

Zur Theorie der piezoelektrischen Ultraschallverbundschwinger mit praktischen Schlussfolgerungen für den Entwicklungsingenieur

August 2010

Dr.-Ing E. G. Lierke, tec5 AG, Oberursel

Dr.-Ing W. Littmann, ATHENA Technologie Beratung GmbH, Paderborn

cand.-Ing. D. Simon, Universität Paderborn

Dr.-Ing T. Hemsel, Universität Paderborn

Inhaltsverzeichnis

Kurzfassung	1
Liste der Formelzeichen	2
1 Einleitung.....	5
1.1 Einleitung und Stand der Technik	5
2 Definition eines passiven Wellenleiters und seiner wichtigsten Parameter	7
3 Elektroakustische Vierpolersatzschaltungen stabförmiger Wellenleiter	11
3.1 Eingangsimpedanz und Resonanzbedingung verlustfreier Stabschwinger	14
3.2 Verlustarme Ultraschallwellenleiter bei einseitiger Ankopplung an Flüssigkeiten bzw. Gase	15
4 Elektroakustische Ersatzschaltungen mit konzentrierten Elementen.....	17
4.1 Der unkompensierte, piezoelektrische Verbundschwinger	17
4.2 Kompensationsschaltungen zur Leistungsanpassung und Amplitudenregelung	20
5 Berechnung des Kopplungsfaktors und der Güte von Verbundschwingern.....	23
5.1 Vorbemerkung zur Anregung von Harmonischen	23
5.2 Resonanzfrequenzen und Resonanzlängen bei angepassten Kennimpedanzen	24
5.3 Elektromechanische Transformationsformeln für den ungestuften $\lambda / 2$ -Verbundschwinger	26
5.4 Berechnung des Kopplungsfaktors aus den Nullstellen der Eingangsreaktanz.....	30
5.5 Berechnung der effektiven Güte von Verbundschwingern	32
5.6 Das Produkt Qk^2 als mögliches Qualitätskriterium für Verbundschwinger	34
5.7 Akustisch-mechanischer Wirkungsgrad von optimierten Verbundschwingern	37
5.8 Zusammenfassende Ergebnisse für ungestufte Verbundschwinger in der Grundresonanz	37
6 Praktische Beispiele zur Optimierung von Verbundschwingern	41
6.1 Zur Rücktransformation der impedanzangepassten Ersatzlängen	41
6.2 $\lambda/2$ -Konverter und Stufenkonzentratoren in der Grundresonanz	41
6.3 Verbundschwinger mit mehreren Resonanzfrequenzen.....	46
6.4 Rechenprogramm zur paarweisen Komponentenangleichung der Harmonischen	47
7 Spezial-Sonotroden mit Frequenzkorrektur.....	54
7.1 Vorbemerkung.....	54
7.2 Frequenzkorrekturen an einfachen Zylinder-Sonotroden	54
7.3 Der Stufenkonzentrator mit Frequenzkorrektur zur Amplitudenverstärkung.....	55
7.4 Der Exponential-Konzentrator zur Amplitudenverstärkung und Impedanzanpassung	58

8 Dispersion der Schallgeschwindigkeit in dicken Stäben und Platten	64
9 Belastbarkeitsgrenzen und Güten von hochwertigen Ultraschallsonotroden	66
9.1 Allgemeine Übersicht	66
9.2 Zulässige Schnelleamplituden an der Lastseite ungestufter, geklebter Verbundschwinger	66
9.3 Zulässige Schnelleamplituden an der Lastseite ungestufter, geschraubter Verbundschwinger ...	67
9.4 Belastbarkeitsgrenzen und Güten von hochwertigen Ultraschallsonotroden	68
10 Einige Tipps aus der Praxis	69
10.1 Zum Problem der Schwingeraufhängung	69
10.2 Zur Erwärmung, Wärmeausdehnung und Temperaturkompensation	70
10.3 Amplitudenmessung mit der Mikrometermessuhr	71
10.4 Geläppte Piezoplatten ohne Elektroden	71
10.5 Achtung bei Temperaturänderungen an elektrisch offenen Piezoplatten	71
10.6 Kapazitiver Spannungsabfall bei nicht leitenden Klebeschichten	71
10.7 Montage von Verbundschwinger unter piezoelektrischer Spannungskontrolle	71
10.8 Einfluss der „Kerbwirkung“ bei Stufenkonzentratoren	72
11 Schlussbemerkungen	73
Literaturverzeichnis	75
Anhang 1 zu Kapitel 5.4	77
Anhang 2 zu Kapitel 5.4	78
Anhang zu Kapitel 5.6	79
Anhang zu Kapitel 6.2	81
Anhang zu Kapitel 6.4	82

Kurzfassung

Der folgende Überblick fasst die bekannten analytischen Berechnungsmethoden zusammen und gibt anhand typischer Beispiele Anleitungen zur Lösung theoretischer und technischer Fragen bei der Entwicklung von Verbundschwingern. Zunächst werden die passiven, in der Regel metallischen Komponenten von Verbundschwingern als Stab- oder Plattensysteme mit homogen verteilten Feder-, Masse und Dämpfungseigenschaften beschrieben. Auf ihnen breitet sich die Schwingungsenergie in Form stehender und fortschreitender Wellen zum akustischen Verbraucher aus. Es folgt eine gleichwertige und schaltungstreue Darstellung durch elektrische oder mechanische Vierpole, die für den Entwicklungsingenieur leichter zu handhaben sind und in Netzwerken direkt mit Masons Ersatzschaltung des piezoelektrischen Wandlers [1] gekoppelt werden können. Danach werden die wichtigsten, messtechnisch zugänglichen Parameter anhand eines in Resonanznähe zulässigen Ersatzmodells mit konzentrierten elektrischen bzw. mechanischen Komponenten definiert. Als Schwerpunkt wird anschließend deren analytische Berechnung und messtechnische Verifizierung an typischen Beispielen demonstriert. Es folgen wichtige technische Informationen über Frequenzkorrekturen, Schallgeschwindigkeitsdispersion, Leistungs- und Belastbarkeitsgrenzen der Komponenten und andere wertvolle praktische Hinweise.

Liste der Formelzeichen

Symbol	Beschreibung
a	Anzahl der Piezokeramiken
C	Federnachgiebigkeit
C^*	Spezifischer Belag der Federeigenschaften pro Längeneinheit
C_0	Gemessene Kapazität
C_m	Kapazität
c	Wellengeschwindigkeit / Schallgeschwindigkeit
c_F	Federsteifigkeit
c_p	Wellengeschwindigkeit im Piezomaterial
D, d	Großer/kleiner Durchmesser
E	Elastizitätsmodul
$F(x)$	Kraftamplitude in Abhängigkeit der Ortskoordinate x
f	Frequenz
\bar{f}	Normierte Frequenz
f_0	Resonanzfrequenz
f_s	Serienresonanzfrequenz
f_p	Parallelresonanzfrequenz
i	Strom
i_0	Eingangsstrom
i_{\max}	Maximal zulässiger Eingangsstrom
j	Imaginäre Einheit
k	Elektromechanischer Kopplungsfaktor
L	Länge
L_1	Normierte Länge
L_m	Induktivität
M	Masse
m	Anpassungsmaß, Kennimpedanzquotient
m^*	Spezifischer Belag der Masse pro Längeneinheit
N_p	Planare Frequenzkonstante
n	Ordnungszahl

Symbol	Beschreibung
P	Wirkleistung
$p(x)$	Schalldruckamplitude
Q	Güte
Q_s	Güte, Resonanzüberhöhung
R_a	Ausgangswirkwiderstand
R^*	Spezifischer Belag der Dämpfungseigenschaften pro Längeneinheit
S	Querschnitt
s_p	Nachgiebigkeitskoeffizient
σ_{\max}	Maximal zulässige Zugspannung
t	Plattendicke
u	Spannung
V	Verhältnis, Verstärkungsfaktor
$v(x)$	Schnelleamplitude in Abhängigkeit der Ortskoordinate x
v_{\max}	Schnelleamplitude an der Endfläche eines stromgeregelten Verbundschwingers; maximal zulässige Schnelleamplitude
X_a	Blindkomponente der Ausgangsimpedanz
X_e	Blindkomponente der Eingangsimpedanz
X_p	Hilfsgröße für Parallelresonanzfrequenz
X_s	Hilfsgröße für Serienresonanzfrequenz
x	Axiale Ortskoordinate
$Z_0,$ $Z_{a,b}$	Kennimpedanz
Z_a	Abschlussimpedanz
Z_e	Eingangsimpedanz
$ \bar{Z}_e $	Normierte Eingangsimpedanz
α	Phasenkonstante
β	Dämpfungskonstante bzw. Verlustfaktor
Γ	Übertragungsfaktor; Proportionalitätsfaktor
γ	Komplexe Ausbreitungskonstante
Δl	Segmentdicke

Symbol	Beschreibung
ε_{\max} , $\varepsilon_{dyn,\max}$	Maximale longitudinale Dehnungsamplitude
ε_p	Dehnung innerhalb des Piezoelements
Φ	Normierter Abstand der Mitte des Piezowandlers von der Schwingerendfläche
ϕ, φ	Phasenwinkel
λ	Wellenlänge
η	Wirkungsgrad
ω	Kreisfrequenz
ρ	Dichte
ρ_0	Dichte des Piezomaterials

1 Einleitung

1.1 Einleitung und Stand der Technik

Verbundschwinger mit piezoelektrischer Anregung werden in der Ultraschalltechnik seit vielen Jahrzehnten mit Erfolg eingesetzt. Man braucht sie u. a., um die relativ empfindliche Piezokeramik gegen Verschleiß, aggressive Flüssigkeiten, höhere Temperaturen oder robusten mechanischen Kontakt mit zu bearbeitenden Materialien zu schützen. Geeignete Materialkombinationen und Querschnittsprofile ermöglichen Amplitudentransformation oder Impedanzanpassungen, wenn z. B. die gewünschten Schallintensitäten oder Schwingungsamplituden die niedrige Wechselfestigkeit der Piezokeramik übersteigen würden.

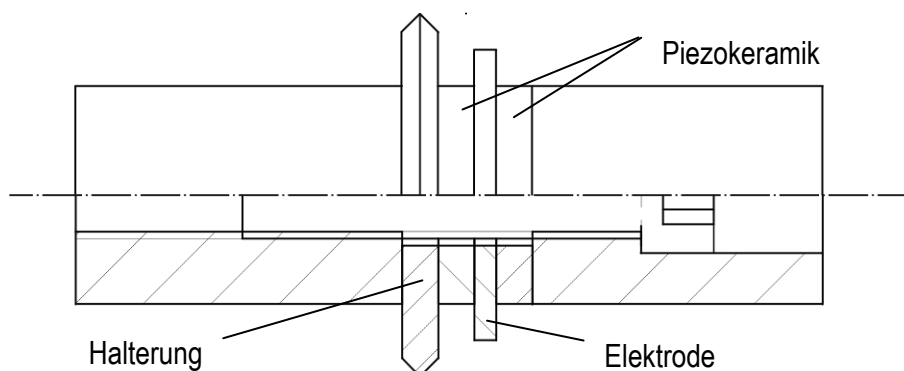


Bild 1.1: Beispiel eines Halbwellenresonators mit metallischen Endsegmenten, zentral angeordneten Piezokeramikscheiben und mechanisch vorgespannter Schraubverbindung

So werden etwa in der Materialprüfung, der medizinischen Diagnostik und Therapie sowie in der chemisch-pharmazeutischen Industrie bei MHz-Frequenzen „Sandwich“-Systeme mit zentralen Piezokeramikscheiben zwischen aufgeklebten Metall-, Glas-, Keramik- oder Absorberelementen eingesetzt. Bei technischen Ultraschallanwendungen mit Frequenzen zwischen 20 und 120 kHz zum Bohren, Schweißen, Reinigen, Zerstäuben, Extrahieren usw. verwendet man vorwiegend geschraubte, stabförmige Schwingungsgebilde, die in einfachen Fällen aus Halbwellenresonatoren mit metallischen Endsegmenten und zentral angeordneten Piezokeramikscheiben (Bild 1.1) bestehen. In komplizierten Fällen kommen resonante, miteinander verschraubte Kaskaden mit speziell geformten Metallsonotroden hoher Wechselfestigkeit (Bild 1.2 und [2]) zum Einsatz.

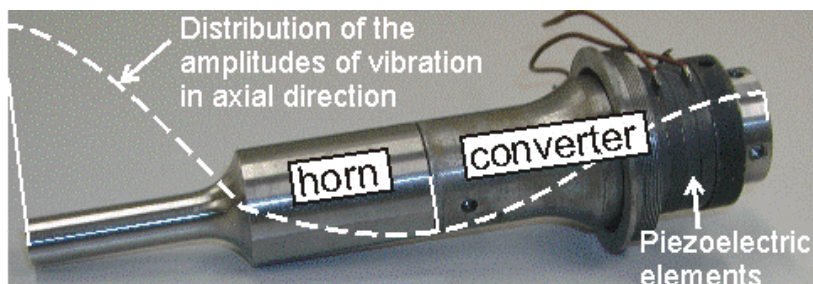


Bild 1.2: Verbundschwinger, bestehend aus Konverter und einem gestuften Amplitudentransformator (horn) mit Verteilung der Schwingungsamplituden entlang seiner Mittelachse [11]

Wegen der unterschiedlichen Materialeigenschaften der Komponenten sind Design, Berechnung und Optimierung von Ultraschallverbundschwingern eine interessante Aufgabe für den Entwicklungsingenieur. Die übliche Vorgehensweise beginnt mit einem Grobentwurf bei vorgegebener Wellenlänge und einer sukzessiven Schwingungsanalyse auf der Basis eindimensionaler theoretischer Modelle [3,4], die u. a. für die Auslegung akustischer Filter und Verzögerungsleitungen entwickelt wurden. Unsere Untersuchungen basieren auf einer Modellvorstellung von Mason [1], die es erlaubt, beliebige piezoelektrische Verbundschwingerkaskaden mit Methoden aus der Elektrotechnik schaltungstechnisch zu analysieren und an die entsprechenden Hochfrequenzgeneratoren anzupassen. Verschiedene Quellen [5-7] enthalten detaillierte Beschreibungen typischer $\lambda/2$ -Konverter, bei denen das piezoelektrische Wandlerelement meistens in der Zentralstellung angeordnet ist. Eine systematische Untersuchung von Verbundschwingern mit exzentrischer Position des Piezoelements ist uns nicht bekannt.

Komplexe Schwingungsgebilde mit unterschiedlicher Modellbelastung lassen sich auch mit Hilfe geeigneter computeralgebraischer und/oder numerischer Rechnerprogramme [8, 9] abbilden und analysieren. Alternativ oder ergänzend werden zwei- oder dreidimensionale Finite-Element-Modelle [10] zur Analyse des Schwingungsverhaltens eingesetzt. Diese Verfahren sind aber trotz hoher Detailgenauigkeit zeitaufwendig, weil sie nur durch eine sukzessive Anpassung der geometrischen Parameter an vorgegebene Konturen mit jeweils anschließender Neuberechnung der Parameter optimiert werden können. Hierbei werden allgemeingültige Schlussfolgerungen für ein tieferes Systemverständnis durch Gleichbewertung wesentlicher und weniger relevanter Einflussgrößen erschwert.

2 Definition eines passiven Wellenleiters und seiner wichtigsten Parameter

Ultraschallwellenleiter aus Metall, Glas oder Keramik besitzen keine elektroakustischen Wandlereigenschaften und müssen deshalb mit aktiven, z. B. piezoelektrischen Wandlerelementen zu Verbundschwingern kombiniert werden.

Bei Ultraschallschwingern mit Frequenzen f über 18 kHz und Wellenlängen unter 20 cm spricht man von *Schwingungssystemen mit verteilten Elementen*. Hier sind die Abmessungen (z. B. die Stablänge $L \geq \lambda/2$ oder die Plattendicke) nicht mehr gegenüber der Wellenlänge $\lambda = c/f$ zu vernachlässigen. Masse- und Federelemente, zur Speicherung kinetischer und potentieller Energie bzw. Dämpfungselemente zur Umwandlung mechanischer Schwingungsenergie in Schallenergie oder Wärme, sind nach Bild 2.1 gleichmäßig über das Volumen bzw. die Länge des Wellenleiters verteilt, und die Energie breitet sich wellenförmig aus. Infolge von Impedanzsprüngen an Grenzflächen, z. B. unstetigen Querschnitts- oder Materialübergängen innerhalb der Verbundschwinger oder an äußeren Kontaktflächen zu Flüssigkeiten und Gasen, kommt es durch Vielfachreflexionen zu stehenden Wellen, mit ausgeprägten, erwünschten Resonanzen der Wellenleiter.

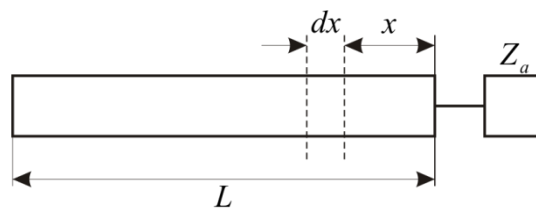


Bild 2.1: Ultraschallwellenleiter mit verteilten Elementen als zylindrischer Stab

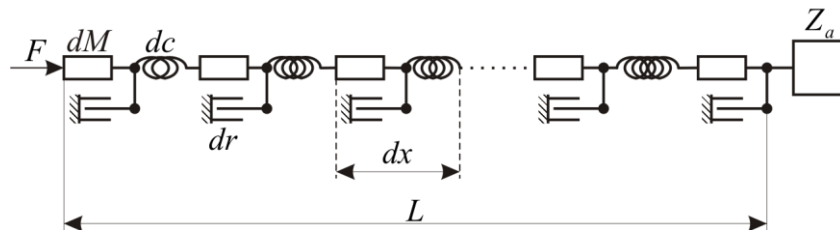


Bild 2.2: Wellenleiter als Kettenschaltung von Elementarzellen mit konzentrierten Elementen

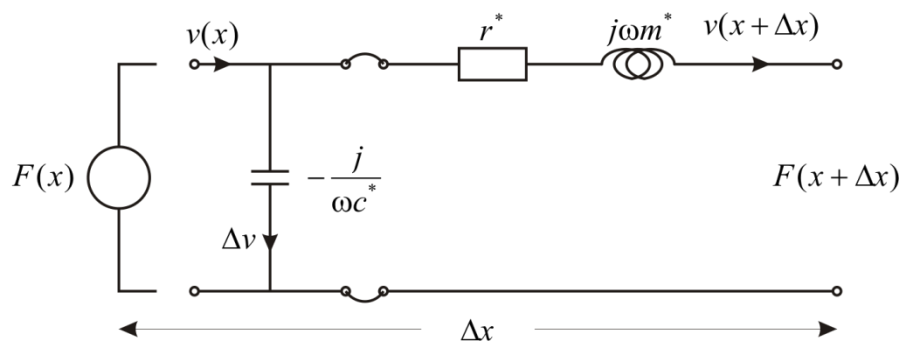


Bild 2.3: Elektrisches Ersatzschaltbild einer Elementarzelle

Im Folgenden werden einige fundamentale Beziehungen und Parameter zur Berechnung von Ultraschallschwingungssystemen definiert. Genauere Hinweise sind in den zitierten Veröffentlichungen zu finden.

Wir betrachten einen zylindrischen Wellenleiter der Länge (Dicke) L mit der Querschnittsfläche S , aus einem Material der Dichte ρ , der Schallgeschwindigkeit $c = \sqrt{E/\rho}$ und der Kennimpedanz $Z_0 = \rho c \cdot S$, auf dem sich mechanische Axial- oder Dickenschwingungen als zwei gegenläufige Wellenzüge

$$F(x) = A_1 \cdot e^{\gamma x} + B_1 \cdot e^{-\gamma x} \quad (2.1)$$

$$v(x) = A_2 \cdot e^{\gamma x} + B_2 \cdot e^{-\gamma x} \quad (2.2)$$

der Kraft- $F(x)$ und Schnelleamplitude $v(x)$ in x und $-x$ Richtung ausbreiten und überlagern können. Die Axialkoordinate x zählt dabei mit $0 \leq x \leq L$ vom rechten Ende des Wellenleiters in Bild 2.1. Die komplexe Ausbreitungskonstante γ und die Kennimpedanz Z_0 werden weiter unten erklärt.

Die gleichmäßig über die Gesamtlänge L verteilten Massen-, Feder- und Dämpfungseigenschaften sind mit

$$dM = \frac{M}{L} \cdot dx = m^* dx, \quad dc_F = \frac{c_F}{L} \cdot dx = c_F^* dx, \quad dr = \frac{r}{L} \cdot dx = r^* dx \quad (2.3)$$

durch ihre spezifischen *Beläge* m^* , c_F^* und r^* pro Längeneinheit repräsentiert, wobei $M = \rho \cdot S \cdot L$ die Masse und $c_F = SE/L$ die Federsteifigkeit des kompletten, stabförmigen Wellenleiters bedeuten.

Aus dem Ersatzschaltbild (Bild 2.2) der Elementarzelle von Bild 2.1 folgt bei sinusförmiger Anregung und Anwendung der Bewegungsgleichungen nach Newton, Hooke und Stokes für das Masse-, Feder- und Reibungswiderstandselement [12, 17]

$$\frac{dv(x)}{dx} = j \frac{\omega}{c_F^*} \cdot F(x) \quad (2.4)$$

$$\frac{dF(x)}{dx} = (r^* + j\omega m^*) \cdot v(x) \quad (2.5)$$

$$\frac{1}{F(x)} \frac{d^2 F(x)}{dx^2} = \frac{1}{v(x)} \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = \gamma^2 \quad (2.6) \quad \text{mit} \quad \gamma = \sqrt{(r^* + j\omega m^*) \cdot j \frac{\omega}{c_F^*}} \approx j\alpha + \beta \quad (2.7)$$

als Ausbreitungskonstante. Diese komplexe Größe lässt sich unterteilen in die *Phasenkonstante* α und die *Dämpfungskonstante* bzw. den *Verlustfaktor* β mit der Güte Q

$$\alpha = \omega \cdot \sqrt{\frac{m^*}{c_F^*}} = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (2.8)$$

$$\beta = \frac{r^*}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{c_F^* m^*}} = \frac{\alpha}{2Q} \quad (2.9)$$

Mit (2.5) folgt aus (2.1) und (2.2)

$$\left[A_1 e^{\gamma x} - B_1 e^{-\gamma x} \right] = \frac{r^* + j\omega m^*}{\gamma} \cdot \left[A_2 e^{\gamma x} + B_2 e^{-\gamma x} \right] = Z_0^* \cdot \left[A_2 \cdot e^{\gamma x} + B_2 \cdot e^{-\gamma x} \right] \quad (2.10)$$

wobei

$$Z_0^* = \sqrt{\frac{r^* + j\omega m^*}{j\omega / c_F^*}} = \sqrt{m^* c_F^*} \cdot \sqrt{1 - j \frac{r^*}{\omega m^*}} \approx \rho c S = Z_0 \quad (2.11)$$

als *Kennimpedanz* bezeichnet wird.

Da die Dämpfungskonstante β von Festkörpern eine lineare Funktion der Frequenz f ist [14], erweist sich die Güte Q als frequenzunabhängiger Parameter. Sie erreicht bei typischen Ultraschallwellenleitern aus Metall, Keramik oder Glas Werte zwischen 1000 und 10 000, während sie bei typischen Piezokeramiken bei einigen 100 liegt. Die Korrekturen (2.7) und (2.11) gegenüber verlustfreien Wellenleitermaterial sind also, mit Ausnahme der Resonanzstellen bei fehlendem Ausgangswirkwiderstand R_a , vernachlässigbar klein.

Mit der komplexen Lastimpedanz $F(0)/v(0) = Z_a = R_a + jX_a$ am Stabausgang ($x = 0$) und den Randbedingungen [13]

$$A_2 = \frac{A_1}{Z_0} = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{F(0)}{Z_0} + v(0) \right] \quad (2.12) \quad \text{und} \quad B_2 = -\frac{B_1}{Z_0} = \frac{1}{2} \cdot \left[v(0) - \frac{F(0)}{Z_0} \right] \quad (2.13)$$

findet man für die Amplitudenverteilung von Kraft und Schnelle entlang des Wellenleiters

$$\frac{F(x)}{F(0)} = \cosh(\gamma x) + \frac{Z_0}{Z_a} \cdot \sinh(\gamma x) \quad (2.14) \quad \frac{v(x)}{v(0)} = \cosh(\gamma x) + \frac{Z_a}{Z_0} \cdot \sinh(\gamma x) \quad (2.15)$$

Ersetzt man die komplexen Hyperbelfunktionen in (2.14) und (2.15) mit den Näherungen (2.7) und (2.11) durch

$$\cosh(\gamma x) \approx \cos(\alpha x) + j \frac{\alpha x}{2Q} \sin(\alpha x) \quad (2.16) \quad \sinh(\gamma x) \approx \frac{\alpha x}{2Q} \cos(\alpha x) + j \sin(\alpha x) \quad (2.17)$$

dann erhält man für die normierten Amplituden von Kraft und Schnelle entlang des Stabes

$$\frac{F(x)}{F(0)} = \cos \alpha x \left(1 + \frac{Z_0}{Z_a} \cdot \frac{\alpha x}{2Q} \right) + j \sin \alpha x \left(\frac{Z_0}{Z_a} + \frac{\alpha x}{2Q} \right) \quad (2.18)$$

$$\frac{v(x)}{v(0)} = \cos \alpha x \left(1 + \frac{Z_a}{Z_0} \frac{\alpha x}{2Q} \right) + j \sin \alpha x \left(\frac{Z_a}{Z_0} + \frac{\alpha x}{2Q} \right) \quad (2.19)$$

Daraus folgt durch Division am Eingang $x = L$ des Wellenleiters mit $Z_a = R_a + jX_a$ als Ausgangsimpedanz bei $x = 0$ die komplexe, normierte Eingangsimpedanz

$$\frac{Z_e}{Z_0} = \bar{Z}_e = \bar{R}_e + j \cdot \bar{X}_e \approx \frac{(R_a + jX_a) \cdot \left(\cos \alpha x + j \frac{\alpha x}{2Q} \cdot \sin \alpha x \right) + Z_0 \cdot \left(\frac{\alpha x}{2Q} \cos \alpha x + j \sin \alpha x \right)}{Z_0 \cdot \left(\cos \alpha x + j \frac{\alpha x}{2Q} \sin \alpha x \right) + (R_a + jX_a) \cdot \left(\frac{\alpha x}{2Q} \cos \alpha x + j \sin \alpha x \right)} \quad (2.20)$$

Die Blindkomponente X_e dieser Eingangsimpedanz verschwindet bei der Resonanz.

Bei den in der Ultraschalltechnik typischen Wellenleitern mit reinem Abschlusswiderstand $Z_a = R_a = \rho c_a S$ und dem auch als *Anpassungsmaß* bezeichneten Kennimpedanzquotienten $m = \rho c_a S / Z_0 < 1$ sind die inneren Verluste gegenüber den äußeren Verlusten durch Abstrahlung akustischer Energie zu vernachlässigen (vgl. Kapitel 3.2). Für die normierte Amplitudenverteilung von Kraft F und Schnelle v folgt dann aus (2.14) und (2.15) das typische Bild einer *stehenden Welle* (vgl. Bild 2.4)

$$\frac{|F(x)|}{|F(0)|} = \sqrt{m^2 \cos^2 \alpha x + \sin^2 \alpha x} \quad (2.21)$$

$$\frac{|v(x)|}{|v(0)|} = \sqrt{\cos^2 \alpha x + m^2 \sin^2 \alpha x} \quad (2.22)$$

mit *Schnelleknoten* und *Kraftbäuchen* bei $\cos \alpha x = \cos(n + 0.5)\pi = 0$ bzw. *Schnellebäuchen* und *Kraftknoten* bei $\sin \alpha x = \sin n\pi = 0$. Bäuche nennt man die Amplitudenmaxima. Die Knoten sind Amplitudenminima, die bei $m = 0$ (totale Impedanzfehlanspassung) zu wirklichen Nullstellen werden, normalerweise aber von einer zum Lastwiderstand *fortschreitenden Welle* überlagert sind.

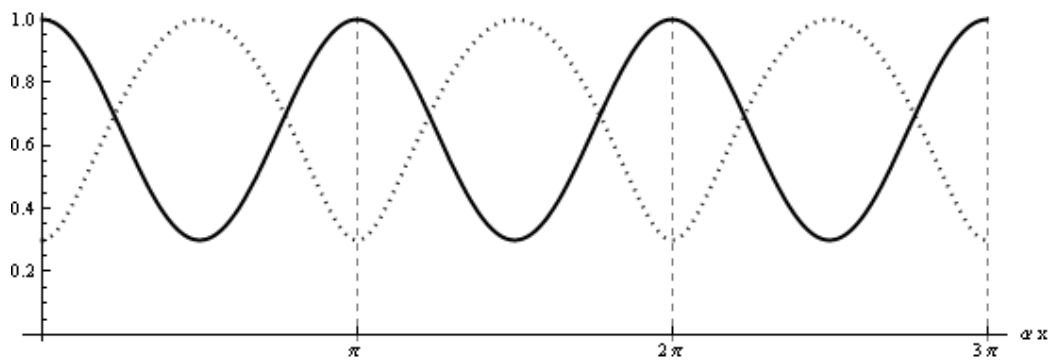


Bild 2.4: Stehende Welle der Kraftamplitude (F) und Schnelleamplitude (v) auf einem zylindrischen Wellenleiter in $3\lambda/2$ -Resonanz bei einseitiger Wirklast, mit Schnellebäuchen und Kraftknoten an den beiden Endflächen nach (2.21) und (2.22) bei $m = 0.3$ in normierter Darstellung

Entsprechend erhält man für die normierte Eingangsimpedanz aus (2.14) und (2.15)

$$\frac{Z_e}{Z_0} \approx \frac{m + j \cdot (1 - m^2) \cdot \sin \alpha x \cdot \cos \alpha x}{\cos^2 \alpha x + m^2 \cdot \sin^2 \alpha x} = \frac{R_e}{Z_0} + j \frac{X_e}{Z_0} \quad (2.23)$$

Häufig wird anstelle der Kraftamplitude in (2.14) die Schalldruckamplitude $p(x)$ dargestellt. In diesem Fall ergäbe sich allerdings aus dem Quotienten von Druck und Schnelle anstelle von (2.20) eine flächenspezifische Impedanz, die nicht korrekt mit der widerstandstreu Kraft-Spannungsanalogie elektroakustischer Wandler vereinbar wäre.

3 Elektroakustische Vierpolersatzschaltungen stabförmiger Wellenleiter

Bei der Berechnung und Optimierung von Verbundschwingern bedient man sich so genannter elektro-mechanischer oder elektroakustischer *Ersatzschaltungen* [15-17], die mit Hilfe der *Kirchhoff'schen Stromverzweigungsgesetze* [9] leichter analysiert werden können. Bei der von uns bevorzugten Schnelle/Strom- und Kraft/Spannungsanalogie [17] werden mechanische Schnelle- und Kraftamplituden durch elektrische Strom- und Spannungsamplituden und mechanische Wirk- und Blindwiderstände schaltungstreu durch elektrische Widerstände mit analogen mathematischen Beziehungen ersetzt. Die Analogie eines Ultraschallwellenleiters wäre z. B. eine elektrische HF Koaxial- oder Doppelleitung mit zwei Eingangs- und zwei Ausgangsklemmen, die hinsichtlich der Eingangs- und Ausgangsimpedanzen vollwertig durch einen Vierpol nach Bild 3.1 und Bild 3.2 ersetzt werden kann. Diese Vierpole kann man schaltungstreu mit der elektrischen Nachbildung eines aktiven piezoelektrischen Wandlers nach Mason [1] oder anderen Vierpolen koppeln. Praktisch geschieht das durch Verschrauben oder Kleben. In Bild 3.3 und Bild 3.4 ist der mechanische Teil eines piezoelektrischen Wandlers ebenfalls durch einen *Vierpol* repräsentiert, dem zusätzlich ein idealer Transformator mit zwei Eingangsklemmen zur Energieeinkopplung vom Generator parallel geschaltet ist.

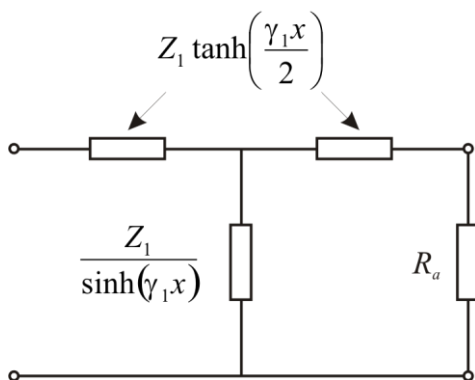


Bild 3.1: Vierpol Ersatzschaltung eines verlustbehafteten Wellenleiters mit Abschlusswirkwiderstand R_a

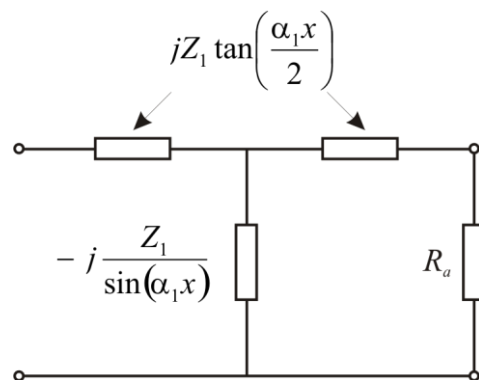


Bild 3.2: Vierpol Ersatzschaltung eines verlustfreien Wellenleiters mit Abschlusswirkwiderstand R_a

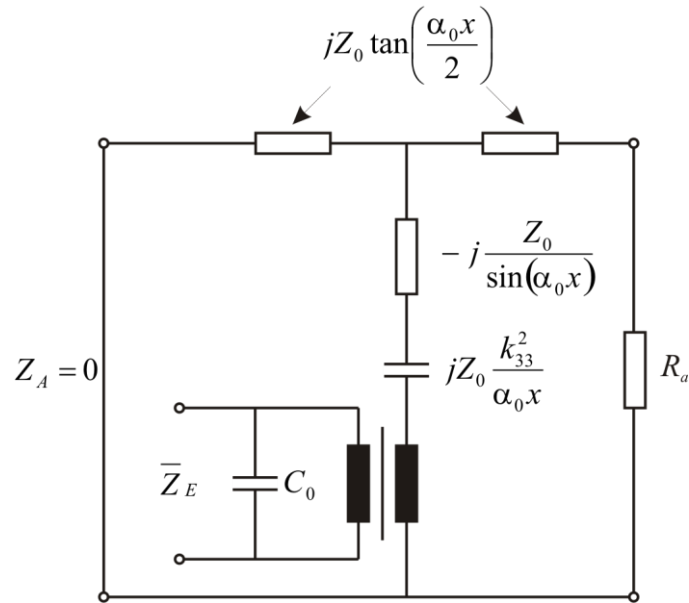


Bild 3.3: Mechanische Vierpol Ersatzschaltung eines verlustfreien piezoelektrischen Wandlers mit Luft-„backing“ und einseitiger Ankopplung an einen Abschlusswiderstand R_a

Bei schwach verlustbehafteten Wellenleitern ohne äußeren Lastwiderstand muss man im allgemeingültigen Vierpol aus Bild 3.1 die Hyperbelfunktionen durch die Näherungen

$$\tanh\left(\frac{\gamma x}{2}\right) \approx j \cdot \tan \frac{\alpha x}{2} + \frac{\alpha x}{4Q} \cdot \cos^2 \frac{\alpha x}{2} \quad (3.1)$$

und

$$\frac{1}{\sinh(\gamma x)} \approx -j \frac{1}{\sin \alpha x} + \frac{\alpha x}{2Q} \cdot \frac{\cos \alpha x}{\sin^2 \alpha x} \quad (3.2)$$

ersetzen. Bei verlustfreien Wellenleitern gilt die Vereinfachung nach Bild 3.2 bzw. Bild 3.4.

