α_1, β_1) zu reduzieren. Umgekehrt erhält man aus der Kenntnis von $\langle\alpha_1, \beta_1\rangle$ induktiv eine genaue Beschreibung von $\langle\alpha_0, \beta_0\rangle$. Insbesondere gilt $c_n(\alpha_0, \beta_0) \leq n^2/2 + n/2$.

Im 5. Kapitel werden die Beweise der beiden Theoreme abgeschlossen. Wir fassen ein reduzierbares Paar (α, β) auf als eine durch vier ganzzahlige Parameter bestimmte Erweiterung $e(\alpha_0, \beta_0; i, j, p, q)$ des Paares (α_0, β_0). Diese Parameter führen zu einer weiteren Unterteilung in schwach- und stark reduzierbare Paare. Zunächst wird Teil (a) des

Theorem 1 bewiesen. Für schwach reduzierbare Paare dient uns die Beschreibung von (α_0, β_0) aus dem vorherigen Kapitel als Approximation von (α, β), und wir erhalten so die Abschätzung $c_n(\alpha, \beta) \leq 2n^2 - 2n + 1$. Im stark reduzierbaren Fall ist eine allgemeine Abschätzung von $c_n(\alpha, \beta)$ durch ein Polynom vom Grad 2 nicht möglich, so daß wir einen anderen Weg beschreiten. Für den Teil (b) des Theorem 1 kombinieren wir verschiedene Ergebnisse und Techniken, die bereits aus dem Beweis von Teil (a) zur Verfügung stehen.

Das 6. Kapitel ist drei Beispielen gewidmet. Sie illustrieren die Beweise und geben zugleich Aufschluß über die Qualität der Abschätzungen in beiden Theoremen.

Im 7. Kapitel diskutieren wir schließlich die bereits erwähnte darstellungstheoretische Anwendung.

Mein Dank gebührt Claus Michael Ringel, der das Entstehen dieser Arbeit durch geduldiges Zuhören und viele wertvolle Anregungen unterstützt hat.

2 Das Monoid End(w)

Sei Q ein Köcher. In der Einführung wurden bereits *Worte* in Q sowie deren *Faktoren* und *Endomorphismen* definiert. Wir vervollständigen zunächst die benötigte Notation und geben insbesondere die Komposition in End(w) an. Als erstes Ergebnis erhalten wir dann eine Beschreibung der Potenzen α^r ($r \in \mathbb{N}$) für einen Endomorphismus $\alpha \in \mathrm{End}(w)$ und zeigen, daß End(w) ein lokales Monoid ist.

(2.1) Sei w ein Wort in Q und seien $\alpha = (a_1, a, a_2)$ sowie $\beta = (b_1, b, b_2)$ zwei Faktoren von w. Die Menge der Faktoren Fac(w) ist *halbgeordnet* vermöge

$$(a_1, a, a_2) \leq (b_1, b, b_2) \iff |a_i| \geq |b_i| \quad \text{für} \quad i \in \{1, 2\}.$$

Die *Vereinigung* von α und β sei definiert durch

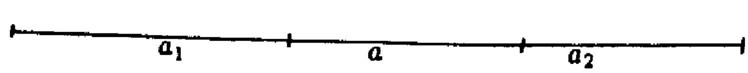
$$\alpha \cup \beta = \min\{\, \gamma \in \mathrm{Fac}(w) \mid \alpha \leq \gamma, \beta \leq \gamma \,\}.$$

Die Faktoren α und β heißen *zusammenhängend*, falls

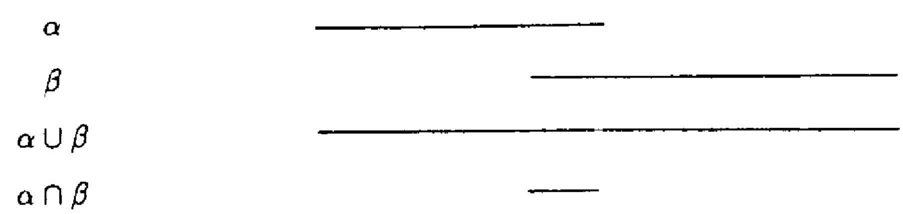
$$S = \{\, \gamma \in \mathrm{Fac}(w) \mid \gamma \leq \alpha, \gamma \leq \beta \,\} \neq \emptyset.$$

In diesem Fall sei $\alpha \cap \beta = \max S$ der *Schnitt* von α und β.

Ein Faktor $\alpha = (a_1, a, a_2)$ von w läßt sich durch folgendes Bild veranschaulichen:



Die Gerade entspricht dem Wort w, und die Unterteilung spiegelt die Längen der Worte a_1, a und a_2 in Q^* wieder. Für den Vergleich verschiedener Faktoren ist es meist hinreichend, nur die Projektionen in ihrer relativen Lage zueinander als Geraden darzustellen:



Sei nun v ein weiteres Wort in Q und $\gamma = (c_1, c, c_2) \in \mathrm{Fac}(v)$. Falls $v = \pi(\beta)$ gilt, bildet

$$\gamma * \beta = (b_1 c_1, c, c_2 b_2)$$

die *Komposition* von γ und β. Offenbar gilt $\alpha \leq \beta$ genau dann, wenn ein (durch α und β eindeutig bestimmter) Faktor $\alpha_\beta \in \mathrm{Fac}(\pi(\beta))$ existiert mit $\alpha = \alpha_\beta * \beta$.

Weiter sei für den Faktor α die Zahl $|\pi(\alpha)|$ die *Länge* von α und $\alpha^{-1} = ({a_2}^{-1}, a^{-1}, {a_1}^{-1}) \in \mathrm{Fac}(w^{-1})$.

(2.2) Für $w \in Q^*$ sei

$$\mathrm{Trans}(w) = \{\, (\varphi_s, \varphi_t) \in \mathrm{Fac}(w) \times \mathrm{Fac}(w) \mid \pi(\varphi_s) = \pi(\varphi_t) \text{ oder } \pi(\varphi_s) = \pi(\varphi_t)^{-1} \,\} \cup \{0\}$$

die Menge der *Transformationen* von w. Die Endomorphismen von w bilden eine Teilmenge von $\mathrm{Trans}(w)$. Wir definieren für eine Transformation $\varphi = (\varphi_s, \varphi_t)$ folgende Begriffe:

Das *Signum* von φ sei $\mathrm{sgn}(\varphi) = \begin{cases} 1 & \pi(\varphi_s) = \pi(\varphi_t), \\ -1 & \text{sonst.} \end{cases}$

Der *Rang* von φ sei $\mathrm{rg}(\varphi) = |\varphi_s|$.

Der *Träger* von φ sei $\mathrm{supp}(\varphi) = \varphi_s \cup \varphi_t$.

Die *Verschiebung* von φ sei $|\varphi| = |x'| - |x|$ bzw. $\|\varphi\| = \big||x'| - |x|\big|$, falls $\varphi_s = (x, a, y)$ und $\varphi_t = (x', a', y,)$.

Das *Bild* von $\alpha \in \mathrm{Fac}(w)$ sei $\alpha\varphi = (\alpha_{\varphi_s})^{\mathrm{sgn}(\varphi)} * \varphi_t$, falls $\alpha \leq \varphi_s$.

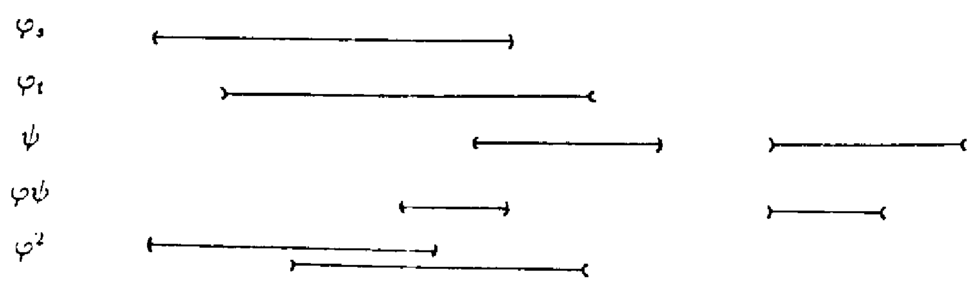
Das *Urbild* von $\alpha \in \mathrm{Fac}(w)$ sei $\alpha\varphi^{-1} = (\alpha_{\varphi_t})^{\mathrm{sgn}(\varphi)} * \varphi_s$, falls $\alpha \leq \varphi_t$.

Die Komposition von zwei Transformationen $\varphi, \psi \in \mathrm{Trans}(w)$ wird folgendermaßen erklärt:

$$\varphi\psi = \begin{cases} (\alpha\varphi^{-1}, \alpha\psi) & \varphi = (\varphi_s, \varphi_t),\ \psi = (\psi_s, \psi_t) \text{ und } \alpha = \varphi_t \cap \psi_s \text{ existiert}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Mengen $\mathrm{Trans}(w)$ und $\mathrm{End}(w)$ sind jeweils abgeschlossen unter der Komposition, und die Komposition ist offensichtlich assoziativ.

Die folgenden Diagramme illustrieren die Komposition für den Fall $\mathrm{sgn}(\varphi) = \mathrm{sgn}(\psi) = 1$. Dabei unterscheiden wir die Faktoren φ_s und φ_t einer Transformation $\varphi = (\varphi_s, \varphi_t)$ durch Markierungen an den Enden der entsprechenden Geraden.



Wir bemerken, daß die Halbordnung auf $\mathrm{Fac}(w)$ eine Halbordnung auf den Transformationen von w induziert (siehe 5.1), bezüglich der jeder Endomorphismus maximal ist.

(2.3) Lemma. *Sei $a = a_1 \dots a_n \in Q^*$ mit $n = |a|$ und sei $p \in \mathbb{N}$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Es existieren $x_1, x_2 \in Q^*$ und $r \in \mathbb{N}$ mit $a = (x_1x_2)^r x_1$ und $|x_1x_2| = p$.*

(ii) *Es gilt $p \leq n$ und $a_{i+p} = a_i$ für $1 \leq i \leq n - p$.*

(iii) *Es existieren $b, x, y \in Q^*$ mit $a = xby$, $xb = by$ und $|x| = |y| = p$.*

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii) und (ii) $\Rightarrow$ (iii) sind klar. Wir zeigen nun (iii) $\Rightarrow$ (i) durch Induktion nach n. Zunächst sei $|b| \leq |x|$ angenommen. Setze $x_1 = b$, und sei $x_2 \in Q^*$ mit $x = x_1x_2$. Aus $xb = by$ folgt $x_1x_2x_1 = xb = by = x_1y$, also $y = x_2x_1$. Damit gilt $a = xby = (x_1x_2)^2x_1$, und die Behauptung ist gezeigt. Nun sei $|b| > |x|$. Aus $xb = by$ folgt $b = xb'$ für ein $b' \in Q^*$. Dann gilt $xxb' = xb = by = xb'y$, d.h. $xb' = b'y$. Nach Induktionsvoraussetzung hat $a' = xb'y$ die Form $a' = (x_1x_2)^r x_1$ mit $x = x_1x_2$, so daß mit $a = xa' = (x_1x_2)^{r+1}x_1$ die Behauptung vollständig gezeigt ist.

Ein Wort a in Q heißt *p-periodisch*, falls es eine der äquivalenten Eigenschaften (i) - (iii) erfüllt. Ein Faktor α von einem Wort in Q heißt *p-periodisch*, falls die Projektion $\pi(\alpha)$ p-periodisch ist.

(2.4) Lemma. *Sei $a \in Q^*$ und seien $p, q \in \mathbb{N}$. Ist a zugleich p- und q-periodisch mit $|a| \geq p + q$, dann ist a ein $\mathrm{ggT}(p,q)$-periodisches Wort.*

Beweis. Sei ohne Einschränkung $p \geq q$. Dann hat a die Form $a = xa'$ mit $|x| = p$ und $x = (x_1x_2)^r x_1$ mit $|x_1x_2| = q$. Wegen der Voraussetzung $|a| \geq p+q$ und der p-Periodizität von a gilt $a = xx_1x_2a''$ für ein a''. Aus der q-Periodizität folgt $a = (x_1x_2)^r x_1x_2x_1a''$. Demnach ist $x_1x_2 = x_2x_1$, und die Behauptung folgt unmittelbar aus dem folgenden Lemma.

Lemma. *Seien $a, b \in Q^*$ und sei $ab = ba$. Dann existieren $x \in Q^*$ und $r, s \in \mathrm{N}$ mit $a = x^r$, $b = x^s$.*

Beweis. Wir beweisen durch Induktion nach $|a|$. Ohne Einschränkung sei $|a| \geq |b|$. Wegen $ab = ba$ gibt es $a' \in Q^*$ mit $a = ba'$. Es folgt dann $ba'b = ab = ba = bba'$, d.h. $a'b = ba'$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $a' = x^r$ und $b = x^s$, und die Behauptung folgt aus $a = ba' = x^{r+s}$.

(2.5) Lemma. *Sei $\alpha \in \mathrm{End}(w)$, $\alpha \neq 1$ und $\alpha^2 \neq 0$.*

(a) *Es gilt* $\mathrm{sgn}(\alpha) = 1$.

(b) *Sei $r \in \mathrm{N}$ und $\alpha^r \neq 0$. Dann gilt* $\mathrm{supp}(\alpha^r) = \mathrm{supp}(\alpha)$, $\mathrm{rg}(\alpha^r) = \mathrm{rg}(\alpha) - (r-1)\|\alpha\|$ *und* $|\alpha^r| = r|\alpha|$.

(c) *Der Träger* $\mathrm{supp}(\alpha)$ *von α ist $\|\alpha\|$-periodisch, und es gilt* $|\mathrm{supp}(\alpha)| = \mathrm{rg}(\alpha) + \|\alpha\|$.

(d) *Sei $b \in \mathrm{N}$ und* $\mathrm{supp}(\alpha)$ *b-periodisch sowie $\|\alpha\| = rb$ für ein $r \in \mathrm{N}$. Dann gilt $\alpha = \beta^r$ für einen eindeutig durch α und b bestimmten Endomorphismus $\beta \in$* $\mathrm{End}(w)$.

Beweis. Sei $\alpha_s = (x, a, y)$, $\alpha_t = (x', a', y')$. Weiter sei ohne Einschränkung $|\alpha| \geq 0$.

