

# **Beiträge zur Analyse, Modellierung und Simulation digitaler Phasenregelkreise**

Der Fakultät für Elektrotechnik, Informatik und Mathematik  
der Universität Paderborn

zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.)

genehmigte Dissertation

von

Dipl.-Ing. Christopher Wiegand

Tag der mündlichen Prüfung: 12.04.2012

Paderborn 2012

Diss. EIM-E/283

**Kontakt:** [wiegand.christopher@yahoo.de](mailto:wiegand.christopher@yahoo.de)

Für meine Marie und meine Mutter





---

## Kurzfassung

---

Der digitale Phasenregelkreis beinhaltet komplexe Funktionsgruppen, die nichtlinear in verschiedenster Form sind. Dabei ergeben sich für die Modellierung im Kontext der Verhaltensbeschreibung zum einen nichtlineare Kennlinien, pulsweitenmoduliertes Verhalten und zum anderen inhärente Verzögerungen. Die analytischen Modelle, die bislang existieren, basieren auf idealisierten Annahmen und/oder Linearisierungen des Regelkreises und sind aufgrund ihrer Form verschiedenen Beschränkungen unterworfen. Analytische und exakte Verhaltensbeschreibungen zur Analyse des Systems unter Berücksichtigung verschiedener Nichtlinearitäten sind dabei nur vereinzelt dargelegt worden. Neben den komplexen Funktionen des dynamischen Systems ergeben sich Probleme hinsichtlich der Simulation auf Transistorebene. Zwar lässt sich durch die Verwendung und Kombination verschiedenster Simulationsumgebungen eine gewisse Zeitersparnis erzielen, jedoch kann durch die mathematische, ereignisgesteuerte Modellierung dies drastisch verbessert werden. Zudem liefert diese Modellierungstechnik eine effiziente Möglichkeit, das System zu analysieren und zu charakterisieren. Dabei können auch die Nichtidealitäten und Nichtlinearitäten berücksichtigt werden.

In dieser Arbeit sind analytische Modelle und Simulationsmodelle dargelegt, die einige Formen der Nichtlinearitäten beinhalten. Dabei wird eine Methodik zur modularen Modellierung eingeführt und erweitert. Der Grundgedanke der Modellierung basiert auf der Betrachtung der Phasengleichungen, die von einer digitalen Logik ausgewertet werden, um den Frequenz- und Phasenfehler anzugeben. Diese Logik wird als endlicher Automat dargestellt und so erweitert, dass bestimmte Nichtlinearitäten oder Nichtidealitäten durch virtuelle Zustände dargestellt werden können. Damit kann der andere Teil des Regelkreises, der durch ein Differenzialgleichungssystem beschrieben wird, durch Diskretisierung zu den Schaltzeitpunkten der digitalen Logik ausgewertet werden. Dieses Verfahren wird dabei hinreichend abstrakt dargestellt, so dass sich Erweiterungen der Topologie des Regelkreises (Filter-Topologie, Ordnung des Filters, nichtlineare Charakteristik des spannungsgesteuerten Oszillators, usw.) einfacher implementieren lassen.

Neben den Simulationsmodellen werden analytische Modelle für Regelkreise der Ordnung Zwei mit ausgewählten Nichtidealitäten entwickelt, um das Verhalten des Regelkreises durch systemtheoretische Betrachtungen zu analysieren. Des Weiteren wird ein analytisches Modell eines Regelkreises für beliebige Schleifenfilter angegeben. Dabei werden Gleichungen zur Beschreibung des Regelkreises derart entwickelt, dass sich autonome, nichtlineare, schaltende, dynamische Systeme ergeben. Für diese analytischen Modelle werden entsprechende Stabilitätsgrenzen hergeleitet.



---

## Abstract

---

Digital phase-locked loops comprise complex functional elements which are nonlinear in various forms. Hence, the modelling approach needs to consider static nonlinear characteristics, pulse widths modulated behaviour and intrinsic delays. Standard analytical models are based on idealized assumptions and/or linearizations of the phase-locked loop equations. Thus, these models are limited by various restrictions. Analytical and proper behavioural models for analysis are sporadically introduced due to the complex nonlinearities. Beside the complex switching and nonlinear properties transistor level simulations are critical in terms of time. By using combinations of miscellaneous simulation tools a gain of time can be achieved. The mathematical event driven modelling technique can be used to analyze, characterize and simulate the nonlinearities and nonidealities of the system very efficiently.

In this thesis analytical modelling approaches are introduced for the characterization of phase-locked loops with selective nonidealities/nonlinearities. A method is explained and extended which is efficient and modular. The fundamental idea is based on the consideration of the phase equations and the evaluation by a digital logical device to calculate the error in phase and frequency. The digital device is represented by finite state machines and some nonidealities can be introduced only by the insertion of virtual states or the adaption of the state machine's output function. The analog part of the control loop is represented by a differential equation system and is discretized at the switching times of the digital device. This approach is considered to be more abstract so that introducing changes in topology (Filter topology, order of the filter, nonlinear characteristic of the voltage controlled oscillator, etc.) gets very elementary.

Beneath this modelling technique for simulation analytical models of a second order loop with selected nonlinearities are introduced. In addition an analytical model for arbitrary loop filter configuration is presented. These models are constituted as autonomous, nonlinear, switching, time discrete, dynamical systems providing stability bounds for design.



---

## Verwendete Symbole und Abkürzungen

---

### Typographische Kennzeichnungen

Vektoren	Kleinbuchstaben in Fettschrift	z. B. <b><i>b</i></b>
Matrizen	Großbuchstaben in Fettschrift	z. B. <b><i>A</i></b>
Änderungen einer Größe	Vorangestelltes $\Delta$	z. B. $\Delta\varphi$
Transposition eines Vektors oder einer Matrix	Hochgestelltes T	z. B. $\mathbf{A}^T$
Approximation einer Größe	Dach über einem Buchstaben	z. B. $\hat{x}$
Fallende Flanke eines Signals	Hochgestellter Pfeil nach unten als Index	z. B. $u^\downarrow$
Steigende Flanke eines Signals	Hochgestellter Pfeil nach oben als Index	z. B. $u^\uparrow$
Invertierung eines Signals	Strich über einem Buchstaben	z. B. $\overline{u}_{\text{up}}$
Zeitliche Ableitung einer Größe	Punkt über einem Buchstaben	z. B. $\dot{V}$

### Mathematische Operatoren, Mengen und Symbole

Symbol	Bedeutung
$\vee$	Nicht-ausschließendes Oder
$\nabla$	Nicht-Oder-(NOR)-Verknüpfung
$\wedge$	Und-Verknüpfung
$\overline{\wedge}$	Nicht-Und-(NAND)-Verknüpfung
$\mathcal{I}$	Eingabemenge eines endlichen Automaten

## Verwendete Symbole und Abkürzungen

---

$\mathcal{O}$	Ausgabemenge eines endlichen Automaten
$\mathcal{S}$	Zustandsmenge eines endlichen Automaten
$\mathcal{S}_i$	Anfangszustand eines endlichen Automaten
$\lfloor \cdot \rfloor$	Abrunden einer Zahl
$\lceil \cdot \rceil$	Aufrunden einer Zahl
$\det \{ \cdot \}$	Determinante
$\text{grad} \{ \cdot \}$	Gradient einer skalaren Größe: $\text{grad} \{ V(x_1, \dots, x_n) \} = \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} V(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} V(x_1, x_2, \dots, x_n) \right]^T$
$\text{Im} \{ \cdot \}$	Imaginärteil
$\lim \{ \cdot \}$	Grenzwert-Operator
$\max \{ \cdot, \cdot \}$	Max-Operator: Bestimmt das Maximum zweier reeller Werte
$\min \{ \cdot, \cdot \}$	Min-Operator: Bestimmt das Minimum zweier reeller Werte
$\text{mod} \{ \cdot \}$	Modulo-Operator
$\text{Re} \{ \cdot \}$	Realteil
$\text{round} \{ \cdot \}$	Runden einer Zahl
$\text{remainder} \{ \cdot, \cdot \}$	$\text{remainder} \{ x, y \} = x - \text{round} \left\{ \frac{x}{y} \right\} \cdot y$
$\text{sign} \{ \cdot \}$	Sign-Operator: Bestimmt das Vorzeichen einer reellen Größe
$\sup \{ \cdot \}$	Supremum
$\delta = \delta(\epsilon)$	Funktion in Abhängigkeit von $\epsilon$
$\epsilon$	Konstante
$\epsilon(t - t_0)$	Einheitssprung zum Zeitpunkt $t_0$
$\gamma$	Funktion zur Berechnung des nächsten Zustandes innerhalb eines endlichen Automaten
$\eta$	Funktion zur Berechnung der nächsten Ausgabe innerhalb eines endlichen Automaten
$\lambda$	Eigenwert
$\sigma(k)$	Schaltsequenz zu den Zeitpunkten $k$
$\Phi(\cdot)$	Transitionsmatrix
$\rho$	Spektralradius
$V$	Kandidat einer LYAPUNOV-Funktion

$\boldsymbol{x}$	Zustandsvektor eines Systems
$\boldsymbol{x}_R$	Ruhelage eines Systems
$\mathcal{Z}_{\text{PFD}}$	6-Tupel-Beschreibung eines Phasen- und Frequenz-Detektors

## Symbole

Symbol	Bedeutung	Einheit
$B$	Rauschbandbreite	Hz
$d$	Dämpfungsbeiwert	
$\delta$	Tastverhältnis	
$\Delta\omega_{\text{PO}}$	Ausrastbereich bezogen auf die Kreisfrequenz	rad Hz
$\Delta\omega_{\text{PO}}^-$	Untere Grenze des Ausrastbereichs	rad Hz
$\Delta\omega_{\text{PO}}^+$	Obere Grenze des Ausrastbereichs	rad Hz
$\Delta u_{\text{PO}}$	Ausrastbereich bezogen auf die Regelspannung	V
$\mathcal{E}$	Konstante für die ereignisgesteuerte Modellierung	rad
$\mathcal{E}_{\text{DZ}}$	Konstante für die ereignisgesteuerte Modellierung mit <i>Dead-Zone</i>	rad
$f_{0,\text{vco}}$	Ruhefrequenz eines spannungsgesteuerten Oszillators	Hz
$f_{\text{min}}$	Minimalwert einer Frequenz	Hz
$f_{\text{max}}$	Maximalwert einer Frequenz	Hz
$f_{\text{ref}}$	Referenzfrequenz	Hz
$f_t$	Zielfrequenz	Hz
$f_{\text{vco}}$	Ausgangsfrequenz des spannungsgesteuerten Oszillators	Hz
$H(s)$	Übertragungsfunktion	
$H_e(s)$	Fehlerübertragungsfunktion	
$H_{\text{LF}}(s)$	Übertragungsfunktion des Schleifenfilters	
$\Phi_{\text{ref}}(s)$	LAPLACE-Transformierte des Signals $\varphi_{\text{ref}}(t)$	Hz
$\Phi_{\text{vco}}(s)$	LAPLACE-Transformierte des Signals $\varphi_{\text{vco}}(t)$	Hz
$\Phi_{\text{var}}(s)$	LAPLACE-Transformierte des Signals $\varphi_{\text{var}}(t)$	Hz
$\Phi_e(s)$	LAPLACE-Transformierte des Signals $\varphi_e(t)$	Hz
$i_p$	<i>Charge-Pump</i> -Strom	A

## Verwendete Symbole und Abkürzungen

---

$I_p$	Amplitude des <i>Charge-Pump</i> -Stromes	A
$I_{dn}$	Amplitude des DN-Zweig-Stromes	A
$I_{up}$	Amplitude des UP-Zweig-Stromes	A
$I_L$	Amplitude des Leckstromes	A
$\omega_e$	Kreisfrequenzfehler	rad Hz
$\omega_n$	Natürliche Kreisfrequenz des geschlossenen Phasenregelkreises	rad Hz
$\omega_{ref}$	Referenzkreisfrequenz	rad Hz
$\omega_{ref,2}$	Das Zweifache der Referenzkreisfrequenz	rad Hz
$\omega_{ref,10}$	Das Zehnfache der Referenzkreisfrequenz	rad Hz
$\omega_{vco}$	Kreisfrequenz des spannungsgesteuerten Oszillators	rad Hz
$\omega_{0,vco}$	Ruhekreisfrequenz des spannungsgesteuerten Oszillators	rad Hz
$N$	Teilungsbeiwert	
$N_F$	Fraktionaler Teilungswert des Teilungswertes eines Phasenregelkreises	
$N_I$	Ganzzahliger Teilungswert des Teilungswertes eines Phasenregelkreises	
$P$	Teilungsbeiwert des Vorteilers ( <i>Prescaler</i> )	
$\varphi_e$	Phasenfehler	rad
$\varphi_{e,s}$	Statischer Phasenfehler	rad
$\varphi_{ref}$	Phase des Referenzsignals	rad
$\varphi_{vco}$	Phase des Ausgangssignals des spannungsgesteuerten Oszillators	rad
$\varphi_{vco,0}$	Phase des Ausgangssignals des spannungsgesteuerten Oszillators zum Zeitpunkt $t_0$	rad
$\varphi_{div}$	Phase des TeilerAusgangssignals	rad
$\varphi_{als}$	Phase des <i>Alias</i> -Signals	rad
$\phi$	Phasenkonstante für den eingerasteten Bereich eines Phasendetektors	rad
$K$	Schleifenverstärkung	
$K_N$	Normierte Schleifenverstärkung des VAN PAEMEL-Modells	
$K_v$	Steigung der linearen (oder stückweise linearen) Oszillatorkennlinie	Hz/V