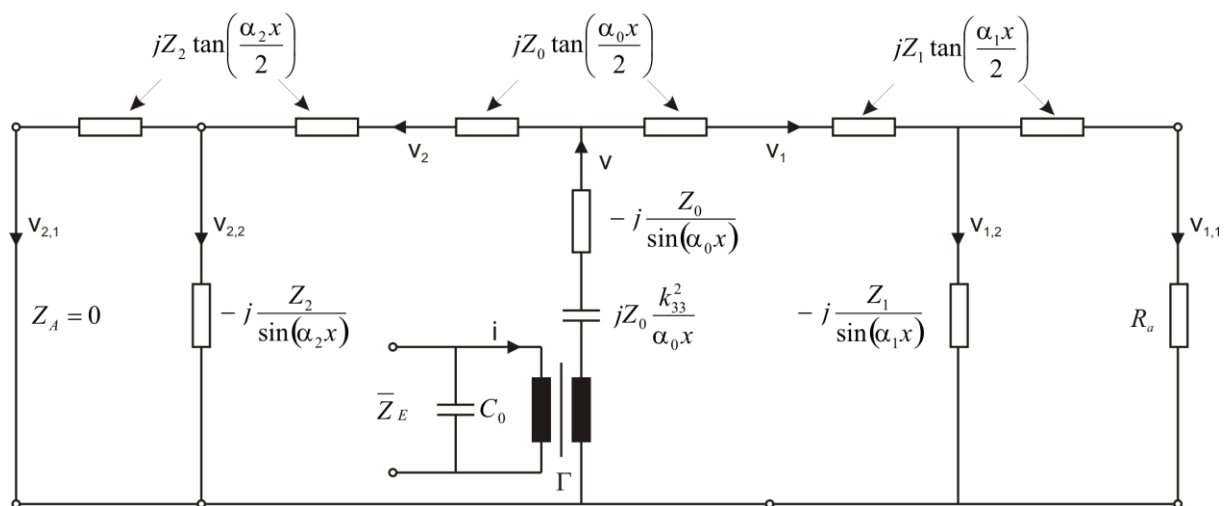


Bild 3.4: Mechanische Vierpol Ersatzschaltung eines Verbundschwingers mit zentralem, verlustfreien piezoelektrischen Wandler zwischen zwei verlustfreien, metallischen Wellenleitern mit Lastwiderständen (R_a bzw. 0) an den beiden Endflächen und $v = i/\Gamma$

Hinsichtlich der komplexen Eingangsimpedanz bei vorgegebenem Abschlusswiderstand führen die Vierpoldarstellungen nach Bild 3.1 und Bild 3.2 zu den gleichen Ergebnissen (2.21) bis (2.23), wie sie aus der Wellengleichung für akustische oder elektrische Wellenleiter mit verteilten Elementen in Kapitel 2 hergeleitet wurden. Insofern sind sie bei den folgenden Berechnungen ein vollwertiger, mathematisch leichter zu handhabender Ersatz.

Komplexe Ultraschallschwingungssysteme können sich aus mehreren, in Reihe oder parallel geschalteten Komponenten und deren elektrischen Vierpoläquivalenten (mit jeweils konstanter Kennimpedanz Z_0) nach Bild 3.2 zusammensetzen. Auch eine schaltungstreue Kombination mit *konzentrierten* Masse-, Feder- oder Verlustwiderstandselementen geringer Ausdehnung nach Bild 3.5 [13] ist mit Hilfe der aus Bild 3.6 ersichtlichen, entsprechenden Vierpolersatzschaltungen [16] möglich.

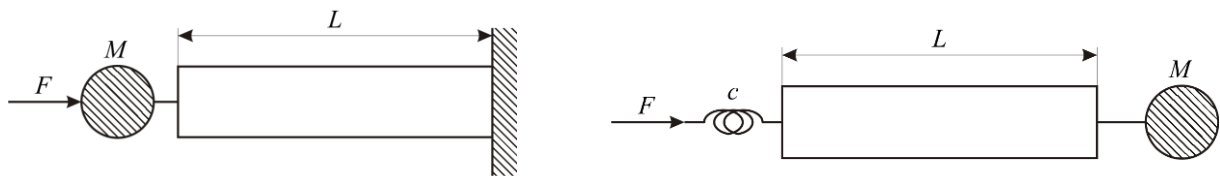


Bild 3.5: Beispiele für die Zusammenschaltung von Ultraschallwellenleitern mit konzentrierten Feder- oder Masselementen

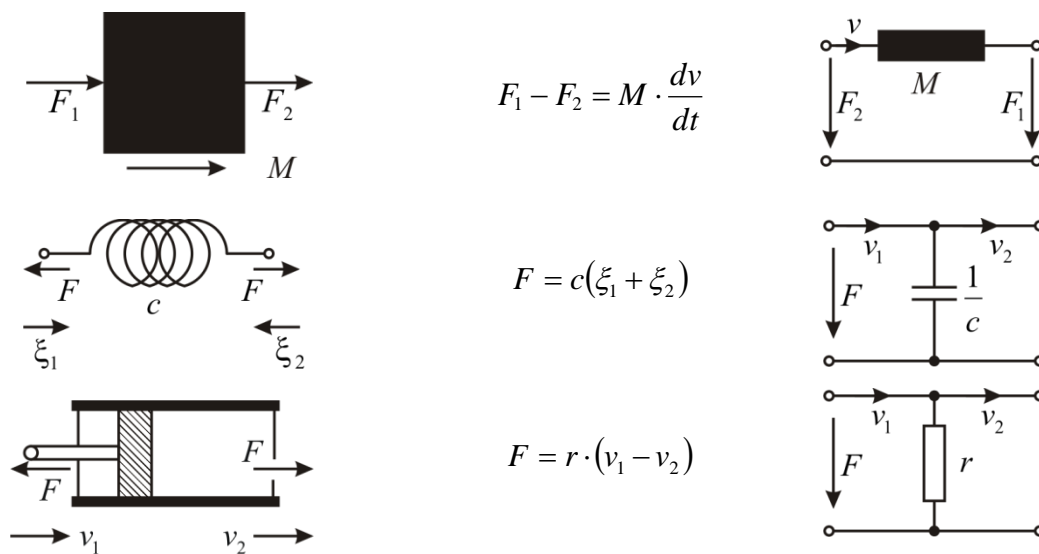


Bild 3.6: Vierpol Ersatzschaltung konzentrierter mechanischer Schwingungselemente

3.1 Eingangsimpedanz und Resonanzbedingung verlustfreier Stabschwinger

Die Resonanzbedingung eines Stabschwingers ist bei verschwindender Eingangsreaktanz $X_e = 0$ erfüllt. Hier spielen also innere Verluste mit Güten > 1000 keine Rolle.

Bei einem verlustfreien, einseitig starr eingespannten Wellenleiter bleiben die entsprechenden Vierpolklemmen in der Ersatzschaltung Bild 3.2 offen, was einem unendlich großen Abschlusswiderstand Z_a entspricht. Die Eingangsimpedanz wird dann durch

$$Z_e = jX_e = -j \cdot Z_0 \cot\left(\frac{\omega}{c} L\right) \quad (3.3)$$

beschrieben und verschwindet in der Resonanz ($X_e = 0$) bei $L = (2n + 1) \cdot \lambda / 4$.

Entsprechend werden bei freier Endfläche ($Z_a = 0$) die betreffenden Vierpolklemmen kurzgeschlossen und für die Eingangsimpedanz gilt

$$Z_e = jX_e = j \cdot Z_0 \tan\left(\frac{\omega}{c} L\right) \quad (3.4)$$

mit $X_e = 0$ als Resonanzbedingung bei $L = n \cdot \lambda / 2$.

Bei der Reihenschaltung zweier verlustfreier Stabelemente mit unterschiedlichen Kennimpedanzen $Z_{0,1}$ und $Z_{0,2}$ folgt aus der Vierpoldarstellung mit Hilfe der Kirchhoff-Formeln und einfacher Additionstheoreme für Winkelfunktionen bei eingespanntem Ende ($Z_{a,1} = \infty$)

$$Z_{e,2} = jX_{e,2} = -j \cdot Z_{0,2} \cot\left[\frac{\omega}{c_2} L_2 + \operatorname{arccot}\left(\frac{Z_{0,1}}{Z_{0,2}} \cot\left(\frac{\omega}{c_1} L_1\right)\right)\right] \quad (3.5)$$

und bei freiem Ende ($Z_{a,1} = 0$)

$$Z_{e,2} = jX_{e,2} = j \cdot Z_{0,2} \tan\left[\frac{\omega}{c_2} L_2 + \arctan\left(\frac{Z_{0,1}}{Z_{0,2}} \tan\left(\frac{\omega}{c_1} L_1\right)\right)\right] \quad (3.6)$$

Die normierte Länge $L_1 \cdot \omega / c_1$ wird also jeweils durch einen Ersatzphasenwinkel an die Kennimpedanz $Z_{0,2}$ des folgenden Vierpols angepasst. Von dieser Anpassung werden wir in Kapitel 5 noch Gebrauch machen. Ein typisches Beispiel für (3.6) ist der Stufenkonzentrator, bei dem der Durchmesser in der Stabmitte (Schnelleknoten) von D auf d reduziert wird, um die Amplitude am schlanken Ende im Verhältnis $V = (D/d)^2$ zu verstärken.

Auf die oben beschriebene Weise lassen sich Wellenleiterabschnitte oder komplette Wellenleiter mit beliebig veränderlichem Querschnitt S aus dem gleichen Material, grob bis fein abgestuft, in n kleine Zylindersegmente der Dicke ΔL mit den Kennimpedanzquotienten $m_n = S_{n-1} / S_n$ unterteilen und mathematisch als Matrixreihenschaltung von verlustfreien mechanischen Vierpolen behandeln. Dabei wird jeweils die Eingangsimpedanz eines Vierpols als Abschlusswiderstand des folgenden Vierpols in der

Kette betrachtet. Sie verändert sich also bei freiem Ende ($Z_{a,1} = 0$) mit $\alpha = \omega / c$ vom Beginn der Querschnittsänderung ($x = 0, n = 0$) schrittweise bis zum Ende L gemäß

$$Z_e(L) \approx j \cdot Z_0(L) \cdot \tan(\alpha \cdot L_{\text{eff},n}) \approx j \cdot Z_{0,n} \tan[\alpha \cdot \Delta L + \arctan(m_n \cdot \tan(\alpha L_{\text{eff},n-1}))] \quad (3.7)$$

3.2 Verlustarme Ultraschallwellenleiter bei einseitiger Ankopplung an Flüssigkeiten bzw. Gase

Wir demonstrieren die Schaltungsanalyse mit Vierpolersatzschaltungen am Beispiel eines schwach verlustbehafteten zylindrischen Wellenleiters aus Titan mit der Länge L , der konstanten Querschnittsfläche S und der Kennimpedanz $Z_0 = \rho_0 c_0 S$. Der Einfluss der Ultraschallabstrahlung in Flüssigkeiten bzw. Gase wird durch den Abschlusswiderstand $R_a = m \cdot Z_0$ am Ausgang des Wellenleiters charakterisiert. Für den Kennimpedanzquotienten $m = R_a / Z_0$, der auch als Anpassungsmaß bezeichnet wird, ergibt sich bei Wasser/Titan $m_w \approx 0.058$ und bei Luft/Titan $m_g \approx 17 \cdot 10^{-6}$. Für die Güte oder Resonanzschärfe von Titan wählen wir einen typischen Wert $Q_{Ti} = \alpha / 2\beta \approx 2000$. Die Eingangsimpedanz folgt aus Bild 3.1 mit Hilfe der Kirchhoff'schen Stromverzweigungsgesetze oder aus (2.18) und (2.19) nach Trennung der Real- und Imaginärkomponenten. Bei vorgegebener Länge $L = \lambda_0 / 2$ mit f_0 als Resonanzfrequenz des Wellenleiters und der normierten Frequenz $\bar{f} = f / f_0$ als unabhängiger Variablen gilt $\alpha L = 2\pi \cdot L / \lambda_0 \cdot \bar{f} = \pi \cdot \bar{f}$. Mit den hier zulässigen Vereinfachungen $\pi \bar{f} / 2Q \ll 1$, $m \ll 1$, $m^2 \ll 1$, $1/4Q^2 \ll 1$, $\cosh(\pi \bar{f} / 2Q) \approx 1$ und $\sinh(\pi \bar{f} / 2Q) \approx \pi \bar{f} / 2Q$ findet man nach einigen Umrechnungen aus der Ersatzschaltung Bild 3.1 Impedanzkurven nach Bild 3.7 mit

$$\bar{R}_e = \frac{[m + \pi \bar{f} / 2Q] + 1/4Q \cdot \sin 2\pi \bar{f}}{\cos^2 \pi \bar{f} + [m + \pi \bar{f} / 2Q]^2 \sin^2 \pi \bar{f}} \quad (3.8)$$

$$\bar{X}_e = \frac{1/2 \cdot \sin 2\pi \bar{f}}{\cos^2 \pi \bar{f} + \sin^2 \pi \bar{f} \cdot [m + \pi \bar{f} / 2Q]^2} \quad (3.9)$$

Für Betrag und Phasenwinkel der normierten Eingangsimpedanz ergibt sich daraus:

$$|\bar{Z}_e| \approx \frac{\sqrt{[m + \pi \bar{f} / 2Q]^2 + 1/4 \cdot \sin^2 2\pi \bar{f}}}{\cos^2 \pi \bar{f} + \sin^2 \pi \bar{f} \cdot [m + \pi \bar{f} / 2Q]^2} \quad (3.10)$$

und

$$\tan \varphi \approx \frac{1/2 \cdot \sin 2\pi \bar{f}}{[m + \pi \bar{f} / 2Q] + 1/4Q \cdot \sin 2\pi \bar{f}} \quad (3.11)$$

Bei einseitiger Flüssigkeitsankopplung ist in den eckigen Klammern $\pi / 2Q \ll m$ und die inneren Verluste können vernachlässigt werden. Bei Ankopplung an Gase unter Normalbedingungen mit $m \ll \pi / 2Q$ sind dagegen die äußeren Verluste vernachlässigbar klein.

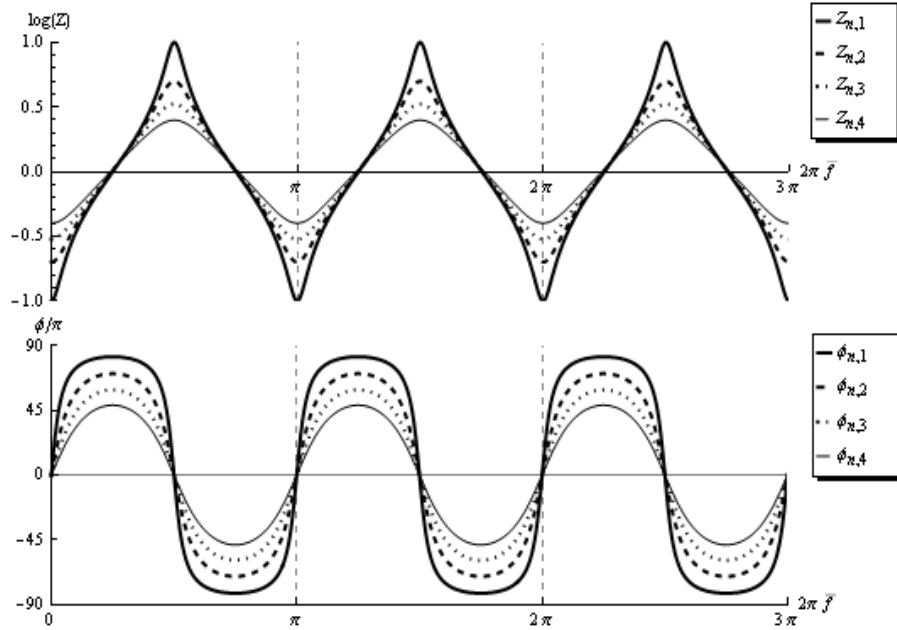


Bild 3.7: Betrag und Phasenwinkel der Eingangsimpedanz eines verlustfreien Wellenleiters mit reiner Wirkwiderstandsbelastung am Stabende nach Gleichung (3.10) und (3.11)

Aus (3.8), (3.9), (3.10) und (3.11) erkennt man, dass die Eingangsimpedanz des Wellenleiters mit inneren und äußeren Verlusten bei Variation der normierten Frequenz $0 \leq \bar{f} \leq n$ periodische Resonanzen mit Phasennulldurchgängen bei $n = 1, 2, 3, \dots$ durchläuft. Hier gilt

$$|\bar{Z}_e|_{\min} \approx \left[m + \frac{n\pi}{2Q} \right] \quad (3.12)$$

$$|\bar{Z}_e|_{\max} \approx \left[m + \frac{n+1/2}{2Q} \pi \right]^{-1} \quad (3.13)$$

Bei Schallabstrahlung in Luft ($m \approx 0$) und zunehmender Resonanzfrequenz werden die Minima bei $f = n \cdot f_0$ größer und die Maxima bei $f = (n+1/2) \cdot f_0$ kleiner. Bei Flüssigkeitsdämpfung bleibt die Höhe der Extremwerte weitgehend unabhängig von der Anzahl n der „Oberwellen“. Aus der normierten Halbwerts- oder Bandbreite $2\Delta f_{-3dB} / f_0$ der Resonanzkurve (3.10) ergibt sich bei Frequenzvariation $f = n \cdot f_0 \pm \Delta f$ eine Bestimmungsgleichung für die effektive Güte des Resonanzsystems:

$$Q_{\text{eff}} \approx \frac{f_0}{2\Delta f_{-3dB}} \approx \frac{n\pi}{2} \cdot \left[m + \frac{n\pi}{2Q} \right]^{-1} \quad \text{mit} \quad Q_{\text{eff, Wasser}} \approx \frac{n \cdot \pi}{2 \cdot m} \quad \text{und} \quad Q_{\text{eff, Luft}} \approx Q_{Ti} \quad (3.14)$$

Diese nimmt bei Wasserabstrahlung mit wachsender Frequenz bei gleich bleibender Bandbreite zu, während sie bei Luftabstrahlung bei zunehmender Bandbreite von der Frequenz unabhängig ist.

Aus dem Verhältnis von äußeren Verlusten m und Gesamtverlusten $m + n\pi/2Q$ lässt sich für den passiven Wellenleiter ein akustisch-mechanischer Wirkungsgrad $\eta_{a,m} \approx 1 - n\pi/2mQ$ definieren, der bei einseitiger Ankopplung an Flüssigkeiten über 90% liegt und in Kapitel 5.7 für Verbundschwinger zu einem vergleichbaren Ergebnis führt.

4 Elektroakustische Ersatzschaltungen mit konzentrierten Elementen

4.1 Der unkompenzierte, piezoelektrische Verbundschwinger

In der Nähe seiner Resonanzfrequenz kann das Vierpolersatzschaltbild des einfachen piezoelektrischen Wandlers nach Bild 3.3, ebenso wie das u. U. sehr komplizierte Ersatzschaltbild einer Verbundschwingerkaskade durch einen einfachen Schwingkreis aus vier elektrischen oder mechanischen Bauelementen nach Bild 4.1 [16] dargestellt werden. Dieser besteht aus einer Reihenresonanzkette der Kapazität C_m , der Induktivität L_m und des Verlustwiderstands R_m , die jeweils die mechanischen Feder-, Massen- und Dämpfungseigenschaften des Gesamtsystems (einschließlich eines u. U. vorhandenen äußeren Abschlusswiderstands R_a) repräsentieren. Parallel dazu – und in Bild 4.1 links durch einen idealen Transformator von der mechanischen Seite getrennt – liegt die so genannte „clamped capacity“ C_0 des piezoelektrischen Wandlers, die z. B. mit einer Kapazitätsmessbrücke bei sehr niedrigen Frequenzen <100 Hz direkt oder bei beliebiger Frequenz mit mechanisch eingespanntem, d. h. an der mechanischen Schwingung gehindertem Wandler, gemessen werden kann.

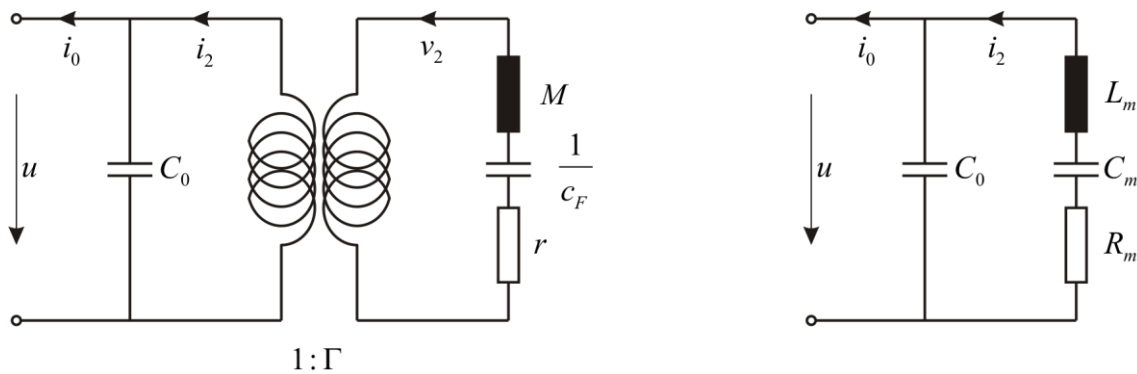


Bild 4.1: Ersatzschaltung eines piezoelektrischen Wandlers mit konzentrierten Elementen

Vergleicht man den mechanischen Teil der Vierpolschaltung nach Bild 3.3 mit dem Längsweig der Ersatzschaltung nach Bild 4.1 dann ergeben sich folgende Identitäten:

$$\frac{\Gamma^2}{\omega C_m} = \frac{c_F}{\omega} \frac{\alpha_0}{\sin \alpha_0} \left(1 - k^2 \frac{\sin \alpha_0}{\alpha_0} \right) \quad (4.1)$$

$$\omega \Gamma^2 L_m = \frac{\omega M}{4} \frac{\tan(\alpha_0/2)}{\alpha_0/2}, \quad R_m \approx \frac{R_a}{4\Gamma^2} = Z_0 \frac{m}{4\Gamma^2}$$

mit $c_F = ES/L$ als Federsteifigkeit und M als Masse des kompletten Stabelements (vgl. (2.3)). Bei niedriger Frequenz ($\alpha_0 = \omega/c \cdot L \ll 1$) wird $L_m = M/4\Gamma^2$ ein reines Masseelement und $C_m = \Gamma^2/c_F$ ein reines Federelement, dessen Nachgiebigkeit sich aber infolge der Polarisierung um den Faktor $(1+k^2)$ vom unpolarisierten Material unterscheidet. Entsprechend ist die Schallgeschwindigkeit um den Faktor $1/\sqrt{1+k^2}$ kleiner. Der Faktor $1/4$ bei ωL_m und R_m ist darauf zurückzuführen, dass sich der Strom i_2 im Längsweig von Bild 4.1 beim symmetrischen Vierpol nach Bild 3.3 in zwei gleich große „Teilströme“ aufteilt, die die Schnelleamplituden an den beiden Endflächen repräsentieren.

Die einseitige Leistungsabgabe bei doppelter Stromstärke reduziert also den scheinbaren Lastwiderstand auf $1/4$. Aus Gleichung (4.1) folgt bei Parallelresonanz ($\alpha_0 = \pi, L = \lambda/2$) $f_p \approx 1/2\sqrt{M/c_F} = c/2L = c/\lambda$.

Anhand des elektrischen Schwingkreises nach Bild 4.1 lassen sich die mechanischen Parameter (4.1) eines Ultraschallschwingungssystems mit verteilten Elementen in drei konzentrierte elektrische Ersatzkomponenten übertragen und auf die einfach messbare Kapazität C_0 (vgl. (4.12)) beziehen. Zunächst werden, wie bei elektrischen Schwingkreisen üblich [15], die wichtigsten Parameter wie *Serien-* und *Parallelresonanzfrequenz* f_s und f_p , *elektromechanischer Kopplungsfaktor* k , und *Güte* Q_s (oder *Resonanzüberhöhung*) definiert. Sie folgen aus den bekannten Verknüpfungen der Komponenten aus Bild 4.1 (rechts).

$$\omega_s = 2\pi f_s = \frac{1}{\sqrt{L_m C_m}} = \frac{\omega_p}{\sqrt{1+k^2}}, \quad k = \sqrt{\frac{C_m}{C_0}}, \quad Q_s = \frac{\omega_s L_m}{R_m} = \frac{1}{\omega_s C_m R_m} \quad (4.2)$$

Mit den Hilfsgrößen $X_s = Q_s \left(\frac{\omega}{\omega_s} - \frac{\omega_s}{\omega} \right)$ und $X_p = Q_s \left(\frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega} \right)$ erhält man aus der Ersatzschaltung Bild 4.1 die auf R_m normierte Eingangsimpedanz

$$\frac{Z_e}{R_m} = -j \cdot Q_s k^2 \cdot \frac{\omega_s}{\omega} \cdot \frac{1 + j \cdot X_s}{1 + j \cdot \sqrt{1+k^2} \cdot X_p} \quad (4.3)$$

und daraus die Beziehungen

$$\bar{Z}_e = \left| \frac{Z_e}{R_m} \right| = \frac{Q_s k^2 \cdot \omega_s / \omega \sqrt{1+X_s^2}}{\sqrt{1+(1+k^2) \cdot X_p^2}} \quad (4.4) \quad \tan \varphi = -\frac{1 + \sqrt{1+k^2} \cdot X_s \cdot X_p}{Q_s k^2 \omega_s / \omega} \quad (4.5)$$

für Betrag und Phasenwinkel von Z_e / R_m .

Der typische Frequenzgang ist aus Bild 4.2 ersichtlich. Bei Serienresonanz f_s mit einem Phasennulldurchgang, liegt ein Minimum der Eingangsimpedanz, während bei Parallelresonanz f_p mit einem zweiten Phasennulldurchgang ein Maximum erscheint. Zwischen diesen beiden Nulldurchgängen erreicht der Phasenwinkel ein Maximum. Aus den Extremwerten einer typischen Messkurve nach Bild 4.2 folgen

$$\left| \frac{Z_{e,\min}}{R_m} \right| \approx \frac{Q_s k^2}{\sqrt{1+(Q_s k^2)^2}} \approx 1 \quad \text{bei } f = f_s \quad (4.6)$$

$$\left| \frac{Z_{e,\max}}{R_m} \right| \approx \frac{Q_s k^2}{\sqrt{1+k^2}} \cdot \sqrt{1 + \frac{(Q_s k^2)^2}{1+k^2}} \approx \frac{(Q_s k^2)^2}{1+k^2} \quad \text{bei } f = f_p \quad (4.7)$$

und
$$\varphi_{\max} \approx \arctan \left[\frac{1}{2} \cdot \left(X - \frac{1}{X} \right) \right] \text{ mit } X = \frac{Q_s k^2}{2\sqrt{f_p/f_s}} \text{ bei } f = \frac{f_s + f_p}{2} \quad (4.8)$$

Daraus ergeben sich die abgeleiteten Parameter

$$k_{\text{eff}}^2 = \left(\frac{f_p}{f_s} \right)^2 - 1 \quad (4.9) \quad Q_s \approx \frac{f_p + f_s}{f_p - f_s} \cdot \sqrt{\frac{Z_{e,\max}}{Z_{e,\min}}} \quad (4.10)$$

$$Qk^2 \approx \frac{f_p}{f_s} \sqrt{\frac{Z_{e,\max}}{Z_{e,\min}}} \approx 2 \sqrt{\frac{f_p}{f_s}} \frac{1 + \sin \varphi_{\max}}{\cos \varphi_{\max}} \quad (4.11)$$

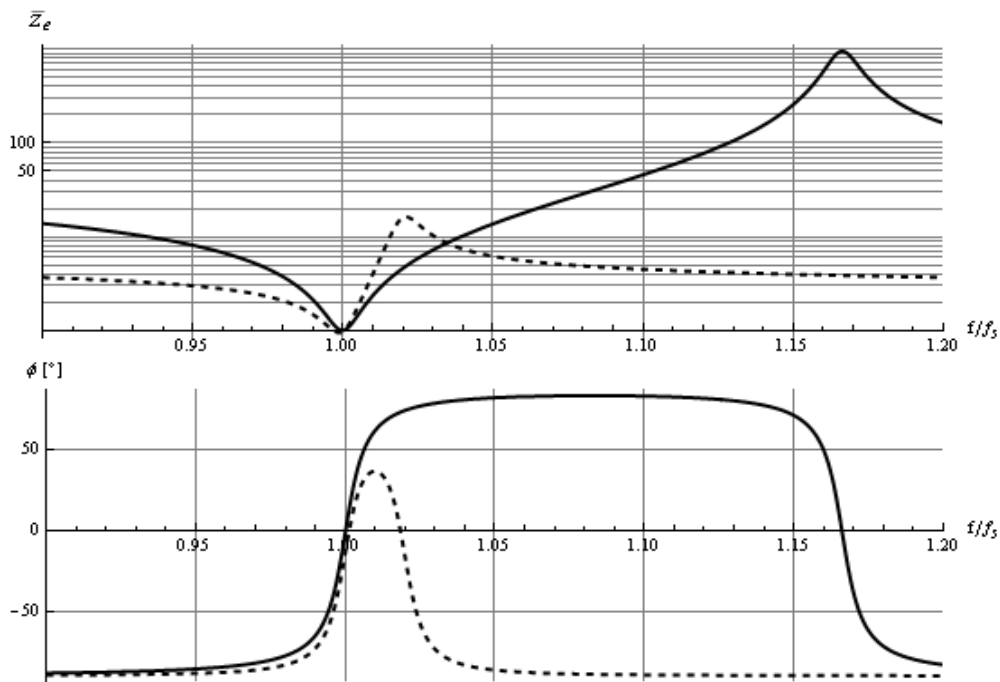


Bild 4.2: Betrag und Phasenwinkel der Eingangsimpedanz eines Ultraschallwandlers mit konzentrierten Elementen nach Bild 4.1 und Gleichung (4.3) mit $Q=100$ und $k=0.2$ (Strichlinie) bzw. $k=0.6$ (Volllinie)

Diese Parameter sind zusammen mit der gemessenen Kapazität C_0 zur Charakterisierung eines kompletten Verbundschwingers ausreichend. Deshalb folgen in Kapitel 5 analytische Berechnungen, die eine zielstrebige Optimierung ermöglichen.

Die elektrischen Ersatzgrößen der drei mechanischen Komponenten L_m (Masse), C_m (Federnachgiebigkeit) und R_m (Verlustwiderstand) aus der Ersatzschaltungen Bild 4.1, ergeben sich mit (4.2) und (4.9) bis (4.11) aus den messbaren Parametern C_0 , f_s , f_p und $Z_{e,\max}/Z_{e,\min}$ oder φ_{\max} . Sie können mit der weiter unten angegebenen Gleichung (4.18) in mechanische Komponenten rücktransformiert werden. Zunächst gilt aber für die elektrischen Äquivalente

$$L_m = \frac{1}{(\omega_p^2 - \omega_s^2) \cdot C_0}, \quad C_m = \left[\left(\frac{f_p}{f_s} \right)^2 - 1 \right] \cdot C_0, \quad R_m = \frac{1}{\omega_p C_0} \cdot \sqrt{\frac{Z_{e,\min}}{Z_{e,\max}}} \quad (4.12)$$

Die etwas abstrakten Definitionen einiger Parameter kann man nun durch einprägsame Interpretationen ergänzen. So folgt etwa aus den Speicherkapazitäten C_0 und C_m für potentielle elektrische bzw. potentielle mechanische Energie das Quadrat des Kopplungsfaktors $k^2 = C_m / C_0$ als Verhältnis von mechanisch gespeicherter Blindleistung zu elektrisch gespeicherter Blindleistung. Die Güte Q oder Resonanzüberhöhung erweist sich als Verhältnis von mechanisch gespeicherter Blindleistung zur mechanischen Verlustleistung des Wandlers (einschließlich der äußeren Verluste durch akustische Abstrahlung) und Qk^2 als Verhältnis von elektrisch gespeicherter Blindleistung zur mechanischen Verlustleistung. Ein guter elektroakustischer Wirkungsgrad für eine effektive Umwandlung der in C_0 und C_m gespeicherten Blindleistung in abgestrahlte Wirkleistung setzt eine kleine Güte bei Ankopplung an einen in der Impedanz gut angepassten äußeren Verlustwiderstand R_a und eine möglichst hohe Güte bei fehlendem Verlustwiderstand R_a voraus.

4.2 Kompensationsschaltungen zur Leistungsanpassung und Amplitudenregelung

Bei Verbundschwingern mit $Q_s k^2 < 2$ besitzt die Resonanzkurve nach Bild 4.2 keine Phasennulldurchgänge. Das erschwert den allgemein üblichen „phase locked loop“-Betrieb des HF-Generators. Deshalb wird neben dem Ausgangstransformator zur Impedanzanpassung in der Regel eine Induktivität zugeschaltet, die den Einfluss der Kapazität C_0 entweder als Parallelinduktivität $L_p = 1/\omega_s^2 C_0$ nach

Bild 4.3 bei der niederohmigen Serienresonanz oder als Serieninduktivität $L_s = 1/\omega_p^2 C_0$ nach Bild 4.4 bei der hochohmigen Parallelresonanz kompensieren soll.

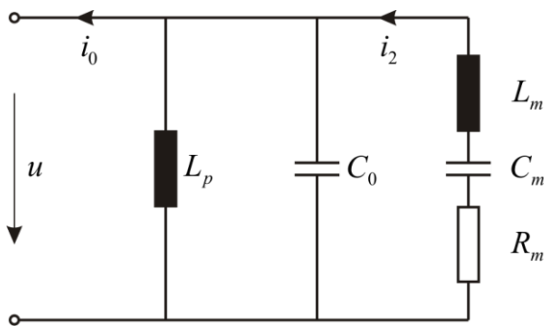


Bild 4.3: Ersatzschaltung eines Ultraschallwandlers mit konzentrierten Elementen mit einer Parallelinduktivität L_p

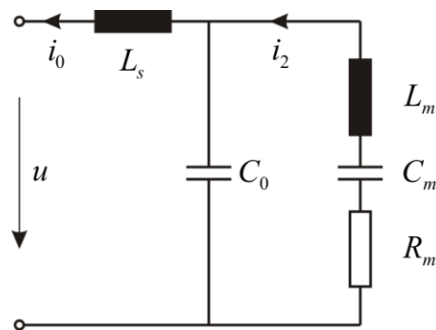


Bild 4.4: Ersatzschaltung eines Ultraschallwandlers mit konzentrierten Elementen mit einer Serieninduktivität L_s

Mit den Hilfsgrößen $X_s = Q_s \left(\frac{\omega}{\omega_s} - \frac{\omega_s}{\omega} \right)$, $X_p = Q_p \left(\frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega} \right)$ und $X_0 = Q_s \cdot k$ erhält man aus den Ersatzschaltungen Bild 4.3 bzw. Bild 4.4 normierte Eingangsimpedanzen

$$\bar{Z}_{e,p} = \left| \frac{Z_{e,s}}{R_m} \right| = \left| X_0^2 \sqrt{\frac{1 + X_s^2}{X_s^2 + (X_s^2 - X_0^2)^2}} \right| \quad \text{mit} \quad \tan \varphi_s = -X_s \cdot \left[1 - \frac{1 + X_s^2}{X_0^2} \right] \quad (4.13)$$

$$\text{und} \quad \bar{Z}_{e,p} = \left| \frac{Z_{e,p}}{R_m} \right| = \left| \frac{X_0^2}{Q^2} \sqrt{\frac{X_p^2 + (X_p^2 - X_0^2)^2}{1 + X_p^2}} \right| \quad \text{mit} \quad \tan \varphi_p = X_p \cdot \left[1 - \frac{1 + X_p^2}{X_0^2} \right]. \quad (4.14)$$

Bei korrekter Kompensation ergeben sich nahezu reziproke Resonanzkurven mit dem typischen Verlauf für den Betrag der Eingangsimpedanz nach Bild 4.5.

Im ersten Fall treten aber zwei identische, um den Faktor $(Q_s k)^2$ größere Seitenmaxima bei $\Delta f / f_s \approx \pm k / 2 \cdot (1 \pm k / 4)$ oder $X_s^2 = X_0^2 - 1 \approx X_0^2$ und im zweiten Fall zwei identische, um den Faktor $(1 + k^2) / (Q_s k)^2$ kleinere Seitenminima bei $\Delta f / f_p \approx \pm k / 2 \cdot (1 \pm k / 4)$ oder $(X_p^2 = X_0^2 - 1 \approx X_0^2)$ auf. Der normierte Frequenzabstand dieser Seitenextremwerte entspricht in beiden Fällen annähernd dem zu messenden Kopplungsfaktor k . Ihr Abstand von f_s bzw. f_p ist unsymmetrisch und unterscheidet sich um den Faktor $(1 - k / 4) / (1 + k / 4)$.