(a) Angenommen, es sei $\mathrm{sgn}(\alpha)$ negativ, d.h. $a' = a^{-1}$. Dann gilt $(\alpha_t \cap \alpha_s)^{-1} = \alpha_t \cap \alpha_s$, und damit ist $\alpha^2 = (\alpha_t \cap \alpha_s, \alpha_t \cap \alpha_s)$. Nun ist $\mathrm{Quot}(w) \cap \mathrm{Div}(w) = \{(1, w, 1)\}$, so daß im Widerspruch zur Voraussetzung $\alpha = 1$ gilt. Also ist $\mathrm{sgn}(\alpha) = 1$.

(b) Sei $a = ba_1 = a_2b'$ mit $|a_i| = (r-1)\|\alpha\|$. Dann folgt mit Teil (a) unmittelbar aus der Definition der Komposition in $\mathrm{End}(w)$, daß α^r die Form (β_s, β_t) mit $\beta_s = (x, b, a_1y)$ und $\beta_t = (x'a_2, b', y')$ besitzt. Daraus ergibt sich die Behauptung.

(c) Nach Teil (a) gilt $a' = a$. Wegen $|\alpha| \geq 0$ gibt es $x'', y'' \in Q^*$ mit $x' = xx''$ und $y = y''y'$. Dann ist $\pi(\mathrm{supp}(\alpha)) = ay'' = x''a$ mit $|y''| = \|\alpha\| = |x''|$, und die Eigenschaft (iii) in Lemma 1.3 ist erfüllt. Außerdem gilt $|\mathrm{supp}(\alpha)| = |a| + |y''|$, so daß (c) vollständig bewiesen ist.

(d) Nach Teil (c) hat α die Form $\alpha_s = (x, a, y''y')$, $\alpha_t = (xx'', a, y')$. Wegen der b-Periodizität von $\mathrm{supp}(\alpha)$ existieren $\bar{b}, \bar{x}, \bar{y} \in Q^*$ mit $\bar{b}\bar{y} = ay'' = x''a = \bar{x}\bar{b}$ und $|\bar{y}| = b = |\bar{x}|$. Damit besitzt β die Form $\beta_s = (x, \bar{b}, \bar{y}y')$, $\beta_t = (x\bar{x}, \bar{b}, y')$.

(2.6) Sei M ein *Monoid*, d.h. M ist eine Menge versehen mit einer assoziativen Multiplikation und einem Einselement $1 \in M$. Sei $1 \neq x_0 \in M$ ein Element mit $x_0 x = x_0 = x x_0$ für alle $x \in M$, so wird x_0 als *Nullelement* von M mit 0 bezeichnet. Das *Radikal* $\operatorname{rad} M$ von M sei die Menge der nicht invertierbaren Elemente in M. Man definiert induktiv $\operatorname{rad}^{n+1} M = \operatorname{rad}^n M \operatorname{rad} M$ und erhält die folgende absteigende Kette

$$M = \operatorname{rad}^0 M \supseteq \operatorname{rad}^1 M \supseteq \operatorname{rad}^2 M \supseteq \dots$$

von Idealen in M. Sei $x \in M$, so heißt

$$l(x) = \begin{cases} \infty & x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{rad}^n M, \\ \max\{\, n \in \mathbb{N}_0 \mid x \in \operatorname{rad}^n M \,\} & \text{sonst,} \end{cases}$$

die *Länge* von x in M. Das Monoid M heißt *lokal*, falls $M = \operatorname{rad} M \cup \{1\}$ gilt und $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{rad}^n M$ einelementig ist. Für eine Teilmenge $X \subseteq M$ wird mit $\langle X \rangle$ das kleinste X umfassende Submonoid von M bezeichnet.

Lemma. *Sei M ein endliches Monoid mit Null und sei für jedes $x \in M \setminus \{1\}$ die Menge $\{\, n \in M \mid x^n \neq 0 \,\}$ endlich. Dann ist M lokal.*

Beweis. Offensichtlich ist 1 das einzige invertierbare Element. Wir zeigen nun, daß $\operatorname{rad}^{n+1} M = \operatorname{rad}^n M$ bereits $\operatorname{rad}^n M = 0$ impliziert. Dann folgt die Behauptung aus der Endlichkeit von M. Sei also $\operatorname{rad}^n M = \operatorname{rad}^n M \operatorname{rad} M$, so wähle $X \subseteq \operatorname{rad}^n M$ minimal mit $\operatorname{rad}^n M = X \operatorname{rad} M$. Sei $x_0 \in X$, so gibt es $x_1 \in X$ und $x \in \operatorname{rad} M$ mit $x_0 = x_1 x$. Wegen der Minimalität von X gilt $x_0 = x_1$ und somit $x_0 = x_0 x^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Voraussetzung ist dann $x_0 = 0$, d.h. $\operatorname{rad}^n M = 0$.

Wir kombinieren nun das vorangegangene Lemma mit Lemma 2.5.b.

Satz. *Sei w ein Wort in einem Köcher. Dann ist* $\operatorname{End}(w)$ *ein lokales Monoid.*

(2.7) Sei M ein Monoid mit 0 und $H \subseteq M$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge. Für einen Körper k sei die von H *erzeugte k-Algebra* der k-Vektorraum $kH = \bigoplus_{x \in H \setminus \{0\}} kx$ versehen mit der induzierten Multiplikation, d.h. Basiselemente werden wie in M multipliziert, wobei die Null in M mit der im Vektorraum kH identifiziert wird.

Lemma. *Sei M ein lokales Monoid.*

(a) *Die k-Algebra kM ist lokal, und für das Radikal gilt* $\operatorname{rad}^n kM = k \operatorname{rad}^n M$ *für jedes* $n \in \mathbb{N}$.

(b) *Sei A eine k-Algebra mit* $\operatorname{rad}^n A = 0$ *und sei* $\varphi: kM \to A$ *ein surjektiver Homomorphismus. Dann gibt es eine Teilmenge* $X \subseteq \operatorname{rad} M \setminus \operatorname{rad}^2 M$, *so daß* $\{\varphi(x) + \operatorname{rad}^2 A \mid x \in X\}$ *eine k-Basis von* $\operatorname{rad} A/\operatorname{rad}^2 A$ *bildet. Für jedes* $r \in \mathbb{N}_0$ *wird* $\operatorname{rad}^r A$ *über k von* $\{\varphi(x) \mid x \in \operatorname{rad}^r\langle X\rangle\}$ *erzeugt; insbesondere wird A über k von* $\{\varphi(x) \mid x \in \langle X\rangle \setminus \operatorname{rad}^n\langle X\rangle\}$ *erzeugt.*

Wir verzichten auf den elementaren Beweis des Lemmas.

3 Nicht reduzierbare Paare von Endomorphismen

Wir werden in den folgenden Abschnitten Paare α und β von Endomorphismen untersuchen, denn Theorem 1 behandelt von zwei Elementen erzeugte Faktoralgebren von $k\operatorname{End}(w)$ und Lemma 2.7 zusammen mit Satz 2.6 reduziert diese Aussagen auf Paare $\alpha, \beta \in \operatorname{End}(w)$ und deren Erzeugnis $\langle\alpha,\beta\rangle \subseteq \operatorname{End}(w)$. Als erstes Ergebnis erhalten wir in Abschnitt 3.4 eine 13-dimensionale Algebra, die sich nicht als Faktor von $k\operatorname{End}(w)$ realisieren läßt.

(3.1) Seien $\alpha, \beta \in \operatorname{End}(w)$. Das Paar (α,β) heißt *reduzierbar*, falls

(i) $\alpha^2 \neq 0$, $\alpha\beta\alpha \neq 0$, $\operatorname{sgn}(\beta) = 1$, $|\alpha||\beta| < 0$, sowie

(ii) $\|\beta\| \geq \|\alpha\|$, falls $\beta^2 \neq 0$.

Unser Ziel in diesem Abschnitt ist der folgende Satz, der all die Fälle versammelt, die sich einer geschlossenen Behandlung im Rahmen der einfachen und reduzierbaren Paare (vergleiche das 4. und 5. Kapitel) entziehen.

Satz. *Seien* $\alpha, \beta \in \operatorname{rad}\setminus\operatorname{rad}^2\operatorname{End}(w)$ *und weder* (α,β) *noch* (β,α) *reduzierbar. Dann gilt für* $n \in \mathbb{N}$

$$\operatorname{card}(\langle\alpha,\beta\rangle \setminus \operatorname{rad}^n\langle\alpha,\beta\rangle) \leq 2n^2 - 2n + 1.$$

(3.2) Lemma. *Seien* $\alpha, \beta \in \operatorname{rad}\operatorname{End}(w)$ *mit* $\alpha^2 \neq 0$ *und* $\beta^2 \neq 0$.

(a) *Sei* $|\operatorname{supp}(\alpha) \cap \operatorname{supp}(\beta)| \geq \|\alpha\| + \|\beta\|$. *Dann gilt* $\operatorname{supp}(\alpha) = \operatorname{supp}(\beta)$.

(b) *Sei* $\operatorname{supp}(\alpha) = \operatorname{supp}(\beta)$. *Dann gibt es ein* $\gamma \in \operatorname{End}(w)$ *und* $r, s \in \mathbb{N}$ *mit* $\alpha = \gamma^r$, $\beta = \gamma^s$.

Beweis.

(a) Zunächst sind nach Lemma 2.4 und Lemma 2.5 $\mathrm{supp}(\alpha)$ und $\mathrm{supp}(\beta)$ sowohl $\|\alpha\|$- als auch $\|\beta\|$-periodisch. Angenommen, es sei $\mathrm{supp}(\alpha) \neq \mathrm{supp}(\beta)$. Ohne Einschränkung sei $s = \mathrm{supp}(\alpha) \cap \mathrm{supp}(\beta) \neq \mathrm{supp}(\alpha)$. Dann existiert $\gamma = (x, c, y) \in \mathrm{Fac}(\pi(\mathrm{supp}(\alpha)))$ mit $s = \gamma * \mathrm{supp}(\alpha)$ und es ist $|x| > 0$ oder $|y| > 0$. Sei ohne Einschränkung $|x| > 0$. Nach Voraussetzung ist $|c| = |s| \geq \|\beta\|$, d.h. c hat die Form $c = c'c''$ mit $|c'| = \|\beta\|$. Wegen $\beta \in \mathrm{End}(w)$ ergibt sich $\tau(x) \neq \tau(xc')$. Das widerspricht aber der $\|\beta\|$-Periodizität von $xcy = \pi(\mathrm{supp}(\alpha))$, so daß $\mathrm{supp}(\alpha) = \mathrm{supp}(\beta)$ bewiesen ist.

(b) Sei $c = \mathrm{ggT}(\|\alpha\|, \|\beta\|)$. Dann ist auf Grund der Voraussetzungen nach Lemma 2.4 und Lemma 2.5 $\mathrm{supp}(\alpha)$ c-periodisch. Sei $\|\alpha\| = cr$ und $\|\beta\| = cs$, so gibt es nach Lemma 2.5.d ein $\gamma \in \mathrm{End}(w)$, so daß $\alpha = \gamma^r$ sowie $\beta = \gamma^s$ gilt.

(3.3) Ein Endomorphismus $\alpha \in \mathrm{End}(w)$ heißt *primitiv*, falls $\alpha = \beta^n$ für ein $\beta \in \mathrm{End}(w)$ und ein $n \in \mathrm{N}$ bereits $n = 1$ impliziert.

Lemma. *Seien $\alpha, \beta \in \mathrm{End}(w)$ primitiv und sei $\alpha^m = \beta^n \neq 0$ für ein Paar $m, n \in \mathrm{N}$. Dann gilt $\alpha = \beta$ und $m = n$.*

Beweis. Die Behauptung folgt sofort aus Lemma 2.5.b und Lemma 3.2.b.

Das vorangegangene Lemma rechtfertigt die folgende Definition: Zwei Endomorphismen $\alpha, \beta \in \mathrm{End}(w)$ heißen *äquivalent*, falls $\alpha = \beta = 0$ gilt oder ein $\gamma \in \mathrm{End}(w)$ existiert mit $\alpha = \gamma^r \neq 0$ und $\beta = \gamma^s \neq 0$ für gewisse $r, s \in \mathrm{N}$.

(3.4) Satz. *Seien $\alpha, \beta \in \mathrm{rad\,End}(w)$ mit $\alpha^2 \neq 0$, $\beta^2 \neq 0$ und $\|\beta\| \geq \|\alpha\|$. Dann sind α und β äquivalent, oder es gilt $\alpha\beta^n\alpha = 0$ für alle $n \geq 2$.*

Beweis. Sei $\alpha\beta^n\alpha \neq 0$. Wähle $\gamma \leq (\alpha\beta^n\alpha)$, mit $|\gamma| = 0$. Dann ist $\gamma\alpha \leq \mathrm{supp}(\alpha) \cap \mathrm{supp}(\beta)$ und $\gamma\alpha\beta^n \leq \mathrm{supp}(\alpha) \cap \mathrm{supp}(\beta)$. Also ist für $n \geq 2$

$$|\mathrm{supp}(\alpha) \cap \mathrm{supp}(\beta)| \geq |\gamma\alpha \cup \gamma\alpha\beta^n| = \|\beta^n\| = n\|\beta\| \geq 2\|\beta\| \geq \|\alpha\| + \|\beta\|,$$

und damit sind α und β äquivalent nach Lemma 3.2.

Korollar. *Sei $k\langle x, y\rangle$ die freie assoziative k-Algebra in zwei Erzeugenden und sei A die folgende Faktoralgebra:*

$$A = k\langle x, y\rangle / I \quad \text{mit} \quad I = (x^3, y^3, xyx, yxy) + (x, y)^5.$$

Für ein Wort w in einem Köcher gibt es keinen surjektiven Homomorphismus von $k\,\mathrm{End}(w)$ nach A.