$K_{v,\omega}$	Steigung der linearen (oder stückweise linearen) Oszillatorkennlinie	rad/V
$K_\varphi$	Verstärkungsbeiwert des Phasen- und Frequenz-Detektors und der <i>Charge-Pump</i>	A/rad
$t_{zc}$	Zeitpunkt eines Phasennulldurchganges	s
$T_g$	Zeitdauer einer Periode	s
$T_L$	Einrastzeit	s
$T_{PI}$	<i>Pull-In</i> -Zeit	s
$T_{fall}$	Zeitdauer einer fallenden Flanke	s
$T_{rise}$	Zeitdauer einer steigenden Flanke	s
$T_{sam}$	Periodendauer des <i>Sample</i> -Signals der <i>Alias-Locked Loop</i>	s
$T_{vco}$	Periodendauer des Ausgangssignals des spannungsgesteuerten Oszillators	s
$T_{ref}$	Periodendauer des Referenzsignals	s
$\tau_k$	Diskreter Zustand in den Phasenregelkreis-Modellen nach VAN PAEMEL	s
$\tau_A, \tau_B$	Zeitdauer eines virtuellen Zustandes	s
$\tau_b$	Vorgegebene Zeit zwischen zwei aufeinander folgenden steigenden/fallenden Flanken der Signale $u_{ref}$ und $u_{div}$	s
$\tau_M$	Messzeit	s
$\tau_{rst}$	Laufzeit des UND-Gatters des Phasen- und Frequenz-Detektors	s
$\tau_d$	Laufzeit, die benötigt wird, um das UP-Signal des Phasen- und Frequenz-Detektors zu invertieren	s
$\tau_1$	Zeitkonstante eines <i>RC</i> -Gliedes ( $\tau_1 = R_1 C_1$ )	s
$\tau_{1N}$	Normierte Zeitkonstante eines <i>RC</i> -Gliedes ( $\tau_{1N} = R_1 C_1 / T$ )	s
$\tau_{set}^{up}, \tau_{set}^{dn}, \tau_{rst}^{up}, \tau_{rst}^{dn}$	Zeitdauer eines virtuellen Zustandes	s
$u_{ave}$	Durchschnittliche Regelspannung	V
$u_{ctl}$	Regelspannung	V
$u_{ctl,Id}$	Ideale Regelspannung	V
$u_{ctl,Nid}$	Nichtideale Regelspannung	V
$u_{ctl,Spectre}$	Regelspannung, ermittelt durch eine Spectre-Simulation	V

## Verwendete Symbole und Abkürzungen

---

$u_H$	Spannungspegel logisch Eins ( <i>high</i> )	V
$u_t$	Zielspannung der Regelspannung	V
$u_{\text{ref}}$	Periodisches Referenzsignal	V
$u_{\text{vco}}$	Periodisches Ausgangssignal des spannungsge- steuerten Oszillators	V
$u_{\text{div}}$	Periodisches Teiler Ausgangssignal	V
$u_L$	Spannungspegel logisch Null ( <i>low</i> )	V
$u_{\text{max}}$	Maximalwert einer Spannung	V
$u_{\text{min}}$	Minimalwert einer Spannung	V
$u_{\pi}$	Ausgangssignal des $\pi$ -Detektors	V
$u_{\text{var}}$	Periodisches Signal (entweder Teiler- oder Aus- gangssignal des spannungsgesteuerten Oszilla- tors)	V
$u_{\text{pulse}}$	Spannungsausgangssignal der logischen Ver- knüpfung zwischen den UP- und DN-Signalen	V
$u_{\text{ool}}$	Digitales Spannungssignal für die Ausrastde- tektion	V
$u_{\text{zc}}$	Digitales Spannungssignal für die Phasennull- durchgangdetektion	V
$u_{\text{ld}}$	Digitales Spannungssignal der Einrastdetektion	V
$u_{C_1,0}$	Spannung über der Kapazität $C_1$ zum Zeit- punkt $t_0$	V
$v_k$	Diskreter Spannungswert (Zustand) in den Phasenregelkreis-Modellen	V
$\zeta_k$	Diskreter Phasenfehler (Zustand) in den erwei- terten Phasenregelkreis-Modellen	rad

## Abkürzungen

Abkürzung	Bedeutung
ALL	<u>A</u> lias- <u>L</u> ocked <u>L</u> oop
ADPLL	Komplett digitaler Phasenregelkreis ( <u>A</u> ll <u>D</u> igital <u>P</u> hase- <u>L</u> ocked <u>L</u> oop)
APLL	Analoger Phasenregelkreis ( <u>A</u> nalog <u>P</u> hase- <u>L</u> ocked <u>L</u> oop)
CDR	Takt- und Datenrückgewinnung ( <u>C</u> lock and <u>D</u> ata <u>R</u> ecovery)
CP	Ladungspumpe ( <u>C</u> harge- <u>P</u> ump)
CP-PLL	(Digitaler) Phasenregelkreis mit Ladungspumpe ( <u>C</u> harge- <u>P</u> ump <u>P</u> hase- <u>L</u> ocked <u>L</u> oop)
DPLL	Digitaler Phasenregelkreis ( <u>D</u> igital <u>P</u> hase- <u>L</u> ocked <u>L</u> oop)
DZ	Tote Zone ( <u>D</u> ead <u>Z</u> one)
IC	Integrierte Schaltung ( <u>I</u> ntegrated <u>C</u> ircuit)
LF	Schleifenfilter ( <u>L</u> oop <u>F</u> ilter)
LPLL	Linearer Phasenregelkreis ( <u>L</u> inear <u>P</u> hase- <u>L</u> ocked <u>L</u> oop)
LTI	Linear und zeitinvariant ( <u>L</u> inear <u>T</u> ime <u>I</u> nvariant)
MASH	<u>M</u> ultiple <u>s</u> t <u>A</u> ge Noise <u>S</u> Haping
MOS	Metall-Oxid-Halbleiter ( <u>M</u> etal <u>O</u> xide <u>S</u> emiconductor)
PD	<u>P</u> hase- <u>D</u> etektor
PFD	<u>P</u> hase- und <u>F</u> requenz- <u>D</u> etektor
PLL	Phasenregelschleife ( <u>P</u> hase- <u>L</u> ocked <u>L</u> oop)
PWA	Stückweise affin ( <u>P</u> iece <u>W</u> ise <u>A</u> ffine)
SFDR	Störungsfreier dynamischer Bereich ( <u>S</u> purious <u>F</u> ree <u>D</u> ynamic <u>R</u> ange)
VCO	Spannungsgesteuerter Oszillator ( <u>V</u> oltage <u>C</u> ontrolled <u>O</u> scillator)



---

# Inhaltsverzeichnis

---

<b>Kurzfassung/Abstract</b>	<b>i</b>
<b>Verwendete Symbole und Abkürzungen</b>	<b>v</b>
<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1. Motivation . . . . .	1
1.2. Stand der Forschung/Technik . . . . .	2
1.3. Übersicht der Kapitel . . . . .	5
<b>2. Theoretische Grundlagen</b>	<b>7</b>
2.1. Dynamische Systeme . . . . .	7
2.1.1. Direkte und indirekte Methode von LYAPUNOV . . . . .	9
2.1.2. Stabilität linearer Systeme . . . . .	11
2.2. Schaltende dynamische Systeme . . . . .	13
2.2.1. Schaltende lineare Systeme . . . . .	14
2.2.2. Stabilitätstheorie schaltender Systeme . . . . .	15
2.2.3. S-Methode . . . . .	17
<b>3. Grundlagen digitaler Phasenregelkreise</b>	<b>19</b>
3.1. Grundlagen . . . . .	19
3.1.1. <i>Integer-N</i> Phasenregelkreise . . . . .	20
3.1.2. <i>Fraktional-N</i> Phasenregelkreise . . . . .	28
3.1.3. Nichtlinearitäten in digitalen Phasenregelkreisen . . . . .	30
3.2. Untersuchung des Einrastverhaltens . . . . .	35
3.2.1. <i>Pull-Out</i> -Bereich $\Delta\omega_{PO}$ . . . . .	39
3.2.2. Dynamik und Logik des Regelkreises . . . . .	41
3.2.3. <i>Lock/Settling</i> -Detektor . . . . .	42

<b>4. Modellierung und Analyse digitaler Phasenregelkreise</b>	<b>51</b>
4.1. Modellierung und Analyse von Phasenregelkreisen . . . . .	51
4.1.1. Modellierung und Stabilität des Modells nach GARDNER . . . . .	52
4.1.2. Modellierung und Stabilität des Modells nach VAN PAEMEL . . . . .	55
4.1.3. Modellierung und Stabilität des Modells nach ACCO . . . . .	58
4.1.4. Modellierung und Stabilität des Modells nach HEDAYAT . . . . .	63
4.2. Phasenregelkreis mit <i>Dead-Zone</i> -Charakteristik . . . . .	72
4.2.1. Erweiterung des Modells nach VAN PAEMEL: <i>Dead-Zone</i> . . . . .	72
4.2.2. Analyse des erweiterten Modells nach VAN PAEMEL: <i>Dead-Zone</i> . . . . .	84
4.2.3. <i>Dead-Zone</i> im erweiterten Modell nach HEDAYAT: Modellierung . . . . .	102
4.2.4. <i>Dead-Zone</i> im erweiterten Modell nach HEDAYAT: Analyse . . . . .	107
4.3. Erweiterung des Modells nach VAN PAEMEL: Leckstrom . . . . .	113
4.4. Regelkreise hoher Ordnung: Modellierung durch Approximation . . . . .	118
4.4.1. Allgemeines Modell $n$ -ter Ordnung . . . . .	118
4.4.2. Stabilität des CP-PLL-Modells dritter Ordnung . . . . .	125
<b>5. Modellierung und Simulation digitaler Phasenregelkreise</b>	<b>131</b>
5.1. Grundlegendes Konzept . . . . .	131
5.2. Modellierung der Nichtlinearitäten . . . . .	134
5.2.1. Phasen- und Frequenz-Detektor . . . . .	135
5.2.2. <i>Charge-Pump</i> -Charakteristik . . . . .	143
5.2.3. Spannungsgesteuerter Oszillator . . . . .	147
5.3. Modellierung und Simulation ausgewählter CP-PLL-Architekturen . . . . .	147
5.3.1. <i>Alias-Locked Loops</i> . . . . .	148
5.3.2. <i>Integer-N</i> Frequenzsynthesizer . . . . .	154
5.3.3. <i>Integer-N</i> Frequenzsynthesizer: Nichtlineare Dynamik . . . . .	160
<b>Zusammenfassung</b>	<b>169</b>
<b>Ausblick</b>	<b>173</b>
<b>A. Theoretische Grundlagen</b>	<b>175</b>
A.1. Definitheit von Matrizen . . . . .	175
A.2. Das JURY-Kriterium . . . . .	176
A.3. Endlicher Automat . . . . .	177
<b>B. Ergänzungen zur Modellierung von Regelkreisen hoher Ordnung</b>	<b>179</b>
B.1. Stabilitätstest zum Modell vierter Ordnung . . . . .	179
B.2. Stabilitätstest zum Modell fünfter Ordnung . . . . .	181
<b>C. Validität des Modells eines Phasenregelkreises 2. Ordnung</b>	<b>183</b>
C.1. Herleitung der Validitätsgrenzen . . . . .	184
C.2. Validität und nichtlinearer spannungsgesteuerter Oszillator . . . . .	185