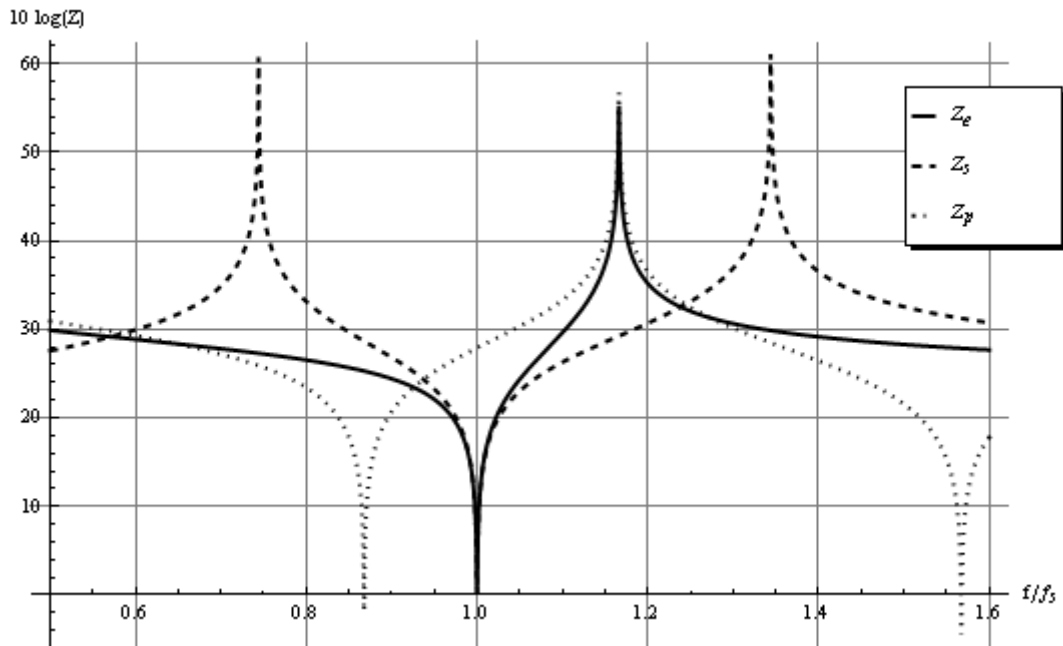


Bild 4.5: Normierter Betrag der Eingangsimpedanzen \bar{Z}_e , \bar{Z}_s und \bar{Z}_p als Funktion der normierten Frequenz f / f_s mit und ohne Kompensation der Kapazität C_0 nach (4.4), (4.13) und (4.14) mit $k = 0.6$ und $Q = 2000$

Der Phasenwinkel erreicht mittig zwischen den drei Nullstellen Extremwerte mit

$$\tan \varphi_{\max} \approx \pm \frac{3}{8} Q_s k \cdot \left(1 - \frac{4/3}{(Q_s k)^2} \right) \quad \text{bei} \quad \frac{\Delta f}{f_{s,p}} \approx \pm \frac{k}{4} \left(1 \pm \frac{k}{4} \right), \quad (4.15)$$

die selbst bei relativ kleinem $Q_s k$ eine sichere Resonanzabstimmung gewährleisten.

Wird die Kapazität C_0 wie oben beschrieben durch eine Parallelinduktivität bei f_s kompensiert, dann gilt im Arbeitspunkt bei kleiner Eingangsimpedanz und Eingangsspannung:

$$i_2 = i_0 = u / R_m \quad \text{und} \quad P_{R_m} = i_2^2 \cdot R_m = u \cdot i_0. \quad (4.16)$$

Hier sind die elektrische Spannungsamplitude u , und die Wirkleistung P_{R_m} bei konstanter Stromamplitude (als Regelgröße) proportional zu R_m .

Wird die Kapazität C_0 stattdessen durch eine Serieninduktivität bei f_p kompensiert, dann gilt im Arbeitspunkt bei großer Eingangsimpedanz und kleinem Eingangsstrom

$$u = \frac{i_2}{\omega_p C_0}, \quad i_2 = i_0 / \omega_p C_0 R_m \approx Q k^2 \cdot i_0, \quad P_{R_m} = u \cdot i_0 = i_2^2 \cdot R_m. \quad (4.17)$$

Hier sind der Eingangsstrom i_0 und die Wirkleistung P_{R_m} bei konstanter Spannungsamplitude u (als Regelgröße) proportional zu R_m . Diese Arbeitsweise ist zweckmäßig, um bei einer nach oben begrenzten Spannungsregelung mit variabler Stromstärke Spannungsspitzen bei kritischer Belastung zu vermeiden.

Der ideale Transformator in Masons Ersatzschaltung Bild 3.3 übersetzt die Reaktanzkomponente $-jZ_0 \cdot k^2 / \alpha_0 [Ns/m]$ auf der Seite des mechanischen Vierpols in eine elektrische Reaktanz $-j / \omega C_0 [V/A]$. Mit $\alpha_0 = \omega / c_0 \cdot d_0$, $C_0 = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r,0} \cdot S_0 / d_0$ und $\rho_0 c_0^2 = E_0$ ergeben sich deshalb bei verlustloser Umwandlung elektrischer in mechanische Leistung für die Umrechnung der elektrischen Strom- / Spannungsamplituden i und u in die mechanischen Schnelle- / Kraftamplituden v und F (oder deren Effektivwerte) die Beziehungen

$$\Gamma = \frac{i[A]}{v[m/s]} = \frac{F[Ns/m]}{u[V]} = k \cdot C_0 \sqrt{\frac{E_0}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r,0}}} \approx 3 \cdot k \cdot C_0 [nF], \quad \frac{Z_{mech} / \Omega_{mech}}{Z_{el} / \Omega_{el}} = \Gamma^2 \quad (4.18)$$

mit E_0 , $\varepsilon_{r,0}$ und k als Materialkonstanten, sowie C_0 als messbare Größe des piezoelektrischen Wandlers. Die Schnelle v_2 teilt sich dabei ebenso wie der Strom i_2 in zwei identische Teilkomponenten der beiden Außenflächen des Piezoelements auf. Gleichung (4.18) gilt auch, wenn, wie in der Praxis üblich, eine einfache Piezoscheibe durch ein Scheibenpaar mit gemeinsamer Mittelelektrode und doppelter Kapazität oder durch mehrere solcher, mechanisch in Reihe und elektrisch parallel geschalteter Scheibenpaare gleicher Gesamtdicke ersetzt wird. Hier wächst der Übertragungsfaktor Γ proportional zur neuen, durch Lamellierung vergrößerten Kapazität C_0 . Die Stromamplitude wächst also bei gleicher Leistung, während die erforderliche Spannungsamplitude und die Impedanz des Verbundschwingers reduziert werden.

In Kapitel 4 wird die Transformationsgleichung (4.18) für Verbundschwinger mit symmetrischer und unsymmetrischer Anordnung der Piezoscheiben zwischen passiven Metallsegmenten erweitert.

5 Berechnung des Kopplungsfaktors und der Güte von Verbundschwingern

5.1 Vorbemerkung zur Anregung von Harmonischen

Im Prinzip handelt es sich bei Verbundschwingern um Schwingungssysteme, die neben der üblichen Grundresonanz auch zu *Harmonischen* mit höheren Resonanzfrequenzen angeregt werden können. So könnte es z. B. bei der Beschallung von Flüssigkeiten und Gasen sinnvoll sein, unter gewissen Einschränkungen mit dem gleichen Schwingungssystem simultan oder gleichzeitig die $\lambda/2$ -Grundschwingung und die beiden $n\lambda/2$ -Oberschwingungen bei $n = 2$ und $n = 3$ anzuregen. Damit könnte man etwa in der Physiotherapie [21] bei 1, 2 und 3 MHz, unterschiedliche Körpertiefen ohne Schwin- gerwechsel unter Optimalbedingungen beschallen. In der Reinigungstechnik, oder der chemisch- pharmazeutischen Industrie wäre man z. B. in der Lage, die Wirkungsweise durch Variation der Arbeits- frequenz im laufenden Prozess zu optimieren. Bei der akustischen Stehwellen-Positionierung [20] flüs- siger oder fester Proben in Gasen wäre eine gleichzeitige Anregung von zwei Resonanzen vorteilhaft, um durch Überlagerung mit variablem Amplituden- und Phasen-Verhältnis die stabile Knotenposition zu variieren und zur berührungslosen axialen Probenmanipulation zu nutzen. Wichtig für derartige Spezial- anwendungen wäre ein Kompromiss anhand berechenbarer effektiver Parameter. In diesem Kapitel sollen u. a. auch dafür die notwendigen Voraussetzungen geschaffen werden.

Ein Parametersatz zur vollständigen Charakterisierung eines piezoelektrischen Schwingungssystems enthält nach Kapitel 4 als primäre Parameter die Kapazität C_0 , den dazu proportionalen elektromecha- nischen Transformationsfaktor Γ und den Materialkopplungsfaktor k des Piezowandlers. Als sekundäre Parameter gelten die effektive Güte Q und die beiden geometrieabhängigen Resonanzfrequenzen f_s und f_p , aus denen ein effektiver Kopplungsfaktor berechnet werden kann. Das gilt sowohl für einfache Piezowandler nach Bild 3.3 als auch für $\lambda/2$ -Verbundschwinger nach Bild 1.1 und Bild 3.4 oder deren kaskadenartige Kombination nach Bild 1.2 mit ein oder zwei passiven $\lambda/2$ -Elementen zur Impe- danzanpassung oder Amplitudentransformation. Bei allen Verbundschwingern verändern sich jedoch die zu erwartenden effektiven Parameter je nach relativer Dicke der aktiven Piezoelemente und deren relativer Lage zur Position der Schnelleknoten.

oder so genannte Harmonische mit $\bar{f} = 2$ oder $\bar{f} = 3$ usw. einschließen. Aus der normierten Ersatzschaltung nach Bild 3.4 folgt durch Anwendung der Kirchhoffschen Verzweigungsgesetze und bekannter Additionstheoreme für Winkelfunktionen (vgl. Anhang 2 zu Kapitel 5.4) bei Abwesenheit innerer und äußerer Verlustwiderstände der elektrische Eingangs-Blindwiderstand (Reaktanz)

$$X_{e,e} = -\frac{1}{\omega_{p,1} C_0 \bar{f}} \frac{\sin((\alpha_0 + \alpha_{1,1} + \alpha_{2,1}) \cdot \bar{f}) \cdot \left[1 - k^2 \frac{\sin(\alpha_{0,1} \bar{f})}{\alpha_{0,1} \bar{f}} \right] - 2k^2 \cdot \frac{1 - \cos(\alpha_{0,1} \bar{f})}{\alpha_{0,1} \bar{f}} \cdot (1 + \cos(\alpha_{1,1} - \alpha_{2,1}))}{\sin((\alpha_0 + \alpha_{1,1} + \alpha_{2,1}) \cdot \bar{f})} \quad (5.3)$$

Bei den Parallelresonanzen $\bar{f} = f_{p,n} / f_{p,1} = n$ mit $n = 1; 2; 3$ verschwindet der Nenner von (5.3). Hier liegen bei verlustbehafteten Schwingungssystemen nach Kapitel 4 die Maxima der Eingangsimpedanz. Es gelten also mit $\Phi_1 = \alpha_{2,1} + \alpha_0 / 2$ als Phasenabstand von der Mitte des Piezowandlers zum nächstliegenden Schnellebauch an der freien Endfläche des linken Metallsegments in Bild 5.2 die Resonanzbedingungen

$$\alpha_{0,1} + \alpha_{1,1} + \alpha_{2,1} = \pi \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} \alpha_{1,1} &= \pi - (\Phi_1 + \alpha_0 / 2) \\ \alpha_{2,1} &= \Phi_1 - \alpha_0 / 2 \end{aligned} \quad (5.4)$$

für die Grundschiwingung, bzw.

$$\alpha_{0,n} + \alpha_{1,n} + \alpha_{2,n} = n \cdot \pi \quad \text{mit} \quad \frac{\alpha_{0,n}}{\alpha_{0,1}} = \frac{\alpha_{1,n}}{\alpha_{1,1}} = \frac{\alpha_{2,n}}{\alpha_{2,1}} = \frac{\Phi_n}{\Phi_1} = n \quad (5.5)$$

für die Oberschwingungen bei $n = 2$ bzw. $n = 3$.

Infolge der Kennimpedanz-Unterschiede m in den nichtlinearen Transformationsgleichungen (5.1) ergeben sich für die Oberschwingungen bei konstanten Segmentlängen L_n geringfügige Abweichungen vom harmonischen Frequenzverhältnis (5.5), auf die wir erst im Kapitel 6 näher eingehen werden.

Die Berechnung eines $\lambda/2$ -Konverters beginnt man am besten mit der Auswahl eines verfügbaren, handelsüblichen Piezowandlers der Länge (Dicke) L_0 und Vorgabe einer gewünschten Resonanzfrequenz $f_{p,1}$. Damit ist der Phasenwinkel $\alpha_0 = 2\pi f_{p,1} / c_0 \cdot L_0 = 2\pi \cdot L_0 / \lambda_0$ festgelegt. Der Piezowandler besteht in der Regel aus zwei gleichen, mechanisch in Reihe und elektrisch parallel geschalteten Platten mit gemeinsamer („heißer“) Mittelelektrode, die mit den angrenzenden Metallsegmenten auf Massepotential liegen. Mit der Auswahl der Relativposition Φ_1 für die Mittelelektrode des Piezowandlers (vgl. Bild 5.2) ergeben sich aus (5.4) die beiden Ersatz-Phasenwinkel $\alpha_{1,1} = \pi - (\Phi_1 + \alpha_0 / 2)$ und $\alpha_{2,1} = \Phi_1 - \alpha_0 / 2$, aus denen mit (5.1) und (5.2) bei unveränderter Resonanzfrequenz die wahren Längen

$$L_1 = \frac{c_1}{2\pi f_{p,1}} \cdot \arctan \left[\frac{\tan(\pi - (\Phi_1 + \alpha_0 / 2))}{m_1} \right] = \frac{\lambda_1}{4} \cdot \left(1 + \frac{2}{\pi} \cdot \operatorname{arccot} \left[\frac{\tan(\Phi_1 + \alpha_0 / 2)}{m_1} \right] \right) \quad (5.6)$$

$$\text{und} \quad L_2 = \frac{c_2}{2\pi f_{p,1}} \cdot \arctan \left[\frac{\tan(\Phi_1 - \alpha_0 / 2)}{m_2} \right] = \frac{\lambda_2}{2} \cdot \frac{1}{\pi} \arctan \left[\frac{\tan(\Phi_1 - \alpha_0 / 2)}{m_2} \right] \quad (5.7)$$

$$\text{und} \quad L_0 = \frac{c_0}{2 \cdot f_{p,1}} \cdot \frac{\alpha_0}{\pi}$$

der Segmente und die Gesamtlänge $L = L_0 + L_1 + L_2$ des Verbundschwinger als Funktionen von Φ_1 , α_0 und m_1 bzw. m_2 berechnet werden können.

5.3 Elektromechanische Transformationsformeln für den ungestuften $\lambda/2$ -Verbundschwinger

Die Transformationsbeziehung (4.18) des reinen, unbelasteten Piezowandlers, mit der aus zwei gleichen Komponenten bestehenden elektrischen Stromamplitude $i = i_1 + i_2$, den resultierenden, identischen Schnelleamplituden $v_1 = -v_2 = i / 2\Gamma$ an den beiden Außenflächen und dem Transformator-Faktor Γ , lässt sich aus der Analyse der symmetrischen Ersatzschaltung Bild 3.3 anhand der Kirchhoffschen Gesetze herleiten. In ähnlicher Weise findet man aus der auf Z_0 normierten Ersatzschaltung Bild 3.4 einen einfachen Zusammenhang zwischen den Schnelle-Amplituden $v_{1,1}$ und $v_{2,1}$ an den beiden Außenflächen des Verbundschwingers und den zur Wandlerstromstärke i proportionalen Schnelle-Amplituden v_1 und v_2 an den beiden Begrenzungsflächen des Piezowandlers. Beide Wertepaare sind zusammen mit dem Transformationsfaktor $\Gamma = i / \Delta v = i / (v_1 - v_2)$ und den zugehörigen Strom-Amplituden $i = i_1 + i_2$ in der Ersatzschaltung nach Bild 3.4 durch deutliche Markierung hervorgehoben. Mit den Impedanztransformationen (5.1) und (5.2) und der Resonanzbedingung (5.4) erhält man (vgl. Anhang zu Kapitel 5.3) sehr genaue Näherungen für die normierten Schnelleamplituden an den Endflächen des Konverters. Mit $a = (1 - m) / m$ gilt:

$$\frac{v_{1,1}}{\Delta v} = \frac{1}{2 \sin \Phi \cdot \sin(\alpha_0 / 2)} \cdot \frac{\cos(\Phi + \alpha_0 / 2)}{\cos \left[\arctan \left(\frac{\tan(\Phi + \alpha_0 / 2)}{m_1} \right) \right]} \approx \frac{1 + a_1 \cdot [\sin(\Phi + \alpha_0 / 2)]^2}{2 \cdot \sin \Phi \cdot \sin(\alpha_0 / 2)} \quad (5.8)$$

$$\text{und} \quad \frac{v_{2,1}}{\Delta v} = \frac{1}{2 \sin \Phi \cdot \sin(\alpha_0 / 2)} \cdot \frac{\cos(\Phi - \alpha_0 / 2)}{\cos \left[\arctan \left(\frac{\tan(\Phi - \alpha_0 / 2)}{m_2} \right) \right]} \approx \frac{1 + a_2 \cdot [\sin(\Phi - \alpha_0 / 2)]^2}{2 \cdot \sin \Phi \cdot \sin(\alpha_0 / 2)} \quad (5.9)$$

Die Fehlerabweichungen für realistische Bereichsgrenzen $\pi / 20 \leq \Phi \pm \alpha_0 / 2 \leq \pi / 2$ liegen bei Titan-Konvertern unter $\pm 0.1\%$ und den bei relativ schlecht angepassten Aluminium-Stahl-Konvertern unter $\pm 1\%$.

In beiden Gleichungen wächst der Zähler bei $m_1 = m_2 < 1$ ($a > 0$) mit zunehmendem Argument der Sinusfunktion, sodass die Schnelleamplitude $v_{1,1}$ an der Lastseite stets größer ist als die Schnelleamplitude $v_{2,1}$ an der Rückseite. Bei $m_1 = m_2 > 1$ ($a < 0$) nimmt der Zähler dagegen mit zunehmendem Argument in der Sinusfunktion ab, sodass die Schnelleamplitude $v_{1,1}$ an der Lastseite stets kleiner wäre als $v_{2,1}$ an der Rückseite. Deshalb verwendet man schwere Metalle mit $m > 1$ bei Konvertern nur

als *backing*. Bei $\Phi + \alpha_0 / 2 = \pi / 2$, $L_1 = \lambda_1 / 2$, $m_1 < 1$ und $m_2 > 1$ erreicht der Verstärkungs-Quotient $V = v_{1,1} / v_{2,1}$ von α_0 abhängige Maximalwerte

$$1 + a_1 \leq V = \frac{1 + a_1}{1 + a_2 \cdot \cos^2 \alpha_0} \leq \frac{1 + a_1}{1 + a_2} \quad (5.10)$$

Diese können bei typischen Konvertern aus Al(1), PZT(0), Stahl(2) mit $a_1 = 0.79$ und $a_2 = -0.39$ zwischen $V_{\min} = 1.8$ und $V_{\max} = 2.9$ liegen.

Im Idealfall exakter Impedanzanpassung ($m_1 = m_2 = 1$, $a_1 = a_2 = 0$) würden die Gleichungen (5.8) und (5.9) in die symmetrische Beziehung

$$\frac{v_{1,1}}{\Delta v} = \frac{v_{2,1}}{\Delta v} = \frac{1}{2 \cdot \sin \Phi \cdot \sin(\alpha_0 / 2)} \quad (5.11)$$

übergehen.

Wir demonstrieren die Berechnung eines ungestuften Konverters für drei typische Spezialfälle der normierten Wandlerposition Φ .

A: Bei zentriertem Piezowandler folgt z. B. aus den Gleichungen (5.8) und (5.9) mit $\Phi = \pi / 2$

$$\frac{v_{11}}{\Delta v} \approx \frac{1/m_1 - a_1 \cdot \sin^2(\alpha_0 / 2)}{2 \cdot \sin(\alpha_0 / 2)}, \quad \frac{v_{2,1}}{\Delta v} \approx \frac{1/m_2 - a_2 \cdot \sin^2(\alpha_0 / 2)}{2 \cdot \sin(\alpha_0 / 2)} \quad (5.12)$$

B: Bei endständigem Piezowandler folgt aus den Gleichungen (5.8) und (5.9) mit $\Phi = \alpha_0 / 2$

$$\frac{v_{1,1}}{\Delta v} \approx \frac{1/m_1 - a_1 \cdot \cos^2(\alpha_0)}{1 - \cos(\alpha_0)}, \quad \frac{v_{2,1}}{\Delta v} \approx \frac{1}{1 - \cos(\alpha_0)} \quad (5.13)$$

C: Bei auf dem linken $\lambda / 4$ -Segment zentriertem Piezowandler ergibt sich mit $\Phi = \pi / 4$

$$\frac{v_{1,1}}{\Delta v} \approx \frac{1/m_1 - a_1 \cdot \cos^2(\pi / 4 + \alpha_0 / 2)}{\sqrt{2} \cdot \sin(\alpha_0 / 2)}, \quad \frac{v_{2,1}}{\Delta v} = \frac{1/m_2 - a_2 \cdot \cos^2(\pi / 4 - \alpha_0 / 2)}{\sqrt{2} \cdot \sin(\alpha_0 / 2)} \quad (5.14)$$

Tabelle 5.1 zeigt die Amplituden-Verhältnisse $v_{11} / \Delta v$ und $v_{2,1} / \Delta v$ sowie die Segmentlängen L_1 und L_2 nach (5.6) und (5.7) bei einer Resonanzfrequenz $f_r = 30 \cdot kHz$ und einer typischen normierten Wandlerdicke $L_0 = \lambda_0 / 10$ bzw. $\alpha_0 = 0.2 \cdot \pi$ für die drei o. a. Wandlerpositionen A, B und C bei drei typischen Materialkomponenten Titan, Aluminium und Stahl. Die Materialkonstanten a_n , m_n und c_n in der Kopfzeile sind aus der Tabelle 8.1 entnommen. Bei einer anderen Resonanzfrequenz f_r müssen die Segmentlängen L_n und die resultierende Gesamtlängen L bei unveränderten Amplitudenverhältnissen $v_{11} / \Delta v$ und $v_{2,1} / \Delta v$ mit dem Faktor $30kHz / f_r$ angepasst werden.

Tabelle 5.1 Normierte Schnelleamplituden nach (5.12) bis (5.14) und Resonanzlängen bei 30 kHz

Material	Al $a = 0.792, m = 0.558, c = 5.1$	Ti $a = 0.139, m = 0.878, c = 4.9$	Fe $a = -0.389, m = 1.637, c = 5.17$
$v_{1,1}(A)$	2.78	1.82	1.05
$v_{2,1}(A)$	2.78	1.82	1.05
$v_{1,1}(B)$	6.67	5.49	4.53
$v_{2,1}(B)$	5.24	5.24	5.24
$v_{1,1}(C)$	3.73	2.54	1.58
$v_{2,1}(C)$	2.66	2.35	2.11
$L_1(A) / mm$	47.35	48.1	56.5
$L_2(A) / mm$	37.65	33.6	29.7
$L_1(B) / mm$	67.3	58.8	54.5
$L_2(B) / mm$	0	0	0
$L_1(C) / mm$	50.0	51.8	62.14
$L_2(C) / mm$	20.0	13.7	8.3
$\lambda / 2 / mm$	85	81.6	86.2

Man kann gleiche oder unterschiedliche Metalle aus Tabelle 5.1 mit dem Piezowandler kombinieren:

Wählen wir als Beispiel für die **Version A** die Kombination Stahl(2)-PZT4(0)-Aluminium(1), dann gilt

$$v_{11} / \Delta v = 2.78, \quad v_{2,1} / \Delta v = 1.05, \quad L_1 = 47.35 mm, \quad L_2 = 29.68 mm \quad \text{und} \quad L = 89 mm.$$

Wählen wir als Beispiel für die **Version B** die Kombination PZT4(2)-Titan(1), dann gilt

$$v_{11} / \Delta v = 5.49, \quad v_{2,1} / \Delta v = 5.24, \quad L_1 = 58.8 mm, \quad L_2 = 0 \quad \text{und} \quad L = 69.8 mm.$$

Als Beispiel für die **Version C** wählen wir die Kombination Stahl (2)-PZT4(0)-Titan(1) und finden

$$v_{11} / \Delta v = 2.54, \quad v_{2,1} / \Delta v = 2.1, \quad L_1 = 51.8 mm, \quad L_2 = 8.3 mm \quad \text{und} \quad L = 71.1 mm.$$

Bei endständigem Piezoelement (Version B) lassen sich offensichtlich mit gleicher Materialkombination, gleicher Dicke und gleicher mechanischer Belastung des Piezowandlers im Vergleich mit den Versionen A und C wesentlich größere Schnelleamplituden $v_{1,1}$ an der Lastseite des Verbundschwingers erzielen. Die Quotienten $v_{1,1}(B) / v_{1,1}(A)$ und $v_{1,1}(B) / v_{1,1}(C)$ konvergieren sogar mit abnehmender Dicke des Piezowandlers nahezu proportional zu $1 / \alpha_0$ gegen $2m / \alpha_0$ bzw. $\sqrt{8} \cdot m / (1 + m)\alpha_0$. Bei großer Leistung wird das manchmal vorteilhaft für wesentlich kleinere Stromamplituden bei entsprechend größerer elektrischer HF-Spannung genutzt.

Wir kombinieren nun Gleichung (5.8) mit (4.18), indem wir die Differenz $\Delta v = v_1 - v_2 = i / \Gamma = i / 3kC_0$ der Schnelleamplituden an den Endflächen des Piezowandlers durch die proportionale Stromamplitude i

und die Kapazität C_0 durch $C_0 = \varepsilon_0 \varepsilon_{0,r} / 2 \lambda_0 \cdot (\pi D)^2 / \alpha_0$ ersetzen. Damit ergibt sich für die elektrische Amplitudeneichung der Schnelle $v_{1,1}$ an der Lastseite eines dreiteiligen Verbundschwingers

$$\frac{v_{1,1}}{i} = B_0(f) \cdot F(\Phi, \alpha_0, m_1) \quad \text{mit} \quad B_0(f) \approx \frac{2/3 \cdot \lambda_0(f)}{\pi^2 \varepsilon_0 \varepsilon_{r,0} \cdot k \cdot D^2(f)} \propto f_r \quad (5.15)$$

und

$$F(\Phi, \alpha_0, m_1) = \frac{1 + a_1 \cdot \sin^2(\Phi + \alpha_0 / 2)}{\sin \Phi \cdot \frac{\sin \alpha_0}{\alpha_0}} \approx \frac{1 + a_1 \cdot \sin^2(\Phi + \alpha_0 / 2)}{\sin \Phi} \quad (5.16)$$

Der dimensionsbehaftete Faktor $B_0(f)$ enthält die dielektrischen Konstanten und den konstanten Material-Kopplungsfaktor $k = k_{33} \approx 1/\sqrt{2}$, sowie die von der Arbeitsfrequenz f_r des Verbundschwingers abhängige Wellenlänge $\lambda_0 = c_0 / f_r$, und den frequenzabhängigen Durchmesser D des Piezowandlers. Bei gleichem Schlankheitsgrad D/L ist $D \cdot f_r = \text{const.}$ und $B_0(f)$ ist eine zu f_r proportionale Konstante. Der zweite Faktor $F(\Phi, \alpha_0, m_1)$ kann für typische Wandlerdicken $\alpha_0 \leq \pi/4$ durch die einfachere Näherung rechts ersetzt werden. Da auf der Lastseite von Konvertern vorwiegend Segmente mit $m_1 < 1$, z. B. aus Aluminium oder Titan und mit Längen $L_1 \geq \lambda_1 / 4$ eingesetzt werden, kann die normierte Dicke α_0 des Piezoelements nur zwischen etwa $0.05 \cdot \pi$ und $0.5 \cdot \pi$ variieren. In diesem Bereich verändert sich $F(\Phi, \alpha_0, m_1)$ in den bevorzugten Wandlerpositionen $\Phi_A = \pi/2$ und $\Phi_C = \pi/4$ bei Aluminium und Titan nur um wenige Prozentpunkte $F(\Phi_{A...})_{Al} \approx 1.7 \pm 8\%$ bzw. $F(\Phi_{C...})_{Al} \approx 2.44 \pm 16\%$, $F(\Phi_{A...})_{Ti} \approx 1.13 \pm 3\%$ bzw. $F(\Phi_{C...})_{Ti} \approx 1.67 \pm 8\%$, die als Entscheidungskriterium beim Design eines Verbundschwingers ausscheiden.

Bei endständigem Wandler mit $\Phi_B = \alpha_0 / 2$ kann die starke Variation zwischen

$$13 \geq F(\Phi_{B...})_{Al} \geq 2.8 \quad \text{bzw.} \quad 12.8 \geq F(\Phi_{B...})_{Ti} \geq 1.8$$

und der charakteristische Anstieg mit abnehmender, normierter Wandlerdicke α_0 dagegen bei Designüberlegungen eine Rolle spielen. Hier lässt sich (5.15) mit Toleranzen von $\pm 5\%$ bzw. $\pm 3\%$ durch die einfachen Näherungen

$$F(\Phi_{B,...})_{Al} \approx 1 + 0.75 \cdot (\pi / \alpha_0)^{2/3} + 0.25 \cdot (\pi / \alpha_0) \quad (5.17)$$

bzw.

$$F(\Phi_{B,...})_{Ti} \approx 1 + 0.33 \cdot (\pi / \alpha_0) + 0.062 \cdot (\pi / \alpha_0)^{3/2} \quad (5.18)$$

ausdrücken.

5.4 Berechnung des Kopplungsfaktors aus den Nullstellen der Eingangsreaktanz

In Kapitel 4.1 wurde gezeigt, wie man den effektiven Kopplungsfaktor eines piezoelektrischen Schwingungssystems aus den gemessenen Resonanzfrequenzen f_s und f_p bei Parallel- und Serienresonanz einer Ersatzschaltung mit konzentrierten Elementen berechnen kann. Weil dabei innere und äußere Verluste keine Rolle spielen, enthält die zuständige Ersatzschaltung Bild 3.4 nur reine Blindwiderstände. Die elektrische Eingangsreaktanz hatten wir mit (5.3) und der Resonanzbedingung (5.4) bereits im vorigen Kapitel eingeführt. Mit Φ_1 als Phasenabstand von der Mitte des Piezowandlers zum Schnellebauch an der freien Endfläche des Metallsegments links in Bild 5.2 also gilt anstelle von (5.3)

$$X_{e,e} = -\frac{1}{\omega_{p,1} C_0 \bar{f}} \frac{\sin(\pi \bar{f}) \cdot \left[1 - k^2 \frac{\sin(\alpha_{0,1} \bar{f})}{\alpha_{0,1} \bar{f}} \right] - 4k^2 \cdot \frac{1 - \cos(\alpha_{0,1} \bar{f})}{\alpha_{0,1} \bar{f}} \cdot [\sin^2(\Phi_1 \bar{f})]}{\sin(\pi \bar{f})} \quad (5.19)$$

Bei den Parallelresonanzen $\bar{f} = f_{p,n} / f_{p,1} = n$ mit $n = 1, 2, 3$ verschwindet der Nenner von (5.19). Hier liegen bei verlustbehafteten Schwingungssystemen nach Kapitel 4 die Maxima der Eingangsimpedanz. Bei den Serienresonanzen $\bar{f} = f_{s,n} / f_{p,1} = n \cdot (1 + k_{eff,n}^2)^{-1/2} \approx n \cdot (1 - k_{eff,n}^2 / 2)$ muss der Zähler in (5.19) verschwinden. Daraus folgt für den effektiven Kopplungsfaktor zunächst die Zwischenlösung

$$\sin(n\pi \sqrt{1 - k_{eff,n}^2}) = \frac{4k^2 \cdot (1 - \cos(n\alpha_{0,1} \sqrt{1 - k_{eff,n}^2})) \cdot \sin^2(n\Phi_1 \sqrt{1 - k_{eff,n}^2})}{n\alpha_{0,1} \sqrt{1 - k_{eff,n}^2} - k^2 \sin(n\alpha_{0,1} \sqrt{1 - k_{eff,n}^2})} \quad (5.20)$$

und nach einer Taylorreihenentwicklung als gute Näherung

$$k_{eff,n}^2 \approx \frac{4k^2}{n\pi} \cdot \frac{1 - \cos(n\alpha_{0,1})}{n\alpha_{0,1} - k^2 \sin(n\alpha_{0,1})} \cdot \sin^2(n\Phi_1) \quad \text{mit} \quad k_{0,n}^2 \approx \frac{8k^2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{n^2} \quad (5.21)$$

für den reinen Piezowandler.

Die Gleichung (5.21) lässt sich in drei spezifische Faktoren unterteilen:

$$k_{eff,n}^2 \approx \frac{1}{n} \cdot F(k^2, n\alpha_{1,0}) \cdot \sin^2(n \cdot \Phi_1) \quad (5.22)$$

mit

$$F(k^2, n\alpha_{0,1}) = \frac{4k^2 / \pi \cdot (1 - \cos(n\alpha_{0,1}))}{n\alpha_{0,1} - k^2 \sin(n\alpha_{0,1})} \leq 0.866 \cdot k^2 \cdot (1 + k^2)^{0.75}$$

und

$$\alpha_0 / 2 \leq \Phi_1 = \alpha_{2,1} + \alpha_{0,1} / 2 \leq \pi / 2$$

Der erste Faktor $1/n$ hängt nur von der Anzahl n der $\lambda/2$ -Komponente im Verbundschwinger ab, bei Verbundschwingern in der Grundresonanz ($n = 1$) in Kombination mit ein bis drei $\lambda/2$ -Segmenten gilt hier also 1, 1/2 oder 1/3.

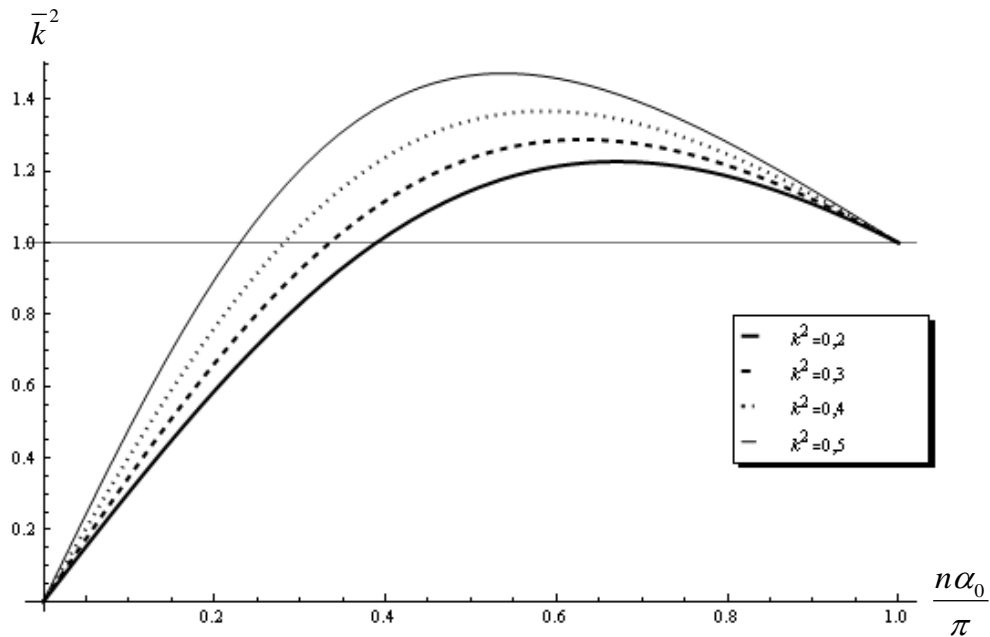


Bild 5.2: Maximaler normierter effektiver Kopplungsfaktor nach (5.22) als Funktion der normierten Dicke $n \cdot \alpha_0 \leq \pi$ des im Druckbauch bei $\sin(\Phi_n) = 1$ angeordneten Piezowandlers. Der Normierungsparameter $8/\pi^2 \cdot k^2$ des reinen Piezowandlers wird bei $n \cdot \alpha_0 = \pi$ erreicht.

Der zweite Faktor (Bild 5.3) ist eine nach unten offene, parabelähnliche Funktion, die als Abszisse von der normierten Dicke $n\alpha_{0,1} \leq \pi$ des ausgewählten Piezoelements einschließlich der gewünschten Harmonischen n und seinem Kopplungsfaktor k (als Parameter) bestimmt wird. Die Funktion erreicht Maximalwerte $F(k^2, n\alpha_{0,1}) \approx 0.866 \cdot k^2 (1 + k^2)^{0.75}$, die um den Faktor $(1 - 2(k/\pi)^2)^{-1}$ größer sind als bei reinen Piezokeramikwandlern mit $n\alpha_{1,0} = \pi$ (im Bild rechts).