Beweis. Angenommen, es gibt einen surjektiven Homomorphismus $\varphi\colon k\operatorname{End}(w) \to A$. Dann existieren $\alpha, \beta \in \operatorname{rad}\operatorname{End}(w) \setminus \operatorname{rad}^2\operatorname{End}(w)$ nach Lemma 2.7, so daß $\{\varphi(\alpha) + \operatorname{rad}^2 A, \varphi(\beta) + \operatorname{rad}^2 A\}$ eine Basis von $\operatorname{rad} A/\operatorname{rad}^2 A$ bildet. Nun wird $\operatorname{rad}^4 A$ über k von $\{\varphi(\alpha\beta^2\alpha), \varphi(\beta\alpha^2\beta)\}$ erzeugt und ist 2-dimensional. Im Widerspruch dazu ist aber $\alpha\beta^2\alpha = 0$ oder $\beta\alpha^2\beta = 0$. Damit ist die Behauptung gezeigt.

(3.5) Lemma. *Seien* $\alpha, \beta \in \operatorname{rad}\operatorname{End}(w)$ *und* $\alpha^2 \neq 0$. *Seien weiter* α *und* β *nicht äquivalent und gelte* $\operatorname{supp}(\beta) \leq \operatorname{supp}(\alpha)$. *Dann ist* $\operatorname{rg}(\beta) < \|\alpha\|$.

Beweis. Wir unterscheiden zwei Fälle.
1. $\beta^2 \neq 0$.
Es gilt nach Lemma 2.5.c

$$|\operatorname{supp}(\alpha) \cap \operatorname{supp}(\beta)| = |\operatorname{supp}(\beta)| = \|\beta\| + \operatorname{rg}(\beta),$$

und die Behauptung folgt sofort aus Lemma 3.2.
2. $\beta^2 = 0$.
Seien $\beta_s = (x, b, y)$, $\beta_t = (x', b', y')$ und sei ohne Einschränkung $|\beta| > 0$. Angenommen, es gilt $\operatorname{rg}(\beta) \geq \|\alpha\|$. Wegen $\beta^2 = 0$ ist $|\beta| > \operatorname{rg}(\beta)$, und es gibt daher eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $|\beta| = n\|\alpha\| + r$ und $0 < r \leq \|\alpha\|$. Sei $y = y_1 y_2$ und $x' = x_2' x_1'$ mit $|y_1| = n\|\alpha\| = |x_1'|$. Dann liegt auch $\gamma = (\gamma_s, \gamma_t)$ mit $\gamma_s = (x, by_1, y_2)$ und $\gamma_t = (x_2', x_1' b', y')$ in $\operatorname{End}(w)$ wegen der α-Periodizität von $\operatorname{supp}(\alpha)$. Nach Konstruktion ist $\operatorname{rg}(\gamma) \geq \|\alpha\|$, $\operatorname{supp}(\gamma) \leq \operatorname{supp}(\alpha)$ und $\gamma^2 \neq 0$. Dem ersten Teil des Beweises zufolge sind dann α und γ äquivalent. Wegen $\beta = \gamma^n$ sind folglich auch α und β äquivalent, und das Lemma ist gezeigt.

(3.6) Lemma. *Seien* $\alpha, \beta \in \operatorname{End}(w)$ *mit* $\beta^2 = 0$ *und* $|\alpha||\beta| > 0$. *Dann gilt* $\beta\alpha^n\beta = 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $x = \beta_t \cap (\alpha^n)_s$. Da $\beta^2 = 0$, sind β_t und β_s nicht zusammenhängend. Wegen $|\alpha||\beta| > 0$ sind dann auch $x\alpha^n$ und β_s nicht zusammenhängend. Deshalb gilt $\beta\alpha^n\beta = 0$.

(3.7) Lemma. *Seien* $\alpha, \beta \in \operatorname{End}(w)$ *nicht äquivalent und sei* $\alpha\beta\alpha^n \neq 0$ *für ein* $n \in \mathbb{N}$. *Gilt* $\varphi\alpha\beta\alpha \neq 0$ *für ein* $\varphi \in \operatorname{End}(w)$, *dann folgt* $\varphi\alpha\beta\alpha^{n-1} \neq 0$.

Beweis. Wir zeigen allgemeiner $(\alpha\beta\alpha)_s = (\alpha\beta\alpha^{n-1})_s$. Daraus ergibt sich dann unmittelbar die Behauptung. Sei also $u = (\alpha\beta)_t \cap \alpha_s$. Nach Lemma 3.5 gilt $|u| = \operatorname{rg}(\alpha\beta\alpha) < \|\alpha\|$. Die Beschreibung von α^{n-1} und α^n in Lemma 2.5 liefert nun $u \leq (\alpha^{n-1})_s$, da nach Voraussetzung u und $(\alpha^n)_s$ zusammenhängend sind. Daher gilt $(\alpha\beta\alpha)_s = (\alpha\beta\alpha^{n-1})_s$.

(3.8) **Lemma.** *Seien* $\alpha, \beta \in \mathrm{End}(w)$ *mit* $\mathrm{sgn}(\alpha) = 1$ *und* $\mathrm{sgn}(\beta) = -1$. *Dann gilt* $\alpha\beta\alpha^n\beta\alpha = 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha\beta\alpha^n\beta\alpha \neq 0$ angenommen. Dann ist nach Lemma 3.7 für $\gamma = \alpha\beta\alpha^{n-1}$ auch $\gamma^2 = \alpha\beta\alpha^n\beta\alpha^{n-1} \neq 0$. Nach den Voraussetzungen an das Signum von α und β ist $\mathrm{sgn}(\gamma) = -1$ oder $\mathrm{rg}(\gamma) = 0$. Beides widerspricht $\gamma^2 \neq 0$ nach Lemma 2.5, und es gilt daher $\alpha\beta\alpha^n\beta\alpha = 0$.

(3.9) Für zwei Faktoren $\alpha = (a_1, a, a_2)$ und $\beta = (b_1, b, b_2)$ aus $\mathrm{Fac}(w)$ schreiben wir $\alpha \ll \beta$, falls $|a_i| > |b_i|$ für $i \in \{1, 2\}$ gilt.

Lemma. *Seien* $\alpha, \beta \in \mathrm{End}(w)$. *Gilt* $\alpha_t \ll \beta_t$ *(*$\alpha_s \ll \beta_s$*), so gibt es* $\alpha' \in \mathrm{End}(w)$ *mit* $\alpha = \alpha'\beta$ *(*$\alpha = \beta\alpha'$*).*

Beweis. Wähle $\alpha' = (\alpha_s, \alpha_t\beta^{-1})$ bzw. $\alpha' = (\alpha_s\beta, \alpha_t)$.

(3.10) **Lemma.** *Seien* $\alpha, \beta \in \mathrm{rad}\,\mathrm{End}(w)$ *nicht äquivalent mit* $\alpha^2 \neq 0$, $\beta^2 \neq 0$ *und* $\|\beta\| \geq \|\alpha\|$. *Außerdem gelte* $\alpha\beta\alpha = 0$, *falls* $|\alpha||\beta| < 0$.

(a) *Sei* $\mathrm{supp}(\alpha) \neq \mathrm{supp}(\alpha) \cap \mathrm{supp}(\beta)$. *Dann gilt* $\alpha\beta = 0$ *oder* $\beta\alpha = 0$.

(b) *Sei* $\mathrm{supp}(\alpha) = \mathrm{supp}(\alpha) \cap \mathrm{supp}(\beta)$. *Dann gilt* $\alpha\beta\alpha = 0$. *Sei darüber hinaus* $\alpha \notin \mathrm{rad}^2\,\mathrm{End}(w)$. *Dann gilt* $\alpha\beta = 0$ *oder* $\beta\alpha = 0$ *oder* $\alpha\beta^2 = \beta^2\alpha = 0$.

Beweis. Wir nehmen ohne Einschränkung $|\alpha|$ positiv an.

(a) Sei $\gamma = (c_1, c, c_2) \in \mathrm{Fac}(\pi(\mathrm{supp}(\alpha)))$ mit $\mathrm{supp}(\alpha) \cap \mathrm{supp}(\beta) = \gamma * \mathrm{supp}(\alpha)$. Nach Voraussetzung ist $|c_1| > 0$ oder $|c_2| > 0$. Wir können uns auf den Fall $|c_1| > 0$ beschränken.

1. $|\alpha||\beta| > 0$.

Angenommen, es gilt $\beta\alpha \neq 0$. Dann sind β_t und α_s zusammenhängend, und es ergibt sich aus $|\alpha||\beta| > 0$ die Ungleichung

$$|\mathrm{supp}(\alpha) \cap \mathrm{supp}(\beta)| = \|\beta\| + |\beta_t \cap \alpha_s| + \|\alpha\| \geq \|\beta\| + \|\alpha\|.$$

Nach Lemma 3.2 sind α und β dann äquivalent. Widerspruch. Also ist $\beta\alpha = 0$ gezeigt.

2. $|\alpha||\beta| < 0$.

Angenommen, es gilt $\alpha\beta \neq 0$. Die Voraussetzungen $|\alpha||\beta| < 0$, $\|\beta\| \geq \|\alpha\|$ und $|c_1| \neq 0$ liefern $(\alpha\beta)_t \leq \alpha_s$. Daraus ergibt sich der Widerspruch $\alpha\beta\alpha \neq 0$. Also ist $\alpha\beta = 0$.

(b) Sei $\gamma = (c_1, c, c_2) \in \mathrm{Fac}(\pi(\mathrm{supp}(\beta)))$ mit $\mathrm{supp}(\alpha) = \gamma * \mathrm{supp}(\beta)$.

1. $|\alpha||\beta| > 0$.

Angenommen, es gilt $\alpha\beta\alpha \neq 0$. Dann folgt wegen $|\alpha||\beta| > 0$ sofort $|\mathrm{supp}(\alpha) \cap \mathrm{supp}(\beta)| \geq \|\alpha\| + \|\beta\| + \|\alpha\|$, d.h. nach Lemma 3.2 sind α und β äquivalent. Widerspruch. Also gilt $\alpha\beta\alpha = 0$. Für den zweiten Teil der Behauptung sei zunächst $|c_1| = 0$ oder $|c_2| = 0$ angenommen. Da $\mathrm{rg}(\alpha) < \|\beta\|$ nach Lemma 3.5 gilt, sind β_t und α_s bzw. β_s und α_t nicht zusammenhängend, so daß $\beta\alpha = 0$ oder $\alpha\beta = 0$ gezeigt ist. Nun seien $|c_1| \neq 0$ und $|c_2| \neq 0$. Aus $|c_1| \neq 0$ und der Voraussetzung $\alpha \notin \mathrm{rad}^2\,\mathrm{End}(w)$ kombiniert mit Lemma 3.9 folgt $|c_2| + \|\alpha\| \leq \|\beta\|$. Mit $\mathrm{rg}(\alpha) < \|\beta\|$ ergibt sich daraus $\beta^2\alpha = 0$. Analog wird $\alpha\beta^2 = 0$ gezeigt.

2. $|\alpha||\beta| < 0$.

Es ist nach Voraussetzung nur der zweite Teil zu zeigen. Beobachte zunächst, daß $\alpha\beta\alpha = 0$ bereits $|\mathrm{supp}(\alpha)| < \|\beta\|$ impliziert. Die Voraussetzung $\alpha \notin \mathrm{rad}^2\,\mathrm{End}(w)$ kombiniert mit Lemma 3.9 liefert $|c_i| \leq \|\beta\|$ für $i \in \{1, 2\}$. Aus $|c_1| \leq \|\beta\|$ und $|\mathrm{supp}(\alpha)| < \|\beta\|$ folgt $\alpha\beta^2 = 0$. Analog ergibt sich $\beta^2\alpha = 0$.

(3.11) Der nun folgende Satz vereinigt die Ergebnisse aus den Abschnitten 3.6, 3.8 und 3.10.

Satz. *Seien $\alpha, \beta \in \mathrm{rad}\,\mathrm{End}(w) \setminus \mathrm{rad}^2\,\mathrm{End}(w)$ voneinander verschieden und weder (α, β) noch (β, α) reduzierbar. Dann gilt einer der folgenden Fälle:*

(i) $\alpha^2 = \beta^2 = 0$.

(ii) $\alpha\beta = 0$. (ii') $\beta\alpha = 0$.

(iii) $\beta^2 = \alpha\beta\alpha^n\beta\alpha = 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$. (iii') $\alpha^2 = \beta\alpha\beta^n\alpha\beta = 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

(iv) $\alpha\beta\alpha = \alpha\beta^2 = \beta^2\alpha = 0$. (iv') $\beta\alpha\beta = \beta\alpha^2 = \alpha^2\beta = 0$.