<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>194</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>195</b>





---

## Einleitung

---

*In diesem einführenden Kapitel wird die Motivation zur Modellierung gemischt analoger und digitaler Phasenregelkreise dargelegt. Insbesondere werden dabei die Probleme des Entwurfs, der Simulation und Analyse erörtert. Des Weiteren werden die Ziele dieser Arbeit vorgestellt und die Inhalte der verschiedenen Kapitel kurz angegeben.*

### 1.1. Motivation

Phasenregelkreise oder auch *Phase-Locked Loops* (PLL) stellen einen wichtigen Bestandteil für eine Vielzahl von Anwendungen innerhalb der Elektrotechnik dar. Insbesondere in der Kommunikationstechnik werden sie zur Frequenzsynthese [1–8], Modulation, Demodulation [2, 9] und zur Rekonstruktion des Taktes oder von Daten [3, 10–12] verwendet. Die Verbreitung dieser Regelkreise ist darin begründet, dass sie eine robuste Regelung und eine hohe Frequenzreinheit des Ausgangssignals ermöglichen. Dabei stellt die Frequenzreinheit in der Frequenzsynthese ein wichtiges Entwurfsmerkmal dar. Diese Randbedingung lässt sich nur schwierig mittels der direkten Frequenzsynthese erzeugen [13]. Die wohl verbreitetste Architektur ist der digitale Phasenregelkreis mit Ladungspumpe, auch *Charge-Pump Phase-Locked Loop* (CP-PLL) genannt. Im Allgemeinen steht bei dem Entwurf einer CP-PLL das Schleifenfilter im Vordergrund, da dieses das dynamische Verhalten maßgeblich beeinflusst. Wird das Filter sehr schmalbandig ausgelegt, so ergeben sich zwar gute Rauschfiltereigenschaften, jedoch wird dadurch die Ausregelzeit vergrößert. Diesbezüglich ist die Wahl des Filters oder der Filterbandbreite so anzusetzen, dass ein gutes

Filterverhalten und eine geringe Ausregelzeit gewährleistet wird. Hinsichtlich dieses Sachverhaltes werden häufig Filter höherer Ordnung verwendet, wodurch die Stabilitätsanalyse stark erschwert wird [2, 6, 14, 15]. In der Regel werden für den Entwurf sogenannte „*Damenregeln*“ oder lineare Abschätzungen verwendet [16–18], wobei diese mit zunehmender Ordnung der Regelschleife und unter Berücksichtigung der verschiedenen Nichtlinearitäten des Systems meist nicht die gewünschten Voraussagen liefern. Die Problematik der Analyse eines Phasenregelkreises beschränkt sich dabei nicht nur auf die Ordnung der Schleife oder auf den nichtlinearen spannungsgesteuerten Oszillator im Regelkreis, sondern beinhaltet bei gemischt digitalen und analogen Architekturen auch pulsweitenmoduliertes Verhalten (Abtastverhalten). Dieses Abtastverhalten erschwert zusätzlich die Analyse in Bezug auf die Dynamik sowie auf die Stabilität. Die meisten Analyseverfahren für diese Klasse der *Mixed-Signal*-Systeme beschränken sich auf lineare Methoden mit sehr eingeschränkter Gültigkeit [13, 16, 19, 20]. Ferner sind neben den genannten Nichtlinearitäten weitere zu erwähnen, die eine genaue Analyse erschweren. Zwar wurden Nichtidealitäten wie Leckstrom, Stromungleichgewicht oder Stromversatz in der Ladungspumpe sowie verschiedene Formen von Kennlinien für den Phasendetektor und den spannungsgesteuerten Oszillator unter bestimmten Annahmen untersucht, jedoch wurden detaillierte Stabilitätsanalysen der einzelnen Nichtidealitäten oder Nichtlinearitäten nicht durchgeführt, da es größtenteils an adäquaten Modellen und/oder Analyseverfahren fehlt. Im Allgemeinen werden diese Phasenregelkreise, nachdem die Parameter geeignet ausgewählt wurden, mit Hilfe von Transistorsimulationen, Verhaltensbeschreibungen oder aus Kombination dieser Methoden (SPICE, Spectre, VHDL-AMS, Verilog, usw.) bewertet und durch die Erfahrung des Schaltungsdesigners optimiert. Durch die Architektur der Regelkreise ergeben sich extrem hohe Simulationszeiten, die bis zu mehrere Tage und Wochen dauern können [21–23]. Selbst die Verhaltensmodelle mittels Simulink oder Verilog liefern je nach Beschaffenheit der Regelschleife zwar eine Verringerung der Simulationszeit, jedoch können auch hier zum Teil mehrere Stunden bis Tage angesetzt werden, wobei meist nicht alle Nichtidealitäten und Nichtlinearitäten modelliert werden. Aus diesem Grund werden in dieser Arbeit verschiedene Modelle dargelegt sowie entwickelt und hinsichtlich ihrer Gültigkeit überprüft.

### 1.2. Stand der Forschung/Technik

Ein Phasenregelkreis stellt sich in der Frequenzsynthese im Allgemeinen als ein *Mixed-Signal*-System dar. Demnach besteht es aus analogen und digitalen Funktionsblöcken und verhält sich wie ein nichtlineares Abtastsystem [16]. Daraus ergeben sich spezielle Anforderungen an den Entwurf, um die Stabilität des Systems zu gewährleisten. Da sich das *Mixed-Signal*-System zusätzlich aus einem Hochfrequenz- und einem Niederfrequenzteil zusammensetzt, entstehen innerhalb der Entwurfsphase hohe Simulationszeiten für das Gesamtsystem [24–28]. Hinzukommend zum schaltenden Verhalten der Differenzialgleichungen weist das System unterschiedliche Nichtidealitäten auf, wodurch sich wiederum besondere Forderungen an das Design stellen. Dabei werden diese Nichtidealitäten bislang innerhalb der linearen kontinuierlichen Approximation als statisch betrachtet [29, 30]. Of-

fensichtlich sind diese jedoch dynamischer Natur [25, 31]. In [25, 31] wurden Ansätze zur Modellierung der *Dead-Zone* sowie zur nichtlinearen (ereignisgesteuerten) Modellierung der Charakteristik des spannungsgesteuerten Oszillators vorgestellt. Dabei wird die *Dead-Zone* durch parasitäre Verzögerungszeiten innerhalb des Phasen- und Frequenz-Detektors (PFD) modelliert. Genauere Untersuchungen zur Stabilität sind nicht durchgeführt worden.

Hinsichtlich der Stabilitätsanalyse eines digitalen Phasenregelkreises sind drei Arbeiten von entscheidender Bedeutung [16, 32, 33]. GARDNER konnte in [16] durch das Aufstellen einer linearisierten Differenzengleichung das Abtastverhalten des Phasen- und Frequenz-Detektors berücksichtigen. Dadurch konnte anschaulich gezeigt werden, inwieweit die Eingangsfrequenz des Regelkreises eine Auswirkung auf das Stabilitätsverhalten hat, und es konnten Stabilitätsgrenzen für den Regelkreis zweiter und dritter Ordnung angegeben werden. In [32] konnte VAN PAEMEL ein autonomes, nichtlineares, schaltendes Differenzengleichungssystem aufstellen. Dieses wurde in einem der vier Sektoren linearisiert. Die Stabilitätsgrenze von GARDNER für den Regelkreis zweiter Ordnung konnte mittels des linearisierten Modells nach VAN PAEMEL bestätigt werden. In [33] führte ACCO seinerseits eine Normierung für das Modell nach VAN PAEMEL ein und linearisierte das Modell in allen Sektoren. Eine Untersuchung der charakteristischen Polynome des linearisierten Modells ergab, dass die von GARDNER eingeführte Grenze eine zumindest konservative Stabilitätsgrenze darstellt. Es wurde jedoch nicht überprüft, ob die Linearisierung valide ist und welcher Linearisierungsfehler sich ergibt. Auch Erweiterungen des Modells nach VAN PAEMEL wurden bislang nicht weiter verfolgt, um beispielsweise die *Dead-Zone*-Charakteristik des Phasen- und Frequenz-Detektors oder den Leckstrom der *Charge-Pump* zu modellieren.

Das Konzept der ereignisgesteuerten Modellierung liefert die Möglichkeit, das schaltende (pulsweitenmodulierte) Verhalten äußerst effizient und mit hoher Genauigkeit zu simulieren, wodurch sich im Vergleich zu Simulationen auf Transistorebene oder auch mittels Differenzialgleichungen ein signifikanter Geschwindigkeitsgewinn ergibt. Gleichzeitig können die Systeme sehr präzise charakterisiert werden [15, 24, 25, 32–36]. Das Prinzip der ereignisgesteuerten Modellierung liegt in der Diskretisierung des Differenzialgleichungssystems (DGLS) zu den Zeitpunkten, an denen der Phasen- und Frequenz-Detektor (PFD) schaltet, d. h. ein Ereignis aufgetreten ist (eine steigende oder fallende Flanke des Referenz- bzw. des Teiler Ausgangssignals des Phasenregelkreises) [24, 25, 32, 34]. Es ergibt sich ein nichtlineares, diskretes System mit variabler Abtastzeit. Durch diese Diskretisierung ist es nicht erforderlich, das DGLS des Regelkreises zu lösen. Es ist ausreichend, zu diskreten Zeitpunkten ein Differenzengleichungssystem auszuwerten. Die Arbeiten von [24, 25, 32, 33, 35] beschränken sich auf die Frequenzsynthese mit PFD und einem ganzzahligen Teiler. Dabei wurden die Fraktional- $N$  Frequenzsynthesizer und Daten- und Taktrückgewinnungsarchitekturen oder auch *Clock and Data Recovery*-Architekturen (CDR) bislang nicht mit Hilfe der ereignisgesteuerten, mathematischen Modellierung betrachtet. Hinzukommend existieren verschiedene Varianten der Phasendetektoren für die Frequenzsynthese und CDR, die innerhalb des Modellierungskonzepts nicht umgesetzt wurden. Des Weiteren wurden die Nichtidealitäten

## 1. Einleitung

---

innerhalb der *Charge-Pump* und des Phasendetektors nicht tiefergehend modelliert. Bei der Analyse der Nichtidealitäten wird zumeist der ausgeregelte Fall betrachtet und mittels der FOURIER-Reihenentwicklung die Auswirkung auf das Ausgangsspektrum durch geschickte Umformungen bestimmt [1, 7, 13, 37, 38]. Dieser Ansatz liefert hinsichtlich der Nebentöne im Spektrum eine Aussage über die Frequenzreinheit, jedoch werden die Effekte wie *Current-Mismatch*, Leckstrom oder *Dead-Zone* nicht weiter modelliert, wodurch sich dann Prognosen verschiedener Verhaltensmodelle nicht einhalten lassen, da diese Nichtidealitäten in der Simulation unberücksichtigt bleiben. Zudem wurden keine analytischen Modelle für solche Randbedingungen angegeben. Es ist ersichtlich, dass gerade das Schleifenfilter die Komplexität der zu lösenden Gleichungen bestimmt, da das Filter das dynamische Verhalten des Systems maßgeblich festlegt. Für eine PLL zweiter Ordnung können Gleichungen mit analytischer Lösung bestimmt werden [24, 32]. Für Regelkreise höherer Ordnung ergibt sich im Allgemeinen eine nicht-bijektive Abbildung bezüglich der Phaseninformation und der Zeit, wodurch das Lösen der Differenzgleichungen durch nichtlineare Näherungsverfahren erfolgen muss. In [25] wurde ein ereignisgesteuertes Modell einer CP-PLL dritter Ordnung analysiert, wobei die Phasengleichung des spannungsgesteuerten Oszillators mit Hilfe eines NEWTON-Verfahrens gelöst worden ist. Simulationsmodelle für Filter beliebiger Ordnung innerhalb dieser Modellierung sind ausgeblieben. D. h., ein allgemeiner Ansatz zur mathematischen Verhaltensmodellierung wurde nicht angegeben.

## 1.3. Übersicht der Kapitel

Im Folgenden soll die Struktur dieser Arbeit dargelegt werden.

**Kapitel 2 (*Grundlagen dynamischer Systeme*):** In diesem Kapitel werden die wichtigsten Grundlagen dynamischer Systeme behandelt, die zum Verständnis dieser Arbeit notwendig sind. Es werden grundlegende Definitionen dynamischer Systeme eingeführt. Dabei werden Systeme betrachtet, in denen Parameter, Differenzen- bzw. Differenzialgleichungen schalten. Diesbezüglich werden sogenannte schaltende Systeme untersucht. Die Konzepte der LYAPUNOV-Theorie, wie LYAPUNOV-Funktionen und insbesondere *Common*-LYAPUNOV- und *Multiple*-LYAPUNOV-Funktionen werden erläutert.