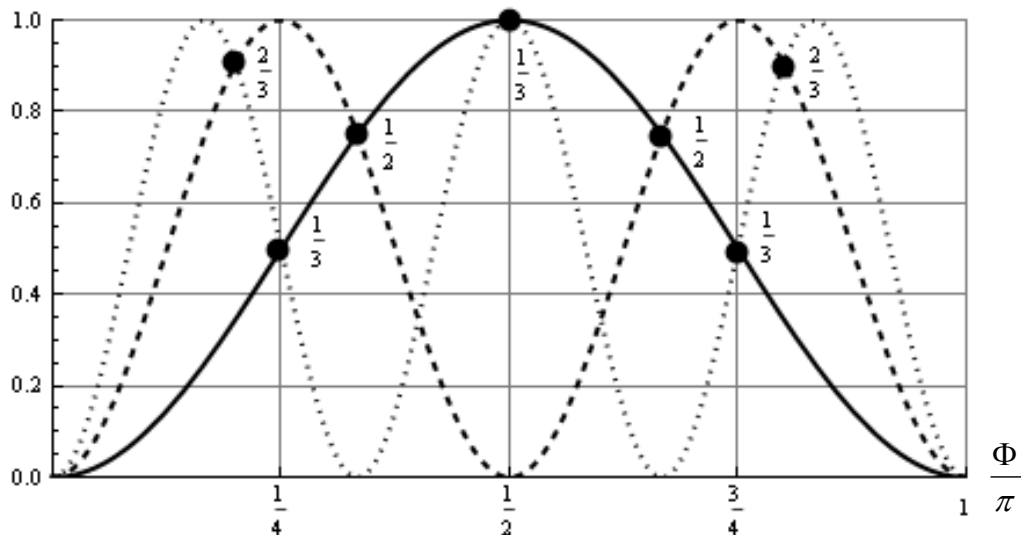


Bild 5.3: Variation des Teilterms $\sin^2(\Phi_n)$ im Kopplungsfaktor als Funktion des Phasenwinkels Φ_n für die Position des Piezoelements im Verbundschwinger für $n = 1$ (—), $n = 2$ (---) und $n = 3$ (· ·)

Die endgültige Größe des effektiven Kopplungsfaktors wird durch den dritten Faktor $\sin^2 \Phi_n$ in (5.22) bestimmt. Dieser variiert nach Bild 5.3 als Funktion der normierten Wandlerposition Φ_1 symmetrisch zur Bildmitte ($\Phi_1 = \pi/2$) zwischen den Extremwerten $\Phi_{1,\min} = \alpha_{0,1}/2$ und $\Phi_{1,\max} = \pi - \alpha_{0,1}/2$. In den Kreuzungspunkten bei $\Phi_1 = \pi/5$, $\Phi_1 = \pi/3$ und $\Phi_1 = \pi/2$ erreicht er paarweise Übereinstimmung für die entsprechend markierten Spektralkomponenten. Im günstigsten Kompromiss der Faktoren aus Bild 5.2 und Bild 5.3 findet man bei einem typischen Materialkopplungsfaktor $k = k_{33} \approx 0.7$ z. B. paarweise Übereinstimmungen (5.23), (5.24) und (5.25), mit maximalen effektiven Kopplungsfaktoren bei unterschiedlichen, impedanzkompensierten Ersatzlängen L_n . Diese folgen aus den normierten Längenverhältnissen $\alpha_{1,2}/\alpha_{1,0}/\alpha_{1,1}$ nach Bild 5.2 und $\bar{\alpha}_{1,n} = \alpha_{1,n}/\pi = 2f_s \cdot L_n/c_n$:

$$k_{1,eff}^2 = k_{3,eff}^2 = 0,16 \quad \text{bei} \quad \bar{\alpha}_{1,2}/\bar{\alpha}_{1,0}/\bar{\alpha}_{1,1} \approx 0,075/0,25/0,675. \quad (5.23)$$

$$k_{1,eff}^2 = k_{2,eff}^2 \approx 0,29 \quad \text{bei} \quad \bar{\alpha}_{1,2}/\bar{\alpha}_{1,0}/\bar{\alpha}_{1,1} \approx 0,13/0,30/0,57. \quad (5.24)$$

$$k_{2,eff}^2 = k_{3,eff}^2 \approx 0,20 \quad \text{bei} \quad \bar{\alpha}_{1,2}/\bar{\alpha}_{1,0}/\bar{\alpha}_{1,1} \approx 0,075/0,18/0,745. \quad (5.25)$$

Die gleichen Zahlenpaare für $k_{eff,n}^2$, liegen im Gegensatz zu den Parameterwerten $Qk_{eff,n}^2$ in Kapitel 5.6 deutlich unter den erreichbaren Maximalwerten für Einzelkomponenten. Die $\alpha_{1,n}$ Phasenwinkel lassen sich nach Kapitel 6.1 für typische Piezokeramik/Metallkombinationen in reale Längen umrechnen. Bei drei Spektralkomponenten ist eine analytische Angleichung der effektiven Kopplungsfaktoren schwierig.

5.5 Berechnung der effektiven Güte von Verbundschwingern

Prinzipiell kann die effektive Güte eines Verbundschwingers nach Bild 5.2 ähnlich wie der Kopplungsfaktor in Kapitel 5.4 aus der Eingangsimpedanz der Ersatzschaltung nach Bild 3.4 berechnet werden. Dabei müssten allerdings mit (3.1) und (3.2) die komplexen Ausbreitungskonstanten $\gamma_n = j\alpha_n + \beta_n$ der drei Komponenten (für die inneren Verluste) und mit (2.23) und (3.8) das Anpassungsmaß $m = \rho c_{Fl}/\rho c_0$ der Lastimpedanz (für die äußeren Verluste) berücksichtigt werden. Die Netzwerk-Berechnung mit Hilfe der Kirchhoff'schen Verzweigungsgesetze würde dann nach der Trennung von Real- und Imaginärteilen sehr aufwendig.

Geht man stattdessen von bekannten Verlustfaktoren β_n der Komponenten und den entsprechenden, dazu reziproken, frequenzunabhängigen Materialgüten Q_n aus, dann findet man die relative Güte des Verbundschwingers, bezogen auf die hohe Güte Q_1 des lastseitigen Metalls bei identischer Geometrie und Frequenz, durch Integration über die einzelnen Verlustkomponenten. Bei der Berechnung macht man davon Gebrauch, dass die effektive Güte reziprok zur mechanischen Verlustleistung durch elastische Hysterese bzw. durch akustische Abstrahlung ist. Erstere ist, ebenso wie die volumenspezifische Wärmeentwicklung und Temperatursteigerung, reziprok zur Materialgüte Q im entsprechenden Segment und proportional zum positionsabhängigen Quadrat der Schalldruckamplitude. Bei kompensierter Kennimpedanz folgt letztere einer Sinusfunktion, die aber auf der Lastseite nach (5.10) eine, um den Verstärkungsfaktor $V = v_{1,1}/v_{2,1}$ größere Amplitude besitzt. Im Schnelle-Bauch der Lastseite entfällt

das Integral hinter dem Anpassungsmaß m , falls sich im fluiden Medium eine reine fortschreitende Welle ausbreitet. Es gilt also unter Einschluss der Oberwellen mit $n > 1$

$$\bar{Q}_{eff} = \frac{Q_{eff}}{Q_1} = \frac{\int_0^{n\pi/2} \sin^2 \varphi \cdot d\varphi + \int_0^{n\pi} V^2 \sin^2 \varphi \cdot d\varphi}{\frac{Q_1}{Q_2} \int_0^{n(\Phi-\alpha_0/2)} \sin^2 \varphi \cdot d\varphi + \int_{n(\Phi+\alpha_0/2)}^{n\pi/2} \sin^2 \varphi \cdot d\varphi + \frac{Q_1}{Q_0} \cdot \int_{n(\Phi-\alpha_0/2)}^{n\pi/2} \sin^2 \varphi \cdot d\varphi + \int_{n\pi/2}^{n\pi} V^2 \sin^2 \varphi \cdot d\varphi + 2Q_1 \cdot mV^2} \quad (5.26)$$

Zur Vereinfachung der Rechnung kombinieren wir mit dem Piezowandler bei $Q_0 \approx 500$ zwei gleiche Metallkomponenten z. B. aus Titan mit typischen Werten $Q_1 = Q_2 = Q_m \approx 4Q_0$. Die Integration nach Gleichung (5.13) liefert dann bei Luftankopplung ($m = 0$) die einfache Beziehung

$$Q_{eff,n} \approx \frac{Q_m}{1 + \left[\frac{2 \cdot \alpha_{0,1}}{\pi \cdot (1 + V^2)} \left(\frac{Q_m}{Q_0} - 1 \right) \cdot \left(1 - \frac{\sin n\alpha_{0,1}}{n\alpha_{0,1}} \cdot \cos(2n\Phi_1) \right) \right]} \quad (5.27)$$

und variiert zwischen den Minima bei mittenständigem Wandler nach (5.28) mit $\Phi_1 = \pi/2$ und $V = 1$

$$Q_{eff,n,min} \approx \frac{2000}{1 + 3 \frac{\alpha_{0,1}}{\pi} \cdot \left(1 + \frac{\sin(n\alpha_{0,1})}{n\alpha_{0,1}} \right)} \quad (5.28)$$

und den Maxima bei endständigem Wandler mit $\Phi_1 = \alpha_0/2$ nach (5.29)

$$Q_{eff,n,max} \approx \frac{2000}{1 + 3 \frac{\alpha_{0,1}}{\pi} \cdot \left[1 - \frac{\sin 2n\alpha_{0,1}}{2n\alpha_{0,1}} \right] \cdot \frac{2}{1 + V^2}} \quad (5.29)$$

$$Q_{eff,n,0.5} \approx \frac{2000}{1 + 3 \frac{\alpha_{0,1}}{\pi} \cdot \frac{2}{1 + V^2}} \quad (5.30)$$

Die Gleichung (5.30) beschreibt die von n unabhängige Variation der effektiven Güte bei $\Phi_1 = \pi/4$. Diese mittige Position des Piezowandlers auf dem linken $\lambda/4$ -Segment des Verbundschwingers (Fall C in Kapitel 5.3) erweist sich aus Konstruktionsgründen als optimal (vgl. Kapitel 6.2). Der typische Kurvenverlauf für die Gleichungen (5.28) bis (5.30) ist aus Bild 5.4 ersichtlich. Diese Kurven gelten mit $V \approx 1$ als Näherungen für Verbundschwinger mit 2 Titansegmenten. Bei Aluminium und Stahl ist wegen der größeren Verstärkungsfaktoren (5.10) und unterschiedlicher Materialgüten $Q_1 = Q_2 = Q_m$ mit erheblichen Abweichungen zu rechnen.

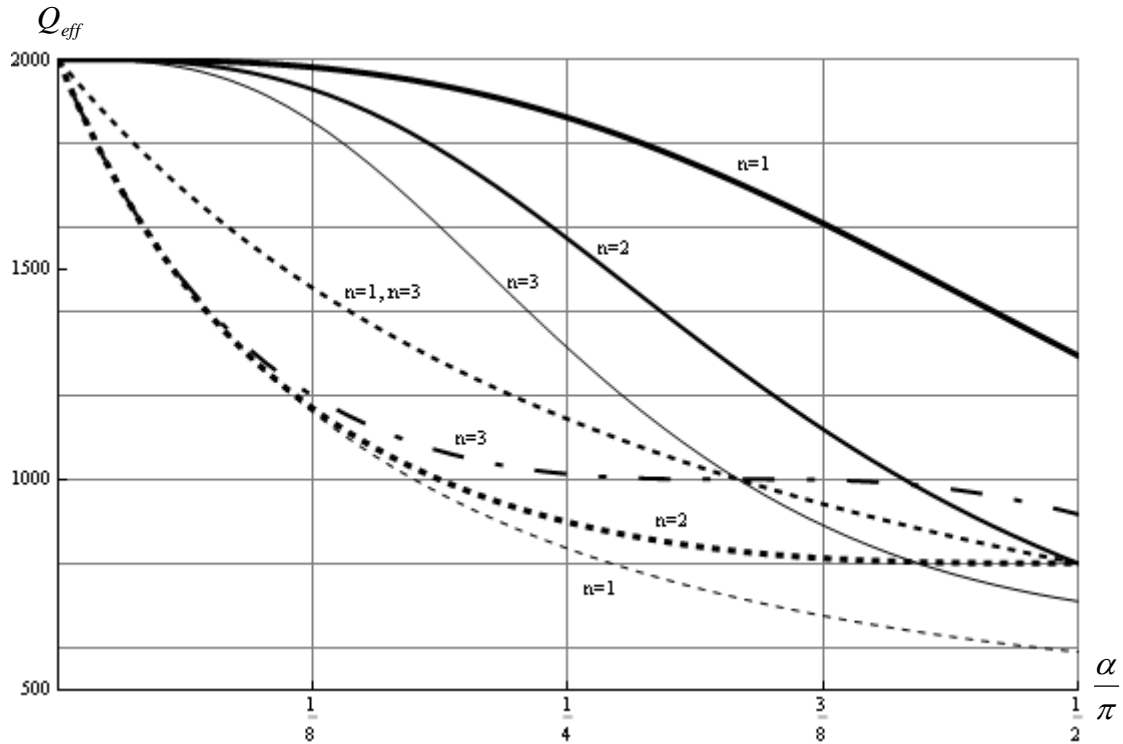


Bild 5.4: Güte verlustbehafteter Verbundschwinger ohne äußere Belastung als Funktion der normierten Dicke des Piezoelements bei endständigem Wandler mit $\Phi_n = n\alpha_0/2$ (obere Kurven), bei $\sin^2(\Phi_n) = 1$ (untere Kurven) und bei $\sin^2(\Phi_n) = 1/2$ (mittlere Kurve)

Die Güte der Verbundschwinger verringert sich bei allen drei Harmonischen durch steigende Verluste mit zunehmender normierter Dicke $\alpha_{0,1}$ und zunehmendem normiertem Abstand Φ_1 des Piezowandlers von den Schwingerendflächen. Bei einseitiger Ankopplung an Wasser oder andere reale Lastimpedanzen folgt aus (5.26)

$$Q_{eff,n} \approx \pi/2 \cdot n/m. \quad (5.31)$$

Die effektive Güte des Verbundschwingers hängt dann, wie in (3.10) gezeigt wurde, unabhängig von $\alpha_{0,1}$ und Φ_1 nur vom Anpassungsmaß m und der Ordnungszahl n der Harmonischen ab. Eine hohe Güte in Luft ist dabei wichtig für einen guten mechanisch-akustischen Wirkungsgrad bei Abstrahlung in Flüssigkeiten oder andere, relativ große Lastimpedanzen (vgl. Kapitel 5.7).

5.6 Das Produkt Qk^2 als mögliches Qualitätskriterium für Verbundschwinger

Durch Multiplikation der Gleichung (5.22) mit (5.28), (5.29) oder (5.30) erhält man die zur Beurteilung eines Verbundschwingers wichtige Kenngröße $Qk^2_{eff,n}$. Sie ist bei Vorgabe eines typischen äußeren Belastungswiderstandes ein Maß für die Leistungsreserve des Verbundschwingers. Je größer der Parameter $Qk^2_{eff,n}$ ist, desto ausgeprägter und belastbarer sind die Resonanzen im Spektrum der Eingangsimpedanz. Hier interessiert hauptsächlich der Normalfall ungestufter, quasi verlustfreier Verbundschwinger bei einseitiger Belastung durch äußere Wirkwiderstände mit dem Anpassungsmaß $m \ll 1$ (z. B. Wasser) und der Güte $Q_{eff,n} \approx \pi/2 \cdot n/m$.

Aus (5.22) und (5.28) ergibt sich mit den Resonanzbedingungen (5.4) und (5.5)

$$Q_{eff,n} k_{eff,n}^2 \approx \frac{\pi/2}{m} \cdot F(k^2, n\alpha_{0,1}) \cdot \sin^2(n\Phi_1) \leq \frac{1.36}{m} \cdot k^2 \cdot (1+k^2)^{0.75} \cdot \sin^2(n\Phi_1) \quad (5.32)$$

Der Faktor $1/n$ in (5.22) wird durch den Faktor n bei der Güte kompensiert, entfällt also im Gegensatz zum reinen Kopplungsfaktor in Kapitel 5.4. Die beiden anderen Faktoren in (5.32) kennen wir bereits aus Kapitel 5.5, Bild 5.2 und Bild 5.3. Tabelle 5.2 zeigt den nach Bild 5.2 mit $\sin^2 \Phi_n = 1$ maximal erreichbaren Parameter $Q_{eff} k_{eff,max}^2$ für symmetrische Verbundschwinger bei einseitiger Wasserankopplung und die zugehörige, optimale normierte Dicke der Piezoscheiben als Funktionen des Materialkopplungsfaktors k^2 .

Die Zahlen in Klammern gelten für den unteren Ultraschallbereich mit $f < 120 kHz$, in dem die Schallgeschwindigkeit c_0 im Verbundschwinger kleiner als die Longitudinalwellen-Geschwindigkeit $c_{L,\infty}$ bei MHz-Frequenzen ist (vgl. Tabelle 8.1).

Tabelle 5.2: Optimale normierte Dicke der Piezoscheiben und maximal erreichbarer Parameter $Q_{eff} k_{eff}^2$ für Verbundschwinger bei einseitiger Wasserankopplung

k^2	0,2	0,3	0,4	0,5
$n \cdot \alpha_{0,1}$	$0,68 \pi$	$0,63 \pi$	$0,58 \pi$	$0,52 \pi$
$Q_{eff} k_{eff,max}^2$ (Wasser)	6 (5,1)	9,5 (8,1)	13,4 (11,5)	18 (15,4)

Die horizontale Linie unterhalb des Maximums in Bild 5.2 markiert in Abhängigkeit von k^2 breite Variationsbereiche für die normierte Dicke $n\alpha_{0,1}$ des Piezoelements, in denen der Faktor $F(k^2, n\alpha_{0,1})$ größer ist, als beim reinen piezoelektrischen Wandler mit $n\alpha_{0,1} = \pi$.

Innerhalb dieser Bereichsgrenzen kann man die Faktoren $F(k^2, n\alpha_{0,1})$ auf gleicher Höhe unterhalb des Maximums paarweise angleichen. So erreicht man nach Bild 5.3 für die Abszissen-Verhältnisse $n = 1:2$, $n = 1:3$ bzw. $n = 2:3$ bei einem typischen Materialkopplungsfaktor $k = k_{33} \approx 0.7$ etwa 92%, 80% bzw. 97% des Maximums. Die Kurven für $\sin^2 \Phi_n$ erreichen in den zugehörigen, markierten Kreuzungspunkten von Bild 5.3 ebenfalls relativ hohe Werte 0.75, 1.0 bzw. 0.905, sodass die größtmöglichen Produkte aus beiden Faktoren mit etwa 68%, 80% und 88% alle nahe an das absolute Maximum heranreichen.

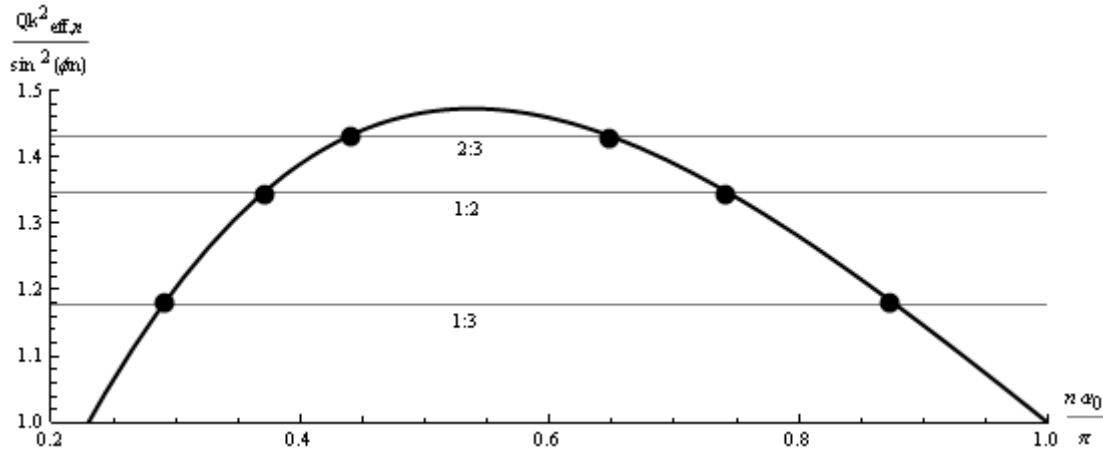


Bild 5.5: Detail von Bild 5.2 für $k^2 = 0,5$ mit paarweise optimaler Angleichung der Ordinaten für die Frequenzverhältnisse 1:2 (92%), 1:3 (80%) und 2:3 (97%)

Bei typischem $k = k_{33} \approx 0.7$ und $Q_{eff} k_{eff,max}^2$ (Wasser) = 15.45 für $f < 100$ kHz gilt also bei unterschiedlichen Längenverhältnissen $\alpha_{1,2} / \alpha_{1,0} / \alpha_{1,1}$ nach Bild 5.2

$$Q_{1,eff} k_{1,eff}^2 = Q_{2,eff} k_{2,eff}^2 = 10.5 \quad (5.33)$$

$$\text{bei } \bar{\alpha}_{1,2} / \bar{\alpha}_{1,0} / \bar{\alpha}_{1,1} = 0.148 / 0.370 / 0.482$$

$$Q_{1,eff} k_{1,eff}^2 = Q_{3,eff} k_{3,eff}^2 \approx 12.4 \quad (5.34)$$

$$\text{bei } \bar{\alpha}_{1,2} / \bar{\alpha}_{1,0} / \bar{\alpha}_{1,1} = 0.355 / 0.290 / 0.355$$

$$Q_{2,eff} k_{2,eff}^2 = Q_{3,eff} k_{3,eff}^2 \approx 13.7 \quad (5.35)$$

$$\text{bei } \bar{\alpha}_{1,2} / \bar{\alpha}_{1,0} / \bar{\alpha}_{1,1} = 0.09 / 0.22 / 0.67$$

Weicht die normierte Dicke $\alpha_{1,0}$ des Piezowandlers nach unten oder oben von den Werten in (5.20), (5.34) und (5.35) ab, dann werden die paarweise gleichen Parameter $Q_{n,eff} k_{n,eff}^2$ kleiner (vgl. Anhang zu Kapitel 5.6).

Eine vollständige analytische Angleichung der Parameter $Q_{n,eff} k_{n,eff}^2$ für $n = 1$, $n = 2$ und $n = 3$ zur gleichzeitigen oder simultanen Anregung von 3 Harmonischen ist nicht möglich. Man kann aber z. B. eine Segmentlängen-Aufteilung $\alpha_{1,2} / \alpha_{1,0} / \alpha_{1,1}$ finden (vgl. Anhang zu Kapitel 5.6), bei der $Q_{1,eff} k_{1,eff}^2 = Q_{3,eff} k_{3,eff}^2 < Q_{2,eff} k_{2,eff}^2$. Im Optimalfall gilt hier unter den gleichen Randbedingungen wie für (5.33)(5.20), (5.34) und (5.35)

$$Q_{1,eff} k_{1,eff}^2 = Q_{3,eff} k_{3,eff}^2 = 5.65 \approx 0.6 \cdot Q_{2,eff} k_{2,eff}^2 \quad (5.36)$$

$$\text{bei } \bar{\alpha}_{1,2} / \bar{\alpha}_{1,0} / \bar{\alpha}_{1,1} \approx 0.29 / 0.22 / 0.49$$

Weicht hier die normierte Dicke $\alpha_{1,0}$ des Piezowandlers nach unten oder oben von dem Wert 0.22 in (5.36) ab, dann werden die paarweise gleichen $Q_{1,eff}k_{1,eff}^2 = Q_{3,eff}k_{3,eff}^2$ kleiner, während $Q_{2,eff}k_{2,eff}^2$ annähern proportional zu $\alpha_{1,0}$ ansteigt.

Die normierten Berechnungen werden in Kapitel 6.3 für typische Piezokeramik/Metallkombinationen in reale Längen umgerechnet und diskutiert.

5.7 Akustisch-mechanischer Wirkungsgrad von optimierten Verbundschwingern

Bei der Anregung der Harmonischen $n = 1$ bis $n = 3$ unter den Bedingungen (5.33), (5.34) und (5.35) ergeben sich ohne Wasserankopplung aus (5.27) effektive Güten von $Q_{1,eff} \approx 785$ und $Q_{2,eff} \approx 875$ bei (5.33), $Q_{1,eff} = 890$ und $Q_{3,eff} = 950$ bei (5.34) sowie $Q_{2,eff} = 980$ und $Q_{3,eff} = 1060$ bei (5.35). Damit würde sich aus den inneren und äußeren Verlustleistungen bei einseitiger Wasserankopplung mit $1/m = 16.5$ akustisch-mechanische Wirkungsgrade

$$\eta_{a/m} \approx \frac{m}{m + \frac{n\pi}{2Q_{eff,n}}} \approx 1 - \frac{n \cdot 26}{Q_{eff,n}} \quad (5.37)$$

zwischen 97% und 92% ergeben. Bei Lastwiderständen mit größerem Kennimpedanz-Quotienten m (z. B. beim Ultraschall-Kunststoff-Schweißen) kann sich der akustisch-mechanische Wirkungsgrad noch vergrößern. Unter Berücksichtigung zusätzlicher Verluste durch die Schwinghalterung, bei niedrigen Ultraschall-Frequenzen und durch die Verschraubung der Komponenten, reduzieren sich die akustisch-mechanischen Wirkungsgrade allerdings auf Werte zwischen 80% und 90%.

5.8 Zusammenfassende Ergebnisse für ungestufte Verbundschwinger in der Grundresonanz

Bild 5.6 bis Bild 5.8 zeigen noch einmal zusammenfassend, in normierter Darstellung, die wichtigsten Ergebnisse aus Kapitel 5 für einen am Ausgang unbelasteten, schwach verlustbehafteten, ungestuften Verbundschwinger in der Grundresonanz ($n = 1$) mit $k^2 = k_{33}^2 = 0.5$. Parameter sind die drei charakteristischen Wandlerpositionen $\Phi = \pi/2$ (mittenständiger Wandler), $\Phi = \alpha_0/2$ (endständiger Wandler) und $\Phi = \pi/4$ (Wandler auf einem $\lambda/4$ -Teilstück zentriert). Abszisse ist in allen Darstellungen die normierte Dicke $\alpha_0/\pi = 2L_0/\lambda_0$ des Piezowandlers, die auf den Bereich $0 < \alpha_0/\pi \leq 0.5$ begrenzt wurde. In diesem Bereich ergibt sich aus den Gleichungen (5.21) und (5.22) eine erstaunlich gute, einfache Näherung für das Quadrat des effektiven Kopplungsfaktors (Bild 5.6)

$$k_{eff}^2 \approx 0.6 \cdot \sin \alpha_0 \cdot \sin^2 \Phi \pm 4\% \quad \text{mit} \quad \Phi = \alpha_0/2 + \alpha_2 \quad (5.38)$$

Bild 5.7 zeigt die effektive Güte Q_{eff} nach (5.28), (5.29) und (5.30) und Bild 5.8 das für die Leistungsreserve wichtige Produkt Qk_{eff}^2 . Aus den Bildern Bild 5.6 und Bild 5.8 erkennt man die deutliche Überlegenheit des mittenständigen Wandlers, während sich der endständige Wandler nach Bild 5.7 nur durch eine höhere Güte auszeichnet. Sieht man einmal davon ab, dass geklebte Verbundschwinger mit endständigem Wandler für mittlere Belastungen am preiswertesten hergestellt werden können, dann spricht alles für den Konverter mit zentralem Piezowandler mit $k_{eff}^2 \approx 0.61 \cdot \sin \alpha_0 \pm 4\%$, der bei

$\alpha_0 / \pi = 0.5$ sein Optimum erreicht.. Bei Spezialkonstruktionen, z. B. dem einseitig gestuften $\lambda/2$ -Konverter, ist der zentral auf dem dicken $\lambda/4$ -Teilstück angeordnete Piezowandler mit $\Phi = \pi/4$ unter realistischen Konstruktionsgesichtspunkten der beste Kompromiss.

Bei akustischer Leistungsabgabe an einen äußeren Wirkwiderstand sind die normierten Darstellungen aus Bild 5.6 und Bild 5.8 identisch, weil die effektive Güte eine von α_0 unabhängige Konstante ist.

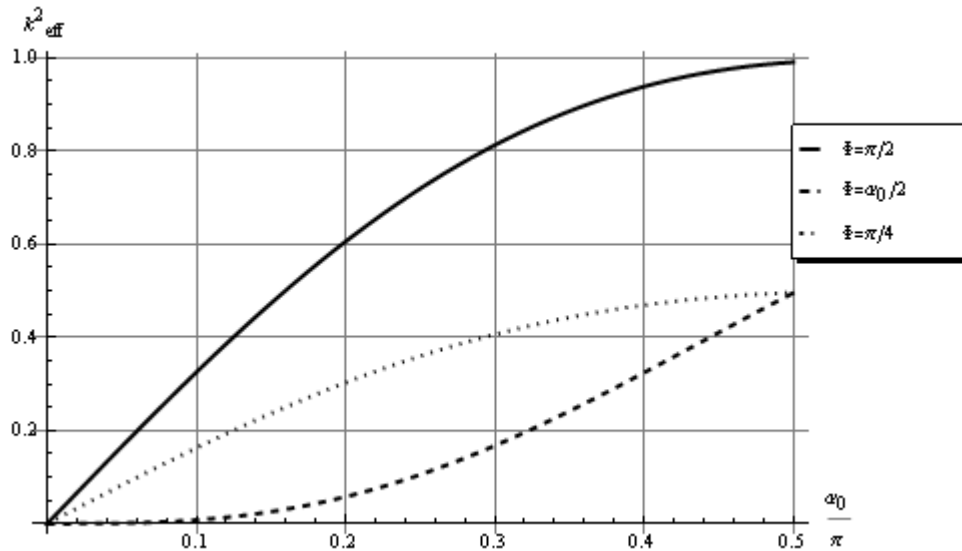


Bild 5.6: Quadrat des effektiven Kopplungsfaktors für einen am Ausgang unbelasteten, schwach verlustbehafteten, ungestuften Verbundschwinger in der Grundresonanz ($n = 1$) mit $k^2 = k_{33}^2 = 0.5$

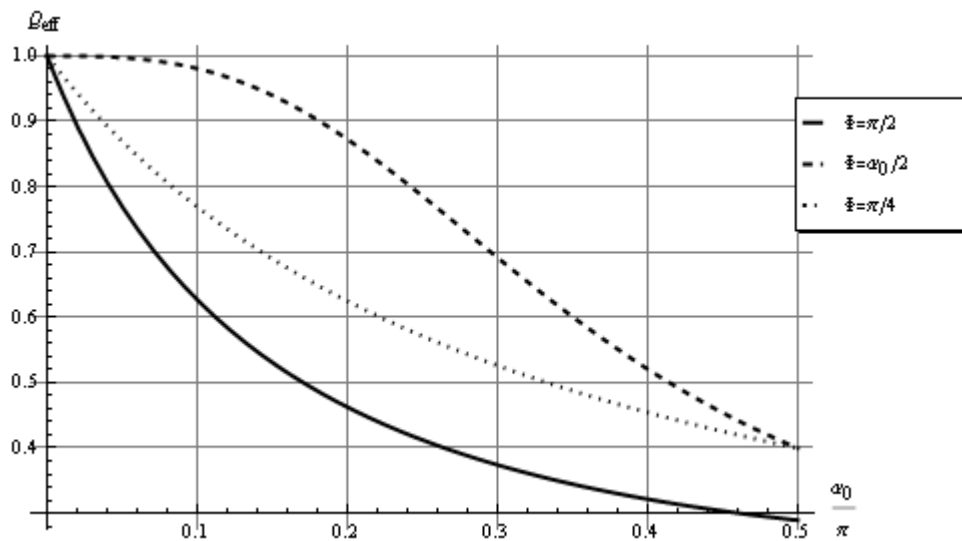


Bild 5.7: Effektive Güte für einen am Ausgang unbelasteten, schwach verlustbehafteten, ungestuften Verbundschwinger in der Grundresonanz ($n = 1$) mit $k^2 = k_{33}^2 = 0.5$.

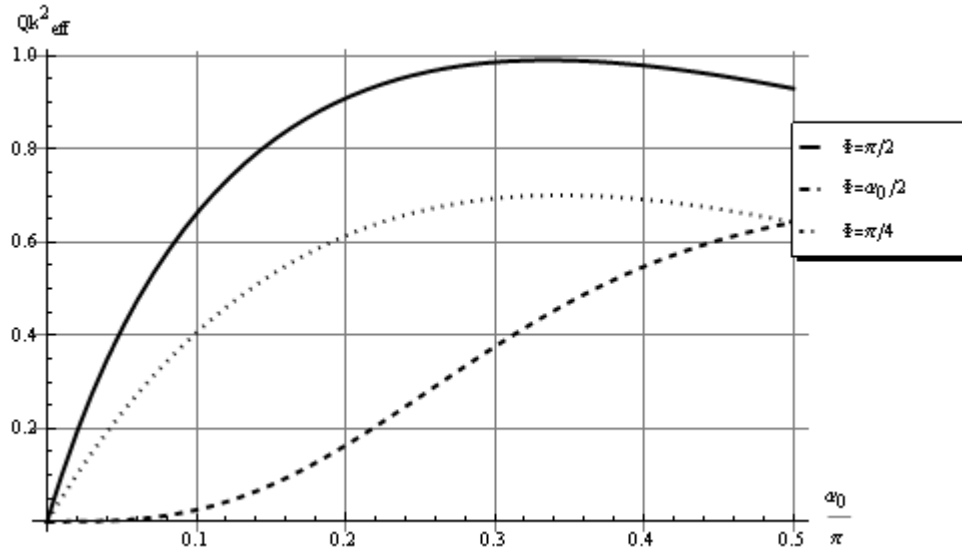


Bild 5.8: Qk_{eff}^2 für einen am Ausgang unbelasteten, schwach verlustbehafteten, ungestuften Verbundschwinger in der Grundresonanz ($n = 1$) mit $k^2 = k_{33}^2 = 0.5$.

In diesem Zusammenhang interessiert noch die Änderung der normierten Resonanzfrequenz $\bar{f} = f / f_0$ eines ungestuften, zylindrischen Halbwellen-Verbundschwingers nach Bild 5.1 mit konstanter Gesamtlänge $L = L_0 + L_1$, bei dem die Länge L_0 des Piezoelements, ausgehend von der Anfangslänge $L_0 = L$, mit $L_1 = 0$, sukzessive gekürzt und bis zur Endlänge $L_1 = L$, mit $L_0 = 0$ verändert wird. Wir kombinieren jeweils zwei gleiche, in der Impedanz nicht angepasste Metallsegmente aus Aluminium, Titan oder Stahl mit einem typischen Piezomaterial nach Tabelle 8.1 und betrachten zur Vereinfachung nur die beiden Extremfälle mit endständigem (5.33) und mittenständigem Piezoelement (5.34). Hier gilt:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \omega / c_1 \cdot L_1 = \frac{c_0}{c_1} \cdot \frac{L_1}{L} \cdot \pi \bar{f} \quad (5.39)$$

bzw.

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \omega / 2c_1 \cdot L_1 = 0.5 \frac{c_0}{c_1} \cdot \frac{L_1}{L} \cdot \pi \bar{f} \quad (5.40)$$

Aus der Resonanzbedingung (5.4) folgen mit den Impedanztransformationen (5.2) drei transzendente Gleichungen

$$\bar{f} \cdot \left(1 - \frac{L_1}{L}\right) + \frac{2}{\pi} \cdot \arctan \left[m \cdot \tan \left(\frac{c_0}{c_1} \cdot \frac{L_1}{L} \cdot \bar{f} \cdot \frac{\pi}{2} \right) \right] = 1 \quad (5.41)$$

für den mittenständigen Verbundschwinger,

$$\bar{f} \cdot \left(1 - \frac{L_1}{L}\right) + \frac{1}{\pi} \cdot \arctan \left[m \cdot \tan \left(\frac{c_0}{c_1} \cdot \frac{L_1}{L} \cdot \bar{f} \cdot \pi \right) \right] = 1 \quad (5.42)$$

für den endständigen Verbundschwinger mit $0 \leq \frac{L_1}{L} \leq 0.6$ und

$$\bar{f} \cdot \frac{c_0}{c_1} \cdot \frac{L_1}{L} + \frac{1}{\pi} \cdot \arctan \left[m \cdot \tan \left(\left(1 - \frac{L_1}{L}\right) \cdot \bar{f} \cdot \pi \right) \right] = 1 \quad (5.43)$$

für den endständigen Verbundschwinger mit $0.6 < \frac{L_1}{L} \leq 1$.

Die numerisch ermittelten Lösungen \bar{f} für die drei PZT-Kombinationen mit Aluminium, Stahl und Titan mit $c_0/c_1 = 3.3/5.1$, $c_0/c_1 = 3.3/5.17$ bzw. $c_0/c_1 = 3.3/4.9$, sowie $m = 0.56$, $m = 1.64$ bzw. $m = 0.88$ sind in Bild 5.9 als Funktionen von L_1/L dargestellt.