(3.12) Lemma. *Sei $M = M(x, y)$ das freie Monoid in den Erzeugenden x und y. Weiter sei das Ideal $I \subseteq M$ erzeugt von einer der Mengen*

$$\begin{aligned} R_1 &= \{x^2, y^2\}, \\ R_2 &= \{xyx, xy^2, y^2x\}, \\ R_3 &= \{y^2\} \cup \{\, xyx^r yx \mid r \in \mathbb{N}\,\}, \\ R_4 &= \{\, xy^r x \mid r \in \mathbb{N}\,\} \cup \{\, yx^{r+1}y \mid r \in \mathbb{N}\,\}. \end{aligned}$$

Dann gilt $\mathrm{card}(M/I \setminus \mathrm{rad}^n M/I) \leq 2n^2 - 2n + 1$ *für jedes* $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Sei $I \subseteq M$ ein Ideal und $n \in \mathbb{N}$, so gilt

$$M/I \setminus \mathrm{rad}^n M/I = \{\, \bar{x} \in M/I \mid x \in M \setminus (I \cup \mathrm{rad}^n M) \,\}.$$

Wir betrachten nun einzeln die von R_j erzeugten Ideale I_j $(1 \leq j \leq 4)$ und geben die Elemente von $M_j = M \setminus (I_j \cup \mathrm{rad}^n M)$ bzw. $\mathrm{card}\, M_j$ explizit an. Insbesondere erhalten wir $\mathrm{card}\, M_j \leq 2n^2 - 2n + 1$.

$$\begin{aligned} M_1 = {} & \{\, (xy)^i \mid 0 \leq 2i < n \,\} \cup \{\, (yx)^i \mid 1 \leq 2i < n \,\} \\ & \cup \{\, (xy)^i x \mid 0 \leq 2i < n-1 \,\} \cup \{\, (yx)^i y \mid 0 \leq 2i < n-1 \,\} \end{aligned}$$

$\mathrm{card}\, M_1 = 2n - 1$

$$\begin{aligned} M_2 = {} & \{\, x^i \mid 0 \leq i < n \,\} \cup \{\, y^i \mid 1 \leq i < n \,\} \\ & \cup \{\, x^i y \mid 1 \leq i < n-1 \,\} \cup \{\, y x^i \mid 1 \leq i < n-1 \,\} \\ & \cup \{\, y x^i y \mid 1 \leq i < n-2 \,\} \end{aligned}$$

$\mathrm{card}\, M_2 = 5n - 8, \quad \text{falls} \quad n \geq 3$

$$\begin{aligned} M_3 = {} & \{\, x^i \mid 0 \leq i < n \,\} \cup \{\, y x^i y \mid 1 \leq i < n-2 \,\} \\ & \cup \{\, x^i y x^j \mid i, j \geq 0,\ i + j < n-1 \,\} \\ & \cup \{\, y x^i y x^j \mid i, j \geq 1,\ i + j < n-2 \,\} \\ & \cup \{\, x^i y x^j y \mid i, j \geq 1,\ i + j < n-2 \,\} \\ & \cup \{\, y x^i y x^j y \mid i, j \geq 1,\ i + j < n-3 \,\} \end{aligned}$$

$\mathrm{card}\, M_3 = 2n^2 - 10n + 19, \quad \text{falls} \quad n \geq 4$

$$\begin{aligned} M_4 = {} & \{\, x^i \mid 0 \leq i < n \,\} \cup \{\, y^i \mid 1 \leq i < n \,\} \\ & \cup \{\, x^i y^j \mid i, j \geq 1,\ i + j < n \,\} \cup \{\, y^i x^j \mid i, j \geq 1,\ i + j < n \,\} \\ & \cup \{\, y^i x y^j \mid i, j \geq 1,\ i + j < n-1 \,\} \end{aligned}$$

$\mathrm{card}\, M_4 = 3/2\, n^2 - 7/2\, n + 4, \quad \text{falls} \quad n \geq 2$

Beweis von Satz 3.1. Seien α und β wie in der Voraussetzung. Nach Satz 3.11 ist $\langle \alpha, \beta \rangle$ epimorphes Bild von $M\langle x, y \rangle / I$, wobei das Ideal I von einer der Mengen R_i $(1 \leq i \leq 4)$ erzeugt wird. Nun folgt die Behauptung unmittelbar aus dem vorherigen Lemma.

4 Einfache Paare von Transformationen

Jedem reduzierbaren Paar (α,β) von Endomorphismen werden wir im 5. Kapitel ein Paar (α_0,β_0) von Transformationen zuordnen, das - von Ausnahmen abgesehen - einfach sein wird. Das Erzeugnis $\langle\alpha_0,\beta_0\rangle$ wird dann als Approximation von $\langle\alpha,\beta\rangle$ dienen.

(4.1) Seien $\alpha,\beta\in\mathrm{Trans}(w)$. Das Paar (α,β) heißt *einfach*, falls

(i) $\alpha^2\neq 0,\ \ \beta\neq 0,\ \ \beta^2=0,\ \ \mathrm{sgn}(\beta)=1,$

(ii) $\mathrm{supp}(\alpha)=\mathrm{supp}(\beta),\ \ |\alpha||\beta|<0$ und $\alpha\beta\alpha\in\mathrm{End}(w)$.

In diesem Abschnitt wird eine Konstruktion angegeben, mit der sich ein beliebiges einfaches Paar (α,β) durch iteriertes Anwenden zweier Operationen zu einem minimalen einfachen Paar (α_1,β_1) reduzieren läßt. Umgekehrt erhält man aus der Kenntnis von (α_1,β_1) induktiv eine genaue Beschreibung von $\langle\alpha,\beta\rangle$. Insbesondere können wir das folgende Ergebnis ableiten:

Satz. *Sei (α,β) ein einfaches Paar in* $\mathrm{Trans}(w)$. *Dann gilt für $n\in\mathbb{N}_0$*

$$\mathrm{card}(\mathrm{rad}^n\langle\alpha,\beta\rangle\setminus\mathrm{rad}^{n+1}\langle\alpha,\beta\rangle)\leq n+1.$$

Bemerkung. Die Abschätzung ist bestmöglich (vgl. Beispiel 6.1).

(4.2) **Lemma.** *Sei (α,β) ein einfaches Paar in* $\mathrm{Trans}(w)$.

(a) *Es gilt* $\mathrm{rg}(\beta)<\|\alpha\|$.

(b) *Sei $\alpha^{n_1}\beta\ldots\beta\alpha^{n_r}=\alpha^{m_1}\beta\ldots\beta\alpha^{m_s}\neq 0$ für $n_1,\ldots,n_r$ und $m_1,\ldots,m_s$ aus $\mathbb{N}_0$. Dann gilt $r=s$ und $n_i=m_i$ für $i\in\{1,\ldots,r\}$.*

Beweis.

(a) Sei $c=\mathrm{supp}(\alpha)=\mathrm{supp}(\beta)$ und $w'=\pi(c)$ die Projektion. Wir schränken α und β Auf w' ein, d.h. wir betrachten $\alpha'=((\alpha_s)_c,(\alpha_t)_c)$ und $\beta'=((\beta_s)_c,(\beta_t)_c)$ in $\mathrm{Trans}(w')$. (Dabei sei $\gamma=\gamma_c * c$ für $\gamma\leq c$ aus $\mathrm{Fac}(w)$ wie in 2.1 erklärt.) Wegen $\alpha\beta\alpha\in\mathrm{End}(w)$ bzw. $\alpha'\beta'\alpha'\in\mathrm{End}(w')$ sind auch α' und β' aus $\mathrm{End}(w')$. Nun folgt die Behauptung sofort aus Lemma 3.5, da $\mathrm{rg}(\beta)=\mathrm{rg}(\beta')<\|\alpha'\|=\|\alpha\|$.

(b) Die Behauptung folgt mit (a) durch Induktion nach r.

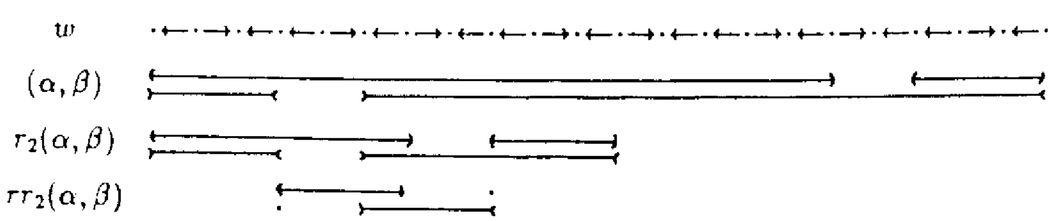
Das vorangegangene Lemma rechtfertigt die folgende Konvention für ein einfaches Paar (α,β): Sei $M\langle\alpha,\beta\rangle$ das freie von α sowie β erzeugte Monoid und sei $\tau = \tau_{\alpha,\beta}: M\langle\alpha,\beta\rangle \to \mathrm{Trans}(w)$ die durch $\tau(\alpha) = \alpha$ und $\tau(\beta) = \beta$ induzierte Abbildung. Dann identifizieren wir die Menge $\{\, x \in M\langle\alpha,\beta\rangle \mid \tau(x) \neq 0 \,\}$ vermöge τ mit $T(\alpha,\beta) = \langle\alpha,\beta\rangle \setminus \{0\} \subseteq \mathrm{Trans}(w)$.

(4.3) **Lemma.** *Sei (α,β) ein einfaches Paar in* Trans(w).

(a) *Sei $n = \max\{\, r \in \mathbb{N}_0 \mid \alpha^{r+2} \neq 0 \,\}$. Dann liegen $\alpha_1 = ((\alpha^{n+1})_s, (\alpha^{n+1})_s\alpha)$ sowie $\beta_1 = (\beta_s\alpha^{-n}, \beta_t)$ in* Trans(w) *und (α_1,β_1) ist ein einfaches Paar. Darüber hinaus gilt ${\alpha_1}^3 = 0$.*

(b) *Sei $\beta\alpha\beta \neq 0$. Dann liegen $\alpha_1 = \alpha\beta\alpha$ und $\beta_1 = ((\beta\alpha)_t \cap \beta_s, \beta_t \cap (\alpha\beta)_s)$ in* Trans(w) *und (α_1,β_1) ist ein einfaches Paar.*

Die einfachen Eigenschaften von (α_1,β_1) ergeben sich unmittelbar aus denen von (α,β), so daß wir auf Details verzichten. Wir bezeichnen im Teil (a) mit $r_n(\alpha,\beta) = (\alpha_1,\beta_1)$ die *n-fache Verkürzung* von (α,β) und im Teil (b) mit $r(\alpha,\beta) = (\alpha_1,\beta_1)$ die *einfache Reduktion* von (α,β). Als Beispiel wählen wir das Wort $w = (x^{-1}yx^{-1}x^{-1}y)^4x^{-1}$ im Köcher mit einem Punkt und zwei Pfeilen x und y.



Ein einfaches Paar (α,β) heißt *minimal*, falls $\alpha^3 = \beta\alpha\beta = 0$ gilt. Die Begriffsbildungen führen zu folgendem Ergebnis:

(4.4) **Lemma.** *Sei (α,β) ein einfaches Paar in* Trans(w). *Dann gibt es ein minimales Paar (α_1,β_1) in* Trans(w) *und Zahlen $n_1,\ldots,n_t \in \mathbb{N}_0$, so daß*

$$(\alpha_1,\beta_1) = r_{n_t}rr_{n_{t-1}}\ldots r_{n_2}rr_{n_1}(\alpha,\beta).$$

Beweis. Iteriere die im vorangegangenen Lemma beschriebenen Konstruktionen r_n und r im Wechsel, bis das resultierende Paar minimal ist.

(4.5) Seien $\alpha,\beta \in \mathrm{Trans}(w)$. Ein Element $m \in \langle\alpha,\beta\rangle$ heißt *maximal* für das Paar (α,β), falls

(i) $m \neq 0$ und

(ii) $m \in \langle\alpha,\beta\rangle x \langle\alpha,\beta\rangle$ für jedes $x \in \langle\alpha,\beta\rangle$ mit $x \neq 0$ gilt.

Lemma. *Sei (α,β) ein minimales Paar in* Trans(w).

(a) *Sei $|\alpha\beta\alpha||\alpha| > 0$. Dann existiert $s \in \mathrm{N}$, so daß $(\alpha\beta\alpha)^s$ maximal ist für das Paar (α,β).*

(b) *Sei $|\alpha\beta\alpha||\alpha| < 0$. Dann existiert $s \in \mathrm{N}$, so daß $\alpha(\alpha\beta\alpha)^s\alpha$ maximal ist für das Paar (α,β).*

Beweis. Nach der Definition für ein minimales Paar ist $\beta\alpha^n\beta = 0$ für jedes $n \in \mathrm{N}_0$ mit $n \neq 2$. Aus den Voraussetzungen an $|\alpha\beta\alpha|$ ergibt sich, daß für maximales $m \in \langle\alpha,\beta\rangle$ entweder $m \in \alpha^2\langle\alpha,\beta\rangle\alpha^2$ oder $m \in \alpha\beta\langle\alpha,\beta\rangle\beta\alpha$ gilt.

(4.6) Wir fixieren einige Notationen für den Rest des 4. Kapitels. Seien $M = M\langle\alpha,\beta\rangle$ das freie Monoid und $G\langle\alpha,\beta\rangle$ die freie Gruppe in den Erzeugenden α und β, wobei wir $M\langle\alpha,\beta\rangle$ als Teilmenge von $G\langle\alpha,\beta\rangle$ auffassen. Weiter sei $(\beta^2) \subseteq M\langle\alpha,\beta\rangle$ das von β^2 erzeugte Ideal, $M_{\beta^2} = M \setminus (\beta^2)$ und $D\langle\alpha,\beta\rangle = \alpha M_{\beta^2} \cup M_{\beta^2}\alpha$ sowie $D'\langle\alpha,\beta\rangle = \alpha M_{\beta^2}\alpha$. Wir definieren zwei Abbildungen, wobei n aus N_0 sei:

$$\rho, \rho_n \colon M\langle\alpha_1,\beta_1\rangle \longrightarrow G\langle\alpha,\beta\rangle.$$

Es sei ρ die multiplikative Fortsetzung der folgendermaßen auf $\{\alpha_1,\beta_1\}$ erklärten Abbildung:

$$\rho(\alpha_1) = \alpha\beta\alpha, \quad \rho(\beta_1) = \alpha^{-1}.$$

Für $x = \alpha_1{}^{n_0}\beta_1{}^{m_1}\alpha_1{}^{n_1}\ldots\beta_1{}^{m_r}\alpha_1{}^{n_r}$ mit $r \in \mathrm{N}_0$, $n_0, n_r \in \mathrm{N}_0$, $n_i \in \mathrm{N}$ $(1 \leq i \leq r-1)$, $m_i \in \mathrm{N}$ $(1 \leq i \leq r)$ sei

$$\rho_n(x) = \alpha^{n_0+n}\beta^{m_1}\alpha^{n_1+n}\ldots\beta^{m_r}\alpha^{n_r+n}.$$

Lemma.

(a) *Für $x, y \in M\langle\alpha_1,\beta_1\rangle$ gilt $\rho_n(xy) = \rho_n(x)\alpha^{-n}\rho_n(y)$ mit $\rho_n(x)\alpha^{-n}, \alpha^{-n}\rho_n(y) \in M\langle\alpha,\beta\rangle$.*

(b) *Für $x \in D\langle\alpha_1,\beta_1\rangle$ gilt $\rho(x) \in M\langle\alpha,\beta\rangle$.*

(c) *Seien $x, x_1, x_2 \in M\langle\alpha_1,\beta_1\rangle$ mit $x, x_1xx_2 \in D'\langle\alpha_1,\beta_1\rangle$. Dann gilt $\rho(x_i) \in M\langle\alpha,\beta\rangle$ für $i \in \{1,2\}$.*

Beweis. (a) und (b) sind klar. (c) folgt aus (b).

(4.7) Lemma. *Sei* (α,β) *ein einfaches Paar in* Trans(w) *und* $(\alpha_1,\beta_1) = r_n(\alpha,\beta)$. *Für* $x \in M\langle\alpha_1,\beta_1\rangle$ *sind* $x \in T\langle\alpha_1,\beta_1\rangle$ *und* $\rho_n(x) \in T\langle\alpha,\beta\rangle$ *äquivalent; in diesem Fall gilt* $\rho_n(x) = x\alpha^n$ *in* Trans(w).