**Kapitel 3 (*Grundlagen digitaler Phasenregelkreise*):** Da es bei den Phasenregelkreisen eine Vielzahl von Architekturen gibt, sollen in diesem Kapitel die für diese Arbeit wichtigen erläutert werden. Der Fokus des Kapitels liegt dabei in der Darstellung der Nichtlinearitäten und des dynamischen Verhaltens digitaler Phasenregelkreise zur Frequenzsynthese. Ein Teil ist dabei die Beurteilung des digitalen und des analogen Verhaltens des Regelkreises.

**Kapitel 4 (*Analyse und Stabilität digitaler Phasenregelkreise*):** In diesem Abschnitt werden vier analytische Modelle vorgestellt und deren Ergebnisse miteinander verglichen. An geeigneter Stelle werden tiefergehende Betrachtungen oder Modellerweiterungen und Vereinfachungen eingeführt. Diesbezüglich werden zwei analytische Modelle zur Beschreibung des nichtlinearen Verhaltens der *Dead-Zone* und eines zur Darstellung des Leckstromes entwickelt und analysiert. Des Weiteren wird ein Konzept und eine allgemeines Modell angegeben, mit dem die Modellierung von Phasenregelkreisen hoher Ordnung mittels Approximation analytisch beschrieben werden kann. Durch dieses Modell wird abschließend die daraus resultierende Stabilitätsgrenze mit der von GARDNER für einen Regelkreis der Ordnung Drei verglichen.

**Kapitel 5 (*Modellierung und Simulation digitaler Phasenregelkreise*):**

Hier wird der Ansatz von HEDAYAT bzw. DEMIR verwendet, um die Komplexität und die Nichtlinearität effizient zu modellieren und zu simulieren. Dazu werden verschiedene Architekturen, Schleifenfilter beliebiger Ordnung und die inhärenten Nichtlinearitäten und Nichtidealitäten auf Basis des von HEDAYAT vorgeschlagenen Ansatzes modelliert. Insbesondere die Einflüsse der einzelnen Nichtlinearitäten werden hinsichtlich der Dynamik und Frequenzreinheit der Ausgangssignale untersucht und mittels Simulink- und Spectre-Simulationen werden die Ergebnisse validiert.

Abschließend sind die Ergebnisse dieser Arbeit zusammengefasst und es ist ein Ausblick auf weitere Forschungs- und Entwicklungsarbeiten dargelegt.



---

## Theoretische Grundlagen

---

*Innerhalb dieses Kapitels sollen die Grundlagen dynamischer Systeme, die zum Verständnis dieser Arbeit notwendig sind, vorgestellt werden. Insbesondere sollen verschiedene Verfahren zur Untersuchung der Stabilität nichtlinearer Systeme erörtert werden, um im Verlauf der Arbeit zu zeigen, inwiefern und unter welchen Randbedingungen diese Ansätze zur Charakterisierung eines digitalen Phasenregelkreises verwendet werden können. Dabei werden die Stabilitätstheorie von LYAPUNOV und die Erweiterungen für schaltende Systeme erörtert.*

### 2.1. Dynamische Systeme

Der erste Abschnitt dieses Kapitels dient zur Einordnung und Definition dynamischer Systeme. Dazu werden zeitdiskrete und zeitkontinuierliche Systeme betrachtet, wobei sich verschiedene Definitionen und Resultate als sehr ähnlich darstellen (siehe [39–42]).

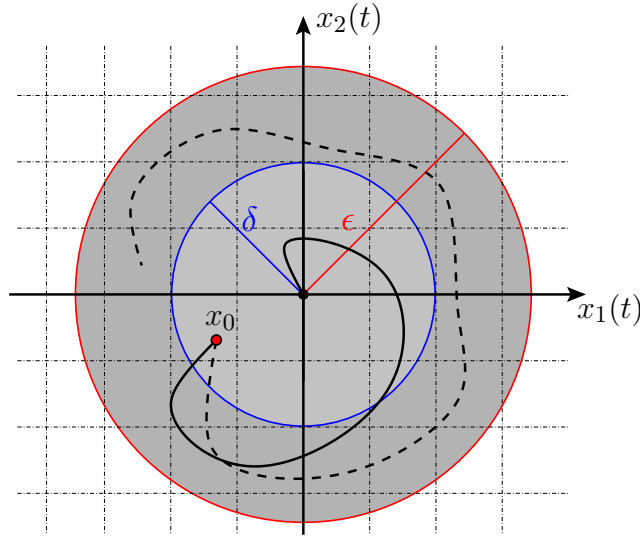
**Definition 2.1 (Dynamische Systeme)** Sei  $\mathbf{f}_d : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , dann wird

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}_d(\mathbf{x}(k)) \quad \text{oder auch} \quad \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}_d(\mathbf{x}_k) \quad (2.1a)$$

als autonomes, zeitdiskretes, dynamisches System bezeichnet mit  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  und  $k \in \mathbb{Z}$ . Für  $\mathbf{f}_c : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ergibt sich für den kontinuierlichen Fall

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_c(\mathbf{x}(t)), \quad (2.1b)$$

wobei  $t \in \mathbb{R}$  gilt.



**Abbildung 2.1.:** Betrachtung auf der Zustandsebene: Die gestrichelte Linie zeigt stabiles Verhalten nach Definition 2.3, da die  $\epsilon$ -Umgebung nicht verlassen wird, jedoch der Ursprung auch nicht erreicht wird. Die rote Linie zeigt das dynamische Verhalten eines asymptotisch stabilen Systems.

Zur Charakterisierung dynamischer Systeme hinsichtlich ihrer Stabilität ist die Ruhelage des Systems von wichtiger Bedeutung.

**Definition 2.2 (Ruhelage)** Es werde  $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$  als Ruhelage bezeichnet, wenn

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_R) \quad (2.2)$$

gilt. Im Falle des diskreten Systems nach Gleichung (2.1a) ist die Ruhelage der Fixpunkt der Rekursionsgleichung.

**Definition 2.3 (Stabilität)** Eine Ruhelage  $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$  werde als stabil bezeichnet, wenn zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $\delta(\epsilon)$  existiert, so dass  $\|\mathbf{x}(t)\| < \epsilon$  gilt, sofern  $\|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta$  mit  $t_0 < t$ .

**Definition 2.4 (Asymptotische Stabilität)** Eine Ruhelage  $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$  werde als asymptotisch stabil bezeichnet, wenn diese stabil ist und wenn

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \quad (2.3)$$

gilt. Kann gezeigt werden, dass Gleichung (2.3) für alle Anfangsbedingungen  $\mathbf{x}_0$  gilt, so werde die Ruhelage  $\mathbf{x}_R$  als global asymptotisch stabil (im Sinne von LYAPUNOV) bezeichnet.

Abbildung 2.1 beschreibt die eingeführten Stabilitätsbegriffe nach den Definitionen 2.3 und 2.4.



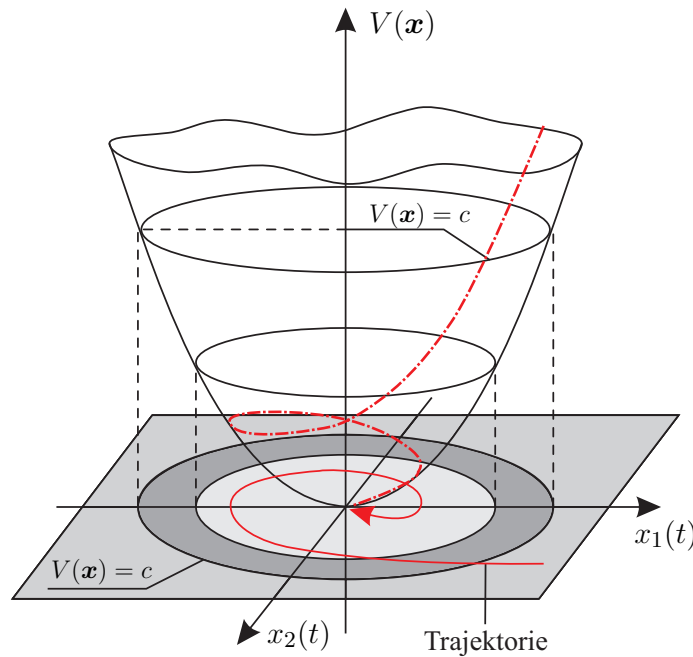


Abbildung 2.2.: Zur LYAPUNOV-Funktion und Zustandsebene

**Definition 2.5 (Exponentielle Stabilität)** Eine Ruhelage  $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$  eines Systems nach Definition 2.1 werde als *exponentiell stabil* bezeichnet, wenn die reellen Konstanten  $M \geq 1$  und  $\beta > 0$  existieren, so dass

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq M e^{-\beta t} \|\mathbf{x}(0)\| \quad (2.4)$$

gilt für  $t \geq 0$  und für alle Lösungen des Systems nach Definition 2.1.

**Definition 2.6 (Einzugsbereich)** Die Gesamtheit aller Anfangspunkte im Zustandsraum, die für  $t \rightarrow \infty$  gegen die Ruhelage konvergieren, wird als *Einzugsbereich* bezeichnet.

### 2.1.1. Direkte und indirekte Methode von LYAPUNOV

Existiert eine positiv definite Funktion an der Stelle der Ruhelage, so wird, wenn entlang der Lösung des gestörten Systems diese Funktion monoton fallend ist, die Zustandsgröße in die Ruhelage zurückkehren. Diese positiv definiten Funktionen werden als LYAPUNOV-Funktionen bezeichnet. In Abbildung 2.2 ist schematisch eine LYAPUNOV-Funktion und deren Beziehung zur Zustandsebene dargestellt.

#### Satz 2.1 (Direkte Methode von LYAPUNOV für kontinuierliche Systeme)

Besitzt die Differenzialgleichung nach Definition 2.1 mit der Ruhelage  $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$  zu jedem Anfangswert  $\mathbf{x}_0 \in \Omega_1$  eine stetige eindeutige Lösung und existiert dann eine Funktion  $V(\mathbf{x})$  mit

$$V(\mathbf{0}) = 0, \quad (2.5a)$$

## 2. Theoretische Grundlagen

---

die in einer Umgebung  $\Omega_2 \subseteq \Omega_1$  stetig ist, stetige partielle Ableitungen besitzt und dort mit Ausnahme von  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  die Bedingungen

$$V(\mathbf{x}) > 0 \quad (2.5b)$$

und

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}^T \text{grad} \{V(\mathbf{x})\} = \sum_{i=1}^n \dot{x}_i \frac{\partial V}{\partial x_i} \leq 0 \quad (2.5c)$$

erfüllt, so ist die Ruhelage  $\mathbf{x}_R$  im Sinne von LYAPUNOV stabil. Ist das Gleichheitszeichen bei der Randbedingung (2.5c) auszuschließen, so ist die Ruhelage  $\mathbf{x}_R$  sogar asymptotisch stabil.

Ähnlich wie im kontinuierlichen Fall kann die direkte Methode auch bei zeitdiskreten Systemen angewendet werden.

**Satz 2.2 (Direkte Methode von LYAPUNOV für zeitdiskrete Systeme)** *Existiert für die zeitdiskrete Differenzengleichung (2.1a) eine kontinuierliche radial unbegrenzte Funktion  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass*

$$V(\mathbf{x}) > 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \quad (2.6a)$$

$$V(\mathbf{0}) = 0 \quad (2.6b)$$

und

$$V(\mathbf{x}_{k+1}) - V(\mathbf{x}_k) < 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \quad (2.6c)$$

gelten, so wird die Ruhelage  $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$  als global asymptotisch stabil bezeichnet.