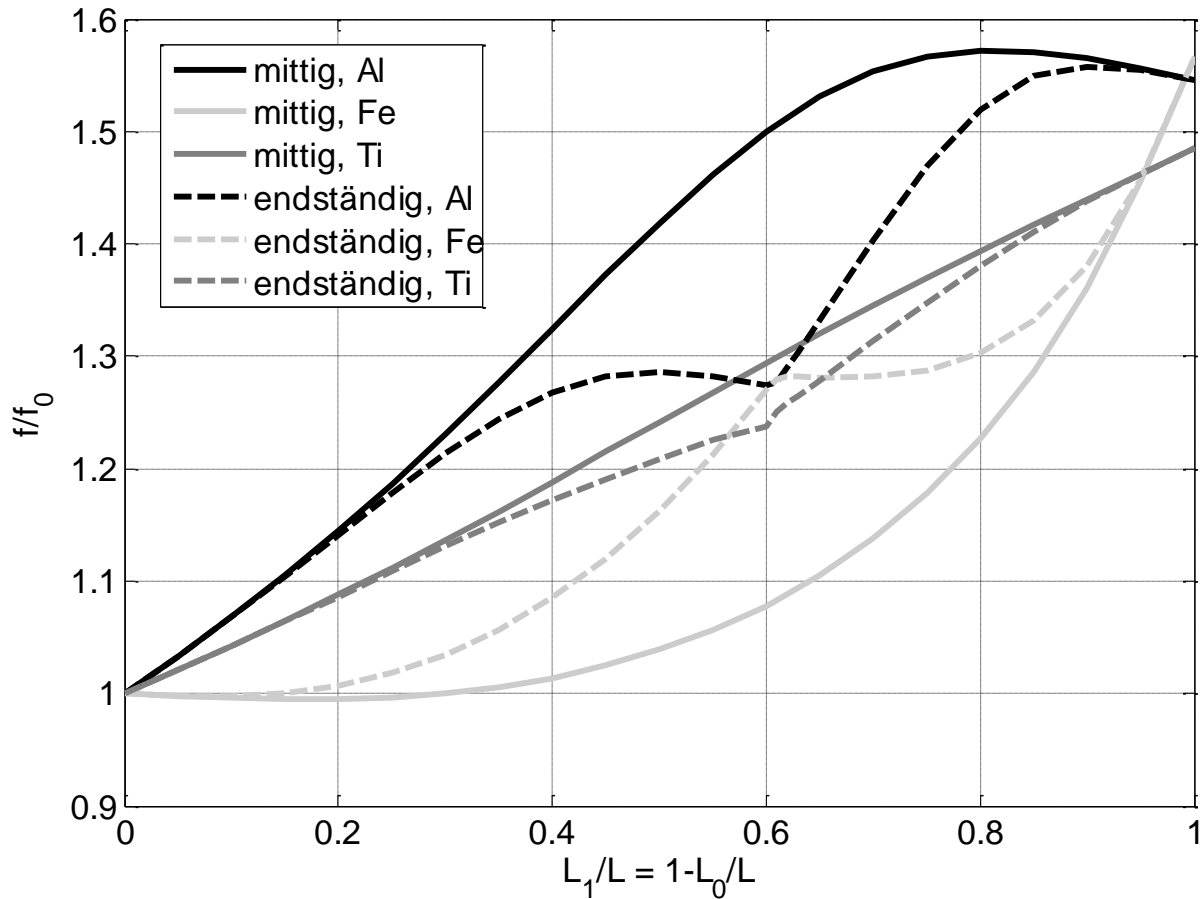


Bild 5.9: Änderung der normierten Resonanzfrequenz eines ungestuften, zylindrischen Halbwellen-Verbundschwingers mit konstanter Gesamtlänge, in Abhängigkeit der Länge eines end- oder mittenständigen Piezoelements für in der Impedanz nicht angepasste Metallsegmente aus Aluminium, Titan und Stahl

6 Praktische Beispiele zur Optimierung von Verbundschwingern

6.1 Zur Rücktransformation der impedanzangepassten Ersatzlängen

Durch die Anpassung der Kennimpedanzen (5.1) konnten wir die Ersatzschaltungen in Bild 3.3 und Bild 3.4 so normieren, dass bei den Berechnungen in Kapitel 5 nur noch die normierte Dicke α_0 des Piezoelements und dessen normierter Abstand Φ vom Schnellbauch als Variable übrig blieben. Auf diese Weise konnten mit dem effektiven Kopplungsfaktor und (oder) der effektiven Güte unter Berücksichtigung der Resonanzbedingungen (5.4) und (5.5) einfache Entscheidungskriterien für die Dimensionierung eines Verbundschwingers definiert werden. Nun müssen aus den impedanzangepassten Ersatzphasenwinkeln

$$\alpha_{1,1} = \pi - \left(\Phi_1 + \frac{\alpha_0}{2} \right) \quad (6.1)$$

$$\alpha_{2,1} = \Phi_1 - \frac{\alpha_0}{2} \quad (6.2)$$

bei bekannten Kennimpedanzquotienten $\bar{Z}_1 = Z_1 / Z_0$ bzw. $\bar{Z}_2 = Z_2 / Z_0$ und bekannten Schallgeschwindigkeiten c_1 und c_2 (nach Tabelle 8.1) durch Rücktransformation

$$\alpha_1 = 2\pi \cdot \frac{L_1}{\lambda_1} = \arctan \left(\frac{Z_0}{Z_1} \tan(\alpha_{1,1}) \right) \quad (6.3)$$

und

$$\alpha_2 = 2\pi \cdot \frac{L_2}{\lambda_2} = \arctan \left(\frac{Z_0}{Z_2} \tan(\alpha_{2,1}) \right) \quad (6.4)$$

die wahren Längen L_1 und L_2 der beiden Metallkomponenten des Verbundschwingers ermittelt werden. Dabei kann zumindest in der Grundresonanz vorausgesetzt werden, dass die vorher berechneten effektiven Kopplungsfaktoren und Güten ebenso wie die Transformationsbeziehungen (5.15) und (5.16) zur Umrechnung der elektrischen Strom- bzw. Spannungsamplituden in mechanische Schnelle- bzw. Kraftamplituden durch die Rücktransformation unverändert bleiben.

6.2 $\lambda/2$ -Konverter und Stufenkonzentratoren in der Grundresonanz

Bei den meisten technischen Anwendungen im unteren Ultraschallbereich ($f < 120$ kHz) arbeitet man mit einer bevorzugten Festfrequenz (z. B. 20 kHz) und variiert ggfs. die Baulänge der Verbundschwinger durch Zusammenschaltung von ein bis drei $\lambda/2$ -Resonatoren zu einer Kaskade.

Wir wählen vier repräsentative Beispiele nach Bild 6.1 bis Bild 6.4 zur Demonstration der Berechnung und verwenden dabei eine typische Piezokeramik mit $k = k_{33} = 0.7$.

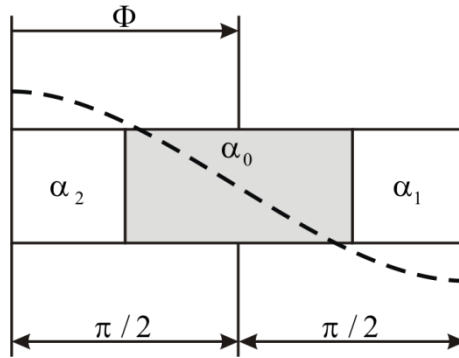


Bild 6.1: Verbundschwingerversion A1: Symmetrischer $\lambda/2$ -Konverter
mit $\Phi_1 = \alpha_0 = \pi/2$ und $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi/4$.

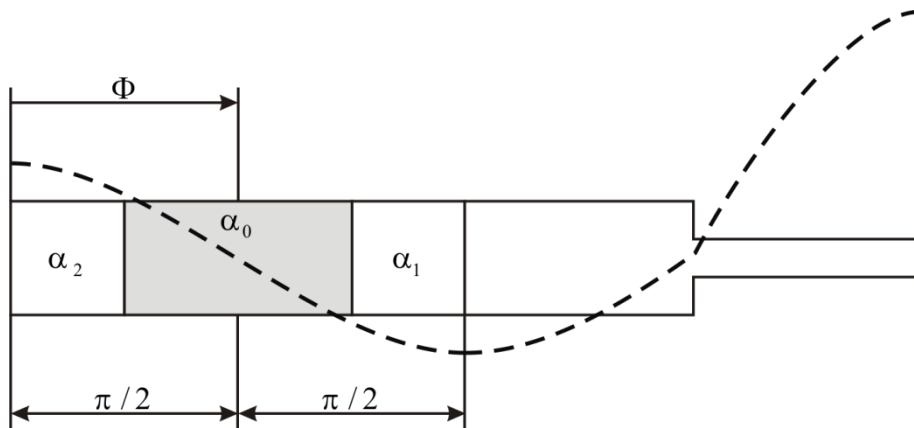


Bild 6.2: Verbundschwingerversion A2: Symmetrischer $\lambda/2$ -Konverter,
kombiniert mit einem $\lambda/2$ -Stufenkonzentrator

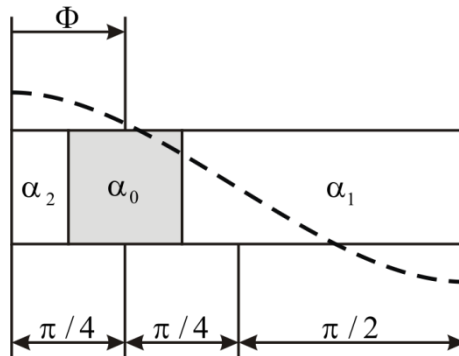


Bild 6.3: Verbundschwingerversion B1: Asymmetrischer $\lambda/2$ -Konverter
mit $\Phi_1 = \alpha_0 = \pi/4$, $\alpha_2 = \pi/8$ und $\alpha_1 = 5\pi/8$.

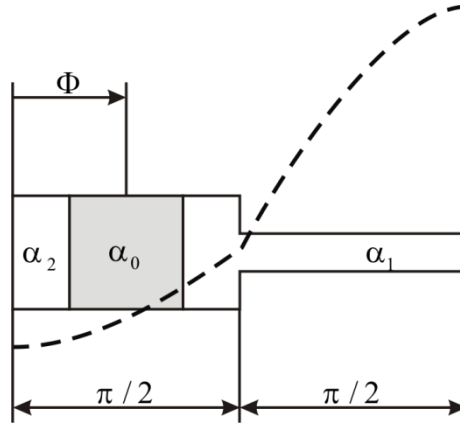


Bild 6.4: Verbundschwingerversion B2: Asymmetrischer $\lambda/2$ -Konverter mit integriertem Stufenkonzentrator.

Bei den Versionen A1 und B1 nutzen wir die Erkenntnis aus Kapitel 5.4 und Bild 5.5, nach der das Quadrat des effektiven Kopplungsfaktors $k_{eff,1}^2$ eines Verbundschwingers bei $k_{33} = 0.7$ und zentrierten Piezoscheiben parabelähnlich zwischen 72.5% (bei $\alpha_0 = \pi/4$) und dem absoluten Maximalwert $k_{eff,1,max}^2 \approx 0.57$ (bei $\alpha_0 \approx \pi/2$) variiert. Bei dezentraler Position der Piezoscheiben ist nach Bild 5.3 mit einer Reduktion proportional zu $\sin^2 \Phi_1$ zu rechnen. In gleicher Weise variiert der Parameter $Q_{eff} k_{eff,1}^2$ als Funktion von α_0 und Φ_1 bei äußerer Wirkbelastung R_a und konstanter Güte $Q_{ee,1} = \pi/2m$. Bei fehlender äußerer Belastung wird die Güte durch innere Verluste im Wandler bestimmt und verringert sich mit zunehmender normierter Dicke α_0 der Piezoscheiben kontinuierlich, wobei der Abfall nach Bild 5.6 bei mittenständigem Piezowandler (in der Hauptbelastungszone) stärker als linear und bei endständigem Piezowandler (in der Nähe des Wechseldruckknotens) schwächer als linear erfolgt.

Der $\lambda/2$ -Konverter A1 mit größtmöglichem Energiespeichervermögen $Qk_{eff,1}^2$ besteht nach Bild 5.8 aus einem zentralen Piezoelement der Länge $\lambda_0/4$ ($\alpha_0 \approx \pi/2$) und zwei, u. U. unterschiedlichen metallischen Endstücken mit identischen Ersatzlängen $\lambda_{1,2}/8$ ($\alpha_{1,1} = \alpha_{2,1} = \pi/4$).

Wenn man eine Reduktion des effektiven Kopplungsfaktors um bis zu 25% toleriert, kann die Dicke der zentralen Piezoscheiben nach Bild 6.1 zugunsten längerer Metallsegmente um 50% auf $\lambda_0/8$ verringert werden. Der einfache Konverter A1 kann durch einen $\lambda/2$ -Stufenkonzentrator gleicher Frequenz mit dem Verstärkungsfaktor $V = (D/d)^2$ zu einer $2\lambda/2$ -Kaskade A2 ergänzt werden, wobei sich der Kopplungsfaktor gegenüber A1 um den Faktor $1/(2\sqrt{V})$ reduziert (vgl. Anhang zu Kapitel 6.2). Zur Reduzierung der Eingangsimpedanz wird der zentrale Piezowandler in der Regel in elektrisch parallel geschaltete Scheibenpaare unterteilt.

Bei der Version B1 ist das $\lambda_0/8$ dicke Piezoelement mit $\Phi_1 = \pi/4$ auf der rechten oder linken Wandlerhälfte zentriert. Das bietet drei Konstruktionsvorteile:

1. Das verlustreichere Piezomaterial liegt außerhalb der Hauptbelastungszone (Druckbauch)
2. Das kürzere Metallsegment ist mit der Ersatzlänge $\lambda_0/16$ gerade noch dick genug für eine Schraubverbindung mit Unterlegscheibe
3. Der $\lambda/2$ -Konverter kann im Schnelleknoten gestuft und in einen Stufenkonzentrator B2 mit dem Verstärkungsfaktor V umgewandelt werden.

Das reduziert zwar den effektiven Kopplungsfaktor um den Faktor $1/\sqrt{V}$ gegenüber B1. Der Nachteil eines erheblich kleineren Kopplungsfaktors (35% des Maximalwertes) wird aber nach (5.15) z. T. durch doppelt so hohe Güte bei Luftbelastung und einen daraus resultierenden, besseren elektroakustischen Wirkungsgrad bei einseitiger Außenbelastung kompensiert.

Tabelle 6.1 zeigt die berechneten effektiven Kopplungsfaktoren und Güten für die oben spezifizierten Versionen A1, A2, B1 und B2, die unabhängig von der Impedanzanpassung der Metallkomponenten an die Piezokeramik nach (5.1) sind.

Aus der Rücktransformation (6.3) und (6.4) ergeben sich in der unteren Tabellenhälfte die auf $\lambda_2/2$ bezogenen wahren Längen L_2 der Metallsegmente für Aluminium (Al), Titan (Ti), Messing (Ms) und Stahl (Fe) mit den normierten Kennimpedanzquotienten $Z_2/Z_0 = 0.58, 0.92, 1.12$ und 1.72 . Die auf $\lambda_1/2$ bezogenen Längen L_1 sind dahinter in Klammern angegeben.

Tabelle 6.1: Charakteristische Kenngrößen und normierte Längen der Endabschnitte für die unterschiedlichen Wandlerversionen

	Version A1	Version A2	Version B1	Version B2
k^2_{eff}	0.57	$0.57/2\sqrt{V}$	0.20	$0.20/\sqrt{V}$
$Q_{eff(Luft)}$	$Q_m/3.4$	$Q_m[1+1.25(1+V)]^{-1}$	$Q_m/1.75$	$Q_m[1+0.38(1+V)]^{-1}$
$Q_{eff(Wasser)}$	26	26	26	26
$Q_{eff}k^2_{eff(Wasser)}$	15	$7.5/\sqrt{V}$	5.2	$5.2/\sqrt{V}$
$2L_2/\lambda_2(Al)$	0.333 (0.333) > 0.25		0.197 (0.575)	
$2L_2/\lambda_2(Ti)$	0.263 (0.263) > 0.25		0.135 (0.616)	
$2L_2/\lambda_2(Ms)$	0.230 (0.230) < 0.25		0.113 (0.638)	
$2L_2/\lambda_2(Fe)$	0.168 (0.168) < 0.25		0.075 (0.697)	

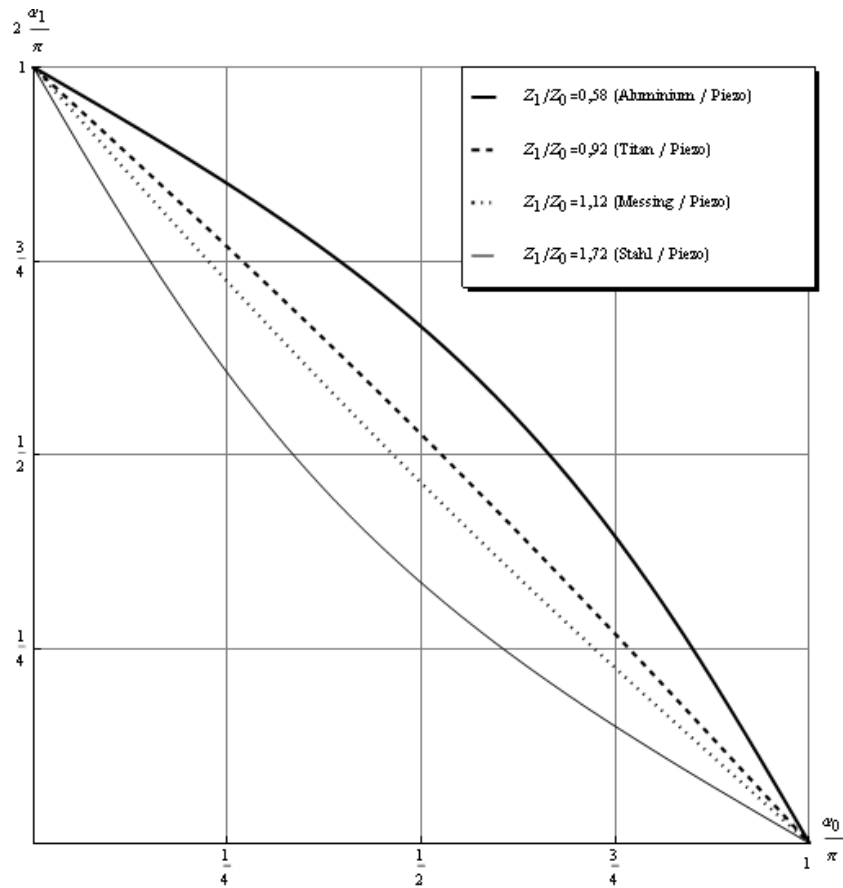


Bild 6.5: Normierte Längen $\alpha_1 / \pi = 2f_s \cdot L_1 / c_1$ der beiden gleichen Metallsegmente als Funktion der normierten Dicke $\alpha_0 / \pi = 2f_s \cdot L_0 / c_0$ des zentralen Piezoelements für unterschiedliche Materialien nach Variante A1

Bei $\bar{Z} > 1$ (Messing oder Stahl) müssen die Segmente mit $L < \lambda/4$ in beiden Versionen gegenüber den impedanzangepassten Längen gekürzt, bei $\bar{Z} < 1$ (Titan oder Aluminium) dagegen verlängert werden (vgl. Bild 6.5). In der Version B1 bleibt aber die Gesamtlänge des Verbundschwingers, bis auf kleine Abweichungen ($< 2\%$) bei den schlecht angepassten Metallen Aluminium und Stahl, konstant. Die optimale Position des Piezowandlers verschiebt sich lediglich bei $\bar{Z} > 1$ geringfügig nach außen und bei $\bar{Z} < 1$ geringfügig nach innen.

Bei einer Arbeitsfrequenz von 20 kHz ergeben sich aus Tabelle 6.1 unter Berücksichtigung der entsprechenden Schallgeschwindigkeiten (Tabelle 8.1) für „optimale“ $\lambda/2$ -Konverter aus einer Titan/PZT4-Kombination die folgenden Axialabmessungen, die bei höheren Frequenzen f proportional zu $1/f$ gekürzt werden müssen:

- Für den $\lambda/2$ -Konverter A1: $L_1 = L_2 = 32.2\text{mm}$, $L_0 = 41.1\text{mm}$ und $L_0 + L_1 + L_2 = 105.5\text{mm}$.
- Für den $\lambda/2$ -Konverter B1: $L_2 = 16.5\text{mm}$, $L_0 = 20.6\text{mm}$, $L_1 = 75.5\text{mm}$, $L_0 + L_1 + L_2 = 115.5\text{mm}$, davon 61.2 mm für den $\lambda/4$ -Abschnitt bei integriertem Stufenkonzentrator B2.

6.3 Verbundschwinger mit mehreren Resonanzfrequenzen

In Kapitel 5.1 wurden mögliche Gründe für eine gleichzeitige oder simultane Anregung der Grundresonanz und der beiden Harmonischen mit $n = 2$ und $n = 3$ angegeben. In Kapitel 5.5 wurden mit (5.32), Tabelle 5.2 sowie Bild 5.1 charakteristische Bedingungen (5.33), (5.34), (5.35) für paarweise Anregung verschiedener Spektralkomponenten bei identischen Werten für $Qk_{eff,n}^2$ ermittelt. Die Rücktransformation nach Kapitel 6.1 erfolgt wieder mit (6.1) bis (6.4), ohne Einfluss auf die vorher ermittelten Werte $k_{eff,1}$ und $Q_{eff,1}$ der Grundresonanz.

Dabei ergeben sich z. B. aus den entsprechenden normierten Ersatzlängen der Beziehungen (6.1) bis (6.4), für Verbundschwinger aus Titan und PZT4 mit einseitiger Wasserankopplung bei 20 kHz und $k^2 = k_{33}^2 \approx 0.5$ die wahren, unkompensierten Längen:

- Für (5.33) bei 20 kHz und $k^2 \approx 0.5$: $L_1 = 59.1mm$, $L_2 \approx 19.1mm$, $L_0 = 30.4mm$
- Für (5.34) bei 20 kHz und $k^2 \approx 0.5$: $L_1 = L_2 \approx 44.8mm$, $L_0 = 24mm$
- Für (5.35) bei 20 kHz und $k^2 \approx 0.5$: $L_1 = 84mm$, $L_2 \approx 11.6mm$, $L_0 = 18.0mm$

Im Unterschied zur impedanzangepassten Version ergeben sich allerdings nach der Rücktransformation für die realen Längen L_1 und L_2 unterschiedliche Werte, je nachdem, von welcher der 3 beteiligten Resonanzen n die Rücktransformation erfolgt. So zeigt Tabelle 6.2 für die vier Metalle: Titan, Messing, Stahl und Aluminium mit unterschiedlichem Kennimpedanzquotienten $\bar{Z}_{Ti} = 0.92$; $\bar{Z}_{Ms} = 1.12$; $\bar{Z}_{Fe} = 1.72$ und $\bar{Z}_{al} = 0.58$ die aus

$$\frac{\alpha_1(n)}{\pi} = \frac{L_1}{\lambda_1/2} = \frac{1}{n \cdot \pi} \cdot \arctan\left(\bar{Z}^{-1} \cdot \tan(n\alpha_{1,1})\right) \quad (6.5)$$

und

$$\frac{\alpha_2(n)}{\pi} = \frac{L_2}{\lambda_2/2} = \frac{1}{n \cdot \pi} \cdot \arctan\left(\bar{Z}^{-1} \cdot \tan(n\alpha_{2,1})\right) \quad (6.6)$$

folgenden, normierten Längen $\alpha_1(n)/\pi$ und $\alpha_2(n)/\pi$ als Funktionen von $n = 1, 2, 3$ in den drei optimierten Paarungen 1:2 für (5.33); 1:3 für (5.34) und 2:3 für (5.35).

Tabelle 6.2: Berechnung der normierten wahren Längen aus α_1 / π und α_2 / π nach (6.6)

	$\pi / 3$			$\pi / 2$			$\pi / 5$	
(5.20)	n = 1	n = 2	(5.21)	n = 1	n = 3	(5.22)	n = 2	n = 3
	$\alpha_{0,1} / \pi \approx 0.37$			$\alpha_{0,1} / \pi \approx 0.29$			$\alpha_{0,1} / \pi \approx 0.22$	
Messing	0.134	0.139	Messing	0.340	0.353	Messing	0.082	0.084
	0.480	0.484		0.340	0.353		0.684	0.688
Titan	0.159	0.154	Titan	0.365	0.357	Titan	0.096	0.094
	0.483	0.480		0.365	0.357		0.694	0.692
Eisen	0.090	0.105	Eisen	0.277	0.346	Eisen	0.056	0.062
	0.469	0.490		0.277	0.346		0.655	0.775
Aluminium	0.227	0.185	Aluminium	0.412	0.370	Aluminium	0.132	0.117
	0.490	0.469		0.412	0.370		0.714	0.706

Aus den Zahlenkolonnen der Tabelle 6.2 ergeben sich folgende Schlussfolgerungen:

- Bei den relativ gut angepassten Metallen Messing und Titan braucht man die ideal angepassten Wertepaare aus (5.33), (5.34) und (5.35) nicht oder nur geringfügig zu korrigieren, weil die Unterschiede mit $< \pm 2\%$ praktisch vernachlässigbar sind.
- Bei Aluminium (und abgeschwächt bei Stahl) ist der Unterschied zwischen angepassten und nicht angepassten Wertepaaren besonders groß. Die paarweise erreichten Parameteranpassungen (5.33), (5.34), (5.35) können also nur als Näherungen für einen nachträglichen Iterationsprozess betrachtet werden. Wenn man die Iteration jeweils mit dem fettgedruckten Zahlenpaar der Tabelle 6.2 beginnt, ist die Anfangsabweichung am kleinsten und man erreicht nach wenigen Schritten eine akzeptable paarweise Angleichung der $Qk_{eff,n}^2$ -Werte.

6.4 Rechenprogramm zur paarweisen Komponentenangleichung der Harmonischen

Zur Verifizierung der Berechnungen aus Kapitel 5 ist im Anhang zu Kapitel 6.4 auf der Basis der Kirchhoffschen Verzweigungsgesetze ein Rechenprogramm für die Eingangsimpedanz verlustfreier Verbundschwinger mit Ausgangswirkwiderstand R_a nach (2.23) und der Ersatzschaltung nach Bild 3.4 angegeben. Diese Ersatzschaltung kann man vereinfachen, indem man die aus Bild 3.2 und (2.23) für $R_a / Z_1 \ll 1$ folgenden Eingangsimpedanzen

$$\frac{Z_{e1}}{Z_0} = \frac{R_a / Z_0 + j \cdot Z_1 / Z_0 \cdot \sin(\alpha_1 \bar{f}) \cdot \cos(\alpha_1 \bar{f})}{\cos^2(\alpha_1 \bar{f}) + (R_a / Z_1)^2 \sin^2(\alpha_1 \bar{f})} \approx \frac{R_a / Z_0}{\cos^2(\alpha_1 \bar{f})} + j \cdot \frac{Z_1}{Z_0} \cdot \tan(\alpha_1 \bar{f}) \quad (6.7)$$

und

$$\frac{Z_{e2}}{Z_0} = \frac{j \cdot Z_2 / Z_0 \cdot \sin(\alpha_2 \bar{f}) \cdot \cos(\alpha_2 \bar{f})}{\cos^2(\alpha_2 \bar{f}) + (R_a / Z_2)^2 \sin^2(\alpha_2 \bar{f})} \approx j \cdot \frac{Z_2}{Z_0} \cdot \tan(\alpha_1 \bar{f}) \quad (6.8)$$

der beiden metallischen Endsegmente an die Ersatzschaltung Bild 3.3 des zentralen Piezoelements ankoppelt und alle Impedanzkomponenten durch die Kennimpedanz Z_0 des Piezowandlers dividiert.

Man erhält dann die Ersatzschaltung Bild 6.6 mit den eingezeichneten normierten Wirk- und Blindkomponenten. Mit Ausnahme des kritischen Phasenwinkel-Bereichs $\alpha_1 \cdot \bar{f} = (n + 0.5) \cdot \pi \pm \Delta$ ($\Delta \ll 1$) gelten darin die Näherungen aus (6.7) und (6.8) rechts außen.

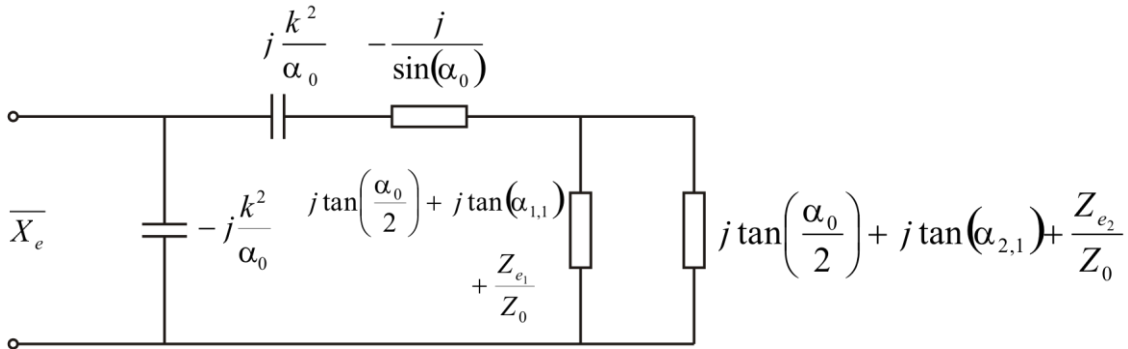


Bild 6.6: Normierte Ersatzschaltung zu Bild 3.4 (vgl. (6.7) und (6.8))

Der Materialkopplungsfaktor $k = k_{33}$, die Kennimpedanz Z_0 und die normierte Dicke α_0 des Piezowandlers sowie die normierten Kennimpedanzen $m_0 = R_A / Z_0$, $m_1 = Z_1 / Z_0$ und $m_2 = Z_2 / Z_0$ werden vorgegeben. Die auf die Grundresonanz normierte Frequenz \bar{f} wird bis zur zweiten Oberschwingung als Abszisse variiert. Dabei können wahlweise die normierte Eingangsimpedanz nach Betrag und Phasenwinkel oder nach Real- und Imaginärteil angezeigt werden. Ausgangspunkt des Rechenprogramms zur paarweisen Komponentenangleichung sind jeweils die Parameterpaare α_0 / π und Φ / π aus Bild 5.3 und Bild 5.5 bzw. die zugehörigen normierten Wertepaare aus (5.33); (5.34) und (5.35). Anhand der Spektren lassen sich die in Kapitel 5.4 und 5.6 berechneten Werte k_{eff} und Qk_{eff}^2 relativ einfach verifizieren.

Bei den beiden gut angepassten Metallen Titan und Messing zeigen die mit dem Rechenprogramm ermittelten Spektren akzeptable Übereinstimmung mit den in Kapitel 5 berechneten Wertepaaren. Die bevorzugten Paarungen sind in allen Kurven gut gegenüber den anderen Harmonischen hervorgehoben. Die Phasenspektren eignen sich für eine erste Einschätzung besonders gut, weil die maximalen Phasenwinkel nach (4.11) bei gleichem $Qk_{eff,n}^2$ bis auf minimale Abweichungen proportional zu $1 - 1/4k_{eff,n}^2$ übereinstimmen. Die Größen $k_{eff,n}^2$ folgen nach (4.9) aus den Linienbreiten zwischen den Phasennulldurchgängen, und Q_{eff} wächst nach (5.31) proportional zur Ordnungszahl n der Harmonischen.

Die folgenden Bilder zeigen Beispiele für Phasen- und Amplituden-Spektren von Verbundschwingern aus den geeigneten Material-Kombinationen Ti(1)-PZT(0)-Ti(2) ($m_{1/2} = 0.88$) und Al(1)-PZT(0)-Al(2) ($m_{1/2} = 0.56$) im Vergleich zur Idealversion mit angepassten Kennimpedanzen ($m_{1/2} = 1$) bei einseitiger Wasserankopplung ($m_0 = 0.053$). Neben der Grundschwingung ($n = 2$) werden in Bild 6.7 die Oberschwingung bei $n = 2$ und in Bild 6.8 die Oberschwingung bei $n = 2$ angezeigt.

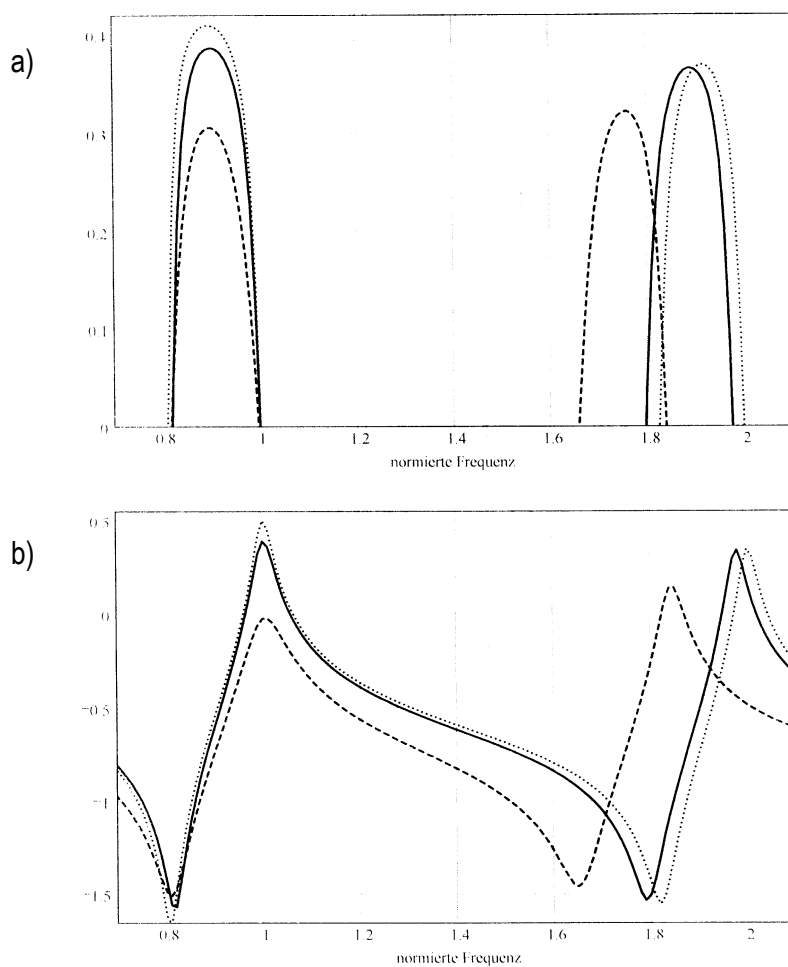


Bild 6.7: a) Normierter Phasenwinkel und b) normierte Eingangsimpedanz in Abhängigkeit der normierten Frequenz bei optimaler Anregung der Grundresonanz ($n=1$) und der ersten Oberschwingung ($n=2$) für ideale Anpassung ($m=1$, ---), $Ti/PZT/Ti$ ($m=0.88$, —) und $Al/PZT/Al$ ($m=0.56$, ---)

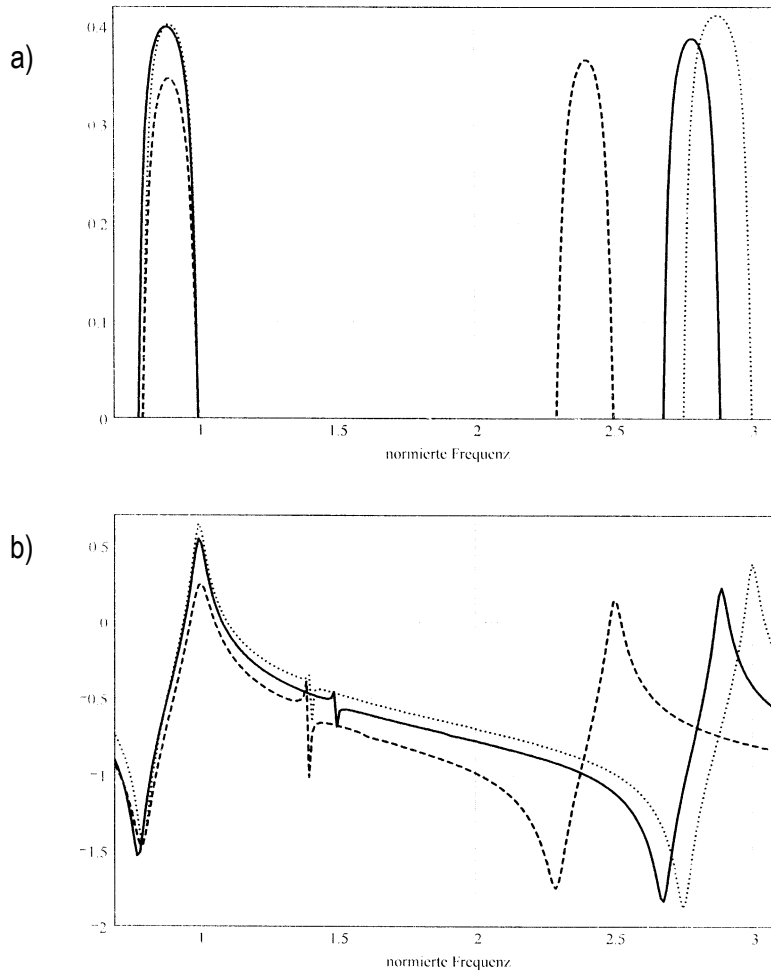


Bild 6.8: a) Normierter Phasenwinkel und b) normierte Eingangsimpedanz in Abhängigkeit der normierten Frequenz bei optimaler Anregung der Grundresonanz ($n=1$) und der zweiten Oberschwingung ($n=3$) für ideale Anpassung ($m=1$, \cdots), $Ti / PZT / Ti$ ($m=0.88$, $—$) und $Al / PZT / Al$ ($m=0.56$, $---$)

Die Quotienten $f_{p,n}/f_{p,1}$ der Parallelresonanzen weichen mit zunehmender Fehlanpassung nach unten und die Quotienten $f_{s,n}/f_{s,1}$ der Serienresonanzen nach oben vom harmonischen Verhältnis $n/1$ des idealen Wandlers mit $m = 1$ ab. Dadurch ändern sich die Referenzwerte $\alpha_{0,1}$ für die optimalen Paarungen $\alpha_{0,n}$ aus Bild 5.4 und müssen im Rechenprogramm schrittweise angepasst werden. Die mit (4.9) bis (4.11) aus Bild 6.7 und Bild 6.8 ermittelten charakteristischen Werte $Q_{eff,n}$, $k_{eff,n}^2$ und $Qk_{eff,n}^2$ sind in Tabelle 6.3 zusammengestellt. Bei den relativ gut angepassten Verbundschwingern aus Titan und PZT erreicht man nach Bild 6.7 bei unkorrigierten Ausgangswerten $\alpha_0/\pi = 0.37$ und $\Phi = \pi/3$ mit $Qk_1^2 \approx 12$ und $Qk_2^2 \approx 10$ eine akzeptable Angleichung der Komponenten. Für $n = 1 / n = 3$ ist nach Bild 6.8 eine vergleichbare Komponentenangleichung mit $Qk_1^2 \approx 14$ und $Qk_3^2 \approx 12$ bei der gleichen Wandlerdicke $\alpha_0/\pi \approx 0.37$ (statt 0.29) und $\Phi = \pi/2$ möglich. Bei Verbundschwingern aus Aluminium und PZT sind größere Korrekturen erforderlich. Hier müssen die Ausgangswerte $\alpha_0/\pi = 0.37$ für $n = 1 / n = 2$ und $\alpha_0/\pi = 0.29$ für $n = 1 / n = 3$ zur optimalen Komponentenangleichung auf niedrigerem Niveau $Qk_1^2 \approx 7.5$ und $Qk_2^2 \approx 7$ bzw. $Qk_1^2 \approx 9$ und $Qk_3^2 \approx 10$ um 42% bzw. 53% erhöht werden. Die Mittelwerte der zusammengehörigen Qk^2 -Werte sinken proportional zum abnehmenden

Anpassungsmaß m . Man erreicht also bei Verbundschwingern aus Titan/PZT oder Messing/PZT etwa 88 bis 90 % und bei Verbundschwingern aus Al/PZT oder Fe/PZT etwa 56 bis 60 % der Idealwerte bei $m = 1$.