Beweis. Wir zeigen für ein $x \in M\langle\alpha_1,\beta_1\rangle$ die Behauptung durch Induktion nach der Länge $l(x)$ von x und nehmen dazu an, daß $x \in T\langle\alpha_1,\beta_1\rangle$ oder $\rho_n(x) \in T\langle\alpha,\beta\rangle$ gilt. Für $l(x) \leq 1$ ist die Behauptung klar. Sei nun $x = x_1x_2$ mit $0 < l(x_i) < l(x)$ für $i \in \{1,2\}$. Dann gibt es $y_i \in M\langle\alpha,\beta\rangle$ mit $\rho_n(x_1) = y_1\alpha^n$ sowie $\rho_n(x_2) = \alpha^n y_2$, und es folgt $\rho_n(x) = y_1\alpha^n y_2$ aus Lemma 4.5.a. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $y_1\alpha^n = x_1\alpha^n$ und $\alpha^n y_2 = x_2\alpha^n$ in Trans(w). Wir interpretieren nun

$$x\alpha^n = x_1x_2\alpha^n = x_1\alpha^n y_2 = y_1\alpha^n y_2 = \rho_n(x)$$

in Trans(w) und unterscheiden zwischen $x \in T\langle\alpha_1,\beta_1\rangle$ und $\rho_n(x) \in T\langle\alpha,\beta\rangle$. Im ersten Fall folgt $\rho_n(x) \in T\langle\alpha,\beta\rangle$, da $x_t \leq (\alpha^n)_s$. Im zweiten Fall impliziert $\rho_n(x) = x\alpha^n$ sofort $x \in T\langle\alpha_1,\beta_1\rangle$. Damit ist die Behauptung vollständig gezeigt.

(4.8) Lemma. *Sei* (α,β) *ein einfaches Paar in* Trans(w) *und* $(\alpha_1,\beta_1) = r(\alpha,\beta)$.

(a) *Sei* $x \in T\langle\alpha,\beta\rangle$. *Dann gibt es ein* $x' \in \alpha\beta T\langle\alpha,\beta\rangle\beta\alpha$ *mit* $x' \neq 0$ *und* $x' \in T\langle\alpha,\beta\rangle x T\langle\alpha,\beta\rangle$.

(b) *Für* $x \in \alpha_1 M\langle\alpha_1,\beta_1\rangle\alpha_1$ *sind* $x \in T\langle\alpha_1,\beta_1\rangle$ *und* $\rho(x) \in T\langle\alpha,\beta\rangle$ *äquivalent; in diesem Fall gilt* $\rho(x) = x$ *in* Trans(w).

Beweis.

(a) Hat $x \in T\langle\alpha,\beta\rangle$ die Form $x = \beta y$ für ein $y \in T\langle\alpha,\beta\rangle$, so gilt $\alpha\beta y \neq 0$ wegen $\beta_s \leq \alpha_t$. Vollkommen analog implizieren $x = y\beta$, $x = \alpha^2 y$ bzw. $x = y\alpha^2$ für ein $y \in T\langle\alpha,\beta\rangle$, daß $y\beta\alpha \neq 0$, $\alpha\beta\alpha^2 y \neq 0$ bzw. $y\alpha^2\beta\alpha \neq 0$ gilt. Daraus folgt die Behauptung.

(b) Sei $x \in \alpha_1 M\langle\alpha_1,\beta_1\rangle\alpha_1$ und $x \in T\langle\alpha_1,\beta_1\rangle$ oder $\rho(x) \in T\langle\alpha,\beta\rangle$. Wähle $x' \in \alpha_1 M\langle\alpha_1,\beta_1\rangle\alpha_1$ mit maximaler Länge $l(x')$, so daß $\rho(x') = x' \neq 0$ in Trans(w) gilt und ein $x_1 \in M\langle\alpha_1,\beta_1\rangle$ mit $x = x'x_1$ existiert. Wir zeigen nun $x = x'$. Sei zunächst $x_1 \in \alpha_1 M\langle\alpha_1,\beta_1\rangle$ angenommen. Dann gilt $x'\alpha_1 = \rho(x')\alpha\beta\alpha = \rho(x'\alpha_1)$ im Widerspruch zur Maximalität von $l(x')$. Sei also $x_1 \in \beta_1 M\langle\alpha_1,\beta_1\rangle$. Dann ist $x_1 \in \beta_1\alpha_1 M\langle\alpha_1,\beta_1\rangle$. Es gilt $x'\beta_1\alpha_1 = \rho(x')\beta\alpha = \rho(x'\beta_1\alpha_1)$, denn für $y \in$ Fac(w) mit $y \leq (\alpha_1)_t \cap (\beta_1\alpha_1)_s$ gilt $y\beta_1\alpha_1 = y\beta\alpha$. Somit ist $x = x'$ wegen der Maximalität von $l(x')$ gezeigt.

(4.9) Satz. *Seien* (α,β) *und* (α_1,β_1) *einfache Paare in* Trans(w) *und sei* m_1 *maximal für* (α_1,β_1).

(a) *Sei* $(\alpha_1,\beta_1) = r_n(\alpha,\beta)$. *Dann ist* $m = \rho_n(m_1)$ *maximal für* (α,β).

(b) *Sei* $(\alpha_1,\beta_1) = r(\alpha,\beta)$. *Dann ist* $m = \rho(m_1)$ *maximal für* (α,β).

Beweis.

(a) Zunächst ist $m = \rho_n(m_1) \in T\langle\alpha,\beta\rangle$ nach Lemma 4.7. Sei nun $x \in T\langle\alpha,\beta\rangle$, so ist $m \in T\langle\alpha,\beta\rangle x T\langle\alpha,\beta\rangle$ zu zeigen. Sei $x = \alpha^{n_1}\beta\alpha^{n_2}\beta\ldots\beta\alpha^{n_r}$. Es reicht, die Behauptung für $x' = \alpha^{m_1}\beta\alpha^{n_2}\beta\ldots\beta\alpha^{n_r-1}\beta\alpha^{m_r}$ mit $m_i = \max(n_i,n)$ für $i \in \{1,r\}$ zu zeigen, denn es ist $x' \in T\langle\alpha,\beta\rangle x T\langle\alpha,\beta\rangle$ und $x' \neq 0$ wegen $(\alpha^{m_1})_t \cap \beta_s = (\alpha^{n_1})_t \cap \beta_s$ und $\beta_t \cap (\alpha^{m_r})_s = \beta_t \cap (\alpha^{n_r})_s$. Nun gilt $x' = \rho_n(y)$ für $y = \alpha_1{}^{m_1-n}\beta_1\alpha_1{}^{n_2-n}\beta_1\ldots\beta_1\alpha_1{}^{m_r-n}$. Nach Lemma 4.7 ist $y \in T\langle\alpha_1,\beta_1\rangle$, und wegen der Maximalität von m_1 gibt es $y_1, y_2 \in T\langle\alpha_1,\beta_1\rangle$ mit $m_1 = y_1 y y_2$. Dann folgt $m = \rho_n(m_1) = \rho_n(y_1)\alpha^{-n}x'\alpha^{-n}\rho_n(y_2)$ nach Lemma 4.6.a, wobei $\rho_n(y_1)\alpha^{-n}, \alpha^{-n}\rho_n(y_2) \in T\langle\alpha,\beta\rangle$ gilt. Damit ist die Behauptung bewiesen.

(b) Offensichtlich ist $m_1 \in \alpha_1 T\langle\alpha_1,\beta_1\rangle\alpha_1$, d.h. $m = \rho(m_1) \in T\langle\alpha,\beta\rangle$ ist klar nach Lemma 4.8.b. Sei nun $x \in T\langle\alpha,\beta\rangle$, so ist $m \in T\langle\alpha,\beta\rangle x T\langle\alpha,\beta\rangle$ zu zeigen. Nach Lemma 4.8.a existiert $x' \in \alpha\beta T\langle\alpha,\beta\rangle\beta\alpha$ mit $0 \neq x' \in T\langle\alpha,\beta\rangle x T\langle\alpha,\beta\rangle$. Sei $x' = \alpha\beta\alpha^{n_1}\beta\ldots\beta\alpha^{n_r}\beta\alpha$, so gilt $x' = \rho(y)$ für $y = \alpha_1\beta_1^{m_1}\alpha_1\beta_1{}^{m_2}\ldots\beta_1{}^{m_r}\alpha_1$ mit $m_i = 1$, falls $n_i = 1$, und $m_i = 0$, falls $n_i = 2$ $(1 \leq i \leq r)$. Nach Lemma 3.8.b ist $y \in T\langle\alpha_1,\beta_1\rangle$, und wegen der Maximalität von m_1 gibt es $y_1, y_2 \in T\langle\alpha_1,\beta_1\rangle$ mit $m_1 = y_1 y y_2$. Dann folgt $m = \rho(m_1) = \rho(y_1)x'\rho(y_2)$, wobei $\rho(y_i) \in T\langle\alpha,\beta\rangle$ für $i \in \{1,2\}$ nach Lemma 4.6.c gilt. Damit ist die Behauptung gezeigt.

(4.10) Sei für den Rest des Kapitels $M = M\langle\alpha,\beta\rangle$, $D = D\langle\alpha,\beta\rangle$ und seien durch die Festsetzung $\alpha_1 = \alpha$, $\beta_1 = \beta$ die Abbildungen ρ und ρ_n auf M definiert. Es sei außerdem

$$\delta_n\colon M\langle\alpha,\beta\rangle \longrightarrow G\langle\alpha,\beta\rangle$$

die multiplikative Fortsetzung der folgendermaßen auf $\{\alpha,\beta\}$ erklärten Abbildung:

$$\delta_n(\alpha) = \alpha^n\beta\alpha, \quad \delta_n(\beta) = \alpha^{-1}.$$

Lemma. *Sei* $x \in D$ *und* $n \in \mathbb{N}_0$.

(a) *Es gilt* $\rho_n\rho(x) = \delta_{n+1}(x)\alpha^n$.

(b) *Seien $a, b, y \in D$ mit $y = axb$. Dann existieren $a', b' \in D$ mit $\delta_{n+1}(y) = a'\rho_n\rho(x)b'$.*

Beweis.

(a) Sei $x = \alpha^{n_1}\beta \dots \beta\alpha^{n_r} \in D$. Dann folgt die Behauptung unmittelbar durch Induktion nach r.

(b) Wähle $a' = \delta_{n+1}(a)$, $b' = \alpha^{-n}\delta_{n+1}(b)$ und benutze Teil (a).

(4.11) Seien $n_0, n_1, \dots, n_t \in \mathbb{N}_0$, so definiere

$$c(n_0) = \alpha^{n_0} \quad \text{und} \quad c(n_0, n_1, \dots, n_t) = \delta_{n_t} \dots \delta_{n_2}\delta_{n_1}(\alpha^{n_0}), \quad \text{falls} \quad t \geq 1.$$

Seien nun $n_0, n_1, \dots, n_t$ aus $\mathbb{N}$ fest gewählt mit $t \geq 2$, so benutzen wir folgende Notation: $c = c(n_0, n_1, \dots, n_t)$, $a = c(1, n_2, \dots, n_t)$, $b = c(1, n_2 - 1, n_3, \dots, n_t)$ und $p = l(a^{n_1}b)$, $q = l(a)$.

Lemma. *Seien $n_0, n_1, \dots, n_t \in \mathbb{N}$ und $t \geq 2$. Dann gilt*

(a) $c = (a^{n_1}b)^{n_0}$,

(b) $ab \in Ma$ *und*

(c) $a \in b(\beta\alpha)^{-1}M$.

Beweis. Die Behauptungen folgen unmittelbar durch Induktion nach t wegen der Multiplikativität von δ_n.

Satz. *Seien $n_0, n_1, \dots, n_t \in \mathbb{N}$ und sei für $n \in \mathbb{N}$*

$$T_n = \{\, x \in M \mid c(n_0, n_1, \dots, n_t) \in MxM,\ l(x) = n \,\}.$$

Dann gilt $\operatorname{card} T_n \leq n + 1$.

Beweis. Wir beweisen durch Induktion nach t. Für $t \leq 1$ ist die Behauptung klar, und es sei daher $t > 1$. Wir benutzen lediglich die in den Teilen (a), (b) und (c) des Lemmas angegebenen Eigenschaften von c. Nach (a) und (b) existieren $a_i \in M$ für $1 \leq i \leq p - q$ mit $c \in Ma_ia$ und $l(a_i) = i$. Für $0 \leq i \leq p - q$ sei $b_i \in M$ mit $c \in b_iM$ und $l(b_i) = i$. Zudem sei $b_{-1} = \alpha^{-1}$.

1. $n < p$.

Sei $x \in M$ mit $c \in MxM$ und $l(x) = n$. Dann gibt es nach (a) $x_1, x_2 \in M$ mit $a^{n_1}ba^{n_1}b = x_1xx_2$, wobei ohne Einschränkung $l(x_1) < p$ gilt. Es folgt eine Fallunterscheidung für

$l(x_1)$. Falls $l(x_1) \geq p - q$, ist $a^m \in MxM$ für $m = n_1 + 2$ wegen (b) und (c). Falls $l(x_1 x) \leq p-2$, ist ebenso $a^m \in MxM$ wegen (c). Andernfalls ist $n \geq q$ und x hat die Form $a_i a b_{n-q-i}$ für ein $i \in \{1, \ldots, n-q+1\}$. Nach Induktionsannahme folgt $\operatorname{card} T_n \leq n+1$ für $n < q$, da $a^m = c(m, n_2, \ldots, n_t)$. Für $n \geq q$ beachte, daß a^m ein q-periodisches Wort ist und daher $\operatorname{card}\{\, x \in M \mid a^m \in MxM,\ l(x) = n \,\} \leq q$ gilt. Daher folgt $\operatorname{card} T_n \leq q + (n-q+1) = n+1$.

2. $n \geq p$.

Nach (a) ist c ein p-periodisches Wort. Daher ist $\operatorname{card} T_n \leq p < n+1$.