Tiefergehende Darstellungen zur direkten Methode von LYAPUNOV sind in [39, 40, 42–44] angegeben. Im Gegensatz zur direkten Methode wird bei der indirekten nicht das nichtlineare Modell analysiert, sondern das linearisierte Modell in der Nähe der Ruhelage. Die Idee hinter der indirekten Methode von LYAPUNOV liegt darin, die Dynamik des linearisierten Systems um die Ruhelage zu untersuchen und nicht die des nichtlinearen Systems, da es häufig schwierig bis unmöglich ist, die direkte Methode anzuwenden. In [39, 42–44] wird dieses Verfahren genauer dargestellt. Das dynamische System nach Gleichung (2.1b) lässt sich durch die TAYLOR-Reihenentwicklung durch

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_R) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_R} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_R) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (2.7)$$

darstellen. Mit  $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$  und  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_R) = \mathbf{0}$  kann

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{J}\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (2.8)$$

angegeben werden, wobei  $\mathbf{J}$  die JACOBI-Matrix bezeichnet. Dabei strebt  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  immer schneller gegen  $\mathbf{0}$  für  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$  als  $\|\mathbf{x}\|$ , d. h. es gilt

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow 0} \frac{\mathbf{g}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|} = \mathbf{0}. \quad (2.9)$$

Somit ist es offensichtlich, dass der lineare Anteil um die Ruhelage  $\mathbf{x}_R$  bestimmend ist und es lässt sich das folgende Satz aufstellen.

**Satz 2.3 (Indirekte Methode von LYAPUNOV)** *Das System*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{h}(\mathbf{x}) \quad (2.10)$$

*habe die Ruhelage  $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ . Ferner sei  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$  stetig und jeder Anfangswert  $\mathbf{x}_0$  in einer Umgebung der Ruhelage führe zu einer stetigen und eindeutigen Trajektorie. Zusätzlich erfüllt das System*

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow 0} \frac{\mathbf{h}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|} = \mathbf{0}. \quad (2.11)$$

*Ist dann die Matrix  $\mathbf{J}$  eine HURWITZ-Matrix, so ist die Ruhelage asymptotisch stabil. Wenn  $\mathbf{J}$  mindestens einen Eigenwert mit positivem Realteil besitzt, so ist die Ruhelage instabil. Liegen Eigenwerte auf der imaginären Achse, so hängt die Stabilität oder Instabilität von der Form von  $\mathbf{h}(\cdot)$  ab.*

Das zeitdiskrete Analogon unterscheidet sich ausschließlich in der Betrachtung der JACOBI-Matrix  $\mathbf{J}$  der TAYLOR-Reihenentwicklung des zeitdiskreten Systems. Dabei ist es erforderlich, dass das charakteristische Polynom der Matrix  $\mathbf{J}$  ein Einheitskreispolynom ist, d. h., dass alle Eigenwerte im Inneren des Einheitskreises liegen. Die Matrix  $\mathbf{J}$  wird dann als SCHUR-Matrix bezeichnet.

### 2.1.2. Stabilität linearer Systeme

Wird das lineare kontinuierliche System

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad t \geq 0 \quad (2.12)$$

betrachtet, so kann die quadratische Funktion

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \quad (2.13)$$

als Kandidat für die LYAPUNOV-Funktion angesetzt werden. Mit

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{x} = -\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} \quad (2.14)$$

ergibt sich somit die LYAPUNOV-Gleichung

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q} \quad (2.15)$$

für kontinuierliche Systeme.

## 2. Theoretische Grundlagen

---

**Satz 2.4 (LYAPUNOV-Gleichung)** Existiert für die LYAPUNOV-Gleichung (2.15) eine positiv definite Matrix  $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$  bei einer vorgegebenen positiv semidefiniten Matrix  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T$ , so ist  $V(\mathbf{x})$  eine LYAPUNOV-Funktion und das System nach Gleichung (2.12) ist stabil. Sind die Matrizen  $\mathbf{P}$  und  $\mathbf{Q}$  beide positiv definit, wird  $V(\mathbf{x})$  als strenge LYAPUNOV-Funktion bezeichnet und das System ist asymptotisch stabil.

**Satz 2.5 (Stabilität kontinuierlicher Systeme)** Für ein lineares autonomes System nach Gleichung (2.12) sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) das System ist asymptotisch stabil
- (b) das System ist exponentiell stabil
- (c) die Matrix  $\mathbf{A}$  ist eine HURWITZ-Matrix
- (d) die LYAPUNOV-Gleichung

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q} \quad (2.16)$$

besitzt eine eindeutige Lösung, wobei  $\mathbf{P}$  und  $\mathbf{Q}$  positiv definite Matrizen sind.

Für zeitdiskrete Systeme

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A} \mathbf{x}_k, \quad k \in \mathbb{Z}_+ \quad (2.17)$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}_{k+1}) - V(\mathbf{x}_k) &< 0 \\ \Leftrightarrow \mathbf{x}_{k+1}^T \mathbf{P} \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k^T \mathbf{P} \mathbf{x}_k &< 0 \\ \Leftrightarrow \mathbf{x}_k^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P}) \mathbf{x}_k &< 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

und somit kann die zeitdiskrete LYAPUNOV-Gleichung

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} = -\mathbf{Q} \quad (2.19)$$

angegeben werden.

**Satz 2.6 (Stabilität zeitdiskreter linearer Systeme)** Für ein lineares autonomes System nach Gleichung (2.17) sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) das System ist asymptotisch stabil
- (b) das System ist exponentiell stabil
- (c) die Matrix  $\mathbf{A}$  ist eine SCHUR-Matrix
- (d) die diskrete LYAPUNOV-Gleichung

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} = -\mathbf{Q} \quad (2.20)$$

besitzt eine eindeutige Lösung, wobei  $\mathbf{P}$  und  $\mathbf{Q}$  positiv definite Matrizen sind.

## 2.2. Schaltende dynamische Systeme

In diesem Kapitel sollen die grundlegenden Definitionen und Stabilitätseigenschaften schaltender Systeme erörtert werden. Detailliertere Beschreibungen sind in [45–50] zu finden.

**Definition 2.7 (Schaltendes dynamisches System)** Sei jede Funktion  $f_{d,i} : \mathcal{P}_i \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $i \in \mathbb{Z}$  und  $\mathcal{P}_i \subseteq \mathbb{R}^n$ , dann wird

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}_{d,i}(\mathbf{x}(k)) \quad \text{oder auch} \quad \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}_{d,i}(\mathbf{x}_k) \quad (2.21a)$$

als autonomes, diskretes, dynamisches System bezeichnet mit  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  und  $k \in \mathbb{Z}$ . Für  $f_{c,i} : \mathcal{P}_i \rightarrow \mathcal{P}_i$  mit  $i \in \mathbb{Z}$  ergibt sich für den kontinuierlichen Fall

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_{c,i}(\mathbf{x}(t)), \quad (2.21b)$$

wobei  $t \in \mathbb{R}$  gilt.

Es sei darauf hingewiesen, dass im Falle der schaltenden Systeme zwischen kontinuierlichen und zeitdiskreten Systemen Unterschiede existieren. Dabei gibt es im Allgemeinen bei kontinuierlichen Systemen eine Menge  $\mathcal{M}_b$  zwischen zwei benachbarten Gebieten  $\mathcal{P}_1$  und  $\mathcal{P}_2$ , die diese separiert, jedoch gelten  $\mathcal{M}_b \subset \mathcal{P}_1$  und  $\mathcal{M}_b \subset \mathcal{P}_2$ . Der Übergang des Zustands  $\mathbf{x}$  erfolgt von einem zum anderen Gebiet stetig. Bei zeitdiskreten Systemen existiert ebenfalls eine solche Grenze, wobei die Funktionen  $\mathbf{f}_i$  sich auf sich selbst und auf andere Gebiete abbilden können.

Das Schalten dynamischer Systeme kann unterschiedlich begründet sein. Zum einen kann ein System durch eine bestimmte Sequenz  $\sigma(k)$  geschaltet werden, um beispielsweise das System zu stabilisieren oder um eine gewünschte Funktionalität zu erhalten. Zum anderen kann es auch ein zustandsabhängiges Schalten sein, d. h., dass sich der Zustandsraum in Bereiche aufteilt, in denen eine unterschiedliche Beschreibung des dynamischen Systems vorliegt. Im Folgenden sollen kurz die wichtigsten Sachverhalte eruiert werden.

**Beliebiges Schalten:** Die einzelnen Subsysteme können beliebig hin und her geschaltet werden, wodurch sich für jedes System a priori asymptotische Stabilität voraussetzen lassen muss, damit das schaltende System auch für eine konstante Schaltsequenz stabil ist, wobei dann zusätzlich für jede beliebige Schaltsequenz die Stabilität auch gewährleistet sein muss [45–47, 49].

**Zeitabhängiges Schalten:** Hierbei wird ein Schaltsignal mit vorgegebenen Zeitintervallen angegeben. Dabei wird in der Regel angenommen, dass jedes Subsystem stabil ist. Zur Analyse werden meist das *Dwell-Time*-Verfahren [45–47] oder *multiple* LYAPUNOV-Funktionen-Ansätze verwendet [45, 51].

**Zustandsabhängiges Schalten:** Diese Schaltvorgänge erfolgen in Abhängigkeit des Zustandes des Systems. Dabei ist der Zustandsraum in Regionen unterteilt. Durch das Überschreiten einer Grenze von einem Subsystem zum nächsten wird das Verhalten gemäß der Differenzialgleichungen oder Differenzengleichungen geändert.

## 2. Theoretische Grundlagen

---

**Stabilisierendes Schaltsignal:** Ziel ist es, für ein instabiles System eine Schaltsequenz zu finden, die ein stabiles Verhalten zur Folge hat.

Für die folgenden Betrachtungen ist insbesondere das zustandsabhängige Schalten von Bedeutung.

### 2.2.1. Schaltende lineare Systeme

Es sei

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_{\sigma(k)} \mathbf{x}_k, \quad k \in \mathbb{N} \quad (2.22)$$

das schaltende, zeitdiskrete, autonome, dynamische System und

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_{\sigma(k)} \mathbf{x}(t), \quad t \geq 0 \quad (2.23)$$

das schaltende, kontinuierliche, autonome, dynamische System mit der Menge  $\mathcal{A} = \{\mathbf{A}_i : i \in \mathbb{N}\}$  und  $\sigma(k)$  sei die Schaltsequenz mit  $\mathbf{A}_{\sigma(k)} \in \mathcal{A}$ . Es lassen sich verschiedene Beispiele erzeugen, bei denen jedes einzelne Subsystem asymptotisch stabil ist, jedoch lässt sich trotzdem zeigen, dass das schaltende System instabil sein kann [45, 46]. Dementsprechend kann ganz allgemein formuliert werden, dass asymptotische Stabilität der einzelnen Systeme Stabilität oder asymptotische Stabilität für das schaltende System nicht impliziert.

Für ein zeitdiskretes System nach Gleichung (2.17) sei der Spektralradius einer Matrix  $\mathbf{A}$  definiert als

$$\rho(\mathbf{A}) = \max \{|\lambda| : \det \{\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}\} = 0\}. \quad (2.24)$$

Die Verallgemeinerung bezüglich Gleichung (2.23) ergibt sich mit

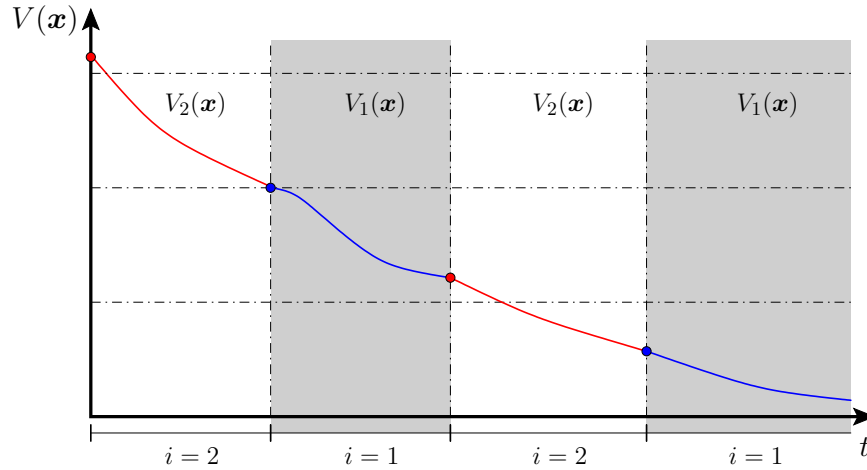
$$\rho_k(\mathcal{A}) = \sup \left\{ \rho \left( \prod_{i=1}^k \mathbf{A}_i \right) : \mathbf{A}_i \in \mathcal{A} \quad \forall 1 \leq i \leq k \right\} \quad (2.25)$$

zu

$$\rho(\mathcal{A}) := \limsup_{k \rightarrow \infty} \{\rho_k(\mathcal{A})\}^{\frac{1}{k}}. \quad (2.26)$$

Allgemein gilt, dass, wenn der Zustand  $\mathbf{x}_k$  für  $k$  gegen Unendlich gegen Null strebt und somit der Spektralradius  $\rho$  kleiner Eins ist, so ist das System gleichmäßig asymptotisch stabil. Für das System nach Gleichung (2.23) gilt Entsprechendes. Es ergibt sich

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{0}, \quad \forall \sigma(k). \quad (2.27)$$



**Abbildung 2.3.:** Verlauf zweier LYAPUNOV-Funktionen, wobei die jeweilige Funktion immer dann aktiv ist, wenn auch das zugehörige Subsystem aktiv ist. Während das Subsystem 1 aktiv ist, ist die zugehörige LYAPUNOV-Funktion monoton fallend und zu den Zeitpunkten, bei denen ein Schalten auftritt, gilt dann  $V_{\sigma(t_{i-1})}(x(t_i)) = V_{\sigma(t_i)}(x(t_i))$ . Wenn sich eine monoton fallende multiple LYAPUNOV-Funktion ergibt, so ist das schaltende System asymptotisch stabil.