Tabelle 6.3: Datenauswertung aus Bild 6.7 und 6.8 mit den o. a. Optimalwerten α_0 und Φ

zu Bild 6.7	Anpassung m	$k_{1,eff}^2$	$k_{2,eff}^2$	$Qk_{1,eff}^2$	$Qk_{2,eff}^2$	$Q_{1,eff}$	$Q_{2,eff}$
	$m_{1/2} = 1$	0.532	0.200	15.46	9.95	29.00	49.80
	$m_{1/2} = 0.88$	0.494	0.209	12.2	9.90	24.70	46.60
	$m_{1/2} = 0.56$	0.490	0.230	7.50	7.00	14.30	32.00
zu Bild 6.8	Anpassung m	$k_{1,eff}^2$	$k_{2,eff}^2$	$Qk_{1,eff}^2$	$Qk_{2,eff}^2$	$Q_{1,eff}$	$Q_{2,eff}$
	$m_{1/2} = 1$	0.551	0.186	14.40	14.90	26.10	79.60
	$m_{1/2} = 0.88$	0.619	0.160	14.20	11.70	23.00	72.00
	$m_{1/2} = 0.56$	0.565	0.188	9.10	9.80	15.50	52.00

Aus den Zahlen der Tabelle 6.3 ergeben sich die folgenden Konstruktionsvorschriften für Verbundschwinger mit zwei gleichwertigen Resonanzfrequenzen:

Kombiniert man die Oberschwingung $n = 2$ mit der Grundschiwingung ($n = 1$), dann gilt beim Verbundschwinger mit zwei Titan- bzw. zwei Aluminiumscheiben unter Optimalbedingungen

$$L_{1,Ti} = \frac{0.486}{2} \cdot \lambda_{Ti}(f_{p,1}), L_{2,Ti} = \frac{0.18}{2} \cdot \lambda_{Ti}(f_{p,1}) \text{ und} \quad (6.9)$$

$$L_{0,PZT} = \frac{0.37}{2} \cdot \lambda_{PZT}(f_{p,1}) = \frac{\lambda_{PZT}(2.7 \cdot f_{p,1})}{2} \text{ bzw.}$$

$$L_{1,Al} = \frac{0.443}{2} \cdot \lambda_{Al}(f_{p,1}), L_{2,Al} = \frac{0.118}{2} \cdot \lambda_{Al}(f_{p,1}) \text{ und} \quad (6.10)$$

$$L_{0,PZTi} = \frac{0.525}{2} \cdot \lambda_{PZT}(f_{p,1}) = \frac{\lambda_{PZT}(1.9 \cdot f_{p,1})}{2}$$

Kombiniert man dagegen die Oberschwingung $n = 3$ mit der Grundschiwingung ($n = 1$), dann gilt entsprechend

$$L_{1,Ti} = \frac{0.349}{2} \cdot \lambda_{Ti}(f_{p,1}) = L_{2,Ti} \text{ mit } L_{0,PZTi} = \frac{0.368}{2} \cdot \lambda_{PZT}(f_{p,1}) = \frac{\lambda_{PZT}(2.72 \cdot f_{p,1})}{2} \quad (6.11)$$

bzw.

$$L_{1,Al} = \frac{0.356}{2} \cdot \lambda_{Al}(f_{p,1}) = L_{2,Al} \text{ mit } L_{0,PZTi} = \frac{0.445}{2} \cdot \lambda_{PZT}(f_{p,1}) = \frac{\lambda_{PZT}(2.25 \cdot f_{p,1})}{2} \quad (6.12)$$

Mit den Schallgeschwindigkeiten $c_{L,\infty}$ für $f > 500 \text{ kHz}$ und c_0 für $f < 100 \text{ kHz}$ aus Tabelle 8.1 kann man für jede gewünschte Resonanzfrequenz die Wellenlängen und aus (6.9) bis (6.12) die realen Län-

gen bzw. Dicken L_0 , L_1 und L_2 der Segmente berechnen. Hierbei ist allerdings zu berücksichtigen, dass die Gleichungen (6.9) bis (6.12) auf die Parallelresonanz $f_{p,I}$ bezogen sind. Will man also den Verbundschwinger z. B. in der niederohmigen Serienresonanz bei $f_{s,I} = 1 \text{ MHz}$ oder bei 20 kHz und den entsprechenden Oberschwingungen $n = 2$ oder $n = 3$ betreiben, dann muss in den Gleichungen (6.9) bis (6.12) nach Bild 6.7 und Bild 6.8 für $f_{p,I}$ eine um etwa 25% höhere Frequenz, also 1.25 MHz bzw. 25 kHz eingesetzt werden. Man erhält dann aus (6.9) bis (6.12) bei fast gleicher Gesamtdicke die folgenden Segmentlängen bzw. -dicken $L_n(1 \text{ MHz})$ bzw. in Klammern ($L_n(20 \text{ kHz})$):

$$\text{aus (6.9)} \quad L_{1,Ti} / \text{mm} \approx 1.17(49.0), \quad L_{2,Ti} / \text{mm} \approx 0.44(18.4), \quad L_{0,PZT} / \text{mm} \approx 0.7(29.4) \\ \text{und } L_{ges} / \text{mm} \approx 2.31(96.8)$$

$$\text{aus (6.10)} \quad L_{1,Al} / \text{mm} \approx 1.14(46.1), \quad L_{2,Al} / \text{mm} \approx 0.31(12.6), \quad L_{0,PZT} / \text{mm} \approx 1.0(41.9) \\ \text{und } L_{ges} / \text{mm} \approx 2.45(101)$$

$$\text{aus (6.11)} \quad L_{1,Ti} / \text{mm} = L_{2,Ti} / \text{mm} \approx 0.815(34.1), \quad L_{0,PZT} / \text{mm} \approx 0.7(29.4) \\ \text{und } L_{ges} / \text{mm} \approx 2.3(97.6)$$

$$\text{aus (6.12)} \quad L_{1,Al} / \text{mm} = L_{2,Ti} / \text{mm} \approx 0.895(36.2) \quad L_{0,PZT} / \text{mm} \approx 0.68(28.5) \\ \text{und } L_{ges} / \text{mm} \approx 2.47(100).$$

Die Umrechnung auf andere Resonanzfrequenzen erfolgt mit dem Faktor $1/f_{s,I}$.

Die zu erwartenden elektrischen Eingangsimpedanzen $Ze_{\min,n}$ bei den niederohmigen Serienresonanzen folgen aus der messbaren Kapazität C_0 , den Werten $f_{s,I}$ und $Qk^2_{1,eff}$ aus Tabelle 6.3., Bild 6.7 und Bild 6.8 mit $Ze_{\min,I} \approx [2\pi \cdot f_{s,I} \cdot C_0 \cdot Qk^2_{1,eff}]^{-1}$ als Referenzwert. Bei hohen Arbeitsfrequenzen, z. B. $f_s = 1 \text{ MHz}$, verwendet man ungeteilte Piezoplaten mit typischen Kapazitäten C_0 zwischen 1 und 10 nF , erdet die Frontplatte und führt die Spannung auf der Rückseite der backing-Platte zu. Bei niedrigen Arbeitsfrequenzen, z. B. $f_s = 20 \text{ kHz}$, sind Front- und backing-Segment über die Zentralschraube geerdet und die Spannung wird über die parallel geschalteten Elektroden des aus ein bis zwei Ringplatten-Paaren bestehenden Piezoelements nach Bild 1.1, mit gleichfalls typischen Kapazitäten C_0 zwischen 1 und 10 nF , zugeführt. Die minimalen Eingangsimpedanzen bei einseitiger Wasserankopplung liegen also z. B. bei 1 MHz -Verbundschwingern aus Titan-PZT mit typischen Durchmessern $D = 2.5 \text{ cm}$ und $C_0 \approx 6 \text{ nF}$ bei etwa 2.5Ω . Bei 20 kHz Verbundschwingern aus Titan-PZT mit 2 Piezoplaten-Paaren, typischen Durchmessern $D = 3.5 \text{ cm}$ und $C_0 \approx 6 \text{ nF}$ liegen sie bei etwa 125Ω . Sie sind bei gleichen Schlankheitsgrad D/L und Schwingertyp sogar unabhängig von der Frequenz, weil $f_{s,I} \cdot C_0$ proportional zu $(D/L)^2$ ist.

Wegen der unterschiedlichen Position des Schnelleknotens bei Verbundschwingern mit Resonanzanregung bei $n = 1$ und $n = 2$ wird in Kapitel 10.1 eine spezielle Montagevorrichtung skizziert. Hierbei wird der Verbundschwinger nicht im Schnelleknoten fixiert, sondern an der Frontseite auf eine am Rand eingespannte Metallmembrane geklebt und mit einer Platte oder einem zentrierten Hohlzylinder aus Keramik-Leichtschäum niedriger Kennimpedanz und hoher Formstabilität unter leichtem Vordruck von der

Backing-Seite gegen die Membrane gepresst, um ein Ablösen von der Membrane unter Druckeinwirkung von oben zu verhindern.

Um für schwach verlustbehaftete Verbundschwinger bei Luftankopplung ($m \approx 0$) ähnliche Spektralkurven zu erhalten, müssten mit (3.1) und (3.2) alle inneren Verluste der komplexen Impedanzkomponenten von Bild 3.4 berücksichtigt werden. In diesem Fall ergeben sich z. B. für die Impedanzen der beiden Metallsegmente anstelle von (6.7) Näherungen.

$$\begin{aligned} \frac{Ze_1}{Z_0} &\approx \frac{\frac{\alpha_1 \cdot \bar{f}}{2Q_1} \cdot \left[1 + \frac{\sin(2\alpha_1 \bar{f})}{2\alpha_1 \bar{f}} \right]}{\cos^2(\alpha_1 \bar{f})} + j \cdot m_1 \cdot \tan(\alpha_1 \bar{f}) \\ \frac{Ze_2}{Z_0} &\approx \frac{\frac{\alpha_2 \cdot \bar{f}}{2Q_2} \cdot \left[1 + \frac{\sin(2\alpha_2 \bar{f})}{2\alpha_2 \bar{f}} \right]}{\cos^2(\alpha_2 \bar{f})} + j \cdot m_2 \cdot \tan(\alpha_2 \bar{f}) \end{aligned} \quad (6.13)$$

Die wichtigen komplexen Komponenten des verlustreicheren Piezowandlers sehen ähnlich aus. Der mathematische Aufwand zur Trennung der Real- und Imaginärkomponenten der Eingangsimpedanz des kompletten Verbundschwingers ist also beträchtlich und würde den Rahmen dieser Darstellung sprengen.

7 Spezial-Sonotroden mit Frequenzkorrektur

7.1 Vorbemerkung

Zur Ankopplung eines aktiven piezoelektrischen Verbundschwingers an einen Lastwiderstand benutzt man im Allgemeinen passive *Sonotroden* aus Metall- oder Keramik. Sie dienen u. a. zum Schutz des Konverters bei thermischer, mechanischer oder chemischer Unverträglichkeit, bzw. als *Verstärker* für die Schnelleamplitude und als *Impedanztransformator* zur optimalen Leistungsübertragung. Weil hierbei die abgestrahlte Leistung auf eine kleinere Fläche konzentriert wird, spricht man auch von *Konzentratoren*. Am gebräuchlichsten sind so genannte *Stufen-„Rüssel“* und *Exponential-„Rüssel“*, auf die wir hier etwas näher eingehen wollen. Durch Abweichungen von der einfachen Zylindergeometrie ändert sich die Resonanzfrequenz, sie kann aber durch einfache Korrekturmaßnahmen schrittweise an einen Sollwert angepasst werden.

7.2 Frequenzkorrekturen an einfachen Zylinder-Sonotroden

Nach Bild 3.2 und den Gleichungen (4.1) konzentrieren sich die Federeigenschaften eines Wellenleiters auf seine Mitte und die Masseneigenschaften auf die Enden. Durch Eingriffe an den Endmassen oder an der zentralen „Feder“ lässt sich die Frequenz somit korrigieren. So führt z. B. eine Verlängerung bzw. Verkürzung des Wellenleiters nach Bild 7.1 an den freien Enden zu einer Frequenzminderung bzw. zu einem Frequenzanstieg. Ersteres kann durch Anschrauben, Anlöten bzw. Ankleben von Zusatzmassen ($+\Delta m$), letzteres durch Abdrehen oder radiales bzw. axiales Aufbohren der Endflächen ($-\Delta m$) geschehen. Bei verschraubten Verbundschwingern genügt oft das Austauschen der Mutter durch eine leichtere oder schwerere aus anderem Material oder anderer Dicke. Falls die Längen ΔL_2 der Ersatzmassen klein gegen $\lambda/2$ sind, gilt mit $\varphi = 2\pi/\lambda \cdot \Delta L_2$ und $\tan \varphi/\varphi \approx 1$ unabhängig von der Form der Ersatzmasse Δm

$$\pm \frac{\Delta f}{f_0} = \mp \frac{\Delta L_2}{L} = \mp \frac{\Delta m}{m_0} \cdot \frac{\tan \varphi}{\varphi} \approx \mp \frac{\Delta m}{m_0}. \quad (7.1)$$

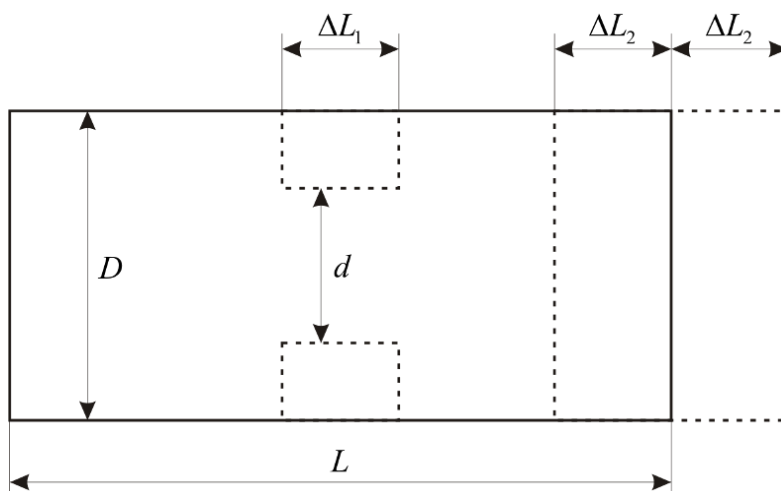


Bild 7.1: Vereinfachte Darstellung eines resonanten Ultraschallwellenleiters mit größerer oder kleinerer Gesamtlänge bzw. mit zentralem Einstich zur Frequenzänderung nach (7.1) oder (7.2)

Wenn aus Konstruktionsgründen an den freien Endflächen des Stabsystems keine Zusatzmasse angebracht oder entfernt werden kann, bleibt zur Frequenzminderung ein Zugriff auf die Federeigenschaften in der Stabmitte. Hier bewirkt z. B. eine zentrale Durchmesser-Reduktion $-d/D$ auf einer Länge ΔL_1 nach Bild 7.1 (Mitte) eine Minderung der Federsteifigkeit und reduziert die Resonanzfrequenz um

$$\frac{\Delta f}{f_0} \approx -2 \cdot \frac{\Delta L_1}{L} \cdot \left[1 + 1.35 \cdot \left(\frac{\Delta L_1}{L} \right)^2 \right] \cdot \left(\frac{D^2}{d^2} - 1 \right) \text{ bei } \Delta L_1 \leq L/10 \quad (7.2)$$

Befindet sich ein Halterungsflansch der Dicke $\Delta L_1 \ll L$ mit $d > D$ an der gleichen Stelle, dann erhöht sich die Resonanzfrequenz entsprechend. Wegen des axialen Spannungsmaximums im Schnelleknoten sollte man zur Vermeidung der Kerbwirkung (vgl. Kap. 10.8) hier keine scharfkantigen Einstiche vornehmen, sondern schrittweise, mit einem Krümmungsradius von 1 – 2 mm am Drehstahl, Material vor oder hinter dem Halterungsflansch entfernen, um die Resonanzfrequenz zu verändern.

7.3 Der Stufenkonzentrator mit Frequenzkorrektur zur Amplitudenverstärkung

Bild 1.2 zeigt einen passiven $\lambda/2$ -Stufenkonzentrator, der mit einem ungestuften Konverter nach Bild 1.1 zusammengeschaubt ist. Er wird nach Bild 7.2 im zentralen Schnelleknoten vom Durchmesser D auf den kleineren Durchmesser d heruntergestuft, um eine möglichst große Amplituden-Verstärkung $V = (D/d)^2$ zu erzielen. Falls die Stufung außermittig mit einer relativen Mittenabweichung $\pm \Delta L/L$ erfolgt, resultiert daraus gegenüber der korrekten Stufung im Schnelleknoten eine Frequenzänderung nach Bild 7.3 a.

Ist das schlanke Segment bei gleicher Gesamtlänge kürzer als $\lambda/4$, so wirkt das wie eine Stabverkürzung mit resultierendem Frequenzanstieg (im Bild 7.3 a, rechts). Ist das schlanke Segment dagegen länger als $\lambda/4$, dann vergrößert sich die scheinbare Stablänge und die Frequenz sinkt (im Bild 7.3 a links). Ein Linksversatz der Stufe im Bereich $-1/4 < \Delta L/L < +1/4$ bewirkt also immer eine Frequenzabnahme. Wenn man deshalb beim Bau einer $\lambda/2$ -Stufen-Sonotrode das schlanke Segment bei konstanter Gesamtlänge L vorsorglich etwas kürzer als $\lambda/4$ macht, gewinnt man durch nachträgliches Abdrehen einen langen, fast linearen Bereich $\Delta L/L$ zur Anpassung an die Sollfrequenz f_0 .

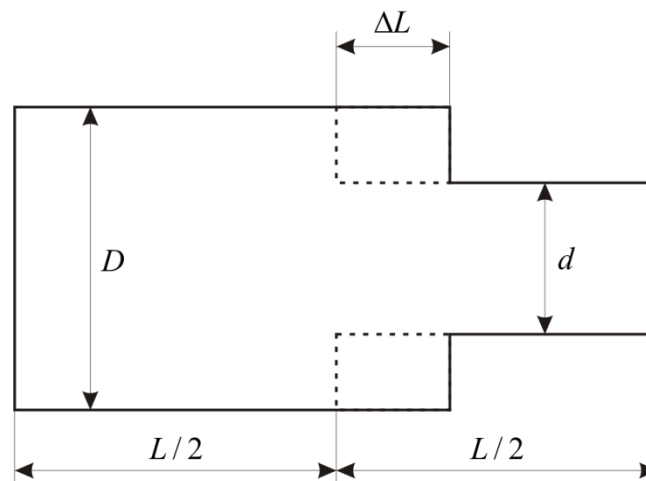


Bild 7.2: Vereinfachte Darstellung einer gestuften Ultraschall-Sonotrode mit dezentraler Stufung

Die Stufenverschiebung $\Delta L/L$ ist allerdings mit einem kleineren Verstärkungsfaktor des Amplitudentransformators nach Bild 7.3 b gekoppelt. Dieser folgt aus dem Amplitudenverhältnis von Ausgangs- und Eingangs-Schnelle v_A/v_E in der Reihen-Ersatzschaltung zweier passiver Vierpole mit unterschiedlicher Kennimpedanz $Z_1/Z_2 = m = (D/d)^2 = V$ nach Bild 3.2. Die Rechnung im Anhang zu Kapitel 7.2 liefert:

$$\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{1}{\pi} \cdot \arcsin \left[\frac{V-1}{V+1} \cdot \sin(2\pi \frac{\Delta L}{L}) \right] \approx \frac{1}{3} \cdot \frac{V-1}{V+1} \cdot \sin(2\pi \frac{\Delta L}{L}) \quad (7.3)$$

$$\frac{V_{eff}}{V} = \left[\frac{V+1}{2} \cdot \cos(\pi \cdot \frac{\Delta f}{f_0}) - \frac{V-1}{2} \cdot \cos(2\pi \cdot \frac{\Delta L}{L}) \right]^{-1} \approx 1 - 9 \cdot \frac{V-1}{V+1} \cdot |\Delta L/L|. \quad (7.4)$$

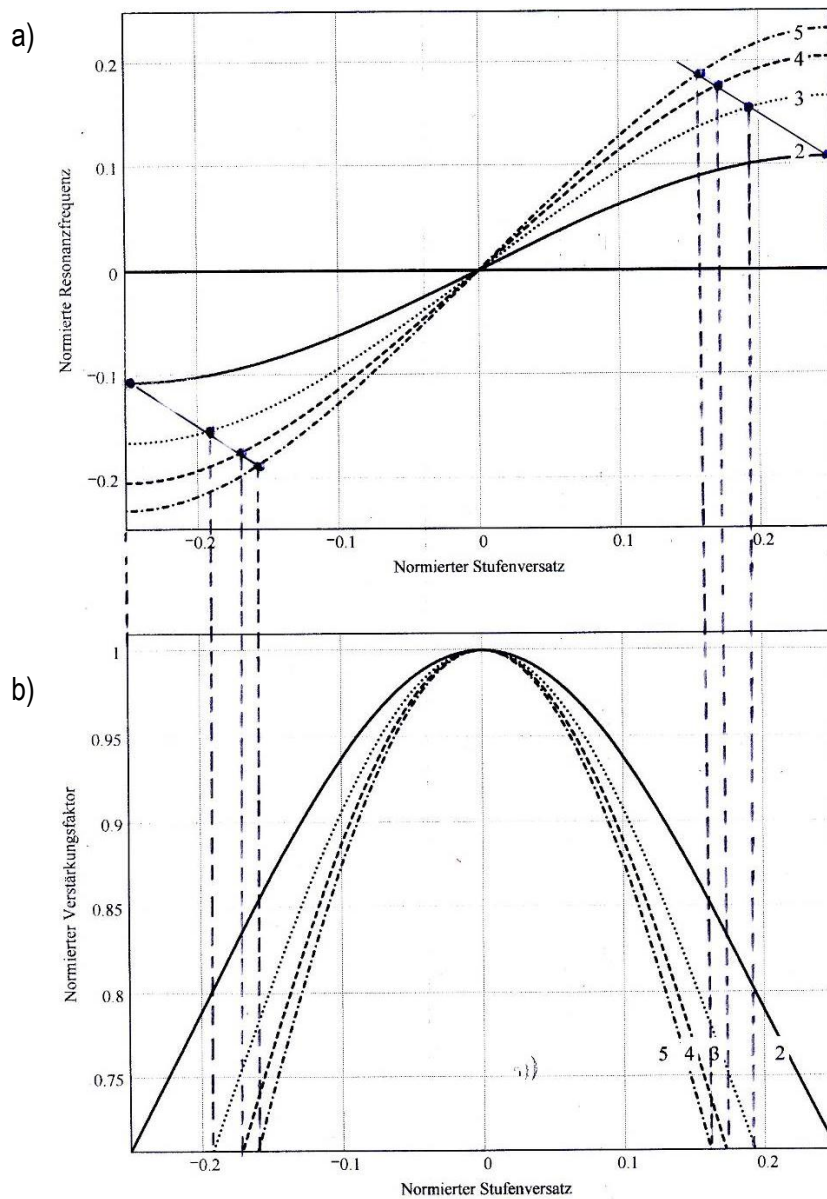


Bild 7.3: a) Frequenzvariation und b) Änderung des effektiven Verstärkungsfaktors als Funktion des normierten Stufenversatzes beim Stufenrüssel nach (7.3) und (7.4) im Bereich der Halbwertsbreite nach (7.5) mit $V=D/d$ als Parameter

Die Näherungen rechts außen gelten innerhalb der -3dB-Bandbreite des Verstärkungsfaktors mit einer maximalen Fehlerabweichung von $\pm 1\%$. Innerhalb dieser Bandbreite mit den Bereichsgrenzen

$$-0.12 \cdot \left(\frac{V+1}{V-1}\right)^{2/3} \leq \frac{\Delta L}{L} \leq +0.12 \cdot \left(\frac{V+1}{V-1}\right)^{2/3} \quad \text{und} \quad -0.3 \cdot \frac{V-1}{V+1} \leq \frac{\Delta f}{f_0} \leq +0.3 \cdot \frac{V-1}{V+1} \quad (7.5)$$

kann der effektive Verstärkungsfaktor um maximal 30% des Optimalwerts V sinken.

Die Resonanzfrequenz nach (7.3) variiert dabei zwischen $\pm 19\%$ bei $V = 5$ ($\Delta L/L \approx \pm 0.16$) und $\pm 11\%$ bei $V = 2$ ($\Delta L/L \approx \pm 0.25$). Beschränkt man den Stufenversatz auf den Bereich $-1/3V \leq \Delta L/L \leq +1/3V$, dann liegt die Abnahme des Verstärkungsfaktors zwischen tolerierbaren 1% und 10% des Optimalwerts.

Zur Frequenzkorrektur bei einer Stufen-Sonotrode nach Bild 7.2 kann man statt der o. a. Linksverschiebung $\Delta L_1/L$ der Stufe bei konstanter Gesamtlänge L auch das schlanke Segment um $\Delta L_2/L$ kürzen. In diesem Fall addieren sich die Frequenzsteigerung Δf_1 durch Verkürzung der Gesamtlänge um ΔL_2 und die Frequenzsteigerung Δf_2 durch Mittenversatz der Stufe um $\Delta L_2/2$ und man erhält innerhalb der Bandbreite den gleichen Frequenzanstieg Δf mit geringerem Werkstattaufwand und Materialverlust. Denn aus

$$\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{\Delta f_1}{f_0} \cdot \left(1 + \frac{\Delta f_2}{\Delta f_1}\right) \quad \text{folgt} \quad \frac{\Delta f}{f_0} \approx \frac{\Delta L_2}{L} \cdot \left(1 + \frac{V-1}{V+1} \cdot \frac{\sin(\pi \cdot \Delta L/L)}{\pi \cdot \Delta L/L}\right) \approx \frac{\Delta L_2}{L} \cdot \left[\frac{2 \cdot V}{V+1}\right] \quad (7.6)$$

und mit (7.3) bei gleicher Frequenzänderung $\Delta L_2/\Delta L_1 \approx 1 - 1/V$.

Ein Sonderfall des Stufentransformators ist der $\lambda/2$ -Verbundschwinger mit außermittigem Piezowandler und korrekt gestuftem Durchmesser des metallischen $\lambda/4$ Segments auf der Lastseite. In diesem Fall multiplizieren sich die Verstärkungsfaktoren des ungestuften Verbundschwingers nach Kapitel 5.3 und Tabelle 5.1 und des gestuften Amplitudentransformators nach (7.4). Bei einer Stahl-Aluminium-Kombination würde sich z. B. mit $\alpha_0/\pi = 0.2$, $\Phi/\pi = 0.25$ und moderater Stufung $D/d = 2$ ein Gesamt-Verstärkungsfaktor $V_{\text{eff}} \approx 7$ ergeben.

7.4 Der Exponential-Konzentrator zur Amplitudenverstärkung und Impedanzanpassung

Wir verweisen auf die ausführliche Herleitung der axialen Verteilung der Kraft- und Schnelle-Amplituden bei zylindrischen Stäben in Kapitel 2 und die Gleichungen (2.1) bis (2.20). Im Unterschied dazu ändert sich die Querschnittsfläche beim Exponentialstab proportional zu $\exp(bx)$. Sind d und D die beiden Enddurchmesser der Sonotrode mit der Resonanzlänge L , dann folgt der Durchmesser als Funktion der auf L normierten Axialkoordinate $\bar{x} = x/L$ der Funktion

$$d(\bar{x}) = d \cdot \exp\left(\frac{b}{2} x\right) = d \cdot \exp\left(\ln\left(\frac{D}{d}\right) \cdot \bar{x}\right) = d \cdot \exp\left[\ln(\bar{D}) \cdot \bar{x}\right] \quad (7.7)$$

mit d bei $\bar{x} = 0$ und D bei $\bar{x} = 1$.

Neben der Verstärkung V der Schnelleamplituden zwischen den beiden Endflächen interessiert hier anstelle der Kraftamplitude die Wechseldruck-Amplitude (Kraft/Fläche) mit ihrem Maximum nahe der Mitte der resonanten Sonotrode, das die kritische Dauer-Wechselbelastung nicht überschreiten darf. Anstelle von (2.6) gilt also

$$\frac{1}{p(x)} \cdot \left[\frac{d^2 p(x)}{dx^2} + b \cdot \frac{dp(x)}{dx} \right] = \frac{1}{v(x)} \cdot \left[\frac{d^2 v(x)}{dx^2} + b \cdot \frac{dv(x)}{dx} \right] = \gamma^2 \quad (7.8)$$

mit $\gamma = \beta + j\alpha$ nach (2.7).

Die Ausbreitungskonstante γ in den Gleichungen (2.1) und (2.2) ist nun durch eine neue Ausbreitungskonstante $\gamma^* = \beta^* + j\alpha^*$ zu ersetzen. Diese folgt bei verlustfreiem Sonotrodenmaterial ($\gamma = j\alpha$) aus Gleichung (7.8):

$$\gamma^* = -\frac{b}{2} \pm j\alpha \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{b}{2\alpha}\right)^2} = \beta^* + j\alpha^* \quad (7.9)$$

Infolge der exponentiellen Querschnittsänderung b ändern sich die effektive Schallgeschwindigkeit c_0^* und damit auch die Resonanzlänge $L_{res}^* = \alpha^* / \pi$ gegenüber den Vergleichswerten c_0 und $L_{res} = \lambda_0 / 2 = c_0 / 2f$ bei zylindrischen Stäben. Mit $\alpha^* = \omega / c_0^*$ ergibt sich aus (7.9)

$$b / 2\alpha^* = \frac{\ln(\bar{D})}{\alpha^* \cdot L_{res}^*} = \frac{\ln(\bar{D})}{\pi} = A \quad \text{und} \quad \frac{\alpha}{\alpha^*} = \frac{c_0^*}{c_0} = \frac{L_{res}^*}{\lambda_0 / 2} = \sqrt{1 + A^2} \quad (7.10)$$

Weil die Schnelle-Amplitude des Konverters verstärkt werden soll, beziehen wir die Amplitudenwerte der Schnelle $v(x)$ und des Wechseldrucks $p(x)$ auf die Schnelle v_0 am Sonotroden-Eingang $x = L$. Es gilt also der allgemeine Lösungsansatz

$$p(x) = e^{A\pi \cdot (1-\bar{x})} \cdot \left[A_1 \cdot e^{j(\pi\bar{x})} + B_1 \cdot e^{-j(\pi\bar{x})} \right] \quad (7.11)$$

$$v(x) = e^{A\pi \cdot (1-\bar{x})} \cdot \left[A_2 \cdot e^{j(\pi\bar{x})} + B_2 \cdot e^{-j(\pi\bar{x})} \right] \quad (7.12)$$

Die Konstanten A_n und B_n folgen bei reiner Wirklast $R_a = m_L Z_0$ mit $Z_0 = \rho_0 c_0 \cdot \pi / 4 \cdot d^2$ (ähnlich wie in Kapitel 2) aus den Randbedingungen $v(L) = v_0 = v(0) / \bar{D}$ und $p(0) = m_L \cdot \rho_0 c_0 \cdot v(0)$:

$$A_1 = \frac{v_0 \cdot \rho_0 c_0}{2} \cdot [m_L(1 + jA) + \sqrt{1 + A^2}] \quad (7.13) \quad B_1 = \frac{v_0 \cdot \rho_0 c_0}{2} \cdot [m_L(1 - jA) - \sqrt{1 + A^2}] \quad (7.14)$$

$$A_2 = \frac{v_0}{2} \cdot [(1 - jA) + m_L \sqrt{1 + A^2}] \quad (7.15) \quad B_2 = \frac{v_0}{2} \cdot [(1 + jA) - m_L \sqrt{1 + A^2}] \quad (7.16)$$

und stimmen bei $A = 0$ mit den Gleichungen (2.14) und (2.15) des Zylinderstabes überein.

Durch Einsetzen in (7.12) und (7.13) folgt dann mit (7.10) und

$$\frac{e^{j\pi\bar{x}} + e^{-j\pi\bar{x}}}{2} = \cos(\pi\bar{x}) \quad \text{bzw.} \quad -j \cdot \frac{e^{j\pi\bar{x}} - e^{-j\pi\bar{x}}}{2} = \sin(\pi\bar{x})$$

anstelle von (2.18) und (2.19)

$$\frac{v(\bar{x})}{v_0} = e^{A\pi(1-\bar{x})} \cdot [\cos(\pi\bar{x}) + A \cdot \sin(\pi\bar{x}) + j \cdot m_L \cdot \sqrt{1 + A^2} \cdot \sin(\pi\bar{x})] \quad (7.17)$$

$$\frac{p(\bar{x})}{v_0 \cdot \rho_0 c_0} = e^{A\pi(1-\bar{x})} \cdot [m_L \cdot (\cos(\pi\bar{x}) - A \cdot \sin(\pi\bar{x})) + j \cdot \sqrt{1 + A^2} \cdot \sin(\pi\bar{x})] = -j \cdot \frac{dv(\bar{x})}{d\bar{x}} \cdot \frac{d\alpha^*}{d\alpha} \quad (7.18)$$

Die resultierenden Amplitudenverläufe folgen aus $\sqrt{\text{Re}^2 + X e^2}$ mit den Real- und Imaginärteilen von (7.17) und (7.18). Ebenso wie beim Zylinderstab werden bei $m_L > 0$ stehenden Wellen von je einer fortschreitenden Welle zum Lastwiderstand R_a (ohne echte Schnelleknoten) überlagert.