Beweis von Satz 4.1. Sei (α, β) einfach. Dann existieren $n_1, \ldots, n_t \in \mathbb{N}_0$ nach Lemma 4.4, so daß $(\alpha_1, \beta_1) = r_{n_t} r \ldots r r_{n_1}(\alpha, \beta)$ minimal ist. Weiter gibt es nach Lemma 4.5 ein $s \in \mathbb{N}$, so daß $\alpha_1(\alpha_1\beta_1\alpha_1)^s\alpha_1$ oder $(\alpha_1\beta_1\alpha_1)^s$ maximal ist für (α_1, β_1). Folgend der Konvention in 4.2 fassen wir $T\langle\alpha, \beta\rangle = \langle\alpha, \beta\rangle \setminus \{0\}$ als Teilmenge von $M = M\langle\alpha, \beta\rangle$ auf. Insbesondere ist

$$\operatorname{rad}^n\langle\alpha, \beta\rangle \setminus \operatorname{rad}^{n+1}\langle\alpha, \beta\rangle \subseteq \{\, x \in M \mid l(x) = n \,\}.$$

Sei nun m maximal für (α, β). Wir kombinieren die Formeln aus Satz 4.9 für die rekursive Berechnung von m mit Lemma 4.10 und erhalten $c(s+2, n_1+1, n_2+1, \ldots, n_t+1) \in MmM$. Damit folgt die Behauptung unmittelbar aus Satz 4.11.

5 Reduzierbare Paare von Endomorphismen

In diesem Kapitel werden die Beweise der beiden Theoreme abgeschlossen. Wir werden jedem reduzierbaren Paar (α, β) ein zweites Paar (α_0, β_0) von Transformationen zuordnen und fassen (α, β) auf als durch vier ganzzahlige Parameter bestimmte Erweiterung $(\alpha, \beta) = e(\alpha_0, \beta_0; i, j, p, q)$. Zunächst beweisen wir den Teil (a) des Theorem 1. Für sogenannte schwach reduzierbare Paare verwenden wir die Ergebnisse des vorangegangenen Kapitels, während stark reduzierbare Paare aus bestimmten Gründen gesondert betrachtet werden müssen. Der Beweis von Teil (b) basiert auf der für den Teil (a) bereits geleisteten Arbeit.

(5.1) Sei w ein Wort in Q. Die Menge $\operatorname{Trans}(w) \setminus \{0\}$ ist *halbgeordnet* vermöge

$$(\alpha_s, \alpha_t) \leq (\beta_s, \beta_t) \iff \alpha_s \leq \beta_s \text{ und } \alpha_t = \alpha_s\beta$$

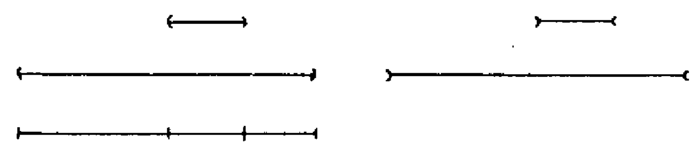
für zwei Transformationen $\alpha, \beta \in \operatorname{Trans}(w) \setminus \{0\}$. Gilt $\alpha \leq \beta$, so sei $(\alpha_s)_{\beta_s} = (x, a, y) \in \operatorname{Fac}(\pi(\beta_s))$ mit $i = |x|$ und $j = |y|$. Dann heißt $\beta = e(\alpha, i, j)$ die *Erweiterung* von α mit i

und j. Die Erweiterung ist durch das Tripel (α, i, j) eindeutig bestimmt.

α

$\beta = e(\alpha, i, j)$

$(\alpha_s)_{\beta_s}$



(5.2) Sei das Paar (α, β) aus $\mathrm{End}(w)$ reduzierbar und sei $a = \alpha\beta\alpha$. Dann liegen

$$\alpha_0 = (a_t\alpha^{-1} \cup a_s, a_t \cup a_s\alpha), \quad \beta_0 = (a_s\alpha, a_t\alpha^{-1})$$

in $\mathrm{Trans}(w)$. Das Paar (α_0, β_0) heißt das zu (α, β) gehörende *reduzierte Paar*. Es gilt $\alpha_0 \leq \alpha$ und $\beta_0 \leq \beta$. Darüber hinaus ist (α_0, β_0) ein einfaches Paar, wenn $\alpha_0{}^2 \neq 0$ gilt. Seien $i, j, p, q \in \mathbb{N}_0$ mit $\alpha = e(\alpha_0, i, j)$ und $\beta = e(\beta_0, p, q)$, so schreiben wir $(\alpha, \beta) = e(\alpha_0, \beta_0; i, j, p, q)$. Wir nennen (α, β) ***stark reduzierbar***, falls $\max(p, q) > \|\beta\|$ oder $\max(i, j) > 2\|\alpha\|$ gilt. Andernfalls heißt (α, β) *schwach reduzierbar*. In 6.2 und 6.3 sind konkrete Beispiele angegeben.

(5.3) Lemma. *Sei das Paar* (α, β) *in* $\mathrm{End}(w)$ *reduzierbar und sei* $(\alpha, \beta) = e(\alpha_0, \beta_0; i, j, p, q)$. *Es seien* $\alpha, \beta \notin \mathrm{rad}^2\,\mathrm{End}(w)$. *Dann gilt:*

(a)	$\min(i, p) = 0$.	(a')	$\min(j, q) = 0$.
(b)	$q \geq \|\beta\|$, *falls* $i > \|\alpha\|$.	(b')	$p \geq \|\beta\|$, *falls* $j > \|\alpha\|$.
(c)	$j \geq \|\alpha\|$, *falls* $p > \|\beta\|$.	(c')	$i \geq \|\alpha\|$, *falls* $q > \|\beta\|$.

Beweis.

(a) Sei $m = \min(i, p)$. Dann ist $e(\alpha_0\beta_0\alpha_0, m, 0) \leq \alpha\beta\alpha$, und wegen $\alpha_0\beta_0\alpha_0 = \alpha\beta\alpha$ gilt $m = 0$.

(b) Angenommen, es sei $i > \|\alpha\|$ und $q < \|\beta\|$. Dann ist $\beta_t \ll \alpha_t$, und nach Lemma 3.9 gilt $\beta \in \mathrm{rad}^2\,\mathrm{End}(w)$. Widerspruch.

(c) Angenommen, es sei $p > \|\beta\|$ und $j < \|\alpha\|$. Dann ist $\alpha_t \ll \beta_s$, und nach Lemma 3.9 gilt $\alpha \in \mathrm{rad}^2\,\mathrm{End}(w)$. Widerspruch.

(a') - (c') sind die zu (a) - (c) symmetrischen Aussagen.

(5.4) Lemma. *Sei das Paar* (α, β) *in* $\mathrm{End}(w)$ *reduzierbar und sei* (α_0, β_0) *das zugehörige reduzierte Paar.*

(a) *Sei* $\|\beta\| < \|\alpha\|$. *Dann ist* $\alpha_0{}^2 = 0$.

(b) *Sei* $\alpha_0{}^2 = 0$. *Dann gibt es ein* $r \in \mathrm{N}$, *so daß* $(\alpha_0\beta_0)^r\alpha_0$ *für* (α_0, β_0) *maximal ist. Insbesondere ist* $\mathrm{card}(\mathrm{rad}^n(\alpha_0, \beta_0) \setminus \mathrm{rad}^{n+1}(\alpha_0, \beta_0)) \leq n + 1$.

Beweis.

(a) Nach der Definition in 3.2 gilt $\beta^2 = 0$, und die Definition von α_0 liefert dann $\alpha_0{}^2 = 0$.

(b) Die Behauptung folgt unmittelbar aus den Definitionen von α_0 und β_0.

(5.5) Lemma. *Sei das Paar* (α, β) *in* $\mathrm{End}(w)$ *reduzierbar und sei* (α_0, β_0) *das zugehörige reduzierte Paar. Sei* $x = \alpha^{n_1}\beta \ldots \beta\alpha^{n_r} \in \langle\alpha, \beta\rangle$ *mit* $n_i \in \mathrm{N}_0$ $(1 \leq i \leq r)$, *und sei* $0 \neq y \in \mathrm{Trans}(w)$ *mit* $y \leq x$ *und*

$$y_s \leq \begin{cases} (\alpha_0)_s & n_1 \neq 0, \\ (\beta_0)_s & n_1 = 0, \end{cases} \quad y_t \leq \begin{cases} (\alpha_0)_t & n_r \neq 0, \\ (\beta_0)_t & n_r = 0. \end{cases}$$

Dann gilt $x_0 = \alpha_0{}^{n_1}\beta_0 \ldots \beta_0\alpha_0{}^{n_r} \neq 0$ *und* $y \leq x_0$ *sowie* $l(x_0) \leq l(x)$.

Beweis. Wir zeigen die Behauptung durch Induktion nach r. Der Fall $r \leq 2$ ist klar. Sei also $r > 2$. Dann ist $n_{r-1} \geq 1$. Nach den Voraussetzungen an y_s und y_t sowie wegen $\alpha\beta\alpha = \alpha_0\beta_0\alpha_0$ gilt

$$z = y_s(\alpha^{n_1}\beta \ldots \alpha^{n_{r-1}}) = y_t(\beta\alpha^{n_r})^{-1} \leq (\alpha_0)_t \cap (\beta_0)_s.$$

Aus der Induktionsannahme, angewandt auf $y_1 = (y_s, z)$ und $y_2 = (z, y_t)$, ergibt sich $z = y_s(\alpha_0{}^{n_1}\beta_0 \ldots \alpha_0{}^{n_{r-1}}) = y_t(\beta_0\alpha_0{}^{n_r})^{-1}$. Damit folgt $x_0 \neq 0$ und $y = y_1y_2 \leq x_0$. Lemma 4.2.b. übertragen auf (α_0, β_0), zeigt $l(x_0) = (\sum_i n_i) + (r-1)$ für die Länge in $\langle\alpha_0, \beta_0\rangle$. Für die Länge in $\langle\alpha, \beta\rangle$ ist $(\sum_i n_i) + (r-1) \leq l(x)$ klar, und damit ist das Lemma vollständig gezeigt.

(5.6) Lemma. *Sei das Paar* (α, β) *in* $\mathrm{End}(w)$ *reduzierbar und sei* $(\alpha, \beta) = e(\alpha_0, \beta_0; i, j, p, q)$. *Seien weiter* $m, n \in \mathrm{N}_0$ *und* $x \in \langle\alpha, \beta\rangle$.

(a) *Seien* $p = q = 0$ *und* $i \leq m\|\alpha\|$, $j \leq n\|\alpha\|$. *Dann existieren* $r, s \in \mathrm{N}_0$ *und* $x_0 \in \langle\alpha_0, \beta_0\rangle$ *mit* $x = \alpha^r x_0 \alpha^s$ *und* $r \leq m$, $s \leq n$. *Dabei gilt* $l(x) \geq l(x_0) + r + s$.

(b) *Seien* $i = j = 0$ *und* $p \leq m\|\beta\|$, $q \leq n\|\beta\|$. *Dann existieren* $r, s \in \mathrm{N}_0$ *und* $x_0 \in \langle\alpha_0, \beta_0\rangle$ *mit* $x = \beta^r x_0 \beta^s$ *und* $r \leq n$, $s \leq m$. *Dabei gilt* $l(x) \geq l(x_0) + r + s$.

(c) *Seien* $j = p = 0$ *und* $i \leq m\|\alpha\|$, $q \leq n\|\beta\|$ *sowie* $\|\beta\| \geq \|\alpha\|$. *Dann existieren* $r \in \mathrm{N}_0$ *und* $x_0 \in \langle\alpha_0, \beta_0\rangle$ *mit* $x = \alpha^r x_0$ *und* $r \leq m$, *oder es ist* $x = \beta^r x_0$ *und* $r \leq n$. *Dabei gilt* $l(x) \geq l(x_0) + r$.

(c') *Seien $i = q = 0$ und $j \leq m\|\alpha\|$, $p \leq n\|\beta\|$ sowie $\|\beta\| \geq \|\alpha\|$. Dann existieren $r \in \mathrm{N}_0$ und $x_0 \in \langle\alpha_0, \beta_0\rangle$ mit $x = x_0\alpha^r$ und $r \leq m$, oder es ist $x = x_0\beta^r$ und $r \leq n$. Dabei gilt $l(x) \geq l(x_0) + r$.*

Beweis.

(a) Falls $x \in \langle\alpha\rangle$, ist die Behauptung klar. Andernfalls wähle $r, s \in \mathrm{N}_0$ und $x' \in \langle\alpha, \beta\rangle$ mit $x = \alpha^r x' \alpha^s$, so daß r und s minimal sind bezüglich

$$x_s\alpha^r \leq \begin{cases} (\alpha_0)_s & x' \in \alpha\langle\alpha, \beta\rangle, \\ (\beta_0)_s & x' \in \beta\langle\alpha, \beta\rangle, \end{cases} \qquad x_t\alpha^{-s} \leq \begin{cases} (\alpha_0)_t & x' \in \langle\alpha, \beta\rangle\alpha, \\ (\beta_0)_t & x' \in \langle\alpha, \beta\rangle\beta. \end{cases}$$

Nach den Voraussetzungen an i und j ist $r \leq m$ und $s \leq n$. Außerdem gilt $l(x) \geq r + l(x') + s$. Die Behauptung folgt nun aus Lemma 5.5, angewandt auf $y = (x_s\alpha^r, x_t\alpha^{-s}) \leq x'$.

(b) Zunächst gilt $\|\beta\| \geq \|\alpha\|$. Wegen $i = j = 0$ ist nämlich $\alpha = \alpha_0$. Angenommen, es sei $\|\beta\| < \|\alpha\|$. Dann gilt $\alpha^2 = {\alpha_0}^2 = 0$ nach Lemma 5.4.a. Dies widerspricht der Reduzierbarkeit von (α, β), so daß $\|\beta\| \geq \|\alpha\|$ gezeigt ist. Der Beweis von Teil (a) überträgt sich nun durch Vertauschen von α und β.