Demnach soll die Trajektorie für alle Schaltsequenzen in den Ursprung münden. Das bedeutet, dass das Produkt aller Matrizen gegen Null konvergiert. Es ergibt sich somit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{A}_{\sigma(k)} \cdot \mathbf{A}_{\sigma(k-1)} \cdot \dots \cdot \mathbf{A}_{\sigma(1)} = \mathbf{0}. \quad (2.28)$$

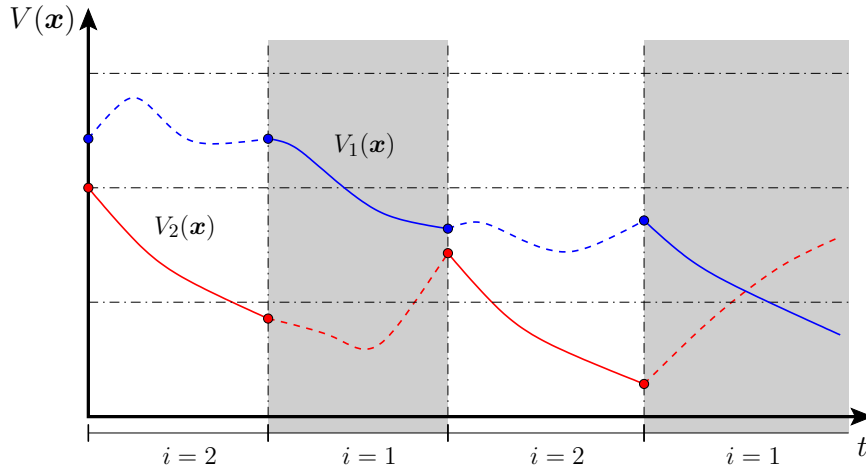
Ist der Spektralradius  $\rho(\mathcal{A})$  kleiner Eins, so ist das System nach Gleichung (2.23) gleichmäßig asymptotisch stabil. Tiefergehende Beschreibungen zum verallgemeinerten Spektralradius sind in [52] zu finden.

### 2.2.2. Stabilitätstheorie schaltender Systeme

In diesem Abschnitt sollen zwei wichtige Konzepte basierend auf der LYAPUNOV-Stabilitätstheorie dargelegt werden. Insbesondere die Problematik, dass asymptotische Stabilität der Einzelsysteme die Stabilität des schaltenden Systems nicht impliziert, wird erörtert. Die Erweiterungen (gemeinsame und *multiple* LYAPUNOV-Funktionen), die im Folgenden beschrieben werden, basieren auf der direkten Methode von LYAPUNOV. Der Grundgedanke hinter den gemeinsamen LYAPUNOV-Funktionen ist der, dass, wenn sich die Menge  $\mathcal{A}$  gerade eine quadratische LYAPUNOV-Funktion teilt, das schaltende System asymptotisch stabil ist, da entlang der Trajektorie des Systems die Energie abnimmt. Ausführliche Informationen sind in [45, 46] dargelegt.

**Satz 2.7 (Gemeinsame LYAPUNOV-Funktion: *kontinuierlich*)** Existiert eine symmetrische und positiv definite Matrix  $\mathbf{P}$  als Lösung von

$$\mathbf{A}_i^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_i < \mathbf{0} \quad \forall i \in \mathbb{N}, \quad (2.29)$$



**Abbildung 2.4.:** Verlauf zweier LYAPUNOV-Funktionen, wobei die jeweilige Funktion immer dann aktiv ist, wenn auch das zugehörige Subsystem aktiv ist. Während das Subsystem 1 aktiv ist, ist die zugehörige LYAPUNOV-Funktion monoton fallend, wobei für das inaktive System durchaus die zugehörige LYAPUNOV-Funktion steigen kann. Wenn die Anfangswerte für die jeweilige LYAPUNOV-Funktion immer kleiner werden, so ist das schaltende System asymptotisch stabil.

dann wird  $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$  als LYAPUNOV-Funktion des Systems nach Gleichung (2.23) oder als gemeinsame LYAPUNOV-Funktion der Subsysteme bezeichnet und das System ist somit quadratisch stabil.

**Satz 2.8 (Gemeinsame LYAPUNOV-Funktion: zeitdiskret)** Existiert eine symmetrische und positiv definite Matrix  $\mathbf{P}$  als Lösung von

$$\mathbf{A}_i^T \mathbf{P} \mathbf{A}_i - \mathbf{P} < \mathbf{0} \quad \forall i \in \mathbb{N}, \quad (2.30)$$

dann wird  $V(\mathbf{x}_k) = \mathbf{x}_k^T \mathbf{P} \mathbf{x}_k$  als LYAPUNOV-Funktion des Systems nach Gleichung (2.22) oder als gemeinsame LYAPUNOV-Funktion der Subsysteme bezeichnet und das System ist somit quadratisch stabil.

Existiert keine gemeinsame LYAPUNOV-Funktion oder ist sie unbekannt, so ist es möglich, für jeden Sektor im Zustandsraum eine eigene LYAPUNOV-Funktion zu bestimmen. Dabei sind dann die Stabilitätseigenschaften des Systems mit dem Schaltsignal verknüpft. Wenn also für jedes Subsystem eine LYAPUNOV-Funktion angegeben werden kann und die Werte der Funktion zu den Schaltzeiten gerade

$$V_{\sigma(t_{i-1})}(x(t_i)) = V_{\sigma(t_i)}(x(t_i)) \quad (2.31)$$

sind, so ergibt sich eine kontinuierliche LYAPUNOV-Funktion und das schaltende System ist somit asymptotisch stabil.

**Satz 2.9 (Multiple LYAPUNOV-Funktion)** Angenommen, zu jedem Paar von Schaltzeiten  $(t_k, t_l)$ ,  $k < l$  mit  $\sigma(t_k) = \sigma(t_l) = 0$  und  $\sigma(t_m) \neq i$  für  $t_k < t_m < t_l$  ergibt sich



$$V_i(\mathbf{x}(t_l)) - V_i(\mathbf{x}(t_k)) \leq W_p(\mathbf{x}(t_i)), \quad (2.32)$$

dann ist das schaltende System asymptotisch stabil.

In den Abbildungen 2.3 und 2.4 sind die zwei Ansätze zu den *multiple* LYAPUNOV-Funktionen dargelegt.

### 2.2.3. S-Methode

Im Allgemeinen ist es ausreichend, eine LYAPUNOV-Funktion für jedes Teilgebiet des Zustandsraums anzugeben, die sich ausschließlich auf das Gebiet bezieht. Es ist also nicht erforderlich, für jedes Gebiet eine globale LYAPUNOV-Funktion zu finden. Demnach muss jede LYAPUNOV-Funktion auf dem Gebiet fallend sein. Ein Verfahren, welches dieses berücksichtigt wird als *S-Methode* (*S-Procedure*) bezeichnet, welche im Folgenden kurz dargelegt werden soll. Tiefergehende Informationen sind in [45, 46, 51, 53] zu finden.

**Satz 2.10 (S-Lemma)** Seien  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  symmetrische Matrizen ( $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ), und es sei angenommen, dass die quadratische Ungleichung

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0 \quad (2.33)$$

für einen beliebigen Vektor  $\bar{\mathbf{x}}$  erfüllt ist. Die Implikation

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0 \Rightarrow \mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{x} \geq 0 \quad (2.34)$$

ist dann gültig, sofern es eine Zahl  $\sigma \in \mathbb{R}^+$  gibt, so dass

$$\mathbf{B} \succeq \sigma \mathbf{A} \quad (2.35)$$

gilt.

**Definition 2.8 (S-Methode und erweiterte S-Methode)** Es sei

$$q_i(X) = \sum_{j=1}^p \mathbf{x}_j^T \mathbf{Q}_i \mathbf{x}_j + 2\mathbf{b}_i^T \sum_{j=1}^p \mathbf{x}_j + c_i \quad (2.36)$$

mit  $\mathbf{Q}_i \in S_n^{\mathbb{R}}$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$ ,  $j = 1, 2, \dots, p$  und  $X = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_p)$ , mit

$$F := \{X \in M_{n,p}(\mathbb{R}) : q_i(X) \geq 0, i = 1, 2, \dots, m\}, \quad (2.37)$$

dabei wird  $q_i(\mathbf{x}_j)$  als quadratische Funktion bezeichnet.  $S_n^{\mathbb{R}}$  ist definiert als Menge aller reellen, symmetrischen  $n \times n$ -Matrizen, wobei jede Matrix  $\mathbf{A} \in S_n^{\mathbb{R}}$ ,  $\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$  ( $\mathbf{A} > \mathbf{0}$ ) positiv semidefinit (positiv definit) ist. Des Weiteren sei  $M_{n,p}(\mathbb{R})$  angegeben als der Raum von reellen  $n \times p$ -Matrizen. Im Folgenden sollen zwei Bedingungen betrachtet werden:

$$(S_1) \quad q_0(X) \geq 0 \forall X \in F$$

## 2. Theoretische Grundlagen

---

$$(S_2) \exists s \in \mathbb{R}_+^m : q_0(X) - \sum_{i=1}^m s_i q_i(X) \geq 0, \forall X \in M_{n,p}(\mathbb{R})$$

*Wird  $(S_1)$  durch  $(S_2)$  nachgewiesen und ist  $p = 1$ , so wird dieses Verfahren als  $S$ -Methode bezeichnet, ist  $p > 1$  so lautet das Verfahren erweiterte  $S$ -Methode.*

Dieses Verfahren lässt es auch zu, den Zustandsraum weiter zu unterteilen, um so für die neuen Subsysteme entsprechende LYAPUNOV-Funktionen zu entwickeln. Dabei verändert sich das vorgestellte Verfahren nicht, es sind nur mehr Regionen im Zustandsraum zu betrachten.

---

## Grundlagen digitaler Phasenregelkreise

---

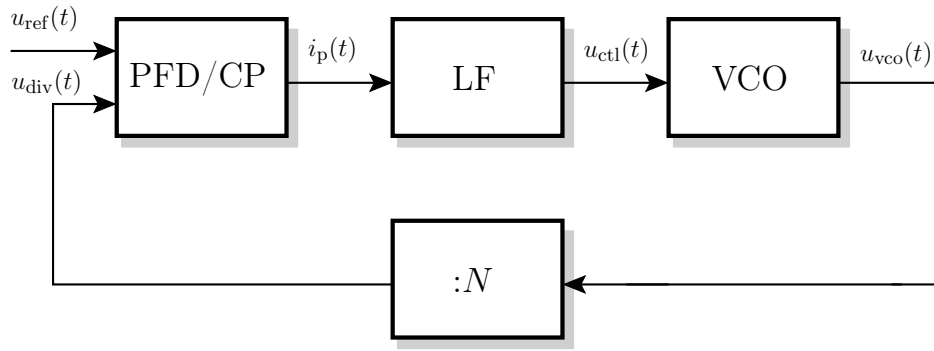
*In diesem Kapitel werden die wichtigsten Architekturen digitaler Phasenregelkreise sowie deren Funktionsweise erläutert. Dabei liegt der Fokus auf der Frequenzsynthese. Diesbezüglich werden die Grundlagen von Integer-N- und Fraktional-N-Synthesizern dargestellt. Im Abschluss des Kapitels wird der Begriff des Einrastens und Ausrastens genau definiert und das logische Verhalten des Phasen- und Frequenz-Detektors analysiert. Zudem werden Schaltungen entwickelt, die in der Frequenzsynthese, in Fast-Locking-Anwendungen und insbesondere für automatisierte Simulationen verwendet werden können.*