Zur Veranschaulichung ist der normierte Verlauf von (7.17) und (7.18) in Bild 7.4 ohne Wirklast (bei $m_L = 0$) mit $\bar{D} = 1, 2, 3, 4$ und 5 als Parameter und in Bild 7.5 bei einem typischen Verstärkungsfaktor $V = \bar{D} = 3$ mit $m_L = 0.1$ bis 0.5 als Parameter über der normierten Abszisse \bar{x} dargestellt.

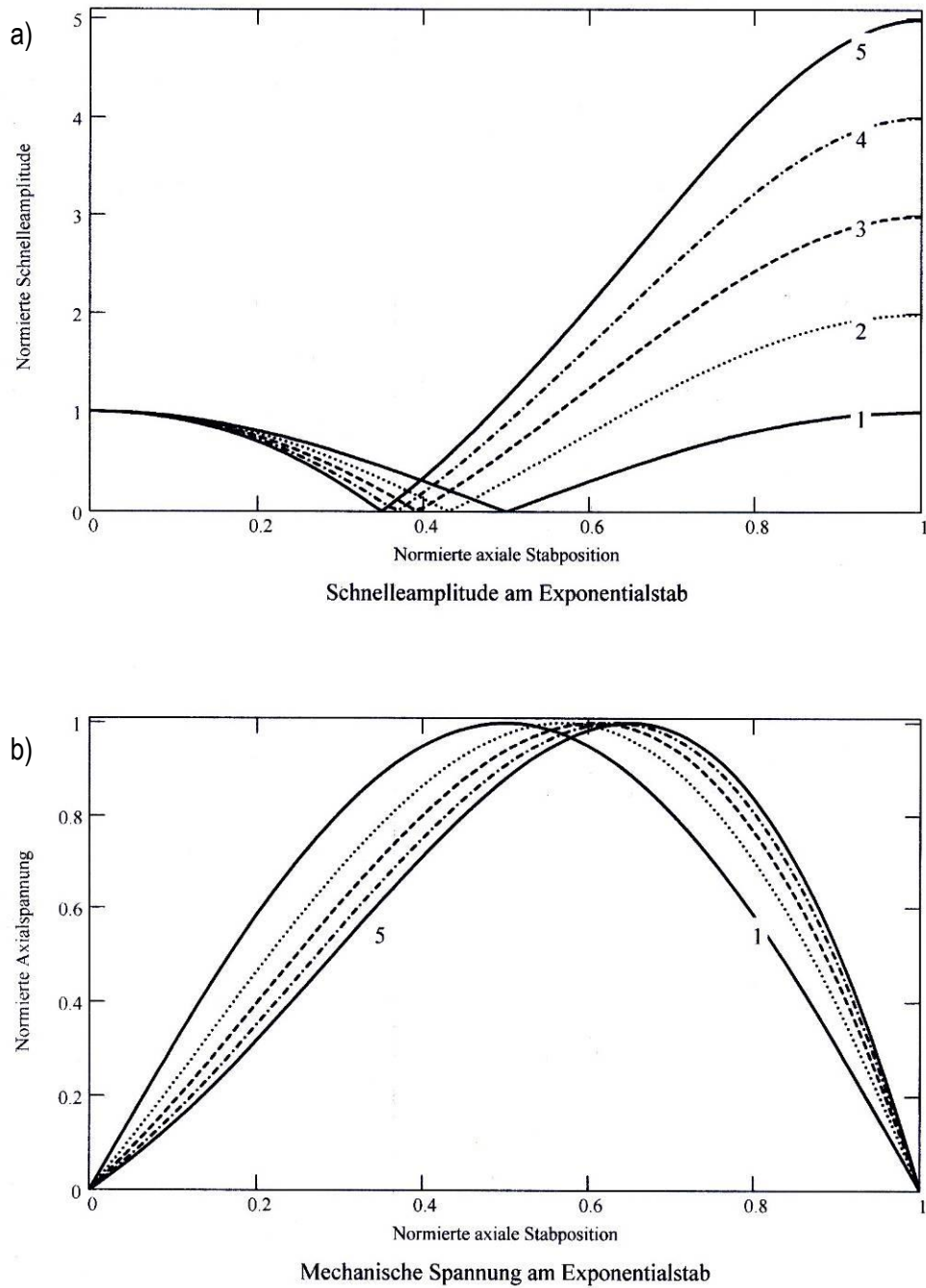


Bild 7.4: Schnelleamplitude (a) und Wechseldruckamplitude (b) über der normierten Axialkoordinate x/L eines verlustfreien Exponentialkonzentrators ohne Ausgangsbelastung ($m=0$) mit dem Verstärkungsfaktor $V=D/d$ als Parameter. Der Konverter befindet sich links.

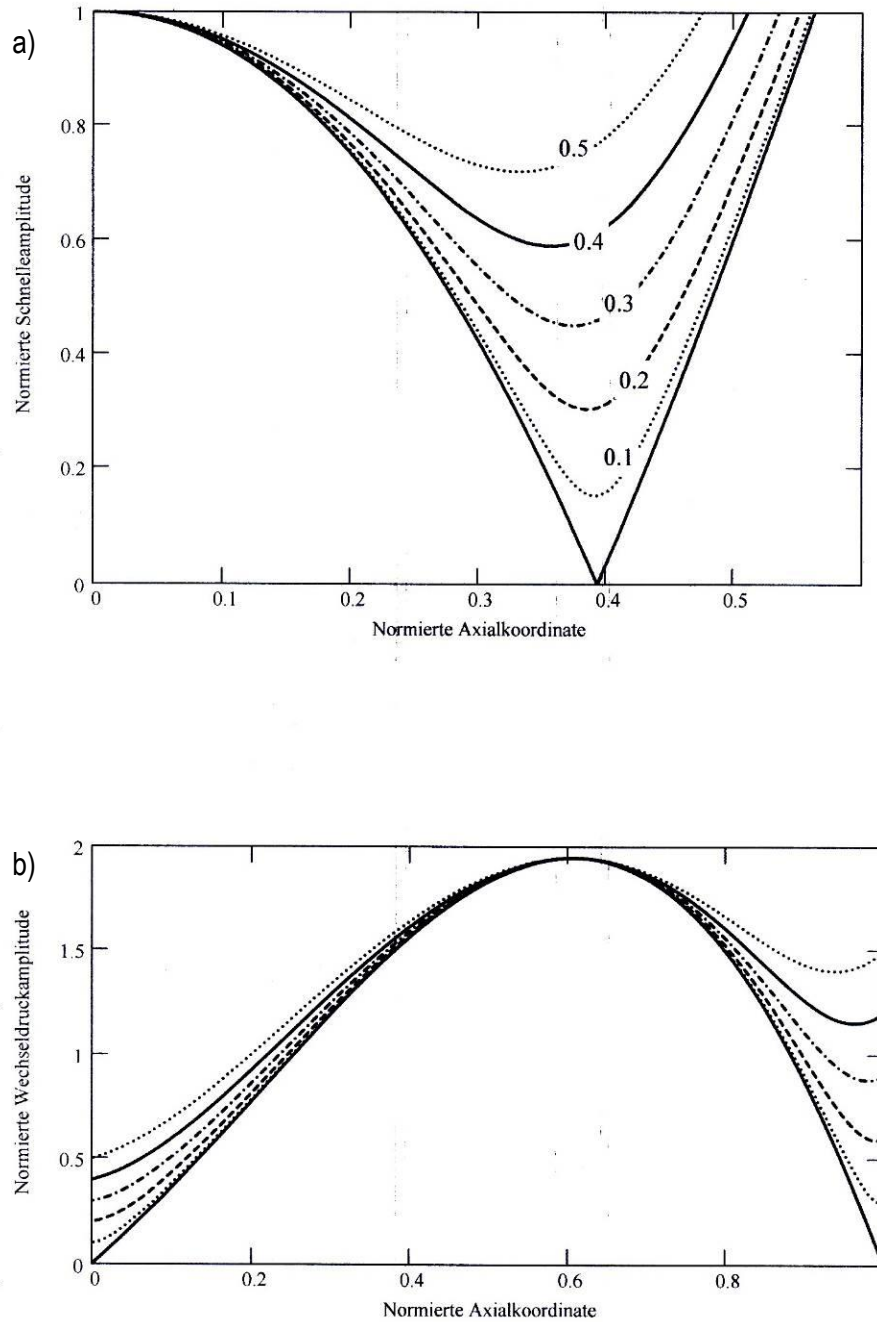


Bild 7.5: Normierte Schnelleamplituden (a) und Wechseldruckamplituden (b) über der normierten Axialkoordinate x/L am verlustfreien Exponentialkonzentrator mit $V = D/d = 3$ und normiertem Ausgangswirkwiderstand m als Parameter. Der Lastwiderstand $m = R_a/Z_0$ befindet sich rechts und der Konverter links.

Aus Bild 7.4 a erkennt man, dass die Amplitudenverstärkung $V = D/d$ exakt dem reziproken Durchmesser Verhältnis entspricht. Außerdem ergeben sich bei normierten Abständen

$$\bar{x}_K = \frac{1}{\pi} \cdot \operatorname{arccot}(-A) \quad \text{mit} \quad v(\bar{x}_K) = 0 \quad (7.19)$$

echte Schnelleknoten, an denen die Sonotrode fixiert werden kann.

Bei Leistungsabstrahlung ($m_L > 0$) ist eine starre Einspannung an diesen Stellen wegen der Überlagerung durch eine fortschreitende Welle nach Bild 7.5 a problematisch. In der Nähe des Schnelleknotens nach Gleichung (7.19) befindet sich nun ein zu m_L proportionales Minimum

$$\frac{v_{\min}}{v_0} \approx m_L \cdot \left[1 + 0.35 \cdot (\bar{D} - 1)^{0.7 - 0.03(\bar{D} - 1)} - 0.15 \div m_L^2 (\bar{D} - 1)^{1.3} \right] \quad (7.20)$$

$$\text{bei } \bar{x}(v_{\min}) = \frac{1}{\pi} \cdot \operatorname{arccot} \left[-A \frac{1 + m_L}{1 - m_L} \right],$$

das sich mit wachsendem Lastwiderstand leicht zum breiten Sonotrodenende verschiebt.

Zur Vermeidung ungewollter Leistungsabgabe an die Halterung ist hier u. U. eine verlustarme elastische Aufhängung mit einer auf Resonanz abgestimmten Biegemembrane oder durch verlustarme O-Ringe sinnvoll.

Aus Bild 7.4 b und Bild 7.5 b erkennt man, dass Lage und Größe der Wechseldruckbäuche zwar vom Durchmesser Verhältnis $V = D/d$, nicht aber vom äußeren Lastwiderstand m_L abhängen. Es gilt

$$p_{\max} = \rho_0 c_0 \cdot v_{\max} \cdot \left[1 + 0.463 \cdot (\bar{D} - 1) \right] \quad (7.21)$$

$$\text{bei } \bar{x}(p_{\max}) = 1 - \bar{x}(v_{\min}) = \frac{1}{\pi} \cdot \operatorname{arccot}(A).$$

Die Eingangsimpedanz folgt aus dem Quotienten von (7.18) und (7.17) bei Multiplikation mit der positionsabhängigen Querschnittsfläche. An der Koppelstelle zum Konverter ($x = L$) ist sie – ebenso wie beim Stufenkonzentrator – um den Faktor $(D/d)^2$ größer als am schlanken Lastausgang ($x = 0$). Die Exponential-Sonotrode wirkt also nicht nur als Amplitudenverstärker $V = D/d$ für die Schnelle, sondern bei der Leistungsübertragung auch als Impedanztransformator im Verhältnis $(D/d)^2$. Die übertragene Wirkleistung ist bei unterschiedlicher Abstrahlfläche und gleicher Eingangsfläche konstant. Die abgestrahlte Schallintensität steigt also reziprok zur Abstrahlfläche. Dabei kann sie die Leistungsbegrenzende Kavitationsschwelle erreichen oder überschreiten. Deshalb – und auch wegen der kritischen Halterungsverluste (s. o.) – muss ein Kompromiss bei einem nicht zu großen Verstärkungsfaktor V gesucht werden.

Zur Leistungsabstrahlung scheint der Exponential-Rüssel besser geeignet zu sein als der Stufen-Rüssel, denn er besitzt keine reflektierende Impedanz-Sprungstelle im Spannungsbauch. Beide Übertrager transformieren den Ausgangs-Wirkwiderstand R_a im Flächenverhältnis $(D/d)^2$ auf den Sonotroden-Eingang, unterscheiden sich aber bei der Schnelleverstärkung um den Faktor D/d . Zum Vergleich koppeln wir je einen Stufenrüssel bzw. einen Exponentialrüssel mit gleichem Eingangsdurchmesser D an einen ungestuften Konverter gleichen Durchmessers. Beide Kaskaden solle bei gleichem Ausgangsdurchmesser d und gleicher maximaler Wechseldruckamplitude p_{\max} akustische Leistung – entweder an Luft ($m_L \approx 0$), oder an eine Flüssigkeit mit $m_L = 0.1$ (z. B. Wasser) oder $m_L = 0.3$ (z. B. eine Metallschmelze) abgeben. Es zeigt sich, dass unter diesen Voraussetzungen mit dem Exponentialrüssel

(7.22) in Abhängigkeit von D/d eine größere Schnelleamplitude v_{max} und eine größere Leistungsabgabe erreicht wird als mit dem Stufenrüssel (7.23), weil im ersten Fall

$$(7.22) \quad \frac{v_{max} \cdot \rho_0 c_0}{p_{max}} = \frac{\bar{D}}{1 + 0.463 \cdot (\bar{D} - 1)} \geq 1 \quad \text{und im zweiten Fall} \quad (7.23) \quad \frac{v_{max} \cdot \rho_0 c_0}{p_{max}} = 1$$

ist.

Der relative Amplitudengewinn in % und der relative Schallpegel-Gewinn in $[dB]$ bei Schallabstrahlung in Flüssigkeiten ergeben sich als Funktion von $\bar{D} = D/d$ aus dem Quotienten von (7.22) und (7.23). Sie erreichen bei $D/d = 5$ etwa 50% bzw. 7 dB. Dabei ist allerdings zu berücksichtigen, dass die Schnelleamplitude am Ausgang des Konverters mit Exponentialrüssel um den Faktor D/d größer sein muss als beim Stufenrüssel, was zu erheblichen inneren Verlusten mit resultierendem Temperaturanstieg im Konverter führen würde, da die Verluste proportional zu $(D/d)^2$ ansteigen.

8 Dispersion der Schallgeschwindigkeit in dicken Stäben und Platten

Die axiale Resonanzfrequenz schlanker zylindrischer Stäbe, mit Durchmessern $D \ll L$ und $L = \lambda/2$ berechnet man aus $f_{0,ax} = c_0/2L$, mit $c_0 = \sqrt{E/\rho}$ als axialer *Dehnwellengeschwindigkeit*. Mit zunehmendem Stabdurchmesser D oder abnehmendem *Schlankheitsgrad* L/D sinkt die Resonanzfrequenz bei konstanter Stablänge L nach Lucey [19] wie

$$\frac{f_{ax}}{f_{0,ax}} = \sqrt{1 - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{N_{33}}{N_p} \frac{D}{L} \right)^2} \quad (8.1)$$

im Gültigkeitsbereich $0 \leq D/L \leq N_p/N_{33} \approx \sqrt{2}$, mit $L_{33} = 1/2 \cdot c_0$ als *axialer Frequenzkonstante* und N_p als *planarer Frequenzkonstante* für Radialschwingungen dünner Kreisscheiben (vgl. Tabelle 8.1). Daraus ergibt sich unabhängig von der Segmentlänge eine, für alle Komponenten des Verbundschwingers wichtige, relative Änderung der Dehnwellengeschwindigkeit als Funktion von Df

$$\frac{c_{st}(D \cdot f)}{c_0} \approx \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{D \cdot f}{N_p} \right)^2} \right)} \approx 1 - \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{Df}{N_p} \right)^2 \quad (8.2)$$

(vgl. Bild 8.1).

Der Gültigkeitsbereich von (8.2) für axial schwingende Stäbe gilt für $D \cdot f \leq 0.866 \cdot N_p$. Bei dicken Aluminium- und Titanstäben heißt das z. B. $D \cdot f \leq 3100 \text{ kHz} \cdot \text{mm}$ bzw. $D \cdot f \leq 2900 \text{ kHz} \cdot \text{mm}$.

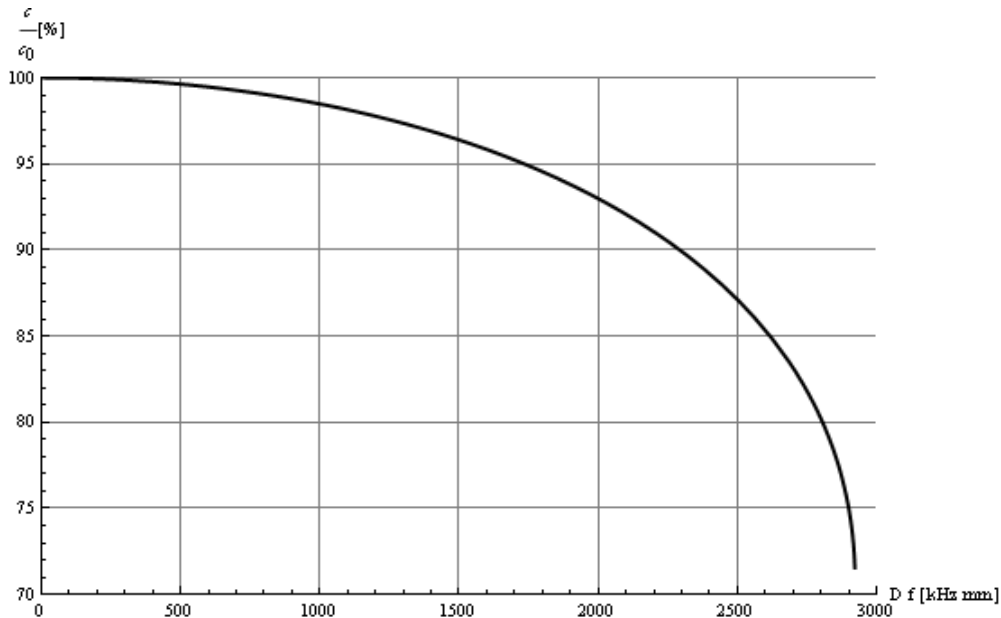


Bild 8.1: Dispersion der axialen Schallgeschwindigkeit von Titanstäben nach Lucey [19]

Tabelle 8.1: Wichtige Materialkonstanten von typischen Ultraschallkomponenten

Material	PZT-4	Titan (6A1 4 V)	Stahl	Aluminium
$N_p [m/s]$	2275	3375	3514	3624
$c_0 [m/s] = 2N_{33}$	3290	4900	5180	5150
$c_{L,\infty} [m/s]$	3816	5860	5850	6300
σ (Poissonkonstante)	0.3	0.33	0.32	0.34
$\rho [kg/m^3]$	7500	4420	7800	2700
$m = \rho_c / \rho_{c_{PZT}}$	1	0.878	1.637	0.558
$\alpha_{th} \cdot 10^6 [1/K]$	3	6	12	23.8

In einem gewissen Bereich um $D/L = N_p / N_{33} \pm x$ findet man gekoppelte Axial/Radialschwingungen mit kissenförmigen Deformationen [14]. Dieser Bereich soll hier nicht weiter erörtert werden.

9 Belastbarkeitsgrenzen und Güten von hochwertigen Ultraschallsonotroden

9.1 Allgemeine Übersicht

Der technische Einsatz piezoelektrischer Verbundschwinger konzentriert sich entweder auf den niederfrequenten Bereich zwischen etwa 20 kHz und 100 kHz oder auf den hochfrequenten Bereich zwischen etwa 0.5 MHz und 10 MHz, mit Spezialanwendungen auch bei höheren Frequenzen. Die Grenzen für den in der Ultraschall-Technik bisher kaum genutzten Frequenzbereich zwischen 100 kHz und 0.5 MHz sind fließend. Für jedes derzeit bekannte technische Einsatzgebiet sind an der Lastseite des Schwingungssystems charakteristische Schnelleamplituden erforderlich. In Abhängigkeit davon ergeben sich an der abstrahlenden Schwinger-Stirnfläche z. B. bei 20 kHz Elongationsamplituden A [μm], bzw. im Nahfeldabstand in Wasser resultierende Schallintensitäten I [W/cm^2] und in Luft Schallpegel SPL [dB] (ref. $1 \text{ W}/\text{cm}^2 = 160 \text{ dB}$). Grundsätzlich geht es bei der Konstruktion von Verbundschwinger also darum, die erforderlichen Schnelleamplituden unter optimalen Bedingungen, d. h. mit hohem Wirkungsgrad, ausreichenden Schwinger-Standzeiten und zu vertretbaren Kosten bereit zu stellen. Dabei wird die Belastbarkeitsgrenze des Verbundschwingers durch einen Sicherheitsfaktor $P_K = \sigma_K(x) / \sigma(x) > 1$ bestimmt, der sich als Quotienten aus der dynamischen Zugfestigkeit $\sigma_K(x)$ und der axialen mechanischen Wechsellspannungs-Amplitude $\sigma(x) = F(x) / S(x)$ an der schwächsten Stelle $x = x^*$ des Verbundsystems erweist.

9.2 Zulässige Schnelleamplituden an der Lastseite ungestufter, geklebter Verbundschwinger

Impuls-Echo-Wandler zur Werkstoffprüfung oder zur medizinischen Diagnostik und Wandler zur Leistungsabstrahlung in der Physiotherapie oder der chemisch-pharmazeutischen Industrie sind in der Regel hochfrequente piezoelektrische Verbundschwinger, mit Resonanzfrequenzen $f_r > 500 \text{ kHz}$. Hier müssen die einzelnen Schichten durch hochwertige Kleber an den Flächen mit den normierten Axialkoordinaten $\Phi \pm \alpha_0 / 2$ (vgl. Bild 5.7) zusammengefügt werden, weil die geringe Scheibendicke für axiale Schraubverbindungen ungeeignet ist. Gleiches gilt für niederfrequente Verbundschwinger mit $f_r < 100 \text{ kHz}$ bei endständigem Piezowandler ($\Phi = \alpha_0 / 2$), die z. B. in Ultraschall-Reinigungsanlagen, Bohrmaschinen oder Flüssigkeits-Zerstäubern zum Einsatz kommen. In beiden Fällen sind Klebeschichten mit einer kritischen dynamischen Zugfestigkeit σ_K die Schwachstellen. Deshalb dürfen nur hochwertige, temperaturbelastbare, alterungsbeständige Kleber auf gut präparierten und entfetteten Klebeflächen benutzt werden.

Aus Bild 5.7, mit den glatten Sinus- bzw. Kosinus-Kurven der mechanischen Wechsellspannungs- und Schnelle-Amplitude auf der *backing*-Seite des Verbundschwinger, folgt für die näher am Schnelleknoten liegende, kritische Klebeschicht bei $\Phi + \alpha_0 / 2$ nach dem Hookeschen Spannungs-Dehnungs-Gesetz

$$\varepsilon(\Phi + \alpha_0 / 2) = \sigma(\Phi + \alpha_0 / 2) / E = v_{2,1} / c_0 \cdot \sin(\Phi + \alpha_0 / 2) \quad (9.1)$$

Mit dem Verstärkungsfaktor

$$V(B) = \frac{v_{1,1}}{v_{2,1}} = \frac{1 + a_1 \cdot \sin^2(\Phi + \alpha_0 / 2)}{1 + a_2 \cdot \sin^2(\Phi - \alpha_0 / 2)}$$

aus Tabelle 5.1 und dem o. a. Sicherheitsfaktor $P_K = \frac{\sigma_K}{\sigma(\Phi + \alpha_0 / 2)}$ folgt daraus für die zulässige Schnelleamplitude $v_{1,1}$ an der Lastseite

$$v_{1,1} = \frac{V}{P_K} \cdot \frac{\sigma_K}{\rho_0 c_0} \cdot \frac{1}{\sin(\Phi + \alpha_0 / 2)} \leq \frac{V}{P_K} \cdot \frac{\sigma_K}{\rho_0 c_0} \quad (9.2)$$

Bei endständigem Piezowandler mit $\Phi = \alpha_0 / 2$, $\alpha_0 / \sin \alpha_0 \approx 1$ und M als Masse gilt insbesondere die Näherung

$$v_{1,1} \approx \frac{V}{P_K} \cdot \frac{\sigma_K}{\omega \cdot M / S}, \quad (9.3)$$

nach der die Beschleunigungskraft pro Flächeneinheit $\omega \cdot v_{2,1} \cdot M / S$ der aufgeklebten Endmasse M stets kleiner sein muss als die Wechselfestigkeit σ_K des Klebers. In einem typischen Beispiel für einen aus zwei Segmenten bestehenden Al-PZT-Verbundschwinger mit $\Phi = \alpha_0 / 2 = \pi / 10$, einem Sicherheitsfaktor $P_K = 2$ und einem aus Tabelle 5.1 folgenden Verstärkungsfaktor $V = 1.27$ folgt aus (9.2) $v_{1,1}(B) \approx 0.9 \cdot \sigma_K / \rho_0 c_0$.

Die dynamische Zugfestigkeit der Klebeschicht muss also etwas größer sein als das Produkt aus spezifischer Kennimpedanz des Wandlers und maximal erforderlicher Schnelleamplitude auf der Lastseite des Verbundschwingers. Wenn die Zugfestigkeit σ_K des Klebers bekannt ist, kann die zulässige Schnelleamplitude $v_{1,1,\max}$ berechnet werden.

9.3 Zulässige Schnelleamplituden an der Lastseite ungestufter, geschraubter Verbundschwinger

Verbundschwinger der Versionen A mit $\Phi = \pi / 2$ bzw. C mit $\Phi = \pi / 4$ nach Kapitel 5.5 werden in der Regel durch mechanisch vorgespannte Schraubverbindungen nach Bild 1.1 realisiert. Die Piezoplaten und die metallischen Verbundsegmente mit dem Außendurchmesser D besitzen eine zentrale Bohrung mit dem Innendurchmesser $d \approx D / 3$ und werden durch eine hoch belastbare Schraube mit dem Kerndurchmesser $d - \Delta d$ und der Wechselfestigkeit σ_k zusammengehalten. Damit sich diese Verbundschwinger in der Zugphase der Schwingung nicht durch Zugspannungen an den ohne Kleber zusammengefügt Schichtgrenzen lockern, muss die statische Vorspannung etwa der zu erwartenden, maximalen mechanischen Wechselfspannungs-Amplitude entsprechen. Es gilt dann anstelle von (9.2)

$$v_{1,1} = \frac{V}{2P_K} \cdot \frac{\sigma_k}{\rho_0 c_0} \cdot \frac{(d / D)^2}{\sin(\Phi)} \quad (9.4)$$

Zur Demonstration berechnen wir je einen Verbundschwinger aus Al(1)-PZT(0)-Fe(2) mit $\Phi_A = \pi / 2$ bzw. $\Phi_B = \pi / 4$ und einem Piezowandler gleicher normierten Dicke $\alpha_0 = 0.2 \cdot \pi$ bei einem Sicherheitsfaktor $P_K = 2$ und einem typischen Durchmesser Verhältnis $D/d = 3$. Die beiden Verstärkungsfaktoren $V(A) = 2.78/1.05$ und $V(B) = 3.73/2.11$ können wieder aus der Tabelle 5.1 entnommen werden. Aus (9.4) folgt dann $v_{1,1}(A) \approx v_{1,1}(C) \approx 0.15 \cdot \sigma_k / \rho_0 c_0$, wobei allerdings die Wechselfestigkeit

der hochwertigen Metallschraube wesentlich größer ist als die Wechselfestigkeit der Klebeschicht in (9.2). Unter den angegebenen Bedingungen sind mit den beiden Verbundschwingern auf der Lastseite fast identische Schnelleamplituden von 1 m/s tolerierbar, die nach Bild 9.1 für die meisten technischen Anwendungen ausreichen. Der außermittige Piezowandler (Version C) hat gegenüber dem zentrierten Piezowandler (Version A) den zusätzlichen Vorteil geringerer Verlustleistung (Erwärmung) und ist deshalb als Konverter vorzuziehen.

9.4 Belastbarkeitsgrenzen und Güten von hochwertigen Ultraschallsonotroden

Für extreme Schnelleamplituden in der Ultraschall-Hochleistungstechnik wird anstelle von Duraluminium oder hochwertigem Werkzeugstahl die Titanlegierung 90Ti 6Al 4V bevorzugt. Nach Mason [14] kann dieses Material nach einer einstündigen Wärmebehandlung im Vakuum bei 750°C bis zu maximalen longitudinalen Dehnungsamplituden $\varepsilon_{\max} \approx 4 \cdot 10^{-3}$ dynamisch belastet werden. Durch die Wärmebehandlung lässt sich dabei die gemessene Güte Q von typischem, ungetempertem Ausgangsmaterial bei Frequenzen bis etwa 10 MHz um den Faktor 3 bis 4 auf mehr als 10000 steigern. Mit einem gewissen Sicherheitsfaktor unterhalb der Wechselfestigkeit kann man also bei Güten zwischen 7000 und 10000 maximale Dehnungsamplituden $\varepsilon_{\text{dyn,max}} \approx 2 \cdot 10^{-3}$ tolerieren. Das führt mit (9.1) bei einer Schallgeschwindigkeit $c_{Ti} = 4900 \text{ m/s}$ unabhängig von der Arbeitsfrequenz zu maximalen Schnelleamplituden von 10 m/s . Mit anderen Sonotrodenlegierungen (Duralumin und Werkzeugstahl) erreicht man etwa 40%.

Schnelleamplituden von 10 m/s würden bei Ultraschallabstrahlung in Wasser zu unrealistisch hohen Schallintensitäten 7500 W/cm^2 führen, die um Größenordnungen über der Kavitationsschwelle lägen. Bei Abstrahlung in Luft erreicht man damit etwa 2 W/cm^2 , also extrem hohe Schallpegel von 163 dB, die durch Resonanzüberhöhung in Stehwellen-Positionierern [17] sogar auf $> 180 \text{ dB}$ verstärkt werden können und zur Levitation schwerer Teilchen mit maximalen Effektivdurchmessern bis etwa 8 mm ausreichen. In beiden Extremfällen können Verbundschwinger also noch mit ausreichendem Sicherheitsfaktor unter der theoretischen Wechselfestigkeit betrieben werden.

Bei Hochleistungsanwendungen, z. B. beim Kunststoff- oder Metallschweißen mit extrem hoher Impulsleistung von einigen kW, kann die elektrische HF-Spannung mit wachsendem Lastwiderstand bei konstant geregelter Strom- bzw. Schnelle-Amplitude u. U. bis zur Durchschlagsspannung ansteigen. Da sich der Impedanzunterschied zwischen Serien- und Parallelresonanz bei Spitzenbelastung ohnehin erheblich verringert, kann es zweckmäßig sein, bei der hochohmigen Parallelresonanz (Antiresonanz) zu arbeiten. Hier wird die Spannung als Regelgröße unter einem kritischen Wert konstant gehalten und der Strom steigt mit wachsendem Lastwiderstand an. Eine hohe Güte im Leerlauf sorgt für hohe mechanisch akustische Wirkungsgrade und geringe Leistungsaufnahme und Temperaturerhöhung im Leerlauf.

10 Einige Tipps aus der Praxis

10.1 Zum Problem der Schwingeraufhängung

Axial schwingende Sonotroden werden in der Regel im Schnelle- oder Bewegungsknoten befestigt. Dabei muss die Knotenhalterung u. U. erhebliche statische Axialkräfte ohne Verformung aufnehmen. In der Ebene des Schnelleknotens liegt allerdings ein durch die Querkontraktion bedingtes Radialschwingungsmaximum, was eine radial steife Aufhängung verbietet. Die Knotenhalterung muss also axial hart und radial weich sein. Außerdem muss die axiale Ausdehnung von Halterungsflanschen klein gegenüber der Wellenlänge sein, weil sonst Leistung in die Halterung abfließt. Bild 10.1 zeigt schematisch eine typische Schwingeraufhängung, die diese Forderungen im Prinzip erfüllt. Gelegentlich werden in der Ebene des Schnelleknotens auch dünne Platten oder Membranen in Biegewellenresonanz zur Wandlerbefestigung benutzt. Auch mit elastischen O-Ringen sind verlustarme Wandleraufhängungen möglich.

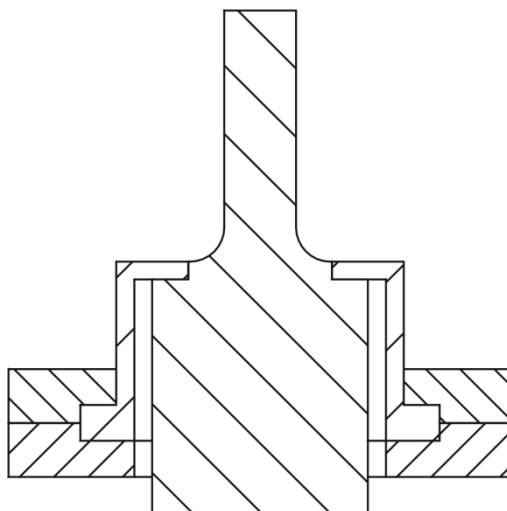


Bild 10.1: Prinzip einer axial steifen und radial weichen Wandleraufhängung im Schnelleknoten

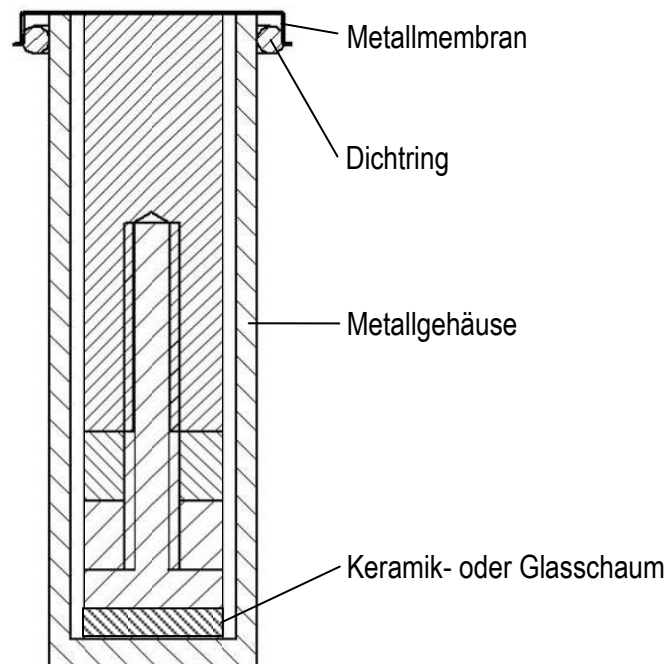


Bild 10.2: Doppelfrequenzwandler für 20 und 40 KHz

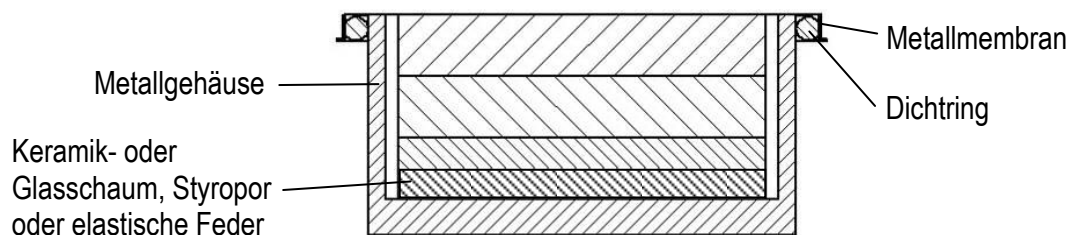


Bild 10.3 : Doppelfrequenzwandler für 1 und 2 MHz

10.2 Zur Erwärmung, Wärmeausdehnung und Temperaturkompensation

Durch Wechselbeanspruchung wird in Ultraschallverbundschwingern mechanische Energie in Hysteresewärme umgewandelt. Diese ist proportional zum Verlustfaktor β und zum Quadrat der mechanischen Wechsellspannungsamplitude (vgl. Kapitel 5.4), wächst also mit der Annäherung an den Schnelleknoten (Druckbauch) und betrifft die Piezokeramik wegen des größeren Verlustfaktors stärker als das metallische Sonotrodenmaterial.