(c) Falls $x \in \langle\alpha\rangle \cup \langle\beta\rangle$, ist die Behauptung klar. Andernfalls beachte zunächst, daß $\beta_t \cap \alpha_s \leq (\alpha_0)_s$ und $\alpha_t \cap \beta_s \leq (\beta_0)_s$ gilt. Deshalb existieren $x_1 \in \langle\alpha\rangle \cup \langle\beta\rangle$ und $x' \in \langle\alpha, \beta\rangle$ mit

$$x = x_1 x' \text{ und } x_s x_1 \leq \begin{cases} (\alpha_0)_s & x' \in \alpha\langle\alpha, \beta\rangle, \\ (\beta_0)_s & x' \in \beta\langle\alpha, \beta\rangle. \end{cases}$$

Sei $x_1 = \alpha^r$ oder $x_1 = \beta^r$ und r minimal gewählt, so gilt $r \leq m$ bzw. $r \leq n$. Außerdem gilt $l(x) \geq r + l(x')$. Die Behauptung folgt nun aus Lemma 5.5, angewandt auf $y = (x_s x_1, x_t) \leq x'$.

(c') Die Aussage ist symmetrisch zu der in (c).

(5.7) **Lemma.** *Seien $\alpha, \beta \in \operatorname{rad}\operatorname{End}(w) \setminus \operatorname{rad}^2\operatorname{End}(w)$ und sei (α, β) reduzierbar mit $(\alpha, \beta) = e(\alpha_0, \beta_0; i, j, p, q)$. Weiter sei $n \in \mathrm{N}$ und für $a, b \in \langle\alpha, \beta\rangle$ sei*

$$M_n(a, b) = \{\, axb \in \operatorname{Trans}(w) \mid x \in \langle\alpha_0, \beta_0\rangle,\ l(x) + l(a) + l(b) < n \,\}.$$

(a) *Sei $\|\beta\| < \|\alpha\|$. Dann gilt*

$$\langle\alpha, \beta\rangle \setminus \operatorname{rad}^n\langle\alpha, \beta\rangle \subseteq \{\, \alpha^{r_1}\beta(\alpha\beta)^s\alpha^{r_2} \in \operatorname{Trans}(w) \mid r_i, s \in \mathrm{N}_0,\ r_i \leq 2,\ r_1 + 1 + 2s + r_2 < n \,\}$$
$$\cup\{\, \alpha^r \mid 0 \leq \min(3, n-1) \,\} \quad \textit{und}$$

$\operatorname{card}(\langle\alpha, \beta\rangle \setminus \operatorname{rad}^n\langle\alpha, \beta\rangle) \leq 3n + 1.$

(b) *Seien* $p = q = 0$ *und* $\max(i,j) \leq \|\alpha\|$. *Dann gilt*

$$\langle\alpha,\beta\rangle \setminus \mathrm{rad}^n\langle\alpha,\beta\rangle \subseteq M_n(1,1) \cup M_n(\alpha,1) \cup M_n(1,\alpha) \cup M_n(\alpha,\alpha) \quad \textit{und}$$
$$\mathrm{card}(\langle\alpha,\beta\rangle \setminus \mathrm{rad}^n\langle\alpha,\beta\rangle) \leq 2n^2 - 2n + 1.$$

(c) *Seien* $i = j = 0$ *und* $\max(p,q) \leq \|\beta\|$. *Dann gilt*

$$\langle\alpha,\beta\rangle \setminus \mathrm{rad}^n\langle\alpha,\beta\rangle \subseteq M_n(1,1) \cup M_n(\beta,1) \cup M_n(1,\beta) \cup M_n(\beta,\beta) \quad \textit{und}$$
$$\mathrm{card}(\langle\alpha,\beta\rangle \setminus \mathrm{rad}^n\langle\alpha,\beta\rangle) \leq 2n^2 - 2n + 1.$$

(d) *Seien* $j = p = 0$, $i \leq 2\|\alpha\|$ *und* $q \leq \|\beta\|$. *Dann gilt*

$$\langle\alpha,\beta\rangle \setminus \mathrm{rad}^n\langle\alpha,\beta\rangle \subseteq M_n(1,1) \cup M_n(\alpha,1) \cup M_n(\beta,1) \cup M_n(\alpha^2,1) \quad \textit{und}$$
$$\mathrm{card}(\langle\alpha,\beta\rangle \setminus \mathrm{rad}^n\langle\alpha,\beta\rangle) \leq 2n^2 - 2n + 1.$$

(d') *Seien* $i = q = 0$, $j \leq 2\|\alpha\|$ *und* $p \leq \|\beta\|$. *Dann gilt*

$$\langle\alpha,\beta\rangle \setminus \mathrm{rad}^n\langle\alpha,\beta\rangle \subseteq M_n(1,1) \cup M_n(1,\alpha) \cup M_n(1,\beta) \cup M_n(1,\alpha^2) \quad \textit{und}$$
$$\mathrm{card}(\langle\alpha,\beta\rangle \setminus \mathrm{rad}^n\langle\alpha,\beta\rangle) \leq 2n^2 - 2n + 1.$$

Beweis.

(a) Nach der Definition in 3.1 gilt $\beta^2 = 0$. Deshalb ist $\max(p,q) < \|\beta\|$. Da $\alpha,\beta \notin \mathrm{rad}^2\,\mathrm{End}(w)$, ist außerdem nach Lemma 5.3 $\max(i,j) \leq \|\alpha\|$. Es folgt eine Fallunterscheidung:

1. $p = q = 0$.

Die Behauptung folgt aus Lemma 5.6.a und Lemma 5.4.

2. $p \neq 0$.

Nach Lemma 5.3.a ist $i = 0$. Daher gilt $\alpha_t \cap \beta_s = (\alpha_0)_t \cap \beta_s$, und es folgt $\alpha^2\beta = \alpha_0{}^2\beta = 0$ nach Lemma 5.4.a. Außerdem implizieren $i = 0$, $j \leq \|\alpha\|$ und $\alpha_0{}^2 = 0$, daß $\alpha^3 = 0$ gilt. Damit folgt unmittelbar die Behauptung.

3. $q \neq 0$.

Dieser Fall ist symmetrisch zum vorangegangenen.

Für (b) - (d') ergibt sich die Beschreibung von $\langle\alpha,\beta\rangle \setminus \mathrm{rad}^n\langle\alpha,\beta\rangle$ aus Lemma 5.6. Das Paar (α_0,β_0) ist einfach oder es gilt $\alpha_0{}^2 = 0$. Daher erhalten wir aus Satz 4.1 und Lemma 5.4 die Abschätzung $\mathrm{card}\, M_n(a,b) \leq m^2/2 + m/2$ für $m = n - l(a) - l(b)$. Dies mehrfach angewandt liefert die Abschätzung von $\mathrm{card}(\langle\alpha,\beta\rangle \setminus \mathrm{rad}^n\langle\alpha,\beta\rangle)$.

Jedes schwach reduzierbare Paar (α,β) erfüllt eine der Voraussetzungen des vorangegangenen Lemmas, so daß wir das folgende Ergebnis festhalten können:

Satz. *Seien* $\alpha,\beta \in \operatorname{rad}\operatorname{End}(w) \setminus \operatorname{rad}^2\operatorname{End}(w)$ *und sei* (α,β) *schwach reduzierbar. Dann gilt für* $n \in \mathbb{N}$

$$\operatorname{card}(\langle\alpha,\beta\rangle \setminus \operatorname{rad}^n\langle\alpha,\beta\rangle) \leq 2n^2 - 2n + 1.$$

Bemerkung. Seien $\alpha,\beta \in \operatorname{rad}\operatorname{End}(w)\setminus\operatorname{rad}^2\operatorname{End}(w)$ und sei (α,β) stark reduzierbar. Dann ist es im allgemeinen nicht möglich, $\operatorname{card}(\langle\alpha,\beta\rangle \setminus \operatorname{rad}^n\langle\alpha,\beta\rangle)$ durch ein Polynom vom Grad 2 abzuschätzen (vergleiche Beispiel 6.2). Lemma 5.6.c bzw. 5.6.c' liefern jedoch die Abschätzung $\operatorname{card}(\langle\alpha,\beta\rangle \setminus \operatorname{rad}^n\langle\alpha,\beta\rangle) \leq 1/3\, n^3 + n^2 + 2/3\, n$.

(5.8) **Satz.** *Sei die Faktoralgebra* $A = k\operatorname{End}(w)/I$ *von zwei Elementen erzeugt. Angenommen, für je zwei Endomorphismen* $\alpha,\beta \in \operatorname{rad}\operatorname{End}(w) \setminus \operatorname{rad}^2\operatorname{End}(w)$, *deren Nebenklassen* $\bar\alpha = \alpha + I$ *und* $\bar\beta = \beta + I$ *die Algebra* A *erzeugen, sei* (α,β) *oder* (β,α) *stark reduzierbar. Seien* $\alpha,\beta \in \operatorname{rad}\operatorname{End}(w) \setminus \operatorname{rad}^2\operatorname{End}(w)$ *derart gewählt, daß* (α,β) *stark reduzierbar ist und* $\{\bar\alpha,\bar\beta\}$ *die Algebra* A *erzeugt, dann gilt* $\bar\alpha\bar\beta^{r+1}\bar\alpha = \bar\beta\bar\alpha^r\bar\beta = 0$ *für jedes* $r \in \mathbb{N}$.

Beweis. Angenommen, das stark reduzierbare Paar $(\alpha,\beta) = e(\alpha_0,\beta_0;i,j,p,q)$ erzeugt A. Die Relation $\bar\alpha\bar\beta^{r+1}\bar\alpha = 0$ ergibt sich sofort aus Satz 3.4. Für die zweite Relation folgt eine Fallunterscheidung:

1. $q > \|\beta\|$.

Sei $(n+1)\|\beta\| \geq q > n\|\beta\|$. Zunächst gilt $j = p = 0$ nach Lemma 5.3. Daraus folgt weiter $\beta\alpha = \beta\alpha_0 = \gamma\beta^n$ mit $\gamma = ((\alpha_0)_s\beta^{-1}, (\alpha_0)_t\beta^{-n}) \in \operatorname{End}(w)$. Nach Voraussetzung gibt es paarweise verschiedene $x_l \in \langle\alpha,\beta\rangle$ sowie $\xi_l \in k^*$ $(1 \leq l \leq m)$ mit $\bar\gamma = \sum_l \xi_l \bar x_l$. Dabei ist $x_l \neq \beta$ für alle l, denn sonst würde $\{\bar\alpha,\bar\gamma\}$ die Algebra A erzeugen, obwohl wegen $|\alpha||\gamma| > 0$ weder (α,γ) noch (γ,α) reduzierbar ist. Angenommen, die Behauptung ist falsch, so wähle $r \in \mathbb{N}$ minimal mit $\bar\beta\bar\alpha^r\bar\beta \neq 0$. Es ist $\bar\beta\bar\alpha^r\bar\beta = \sum_l \xi_l \bar x_l \bar\beta^n \bar\alpha^{r-1}\bar\beta$. Wir zeigen nun $x_l\beta^n\alpha^{r-1}\beta \in I$ für jedes l und führen damit die Annahme zum Widerspruch. Falls $r > 1$, ist $x_l\beta^n\alpha^{r-1}\beta \in I$ klar wegen der Minimalität von r. Falls $r = 1$, folgt $x_l\beta^{n+1} \in I$ aus $\alpha\beta^2 = 0$ bzw. $\beta^{n+3} = 0$. Die Relationen $\alpha\beta^2 = 0$ und $\beta^{n+3} = 0$ ergeben sich aus Lemma 5.6.c.

2. $p > \|\beta\|$.

Analog zum 1. Fall.

3. $q \leq \|\beta\|$ und $i > 2\|\alpha\|$.

Zunächst gilt wie im 1. Fall $j = p = 0$ nach Lemma 5.3, und es folgt $\alpha\beta = \alpha\beta_0 = \gamma\alpha^2$ mit $\gamma = ((\beta_0)_s\alpha^{-1}, (\beta_0)_t\alpha^{-2}) \in \mathrm{End}(w)$. Nach Voraussetzung gibt es paarweise verschiedene $x_l \in \langle\alpha,\beta\rangle$ sowie $\xi_l \in k^*$ $(1 \le l \le m)$ mit $\bar\gamma = \sum_l \xi_l \bar x_l$. Dabei ist $x_l \neq \beta$ für alle l, denn sonst würde $\{\bar\alpha, \bar\gamma\}$ die Algebra A erzeugen, obwohl wegen $\gamma^2 = 0$ weder (α,γ) noch (γ,α) stark reduzierbar ist. Angenommen, die Behauptung ist falsch, so wähle $n \in \mathrm{N}_0$ maximal mit $\bar\beta\bar\alpha^r\bar\beta\bar\alpha^n \neq 0$ für ein $r \in \mathrm{N}$. Es ist $\bar\beta\bar\alpha^r\bar\beta\bar\alpha^n = \sum_l \xi_l \bar\beta\bar\alpha^{r-1}\bar x_l\bar\alpha^{n+2}$. Wir zeigen nun $\beta\alpha^{r-1}x_l\alpha^{n+2} \in I$ für jedes l und führen damit die Annahme zum Widerspruch. Falls $r > 1$, folgt $\beta\alpha^{r-1}x_l\alpha^{n+2} \in I$ aus der Maximalität von n bzw. aus $\beta\alpha^{r+2} = \beta\alpha_0{}^{r+2} = 0$. Falls $r = 1$, benutze für $x_l \in \langle\beta\rangle$, daß wegen $q \le \|\beta\|$ $\beta^3 = 0$, also $\beta x_l\alpha^{n+2} = 0$ gilt. Wenn $x_l \notin \langle\beta\rangle$, folgt $\beta x_l\alpha^{n+2} \in I$ wiederum aus der Maximalität von n bzw. aus $\beta\alpha^{r+2} = \beta\alpha^3 = 0$.

4\. $p \le \|\beta\|$ und $j > 2\|\alpha\|$.

Analog zum 3. Fall.

(5.9) *Beweis von Theorem* 1. Zunächst ist nach Satz 2.6, kombiniert mit Lemma 2.7.a die Algebra $k\,\mathrm{End}(w)$ lokal. Sei $A = k\,\mathrm{End}(w)/I$ eine von zwei Elementen erzeugte Faktoralgebra und sei $n \in \mathrm{N}$. Weiterhin seien $\alpha,\beta \in \mathrm{rad}\,\mathrm{End}(w) \setminus \mathrm{rad}^2\,\mathrm{End}(w)$ derart gewählt, daß A von $\{\alpha + I, \beta + I\}$ erzeugt wird.