### 3.1. Grundlagen

Da eine Vielzahl von Phasenregelkreis-Architekturen existiert [2–6, 9–12, 28, 54–57], soll eine kurze Begriffsklärung sowie Kategorisierung erfolgen. Insbesondere sollen dabei die *Integer-N* und *Fraktional-N* Frequenzsynthesizer erläutert werden. Die einfachste Form eines Phasenregelkreises besteht aus drei Komponenten: Phasendetektor (PD = *Phase Detector*), Schleifenfilter (LF = *Loop Filter*) und spannungsgesteuertem Oszillator (VCO = *Voltage Controlled Oscillator*). In der Frequenzsynthese wird zusätzlich noch ein Teiler in die Schleife eingebracht, auf den im Folgenden jedoch aus Gründen der Einfachheit verzichtet werden soll. Der Phasendetektor vergleicht das Referenzsignal mit dem Ausgangssignal des spannungsgesteuerten Oszillators und liefert zum entsprechenden Phasenfehler ein proportionales Ausgangssignal in Form einer Spannung oder eines Stromes. Diese Spannung

### 3. Grundlagen digitaler Phasenregelkreise

---

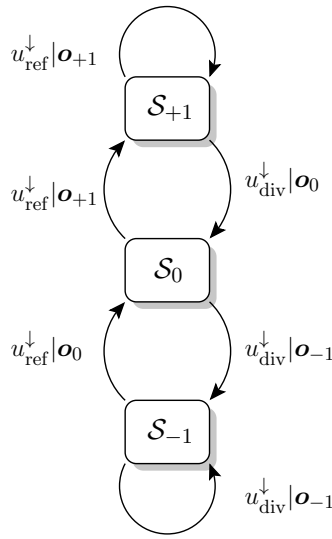


**Abbildung 3.1.:** Schematischer Aufbau eines Phasenregelkreises zur Frequenzsynthese bestehend aus einem Phasen- und Frequenz-Detektor mit Ladungspumpe (PFD/CP), einem Schleifenfilter (LF), einem spannungsgesteuerten Oszillator (VCO) und einem Teiler ( $N$ )

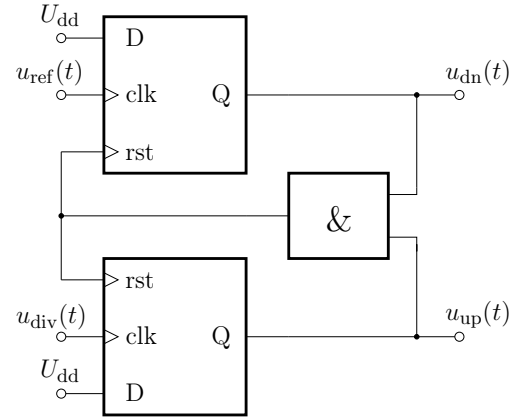
oder dieser Strom ist das Eingangssignal des Schleifenfilters, der das Signal in der Art ausfiltern soll, dass am Eingang des spannungsgesteuerten Oszillators im ausgeregelten Fall eine Gleichspannung anliegt. Je nach verwendetem Phasendetektor ergeben sich Nebentöne auf der Eingangsspannung des spannungsgesteuerten Oszillators. Die Größe am Eingang des spannungsgesteuerten Oszillators entspricht der Regelspannung. Durch diese Gleichspannung wird die Frequenz des spannungsgesteuerten Oszillators maßgeblich bestimmt. Die Phasenregelkreise lassen sich in analoge, digitale und vollständig digitale Architekturen einteilen. Im Allgemeinen wird von einem analogen Phasenregelkreis (*Analog Phase-Locked Loop*: APLL) gesprochen, sobald ein Multiplizierer als Phasendetektor angesetzt wird [2]. Dabei ist das Eingangs-/Referenzsignal sinusförmig und wird mit einem rechteck- oder sinusförmigen Signal multipliziert. In der Literatur wird häufig der Begriff *Linear Phase-Locked Loop* (LPLL) verwendet und dies direkt mit den APLL in Verbindung gebracht. Hierbei sind die analogen Phasenregelkreise jedoch keineswegs linear, denn durch die Multiplikation der Signale  $u_{\text{ref}}(t)$  und  $u_{\text{vco}}(t)$  ergibt sich insgesamt ein hochgradig nichtlineares Differenzialgleichungssystem. Aus diesem Grund ist das Akronym APLL sinnvoller. Ein digitaler Regelkreis liegt genau dann vor, wenn ein digitaler Phasendetektor verwendet wird, wobei das Filter oder der spannungsgesteuerte Oszillator durchaus analoge und/oder digitale Bauelemente sein können. Obgleich der Regelkreis in diesem Fall sich als gemischt Analog-Digital-System darstellt, soll es hier als *Digital Phase-Locked Loop* (DPLL) bezeichnet werden, was auch der gängigen Begrifflichkeit entspricht [2]. Sind alle Komponenten des Regelkreises digital realisiert, wird von einem vollständig digitalen Phasenregelkreis (*All Digital Phase-Locked Loop*: ADPLL) gesprochen. In dieser Arbeit werden ausschließlich DPLL betrachtet.

#### 3.1.1. Integer- $N$ Phasenregelkreise

Die Frequenzsynthese stellt ein großes Anwendungsgebiet für die Phasenregelkreise dar [2, 5, 6, 13, 19, 37, 55, 58]. In Abbildung 3.1 ist die Architektur eines Integer- $N$  Frequenzsynthesizers angegeben. Im Folgenden sollen kurz die grundlegenden Modelle und Arbeits-



(a) Endlicher Automat des PFD

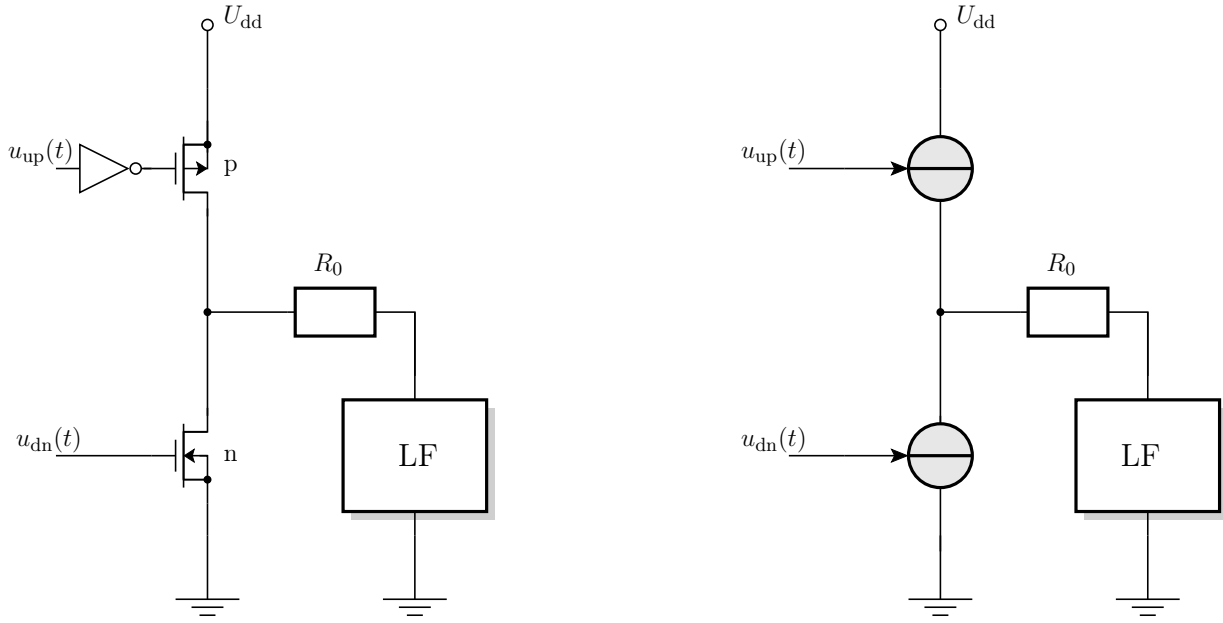


(b) PFD in einfacher Flipflop-Schaltung bestehend aus zwei D-Flipflops und einem Und-Gatter

**Abbildung 3.2.:** Schematischer Aufbau des Phasen- und Frequenz-Detektors mittels einer Flipflop-Schaltung und zugehörigem Zustandsautomaten

weisen der einzelnen Funktionsblöcke erläutert werden. Bei den DPLL sowie auch bei den ADPLL gibt es verschiedene Möglichkeiten für die Realisierung des Phasendetektors. Prinzipiell hat sich der sogenannte Phasen- und Frequenz-Detektor (PFD oder auch *Tri-State-PFD*) durchgesetzt. Obgleich andere Varianten von Phasendetektoren (XOR-PD, JK-Flipflop-PD, *5-State-PFD*, etc.) auch genutzt werden, soll sich die Betrachtung an dieser Stelle auf den PFD nach Abbildung 3.2 beschränken. Ein Grund für die Verwendung des PFD liegt in der Eigenschaft, dass, wenn die Schleife als vollständig idealisiert angenommen wird, der Bereich, in dem der Regelkreis einrasten kann, unendlich groß ist [2, 58]. Insbesondere in Verbindung mit einer *Charge-Pump* (Ladungspumpe) ist diese Architektur wohl die weitverbreitetste. Ausführliche Beschreibungen der gängigen Phasendetektoren sind in [2, 8, 58, 59] zu finden und sollen an dieser Stelle ausgespart werden. Der PFD ist ein digitales, flankengesteuertes Bauelement mit sequenzieller Logik. Der Zustandsautomat sowie eine Repräsentation durch logische Gatter sind in Abbildung 3.2 dargestellt. Der endliche Automat des PFD nach Abbildung 3.2(a) werde durch das 6-Tupel  $\mathcal{Z}_{\text{PFD}} = (\mathcal{I}, \mathcal{O}, \mathcal{S}, \mathcal{S}_i, \eta, \gamma)$  beschrieben mit der Eingabemenge  $\mathcal{I} = (u_{\text{ref}}^{\downarrow}, u_{\text{div}}^{\downarrow})$ , wobei der hochgestellte nach unten zeigende Pfeil darauf hinweist, dass es sich um fallende Flanken handelt. Zwar gibt es auch Architekturen, bei denen die Eingabemenge durch steigende Flanken definiert wird, jedoch soll im Folgenden ausschließlich der Fall der fallenden Flanken berücksichtigt werden. Des Weiteren ergibt sich die Ausgabemenge  $\mathcal{O} = (\mathbf{o}_{-1}, \mathbf{o}_0, \mathbf{o}_{+1})$  mit  $\mathbf{o}_{+1} = [u_{\text{L}}, u_{\text{H}}]$ ,  $\mathbf{o}_0 = [u_{\text{L}}, u_{\text{L}}]$  und  $\mathbf{o}_{-1} = [u_{\text{H}}, u_{\text{L}}]$ , die Zustandsmenge  $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_{-1}, \mathcal{S}_0, \mathcal{S}_{+1})$  und dem Anfangszustand  $\mathcal{S}_i \in \mathcal{S}$ , der Funktion  $\gamma : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{S}$  zur

### 3. Grundlagen digitaler Phasenregelkreise



(a) Ladungspumpe mit Spannungsquellen und zusätzlichem Widerstand  $R_0$

(b) Ladungspumpe mit Stromquellen

**Abbildung 3.3.:** Schematischer Aufbau der Ladungspumpe mit Schleifenfilter

Berechnung des nächsten Zustandes mit

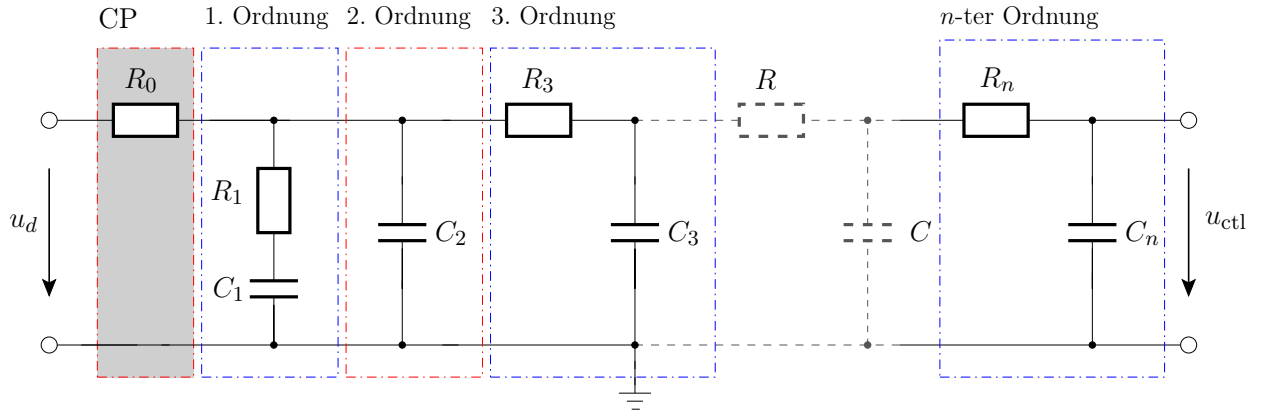
$$\gamma : \begin{cases} \mathcal{S}_{-1} \rightarrow \mathcal{S}_{-1} & , \text{ wenn } u_{\text{div}}^{\downarrow} \\ \mathcal{S}_{-1} \rightarrow \mathcal{S}_0 & , \text{ wenn } u_{\text{ref}}^{\downarrow} \\ \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{S}_{-1} & , \text{ wenn } u_{\text{div}}^{\downarrow} \\ \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{S}_{+1} & , \text{ wenn } u_{\text{ref}}^{\downarrow} \\ \mathcal{S}_{+1} \rightarrow \mathcal{S}_0 & , \text{ wenn } u_{\text{div}}^{\downarrow} \\ \mathcal{S}_{+1} \rightarrow \mathcal{S}_{+1} & , \text{ wenn } u_{\text{ref}}^{\downarrow} \end{cases} . \quad (3.1)$$