Um die mechanische Vorspannung bei geschraubten Sonotroden auch bei wechselnden Temperaturen zu gewährleisten, muss die kleine Wärmeausdehnung der Piezoscheiben gegenüber dem zentralen Metallschaft durch einen Zwischenring mit höherer Wärmeausdehnung, z. B. aus Aluminium, kompensiert werden. Sind d_{PZT} , d_{Al} und $d_{ti} = d_{PZT} + d_{Al}$ die Axialabmessungen der Piezoscheiben, der Aluminiumzwischen Scheibe und des Titanschafts zwischen Auflage der Scheiben und der Kompressionsmutter und $\alpha_{th,PZT} \approx 3 \cdot 10^{-6}$, $\alpha_{th,Al} \approx 23.8 \cdot 10^{-6}$ und $\alpha_{th,Ti} \approx 6 \cdot 10^{-6}$ die zugehörigen Wärmeausdehnungskoeffizienten (vgl. Tabelle 8.1), dann gilt bei korrekter Temperaturkompensation

$$\frac{d_{Al}}{d_{PZT}} = \frac{\alpha_{th,Ti} - \alpha_{th,PZT}}{\alpha_{th,Al} - \alpha_{th,Ti}} = \frac{6-3}{23.8-6} \approx 1/6 \quad (10.1)$$

Die Dicke des Aluminiumzwischenrings beträgt also etwa 1/6 der Dicke der Piezoscheiben.

10.3 Amplitudenmessung mit der Mikromettermessuhr

Bei niedrigen Ultraschallfrequenzen erreichen die Schwingungsamplituden technischer Verbundschwinger an der Frontfläche leicht Werte zwischen 10 und 50 µm. Eine Amplitudeneichung von Strom- und Schnelle mit einer fixierten Messuhr ist deshalb naheliegend. Die leichte Tastspitze wird dabei durch intermittierenden Kontakt mit der schwingenden Sonotrodenfläche permanent aus der Ruhelage ausgelenkt und zeigt relativ genau den zur Stromamplitude proportionalen „zero-to-peak“-Wert der Auslenkung an.

10.4 Geläppte Piezoplaten ohne Elektroden

Geschraubte Verbundschwinger mit hoher mechanischer Vorspannung stellen höchste Anforderungen an die Planparallelität der Piezoplaten und der metallischen Kontaktflächen. Deshalb werden die Flächen oft geläppt, wobei die Piezoplaten ihre metallischen Elektrodenflächen verlieren. Da der Luftspalt zwischen den Kontaktflächen aber durch das Läppen praktisch verschwindet, entsteht kein wesentlicher kapazitiver Spannungsabfall. Oft werden zusätzlich weich geglühte Kupferfolien als Zwischenelektroden eingelegt, um Restunebenheiten auszugleichen.

10.5 Achtung bei Temperaturänderungen an elektrisch offenen Piezoplaten

Durch Wärmeausdehnung können sich nicht kurzgeschlossene Piezoplaten elektrisch bis zu mehreren kV aufladen. Das passiert z. B. beim Aushärten von Klebeschichten unter erhöhter Temperatur nach dem Abkühlen. Die Spannungen sind ungefährlich, können aber Schreckreaktionen auslösen.

10.6 Kapazitiver Spannungsabfall bei nicht leitenden Klebeschichten.

Bei geklebten Verbundschwingern muss man, selbst bei extrem dünnen Klebeschichten, mit einem kapazitiven Spannungsabfall infolge der kleinen dielektrischen Konstanten des Klebers gegenüber dem Piezomaterial rechnen. Hier hilft ein leitfähiger Kleber oder ein punktförmiger elektrischer Kurzschluss mit Leitsilber am Rande des Wandlers.

10.7 Montage von Verbundschwingern unter piezoelektrischer Spannungskontrolle

Beim Zusammenschrauben von Verbundschwingern empfiehlt sich eine Kontrollmessung der kompressionsabhängigen statischen Piezospannung, um die optimale mechanische Vorspannung korrekt und reproduzierbar einzustellen. Die Kontrollspannung erreicht je nach Dicke der Piezoscheiben einige kV und kann der gewünschten Kompression exakt zugeordnet werden.

10.8 Einfluss der „Kerbwirkung“ bei Stufenkonzentratoren

Die folgende Tabelle zeigt die Spannungsüberhöhung α_K bei Stufenkonzentratoren als Funktion des auf den kleinen Stabdurchmesser d normierten Krümmungsradius r/d :

r/d	0.05	0.10	0.20	0.40	0.60	1.00
α_K	2.05	1.60	1.42	1.30	1.20	1.10

Da die Stufung im mechanischen Wechselspannungsmaximum erfolgt, darf der Krümmungsradius nicht zu klein gewählt werden.

11 Schlussbemerkungen

In dieser Arbeit wurde ein Überblick über analytische Methoden zur Berechnung und Lösung von Fragen bei der Entwicklung von Ultraschallverbundschwingern gegeben. In Kapitel 2 wurde das Prinzip des passiven akustischen Wellenleiters erläutert, in Kapitel 3 aus einer Vierpoldarstellung der Komponenten ein elektrisches Ersatzmodell zur Erleichterung bei der Berechnung komplexer Schwingerstrukturen in Kapitel 4 hergeleitet. Nach der Einführung des Kopplungsfaktors und der Güte als messbare, charakteristische Parameter wurden in Kapitel 5 auf dieser Basis einfache analytische Berechnungen für die optimale Auslegung von Verbundschwinger angegeben und in Kapitel 6 an typischen Beispielen aus der Praxis unter Einschluss zusammengesetzter Wandlerkaskaden mit Mehrfachresonanzen diskutiert. In den Kapiteln 7 bis 10 sind wichtige praktische Erfahrungen für den Entwurf von Ultraschallverbundschwingern zu finden und einige Tipps bei der Lösung konstruktiver oder messtechnischer Probleme mit einfachen Hilfsmitteln. Es ist zu hoffen, dass die gewählte Darstellung den Entwicklungsingenieuren einen Einstieg in ein interessantes Arbeitsgebiet ermöglicht. Neue Fragestellungen werden zur Erweiterung und Verifizierung der Theorie führen.

Literaturverzeichnis

- [1] **D. A. Berlincourt et al., 1964:** Piezoelectric and piezomagnetic materials and their function in transducers. Physical acoustics, W. P. Mason (Ed), N. Y. Academic Press, 1964
- [2] **J. A. Gallego-Juarez:** Transducer Needs for Macrosonics. Proc. of the 2nd Intern. Workshop "Power Transducers for Sonics and Ultrasonics", 1990. Springer, 1991
- [3] **G. Kossoff:** The effect of backing and matching on the performance of piezoelectric ceramic transducers, IEEE Trans. on Sonics and Ultrasonics, 1966, S. 20-30
- [4] **E. K. Sittig:** Transmission parameters of thickness driven piezoelectric transducer arrays in multi-layer configuration, IEEE Trans. on Sonics and Ultrasonics, SU-14, 1967, S. 167-174
- [5] **A. P. Hulst:** On a family of high-power transducers. Ultrasonics Intern. Conf. Proc. 1973, S. 285-294.
- [6] **E. A. Neppiras, 1973:** The pre-stressed piezoelectric sandwich transducer. Ultrasonics Intern. Conf. Proc. 1973, S. 295-302.
- [7] **N. Maropis 1969:** The design of high-power ceramic transducer assembly. IEEE Trans. on Sonics and Ultrasonics, SU-16, Nr.3, 1969, S.132-136.
- [8] **M. McBrearty et al., 1983:** Analysis of impedance loading in ultrasonic transducer systems. IEEE Ultrasonics Symposium 1988, S. 497-502.
- [9] **S. Sherrit, B.P. Dolgin, Y. Bar-Cohen:** Modelling of Horns for Sonic/Ultrasonic Applications, IEEE Ultrasonics Symposium 1990
- [10] **D. H. Johnson, D. Pal:** Simulation of an ultrasonic piezoelectric transducer, FEA Consulting, ANSYS Software, Ohio CAE, Inc.
- [11] **W. Littmann, T. Hemsel, C. Kauczor, J. Wallaschek, W. Sinha:** Load-adaptive phase-controller for resonant driven piezoelectric devices. Proceedings of World Congress Ultrasonics, 2003, S. 547-550
- [12] **CH. Gerthsen:** Lehrbuch der Physik. Hrsg. Dieter Meschede, Springer, 2010
- [13] **I. I. Teumin:** Ultraschall-Schwingungssysteme, Titel in Russisch, MASCHGIS, 1957.
- [14] **W. P. Mason, J. Wehr:** Internal friction and ultrasonic yield stress of the alloy 90Ti 6Al 4V. J. Phys. Chem. , Bd.31, 1970, S.1925-1933
- [15] **Küpfmüller:** Theoretische Elektrotechnik. Springer, 2008
- [16] **V. Aschoff:** Elektroakustik. Vorlesung an der RWTH, Aachen, WS 1961
- [17] **I. Veit:** Technische Akustik, kurz und bündig. Kamprath-Reihe, Vogel, 1974
- [18] **E. Hübner:** Technische Schwingungslehre. Springer, 1957
- [19] **G.K. Lucey:** Resonant and antiresonant frequencies of thick disks and thick rods. Journ. Acoust. Soc., Bd. 43(6), 1968, S. 1324-1328

- [20] **E. G. Lierke:** Deformation and displacement of liquid drops in an optimized acoustic standing-wave levitator. Acta Acustica united with Acustica, Bd.88, 2002, S. 206-217
- [21] **E. G. Lierke, M. Leibenger, T. Hemsel:** Local Ultrasonic Hyperthermia and Thermoablation, a description and theoretical evaluation of two alternative concepts for the heat therapy of tumours. Acta Acoustica. Bd. 94, 2008, S. 369-381.

Standardwerke:

A. Lenk: Elektromechanische Systeme Bd. 2: Systeme mit verteilten Parametern, VEB-Verlag Technik, 1973

Valvo, 1988: Piezoxide (PXE) – Eigenschaften und Anwendungen. Valvo Unternehmensbereich Bauelemente der Philips GmbH, 1988

Anhang 1 zu Kapitel 5.4

Beispiel für die Abhängigkeit der effektiven Kopplungsfaktoren $k_{eff,n}^2$ für die Grundschiwingung ($n = 1$) und die beiden Harmonischen mit $n = 2$ und $n = 3$ des impedanzangepassten Verbundschwingers nach Bild 5.1 und (11.1):

$$k_{eff,n}^2 \approx \frac{4k^2}{n\pi} \cdot \frac{1 - \cos(n\alpha_{0,1})}{n\alpha_{0,1} - k^2 \sin(n\alpha_{0,1})} \cdot \sin^2(n\Phi_1) \quad (11.1)$$

mit $k_{0,n}^2 \approx \frac{8k^2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{n^2}$ für den reinen Piezowandler als Funktionen der normierten Länge $\alpha_{1,2}$ des kleineren Metallsegments (Abszisse) mit der normierten Länge $\alpha_{1,0}$ des Piezoelements als Parameter. Es gelten die Randbedingungen

$$\alpha_{0,1} + \alpha_{1,1} + \alpha_{2,1} = \pi \quad (11.2) \quad \text{und} \quad \Phi_1 = \alpha_{2,1} + \alpha_{0,1} / 2 \quad (11.3)$$

bei $\bar{f} = f / f_{p,1} = 1$, sowie

$$\alpha_{0,n} + \alpha_{1,n} + \alpha_{2,n} = n \cdot \pi \quad (11.4)$$

und

$$\Phi_n = n \cdot \Phi_1 \quad (11.5)$$

bei $\bar{f} = n$ ($n = 2, 3, \dots$).

Man erkennt deutliche Kurvenschnittpunkte mit paarweise identischen Ordinaten $k_{eff,1}^2 = k_{eff,2}^2$, $k_{eff,1}^2 = k_{eff,3}^2$ und $k_{eff,2}^2 = k_{eff,3}^2$, die nach Tabelle 11.1 mit zunehmender normierter Länge $\alpha_{1,0}$ des Piezoelements bei zugehörigen normierten Längen $\alpha_{1,2}(m,n) = 0.5 \cdot (\pi - \alpha_{1,0}) \pm \Delta\alpha_{m,n}$ der beiden Metallsegmente stetig ansteigen, bis sie ein durch Fettdruck markiertes Optimum erreichen.

Tabelle 11.1: Effektive Kopplungsfaktoren des impedanzangepassten Verbundschwingers

$\alpha_{1,0} [^\circ]$	10	20	30	40	50	60	70
$0.5 \cdot (\pi - \alpha_{1,0}) [^\circ]$	85	80	75	70	65	60	55
$\alpha_{1,2}(1,2)$	54.5	48.5	41.8	34.4	26.4	17.8	8.5
$\pm \Delta\alpha_{1,2} [^\circ]$	30.5	31.5	23.2	25.6	28.6	42.2	46.5
$k_{eff,1}^2 = k_{eff,2}^2$	0.046	0.156	0.218	0.261	0.283	0.285	
$\alpha_{1,2}(1,3) [^\circ]$	39.5	33.3	26.3	21.2	10	0	
$\pm \Delta\alpha_{1,3} [^\circ]$	45.5	46.7	48.7	48.8	55	60	
$k_{eff,1}^2 = k_{eff,3}^2$	0.054	0.101	0.134	0.173	0.154	0.135	
$\alpha_{1,2}(2,3) [^\circ]$	31	23.4	15.4	6.5	49.5	45	41.3
$\pm \Delta\alpha_{2,3} [^\circ]$	54	56.6	59.6	63.5	20.5	15	14.7
$k_{eff,2}^2 = k_{eff,3}^2 [^\circ]$	0.097	0.167	0.196	0.185	0.078	0.07	0.06

Die durch Iteration ermittelten Extremwerte (5.23), (5.24) und (5.25) in Kapitel 5.4

$$k_{1,eff}^2 = k_{2,eff}^2 \approx 0.29 \text{ bei } \alpha_{0,1} / \pi \approx 0.3 \text{ (54°)} \quad (11.6)$$

$$\text{und } \alpha_{2,1} / \pi = 0.35 \pm 0.22 \text{ (63°} \pm 40\text{°)}$$

$$k_{1,eff}^2 = k_{3,eff}^2 = 0.16 \text{ bei } \alpha_{0,1} / \pi \approx 0.25 \text{ (45°)} \quad (11.7)$$

$$\text{und } \alpha_{2,1} / \pi = 0.375 \pm 0.3 \text{ (68°} \pm 54\text{°)}$$

$$k_{2,eff}^2 = k_{3,eff}^2 \approx 0.20 \text{ bei } \alpha_{0,1} / \pi \approx 0.18 \text{ (32.5°)} \quad (11.8)$$

$$\text{und } \alpha_{2,1} / \pi = 0.41 \pm 0.335 \text{ (74°} \mp 50\text{°)}$$

passen relativ gut in die obige Tabelle.

Anhang 2 zu Kapitel 5.4

Aus Bild 3.4 folgt nach einigen Umrechnungen für die Eingangsreaktanz

$$X_e = -\frac{k^2}{\alpha_0} \cdot \frac{\tan \alpha_1 x \cdot \tan \alpha_2 x \cdot \tan \alpha_0 x - (\tan \alpha_1 x + \tan \alpha_2 x + \tan \alpha_0 x) + k^2 \cdot \frac{\tan \alpha_0 x}{\alpha_0 x} \cdot (\tan \alpha_1 x + \tan \alpha_2 x + 2 \cdot \tan \frac{\alpha_0 x}{2})}{\tan \alpha_1 x \cdot \tan \alpha_2 x \cdot \tan \alpha_0 x - (\tan \alpha_1 x + \tan \alpha_2 x + \tan \alpha_0 x)} \quad (11.9)$$

Mit den „Randbedingungen“ bei der Parallelresonanz ($x = x_p = 1$)

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = \pi \quad (11.10)$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 2\varphi \quad (11.11)$$

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi - \alpha_0}{2} \quad (11.12)$$

ergibt sich als Zwischenlösung

$$\tan \alpha_1 x + \tan \alpha_2 x = \frac{2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2)x}{\cos(\alpha_1 - \alpha_2)x + \cos(\alpha_1 + \alpha_2)x} = \frac{2 \sin(\pi - \alpha_0)x}{\cos 2\varphi x + \cos(\pi - \alpha_0)x} \quad (11.13)$$

$$\tan \alpha_1 x \cdot \tan \alpha_2 x = \frac{\cos(\alpha_1 - \alpha_2)x - \cos(\alpha_1 + \alpha_2)x}{\cos(\alpha_1 - \alpha_2)x + \cos(\alpha_1 + \alpha_2)x} = \frac{\cos 2\varphi x - \cos(\pi - \alpha_0)x}{\cos 2\varphi x + \cos(\pi - \alpha_0)x} \quad (11.14)$$

Setzt man (11.13) und (11.14) in (11.9) ein, dann erhält man durch Anwendung bekannter trigonometrischer Beziehungen

$$X_e = -\frac{k^2}{\alpha_0 x} \frac{\sin \pi x - k^2 \cdot \frac{\sin(\alpha_0 x / 2)}{\alpha_0 x / 2} \cdot [\sin(\pi x - \alpha_0 x / 2) + \sin \alpha_0 x / 2 \cdot \cos 2\varphi x]}{\sin \pi x} \quad (11.15)$$

Anhang zu Kapitel 5.6

Bild A 1 zeigt als Beispiel die Abhängigkeit des Produktes aus den effektiven Kopplungsfaktoren $k_{eff,n}^2$ und den effektiven Güten $Q_{eff,n}$ für die Grundschiwingung ($n = 1$) und die beiden Harmonischen mit $n = 2$ und $n = 3$ des impedanzangepassten Verbundschwingers mit normiertem äußeren Wirkwiderstand $1/m = 15.45$ nach Bild 5.1 und Gleichung (5.32)

$$k_{eff,n}^2 \approx \frac{2k^2}{m} \cdot \frac{1 - \cos(n\alpha_{0,1})}{n\alpha_{0,1} - k^2 \sin(n\alpha_{0,1})} \cdot \sin^2[n \cdot (\alpha_{1,0}/2 + \alpha_{1,2})] \quad (11.16)$$

als Funktionen der normierten Länge $\alpha_{1,2}$ des kleineren Metallsegments (Abszisse) mit der normierten Länge $\alpha_{1,0}$ des Piezoelements als Parameter. Es gelten die Randbedingungen

$$\alpha_{0,1} + \alpha_{1,1} + \alpha_{2,1} = \pi \quad (11.17)$$

$$\alpha_{0,n} + \alpha_{1,n} + \alpha_{2,n} = n \cdot \pi \quad (11.19)$$

und $\Phi_1 = \alpha_{2,1} + \alpha_{0,1}/2$ bei (11.18) und $\Phi_n = n \cdot \Phi_1$ bei $\bar{f} = n$ ($n = 2, 3$ (11.20)

$$\bar{f} = f / f_{p,1} = 1 \quad \dots)$$

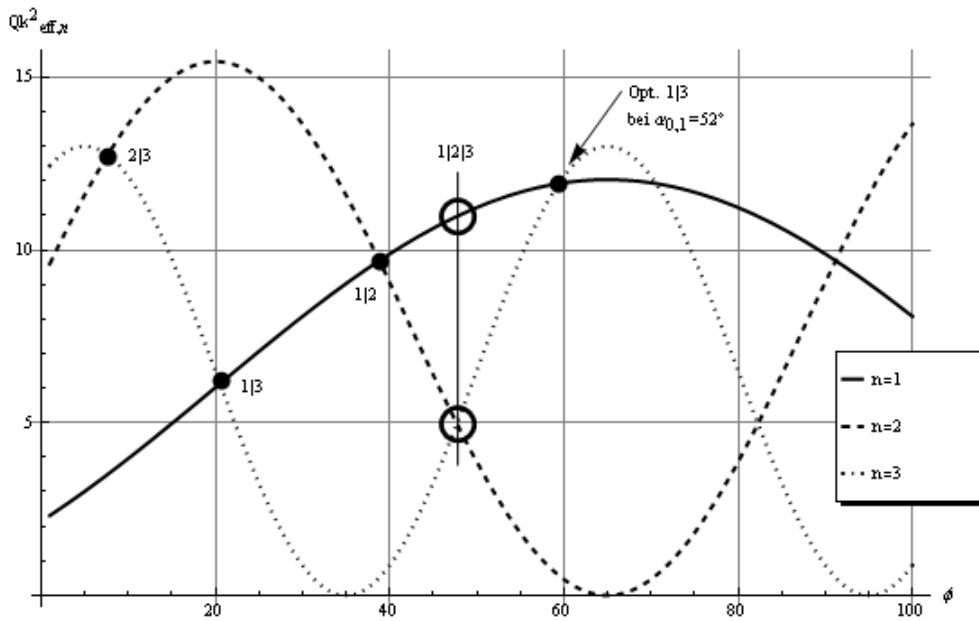


Bild A 1: Abhängigkeit des Produktes aus den effektiven Kopplungsfaktoren $k_{eff,n}^2$ und den effektiven Güten $Q_{eff,n}$ für die Grundschiwingung ($n = 1$) und die beiden Harmonischen mit $n = 2$ und $n = 3$

Man erkennt deutliche Kurvenschnittpunkte mit paarweise identischen Ordinaten $Qk_{eff,1}^2 = Qk_{eff,2}^2$, $Qk_{eff,1}^2 = Qk_{eff,3}^2$ und $Qk_{eff,2}^2 = Qk_{eff,3}^2$, die nach Tabelle 11.2 mit zunehmender normierter Länge $\alpha_{1,0}$ des Piezoelements bei zugehörigen normierten Längen $\alpha_{1,2}(m,n) = 0.5 \cdot (\pi - \alpha_{1,0}) \pm \Delta\alpha_{m,n}$ der beiden Metallsegmente stetig ansteigen, bis sie ein durch Fettdruck markiertes Optimum erreichen.

Tabelle 11.2: Produkt $Qk^2_{eff,n}$ des impedanzangepassten Verbundschwingers
mit normiertem äußerem Wirkwiderstand $1/m = 15.45$

$\alpha_{1,0} [^\circ]$	10	20	30	40	50	60	70
$0.5 \cdot (\pi - \alpha_{1,0}) [^\circ]$	85	80	75	70	65	60	55
$\alpha_{1,2}(1,2) [^\circ]$	64	58	51	45.3	38.3	31.2	23.7
$\pm \Delta \alpha_{1,2} [^\circ]$	21	22	24	24.7	26.7	28.8	31.3
$Qk^2_{eff,1} = Qk^2_{eff,2}$	2.9	5.4	7.5	9.3	10.5	11.2	11.2
$\alpha_{1,2}(1,3) [^\circ]$	66.8	62	59	58	60		
$\pm \Delta \alpha_{1,3} [^\circ]$	18.2	18	16	12	5		
$Qk^2_{eff,1} = Qk^2_{eff,3}$	3.0	5.8	8.4	10.8	13.2		
$\alpha_{1,2}(2,3) [^\circ]$	36.5	30	23	15	7		
$\pm \Delta \alpha_{2,3} [^\circ]$	48.5	50	52	55	58		
$Qk^2_{eff,2} = Qk^2_{eff,3}$	6.4	11	13.6	14.7	13.8		
$\alpha_{1,2}(1,3) [^\circ]$	65	62	56	52	48	42	38
$\pm \Delta \alpha_{1,3} [^\circ]$	20	19.5	19	18.5	18	17.5	17
$Qk^2_{eff,1} = Qk^2_{eff,3}$	2.4	4.4	5.3	5.7	5.3	4.6	4.0
$Qk^2_{eff,2}$	2.9	5.5	7.9	10.2	12.3	13.6	14.5

Die durch Iteration ermittelten Extremwerte (5.33), (5.34) und (5.35) in Kapitel 5.6

$$Qk^2_{1,eff} = Qk^2_{2,eff} \approx 10.6 \text{ bei } \alpha_{0,1} / \pi \approx 0.37 (66.6^\circ) \text{ und } \alpha_{2,1} / \pi = 0.315 \pm 0.167 (56.7^\circ \pm 30^\circ)$$

$$Qk^2_{1,eff} = Qk^2_{3,eff} = 12.4 \text{ bei } \alpha_{0,1} / \pi \approx 0.29 (45^\circ) \text{ und } \alpha_{2,1} / \pi = 0.355 (63.9^\circ).$$

$$Qk^2_{2,eff} = Qk^2_{3,eff} \approx 13.6 \text{ bei } \alpha_{0,1} / \pi \approx 0.22 (39.6^\circ) \text{ und } \alpha_{2,1} / \pi = 0.39 \pm 0.3 (70^\circ \pm 54^\circ)$$

passen relativ gut in die obige Tabelle.

Zusätzlich zu den identischen Wertepaaren ist im unteren Teil der Tabelle der entsprechende Verlauf der Qk^2 -Werte für den Fall angegeben, bei dem der Wert für $n = 2$ mit zunehmender normierter Länge des Piezoelement größer ist als die beiden übereinstimmenden, noch immer ausreichend großen Werte der zwei Harmonischen ($n = 1$ und $n = 3$). Aus diesen Werten erkennt man die günstigste Bedingung (5.36) für die simultane oder gleichzeitige Anregung von drei Spektralkomponenten.

Anhang zu Kapitel 6.2

Wird der Durchmesser D auf der Seite des Piezowandlers im Schnelleknoten auf den Durchmesser d heruntergestuft, dann wächst die Schnelleamplitude an der freien Endfläche des schlanken metallischen Sonotrodenteils um der Verstärkungsfaktor $V = (D/d)^2$.

Wenn die Stufung im Metallsegment mit der Länge L_1 erfolgt, muss der impedanzangepasste Phasenwinkel $\alpha_{1,1}$ in den Formeln für den Kopplungsfaktor durch

$$\alpha_{1,1}^* x = \alpha_{1,1} x - \arctan \left(\frac{V-1}{\tan\left(\frac{\pi}{2} x\right)} \right) \quad (11.21)$$

mit $x \approx \sqrt{1-k_{eff}^2}$ ersetzt werden.

Die Gleichung (5.21) ist dann nicht geeignet und man muss den Kopplungsfaktor grafisch aus (5.20) ermitteln. Das Resultat für die beiden o. a. typischen Spezialfälle A) und B) ist in Tabelle 11.3 in normierter Form mit $\overline{k_{eff}^2}(V) = k_{eff}^2(V)/k_{eff}^2(1)$ als Funktion des Verstärkungsfaktors V dargestellt.

Tabelle 11.3: k_{eff}^2 für gestufte Wandler

V	1	2	3	4	5	6
$k_{eff}^2(A)$	0,204	0,151	0,119	0,099	0,084	0,078
$k_{eff}^2(B)$	0,176	0,143	0,120	0,104	0,092	0,082
$\overline{k_{eff}^2}(A)$	1	0,74	0,58	0,49	0,41	0,38
$\overline{k_{eff}^2}(B)$	1	0,81	0,68	0,59	0,52	0,47

Bei $V = 1$, d. h. ohne Stufung, entspricht das Ergebnis A) den Erwartungen nach (5.22), während es im Fall B) etwa 10% unter dem erwarteten Wert nach (5.22) liegt. Die relativen Werte nehmen mit wachsender Verstärkung V annähernd proportional zu $1/\sqrt{V}$ ab, wobei die Absolutwerte bei gleichem V fast identisch sind.

Anhang zu Kapitel 6.4

Mit dieser Datei können Betrag und Phase oder Real- und Imaginärteil der normierten, komplexen Eingangsimpedanz $Ze(n,m)/Z_0$ (Bild 3.4) eines impedanzangepassten Verbundschwingers nach Bild 5.1 als Funktion der auf die Grundresonanz normierten Frequenz $f(n)$ bis zur dritten Oberschwingung ermittelt und dargestellt werden. Die Berechnung erfolgt durch Anwendung der Kirchhoffschen Verteilungsgesetze mit den normierten Reaktanzen aus Bild 3.4 und einem zusätzlichen normierten Belastungswiderstand $Rl(n,m)$, der sich aus Gleichung (2.13) ergibt. Die unabhängigen Parameter $kk = k^2$ für das Quadrat des Materialkopplungsfaktors, $m_1 = Ra / Z_1$, $m_2 = Z_1 / Z_0$ (hier Wasser, Aluminium und PZT-4 mit $k^2 = 0.5$) werden fest vorgegeben. Für die normierte Dicke α_0 des Piezowandlers wird ein durch vorherige Abschätzung in Kapitel 5 ermittelter Optimalwert α_0 ebenfalls fest vorgegeben. Einer der beiden normierten, voneinander abhängigen Ersatzlängen $\alpha_1(m) = \alpha_{11}$ und $\alpha_2(m) = \alpha_{21}$ der beiden Metallsegmente kann als Parameter bei $m = 1$ oder $m = 2$ variiert werden. Dadurch verändert sich bei fester Dicke α_0 die Position Φ des Piezowandlers in Bezug auf die Schnellebäuche an den Enden des Verbundschwingers. Wenn bei der Variation die symmetrische Position des Piezoelements überschritten wird, verlagert sich der Belastungswiderstand Ra vom kürzeren auf das längere Metallsegment. Bei gemeinsamer Darstellung der Kurven für $m = 1$ und $m = 2$ decken sich die Spektren, zeigen aber z. T. unterschiedliche Minima und Maxima von Betrag und Phasenwinkel der Eingangsimpedanz, weil die normierte Lastreaktanz $Rl(n,m)$ invers proportional zu $\cos^2(\alpha_1)$ ist und stark variieren kann. Im Optimalfall für paarweise vergleichbare Anregungsbedingungen gelten in der Gleichung für $\alpha_1(m)$ mit dem Vorzeichenwechsel bei $m = 1$ und $m = 2$ die Festwerte α_{21} aus den Gleichungen (5.33), (5.34) und (5.35).

Bei nicht impedanzangepassten Verbundschwingern erscheint in dem unten stehenden Rechenprogramm je nach Materialkombination für $X_1(n,m)$ und $X_2(n,m)$ vor $\tan(\alpha_1(m) \cdot f(n))$ und $\tan(\alpha_2(m) \cdot f(n))$ der Kennimpedanzquotient $m_2 = Z_1 / Z_0$ als von 1 verschiedener Faktor und anstelle der Gleichungen für $\alpha_1(m)$ und $\alpha_2(m)$ sind im ersten Näherungsschritt vor der Iteration die fett markierten, normierten Ersatzlängen aus Tabelle 6.2 einzusetzen.

```

1   kk := 0.5
2   m1 := 0.089
3   m2 := 50.450
4   f[n] := 0.01 · n
5   m := 0.0
6   α0 := 0.37 π
7   α1[m] := 0.175 π + 0.02 m π
8   α2[m] := 1.024 π - α0 - α1[m]
9   X1[n, m] := Tan  $\left[ \frac{\alpha_0}{2} \cdot f[n] \right] + m_2 \text{ Tan} [\alpha_1[m] \cdot f[n]]$ 
10  X2[n, m] := m2 · Tan  $[\alpha_2[m] \cdot f[n]] + \text{Tan} \left[ \frac{\alpha_0}{2} f[n] \right]$ 
11  X3[n] :=  $\frac{kk}{\alpha_0 \cdot f[n]} - \frac{1}{\sin [\alpha_0 \cdot f[n]]}$ 
12  X4[n] :=  $-\frac{kk}{\alpha_0 \cdot f[n]}$ 

```

$$\begin{aligned}
13 \quad R_1[n, m] &:= m_1 \cdot m_2 \cdot \cos[\alpha_1[n] \cdot f[n]]^{-2} \\
14 \quad R_2[n, m] &:= \frac{X_4[n]^2 \cdot X_2[n, m]^2}{R_1[n, m]^2 + (X_1[n, m] + X_2[n, m])^2} \\
15 \quad Y_2[n, m] &:= X_2[n, m] \cdot \frac{R_1[n, m]^2 + X_1[n, m] \cdot (X_1[n, m] + X_2[n, m])}{R_1[n, m]^2 + (X_1[n, m] + X_2[n, m])^2} \\
16 \quad R_g[n, m] &:= \frac{X_4[n]^2 \cdot R_2[n, m]}{R_2[n, m]^2 + (Y_2[n, m] + X_3[n] + X_4[n])^2} \\
17 \quad X_g[n, m] &:= X_4[n] \cdot \frac{R_2[n, m]^2 + (Y_2[n, m] + X_3[n, m]) \cdot (Y_2[n, m] + X_3[n] + X_4[n])}{R_2[n, m]^2 + (Y_2[n, m] + X_3[n] + X_4[n])^2} \\
18 \quad Z_g[n, m] &:= \sqrt{R_g[n, m]^2 + X_g[n, m]^2} \\
19 \quad F_i[n, m] &:= \text{Atan} \left[\frac{X_g[n, m]}{R_g[n, m]} \right] \cdot \frac{180}{\pi}
\end{aligned}$$

Listing 1: Mathematicaskript zur Berechnung von Betrag und Phase oder Real- und Imaginärteil der normierten, komplexen Eingangsimpedanz Z_e

Anhang zu Kapitel 7.2

Die Frequenzänderung eines Stufenkonzentrators mit den Durchmessern $d_1 = d$ und $d_2 = D$ und einer um $\Delta L / L$ aus der Mitte versetzten Stufung nach Bild 7.2 ergibt sich aus den gleichwertigen Resonanzbedingungen

$$\tan(\alpha_1 \cdot \bar{f}) + m \cdot \tan(\alpha_2 \cdot \bar{f}) = 0 \quad (11.22)$$

oder
$$\alpha_1 \cdot \bar{f} + \arctan[m \cdot \tan(\alpha_2 \cdot \bar{f})] = \pi \quad (11.23)$$

mit
$$m = \frac{Z_1}{Z_2} = \left(\frac{d}{D} \right)^2 = \frac{1}{V} \quad (11.24)$$

Hierbei gilt bei Vernachlässigung quadratischer Δ -Komponenten

$$\alpha_1 \cdot \bar{f} = \frac{\pi}{2} \cdot \left(1 - \frac{2\Delta L}{L} \right) \cdot \left(1 + \frac{\Delta f}{f_0} \right) \approx \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{2\Delta L}{L} + \frac{\Delta f}{f_0} \right) \quad (11.25)$$

und
$$\alpha_2 \cdot \bar{f} = \frac{\pi}{2} \cdot \left(1 + \frac{2\Delta L}{L} \right) \cdot \left(1 + \frac{\Delta f}{f_0} \right) \approx \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{2\Delta L}{L} + \frac{\Delta f}{f_0} \right) \quad (11.26)$$

Aus (1a) folgt zunächst $\sin(\alpha_1 \bar{f}) \cdot \cos(\alpha_2 \bar{f}) + m \cdot \cos(\alpha_1 \bar{f}) \cdot \sin(\alpha_2 \bar{f}) = 0$ und daraus dann wegen $\sin \alpha \cdot \cos \beta = 0.5 \cdot \sin(\alpha - \beta) + 0.5 \cdot \sin(\alpha + \beta)$ mit (11.25) für die korrekte Frequenzänderung

$$\sin\left(\pi \cdot \frac{\Delta f}{f_0}\right) = \frac{1-m}{1+m} \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{\Delta L}{L}\right) \quad (11.27)$$

oder
$$\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{1}{\pi} \cdot \arcsin \left[\frac{V-1}{V+1} \cdot \sin\left(2\pi \frac{\Delta L}{L}\right) \right] \quad (11.28)$$

Aus der Reihenschaltung der beiden Ersatz-Vierpole ergibt sich mit Hilfe der Kirchhoffschen Verzweigungsgesetze eine Gleichung für den effektiven Verstärkungsfaktor

$$\frac{v_E}{v_A} = \frac{1}{V_{eff}} = \cos(\alpha_1 \bar{f}) \cdot \cos(\alpha_2 \bar{f}) - m \cdot \sin(\alpha_1 \bar{f}) \cdot \sin(\alpha_2 \bar{f}) \quad (11.29)$$

und daraus mit (11.25) wegen $\sin \alpha \cdot \sin \beta = 0.5 \cdot \cos(\alpha - \beta) - 0.5 \cdot \cos(\alpha + \beta)$ und $\cos \alpha \cdot \cos \beta = 0.5 \cdot \cos(\alpha - \beta) + 0.5 \cdot \cos(\alpha + \beta)$

$$\frac{V}{V_{eff}} = -\frac{V+1}{2} \cdot \cos\left(\pi \cdot \frac{\Delta f}{f_0}\right) + \frac{V-1}{2} \cdot \cos\left(2\pi \frac{\Delta L}{L}\right) \quad (11.30)$$

oder

$$\frac{V_{eff}}{V} = \left| \frac{V+1}{2} \cdot \cos\left(\pi \cdot \frac{\Delta f}{f_0}\right) - \frac{V-1}{2} \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{\Delta L}{L}\right) \right|^{-1} \quad (11.31)$$

Zur Kompensation der gegenphasigen Schwingungsrichtung an den Enden des Verbundschwingers muss die aus (11.29) folgende Gleichungen (11.30) mit dem Faktor (-1) korrigiert werden, da der Betrag des effektiven Verstärkungsfaktors > 0 sein muss.