(a) Nach Lemma 2.7.b gilt

$$\dim_k A/\mathrm{rad}^n A \le \mathrm{card}(\langle\alpha,\beta\rangle \setminus \mathrm{rad}^n\langle\alpha,\beta\rangle).$$

Die Behauptung folgt damit aus den Sätzen 3.1, 5.7 und 5.8 kombiniert mit Lemma 3.12.

(b) Es sei $n > 3$ angenommen. Dann gilt ohne Einschränkung $A \cong \Lambda = k\langle x,y\rangle/(x,y)^4$. Lemma 2.7.b liefert zunächst

$$x_1x_2x_3 \neq 0 \text{ für jedes Tripel } x_i \in \{\alpha,\beta\}\ (i \in \{1,2,3\}).$$

Daher ist nach Satz 3.1 eines der Paare (α,β) oder (β,α) reduzierbar. Sei ohne Einschränkung (α,β) reduzierbar und $(\alpha,\beta) = e(\alpha_0,\beta_0;i,j,p,q)$. Dann gilt

$$0 < p,q \le \|\beta\| \quad \text{und} \quad i = j = 0. \tag{1}$$

Angenommen, $p = 0$, so gilt $\alpha\beta^2 = 0$ wegen $\beta_0{}^2 = 0$ und $\alpha_t \cap \beta_s = \alpha_t \cap (\beta_0)_s$. Also ist $p > 0$. Entsprechend folgt $q > 0$. Den Rest der Teilbehauptung (1) liefert Lemma 5.3. Wir zeigen weiter

$$p > \|\alpha\|. \tag{2}$$

Das Paar (α_0, β_0) ist nämlich einfach, so daß aus (1)

$$|\operatorname{supp}(\alpha)| = |\operatorname{supp}(\alpha_0)| = |\operatorname{supp}(\beta_0)| = 2\operatorname{rg}(\beta_0) + p + q - |\beta_s \cap \beta_t| \tag{3}$$

folgt. Weiter implizieren $\alpha^3 \neq 0$ und $\beta^3 \neq 0$ nach Lemma 2.5

$$|\operatorname{supp}(\alpha)| \geq 3\|\alpha\| \quad \text{und} \quad |\beta_s \cap \beta_t| \geq \|\beta\|. \tag{4}$$

Lemma 4.2 besagt

$$\operatorname{rg}(\beta_0) < \|\alpha\|, \tag{5}$$

und die Teilbehauptung (1) beinhaltet

$$q \leq \|\beta\|. \tag{6}$$

Die Teilbehauptungen (3) - (6) liefern (2). Aus (2) folgt nun $(\alpha\beta\alpha)_s \ll \beta_s$, so daß nach Lemma 3.9 ein $\gamma \in \operatorname{End}(w)$ existiert mit $\alpha\beta\alpha = \beta\gamma$. Diese Relation impliziert

$$\dim_k(\operatorname{rad}^3 A/\operatorname{rad}^4 A) < \dim_k(\operatorname{rad}^3 \Lambda/\operatorname{rad}^4 \Lambda)$$

im Widerspruch zur Annahme $A \cong \Lambda$. Damit ist auch Teil (b) bewiesen.

Beweis von Theorem 2. Zunächst ist nach Satz 2.6 das Monoid $\operatorname{End}(w)$ lokal. Die Teile (a) und (b) erhält man unmittelbar aus denen des Theorem 1, denn jeder surjektive Homomorphismus $\operatorname{End}(w) \to M$ induziert einen surjektiven Homomorphismus $k\operatorname{End}(w) \to kM$ von k-Algebren, wobei sich gerade Kardinalität und k-Dimension bzw. $M\langle x, y\rangle$ und $k\langle x, y\rangle$ entsprechen.

Bemerkung.

(a) Im Beispiel 6.1 geben wir für $n \in \mathbb{N}$ ein Wort w_n an, so daß $\operatorname{End}(w_n)/\operatorname{rad}^n \operatorname{End}(w_n)$ von zwei Elementen erzeugt wird, und $\operatorname{card}(\operatorname{End}(w_n)/\operatorname{rad}^n \operatorname{End}(w_n)) = n^2/2 + n/2 + 1$ gilt.

(b) Das Beispiel 6.3 illustriert den Beweis von Teil (b). Insbesondere zeigt sich, daß die jeweiligen Abschätzungen im Teil (b) von Theorem 1 bzw. Theorem 2 bestmöglich sind. Ist für zwei Endomorphismen $\alpha, \beta \in \operatorname{rad}\operatorname{End}(w) \setminus \operatorname{rad}^2 \operatorname{End}(w)$ das Faktormonoid $\langle\alpha, \beta\rangle/\operatorname{rad}^n\langle\alpha, \beta\rangle$ zu $M\langle x, y\rangle/\operatorname{rad}^n M\langle x, y\rangle$ isomorph, so gilt $n \leq 4$ nach Satz 3.4. Beispiel 6.3 zeigt, daß $n = 4$ möglich ist.

6 Beispiele

Für die folgenden Beispiele sei Q der Köcher mit einem Punkt und zwei Pfeilen , d.h. es sei $Q_1 = \{x, y\}$. Außerdem sei $n \in \mathbb{N}$.

(6.1) **Beispiel.** Sei $w_r = (x^{-1}y)^r x^{-1}$ für $r \in \mathbb{N}_0$ und $w = w_n$. Es seien

$$\alpha_s = (1, w_{n-1}, yx^{-1}), \quad \alpha_t = (x^{-1}y, w_{n-1}, 1),$$

$$\beta_s = (w, 1, 1) \quad \text{und} \quad \beta_t = (1, 1, w).$$

Dann liegen $\alpha = (\alpha_s, \alpha_t)$ und $\beta = (\beta_s, \beta_t)$ in $\mathrm{End}(w)$, und es gilt

$$\mathrm{End}(w) = \{\, \alpha^i \mid 0 \le i \le n \,\} \cup \{\, \alpha^i \beta \alpha^j \mid 0 \le i, j \le n \,\} \cup \{0\},$$

$$\mathrm{End}(w) \setminus \mathrm{rad}^n \mathrm{End}(w) = \{\, \alpha^i \mid 0 \le i < n \,\} \cup \{\, \alpha^i \beta \alpha^j \mid 0 \le i + j < n - 1 \,\},$$

$$\dim_k(k\,\mathrm{End}(w)/\mathrm{rad}^n k\,\mathrm{End}(w)) = \mathrm{card}(\mathrm{End}(w)/\mathrm{rad}^n \mathrm{End}(w)) - 1 = n^2/2 + n/2.$$

Das Paar (α, β) ist einfach, und $r_{n-2}(\alpha, \beta)$ ist minimal, falls $n \ge 2$.

(6.2) **Beispiel.** Sei $v = (x^{-1}y)^n x^{-1}$ und $w = x^{-1}yv^{n+1}$. Es seien

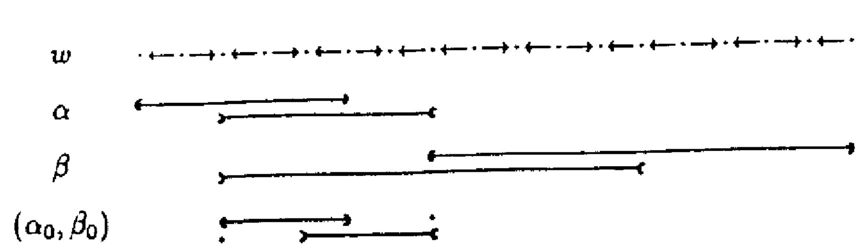
$$\alpha_s = (1, v, yx^{-1}v^n), \quad \alpha_t = (x^{-1}y, v, v^n),$$

$$\beta_s = (x^{-1}yv, v^n, 1) \quad \text{und} \quad \beta_t = (x^{-1}y, v^n, v).$$

Dann liegen $\alpha = (\alpha_s, \alpha_t)$ und $\beta = (\beta_s, \beta_t)$ in $\mathrm{rad}\,\mathrm{End}(w) \setminus \mathrm{rad}^2 \mathrm{End}(w)$, und es gilt

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \beta \rangle &= \{\, \alpha^i \mid 0 \le i \le n + 1 \,\} \cup \{\, \beta^i \alpha^j \beta \alpha^l \mid 0 \le i, j, l \le n \,\} \\ &\quad \cup \{\, \alpha^{n+1} \beta \alpha^i \mid 0 \le i \le n \,\} \cup \{0\}, \\ \langle \alpha, \beta \rangle \setminus \mathrm{rad}^n \langle \alpha, \beta \rangle &= \{\, \alpha^i \mid 0 \le i < n \,\} \cup \{\, \beta^i \alpha^j \beta \alpha^l \mid 0 \le i + j + l < n - 1 \,\}, \\ \mathrm{card}(\langle \alpha, \beta \rangle \setminus \mathrm{rad}^n \langle \alpha, \beta \rangle) &= 1/6\, n^3 + 5/6\, n. \end{aligned}$$

Das Paar (α, β) ist stark reduzierbar, falls $n \ge 2$. Sei (α_0, β_0) das zugehörige reduzierte Paar, so gilt $(\alpha, \beta) = e(\alpha_0, \beta_0; \|\alpha\|, 0, 0, n\|\beta\|)$. Wir wählen zur Illustration $n = 2$.



(6.3) **Beispiel.** Sei $v = x^{-2}yx^{-3}yx^{-3}yx^{-2}$ und $w = v^3$. Es seien

$$\alpha_s = (x^{-2}yx^{-3}yx^{-3}yx^{-1}, x^{-3}yx^{-3}yx^{-3}, yx^{-2}v),$$

$$\alpha_t = (vx^{-2}y, x^{-3}yx^{-3}yx^{-3}, x^{-1}yx^{-3}yx^{-3}yx^{-2}),$$

$$\beta_s = (v, v^2, 1) \quad \text{und} \quad \beta_t = (1, v^2, v).$$

Dann liegen $\alpha = (\alpha_s, \alpha_t)$ und $\beta = (\beta_s, \beta_t)$ in $\operatorname{rad}\operatorname{End}(w) \setminus \operatorname{rad}^2\operatorname{End}(w)$. Sei M das freie Monoid in zwei Erzeugenden, so gilt

$$\langle\alpha, \beta\rangle/\operatorname{rad}^4\langle\alpha, \beta\rangle \cong M/\operatorname{rad}^4 M.$$

Die Menge $I = (\operatorname{End}(w) \setminus \langle\alpha, \beta\rangle) \cup \operatorname{rad}^3\operatorname{End}(w)$ ist ein Ideal in $\operatorname{End}(w)$, und es gilt

$$\operatorname{End}(w)/I \cong M/\operatorname{rad}^3 M.$$

Das Paar (α, β) ist schwach reduzierbar. Sei (α_0, β_0) das zugehörige reduzierte Paar, so gilt $(\alpha, \beta) = c(\alpha_0, \beta_0; 0, 0, \|\beta\| - 1, \|\beta\| - 1)$.

7 Worte und Moduln

(7.1) Sei Q ein Köcher und

$$Q^+ = \{ a_1a_2\ldots a_n \in Q^* \mid a_i \in Q_1 \text{ für alle } i \} \cup \{ e_x \in Q^* \mid x \in Q_0 \}$$

die Menge der *Wege* in Q. Die *Wegealgebra* kQ von Q ist definiert als der k-Vektorraum mit Basis Q^+. Das Produkt zweier Wege in kQ sei deren Kompositum in Q^*, sofern dies erklärt ist; andernfalls sei das Produkt Null.

Zu einem Wort w in Q definieren wir nun den w *assoziierten* kQ-Rechtsmodul $M = M(w)$. Sei M der k-Vektorraum mit Basis $\{ m_i \mid 0 \le i \le |w| \}$. Es reicht, die Multiplikation $m \cdot r$ für $m \in M$ und $r \in kQ$ zu erklären, indem wir uns für m auf die Basiselemente m_i und für r auf die Wege der Länge 0 und 1 beschränken. Sei $w = e_x$ für ein $x \in Q_0$, so setze

$$m_0 \cdot r = \begin{cases} m_0 & r = e_x, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei $w = w_1w_2\ldots w_n$ ein Wort der Länge $n > 0$, so setze

$$m_i \cdot e_x = \begin{cases} m_i & i \ne 0 \text{ und } x = t(w_i), \\ m_0 & i = 0 \text{ und } x = s(w_i), \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \qquad m_i \cdot \alpha = \begin{cases} m_{i+1} & \alpha = w_{i+1}, \\ m_{i-1} & \alpha = w_i^{-1}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir zitieren nun in verallgemeinerter Form ein Ergebnis von Crawley-Boevey:

Satz. *Sei $\Lambda = kQ/I$ eine k-Algebra und w ein Wort im Köcher Q sowie $M(w)$ der assoziierte kQ-Modul. Sei $M(w) \cdot I = 0$ und M der durch $M(w)$ induzierte Λ-Modul. Dann gilt*

$$\mathrm{End}_\Lambda(M) \cong \mathrm{End}_{kQ}(M(w)) \cong k\,\mathrm{End}(w).$$

Beweis. Das Theorem in [C] liefert einen Vektorraumisomorphismus, und die für Endomorphismen in $\mathrm{End}(w)$ erklärte Komposition entspricht unter dem Isomorphismus der Komposition in $\mathrm{End}_{kQ}(M(w))$.

Beweis des Korollar 1. Kombiniere den Satz mit Theorem 1.

8 Literatur

[B] S. Brenner, Decomposition properties of some small diagrams of modules, *Symposia Math.* **13** (1974), 127 - 141.

[BR] M.C.R. Butler und C.M. Ringel, Auslander-Reiten sequences with few middle terms and applications to string algebras, *Comm. Algebra* **15** (1987), 145 - 179.

[C] W.W. Crawley-Boevey, Maps between representations of zero-relation algebras, *J. Algebra* **126** (1989), 259 - 263.

[D] Y.A. Drozd, Tame and wild matrix problems, "Representation Theory II," Lectures Notes in Math., Vol. 832, Springer-Verlag, New York (1980), 242 - 258.

[WW] B. Wald und J. Waschbüsch, Tame Biserial Algebras, *J. Algebra* **95** (1985), 480 - 500.