Wenn der endliche Automat sich im Zustand  $\mathcal{S}_i = \mathcal{S}_0$  befindet und eine fallende Flanke  $u_{\text{ref}}^{\downarrow}$  auftritt, so wechselt der Zustand von  $\mathcal{S}_0$  zu  $\mathcal{S}_{+1}$ . Die Ausgabefunktion  $\eta : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{O}$  lässt sich in diesem Fall kompakter durch  $\eta : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{O}$  darstellen und kann somit durch

$$\eta = \begin{cases} \mathbf{o}_{-1} & , \text{ wenn } \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{S}_{-1} \vee \mathcal{S}_{-1} \rightarrow \mathcal{S}_{-1} \\ \mathbf{o}_0 & , \text{ wenn } \mathcal{S}_{+1} \rightarrow \mathcal{S}_0 \vee \mathcal{S}_{-1} \rightarrow \mathcal{S}_0 \\ \mathbf{o}_{+1} & , \text{ wenn } \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{S}_{+1} \vee \mathcal{S}_{+1} \rightarrow \mathcal{S}_{+1} \end{cases} \quad (3.2)$$

angegeben werden. Offensichtlich werden in diesem Modell die Gatterlaufzeiten, die insbesondere durch den Rückkopplungszweig im PFD (siehe Abbildung 3.2(b)) wichtig werden sowie die endlichen Flankensteilheiten vernachlässigt.

Im Allgemeinen wird dem PFD eine *Charge-Pump* nachgeschaltet. Dabei wird der Regelkreis dann als *Charge-Pump Phase-Locked Loop* (CP-PLL) bezeichnet. Auf die einzelnen



**Abbildung 3.4.:** Schematische Darstellung eines passiven PLL-Schleifenfilters  $n$ -ter Ordnung, wobei der Widerstand  $R_0$  weggelassen wird, sobald eine Charge-Pump mit Stromquellen verwendet wird.

Architekturen der Ladungspumpen soll im Folgenden nicht genauer eingegangen werden. Ausführliche Betrachtungen der *Charge-Pump* für PLL-Systeme sind in [13, 37] zu finden. Es lassen sich generell zwei Klassen angeben: die Ladungspumpe mittels Spannungsquelle (siehe Abbildung 3.3(a)) und mit Hilfe von Stromquellen (siehe Abbildung 3.3(b)). Die Ladungspumpe mit einer Spannungsquelle stellt bei kostengünstigen Anwendungen eine einfache Lösung dar. In der Regel werden als Schalter MOS-Transistoren verwendet. Dabei wird der UP-Zweig durch einen p-Kanal-Transistor geschaltet, wodurch das Signal  $u_{up}$  invertiert werden muss. Bei dem DN-Zweig wird dann ein n-Kanal-Transistor verwendet. Der PFD steuert dabei zwei Schalter, die mit der Versorgungsspannung und Masse verbunden sind. Im Falle, dass der PFD im Zustand  $\mathcal{S}_0$  ist, liefert die Ladungspumpe keine Ausgangsspannung und das Potenzial am Eingang des VCO entspricht dem der Kapazität des Filters, wenn ein Filter erster Ordnung verwendet wurde. Wenn Filter höherer Ordnung verwendet werden, ergeben sich Ausgleichsströme, wodurch das Filterausgangssignal im Zustand  $\mathcal{S}_0$  nicht mehr konstant ist. Bei der *Charge-Pump* mit Stromquellen werden bezogen auf das digitale Signal des PFD ein Strom in das Schleifenfilter eingeprägt. In Abbildung 3.3(b) ist dieser Sachverhalt durch spannungsgesteuerte Stromquellen dargestellt. Dabei liefern die Stromquellen entsprechend der logischen Zustände der Signale  $u_{up}(t)$  und  $u_{dn}(t)$  einen Strom  $i_p(t)$ , wobei der *Charge-Pump*-Strom  $i_p(t)$  nur die Werte  $-I_p$ ,  $0\text{ A}$  oder  $+I_p$  annehmen kann. D. h. die Ausgabe  $\mathbf{o}_{-1}$  des eingeführten PFD nach Abbildung 3.2(a) entspricht einem Strom  $i_p = -I_p$ ,  $\mathbf{o}_0$  ergibt einen Strom  $i_p = 0\text{ A}$  und die Ausgabe  $\mathbf{o}_{-1}$  liefert einen Strom  $i_p = +I_p$ . Damit ist die Information des Phasenfehlers in den Pulsbreiten des Stromes  $i_p$  oder im Falle einer CP-PLL mit Spannungsquelle in den Pulsbreiten der Spannung  $u_p$  kodiert. Im Allgemeinen kann nahezu jedes Filter verwendet werden, wobei auf die Struktur der Ladungspumpe zu achten ist. Ist im Entwurf eine bestimmte Schleifenverstärkung vorgesehen, oder muss auf Grund der verwendeten IC-Komponenten die gefilterte Regelspannung verstärkt werden, kann ein aktives Filter eingesetzt werden. Es sei auf [13, 37, 55, 58] verwiesen. In dieser Arbeit werde die Filtertopologie nach Abbildung 3.4 verwendet. Es handelt sich um ein passives Filter  $n$ -ter Ordnung. Dabei entspricht der

### 3. Grundlagen digitaler Phasenregelkreise

---

Widerstand  $R_0$  genau dem in Abbildung 3.3(a), der ausgespart wird, sobald eine Ladungspumpe mit Stromquellen verwendet wird.

Der spannungsgesteuerte Oszillator ist ein nichtlineares Bauelement der Elektrotechnik mit einer großen Anzahl an Realisierungen [60–62]. Für diese Arbeit soll dabei der Oszillator als systemtheoretisches Modell eingeführt werden. Allgemein lässt sich der spannungsgesteuerte Oszillator durch die Phasengleichung

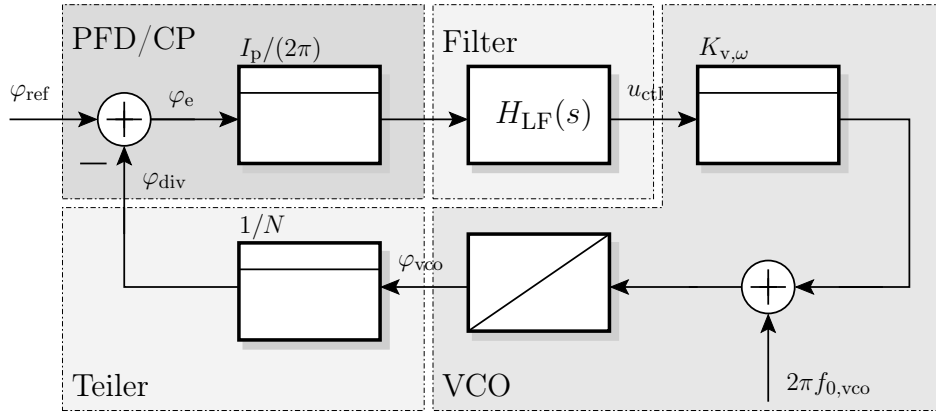
$$\varphi_{\text{vco}}(t + \tau) = \varphi_{\text{vco}}(t) + 2\pi \int_t^{t+\tau} f(u_{\text{ctl}}(t')) dt' \quad (3.3)$$

definieren, wobei  $f(\cdot)$  eine nichtlineare Charakteristik aufweist und von der Eingangsgröße  $u_{\text{ctl}}(t)$  abhängt. Der spannungsgesteuerte Oszillator liefert bezüglich der Regelspannung  $u_{\text{ctl}}(t)$  und unter dem Einfluss der nichtlinearen Kennlinie  $f(\cdot)$  ein proportionales Phasensignal  $\varphi_{\text{vco}}(t)$ . Ist das Ausgangssignal des spannungsgesteuerten Oszillators sinusförmig, ergibt sich  $u_{\text{vco}}(t + \tau) = \sin(\varphi_{\text{vco}}(t + \tau))$ , wobei ein Tastverhältnis von 50% anzusetzen ist. Der Teiler ist nichts anderes als ein digitaler Zähler, der die fallenden bzw. steigenden Flanken des VCO-Signals  $u_{\text{vco}}(t)$  zählt und bei Erreichen des Wertes  $N \in \mathbb{N}$  die entsprechende Flanke des VCO-Signals  $u_{\text{vco}}(t)$  an den Eingang des PFD weiterleitet.

Durch die Wahl des Teilungsbeiwertes  $N$  stellt sich eine konstante Frequenz und Phase am Ausgang des VCO ein, sobald die Signale  $u_{\text{ref}}(t)$  und  $u_{\text{div}}(t)$  absolut phasensynchron sind. Die VCO-Frequenz kann dann durch  $f_{\text{vco}} = N \cdot f_{\text{ref}}$  angegeben werden. Offensichtlich kann, wenn  $N \in \mathbb{N}$ , die Ausgangsfrequenz des VCO nur in  $f_{\text{ref}}$ -Schritten verstellt werden. Dementsprechend ist für eine hohe Frequenzauflösung innerhalb eines vorgegebenen Intervalls (auch *Channel Spacing* genannt) eine niedrige Referenzfrequenz erforderlich. Dies hat zur Folge, dass das Filter mit fallender Referenzfrequenz immer schmalbandiger werden muss. Die Konsequenz ist im Allgemeinen eine längere Einschwingzeit und somit ergeben sich direkt Probleme, wenn schnelle Frequenzwechsel von Nöten sind oder eine vorgegebene Bandbreite einzuhalten ist. Hinzukommend können die vom VCO verursachten Rauschanteile nicht mehr so gut ausgefiltert werden, wodurch sich die Frequenzreinheit ebenfalls verschlechtert. Auch können durch den Phasendetektor Nebentöne um die VCO-Ausgangsfrequenz entstehen, die ausgefiltert werden müssen. Diese Probleme führen zum Einsatz von Filtern höherer Ordnung und zu den Fraktional- $N$  Phasenregelkreisen. Bevor diese jedoch dargelegt werden, soll aus den vorgestellten Einzelblöcken das lineare kontinuierliche Modell angegeben werden. Es ist dazu erforderlich, dass der PFD linearisiert wird.

Wird das Tastverhältnis des Stromes  $i_p(t)$  oder der Signale  $u_{\text{up}}(t)$  und  $u_{\text{dn}}(t)$  betrachtet, lässt sich zeigen, dass für einen idealen Phasen- und Frequenz-Detektor im Mittel und für einen Phasenfehler  $|\varphi_e(t)| < 2\pi$  der Phasensignale  $\varphi_{\text{ref}}(t)$  und  $\varphi_{\text{div}}(t)$  der PFD lineares Verhalten aufweist. Genauere Beschreibungen dieses Sachverhaltes sind in [2, 58] zu finden. Demnach stellt der PFD eine Subtraktionsstelle der Phasensignale  $\varphi_{\text{ref}}(t)$  und  $\varphi_{\text{div}}(t)$  dar und die *Charge-Pump* kann als Proportionalglied modelliert werden. Wird die Kennlinie des VCO durch  $f(u_{\text{ctl}}(t)) = K_v u_{\text{ctl}}(t) + f_{0,\text{vco}}$  angegeben, ergibt sich ein linearer Zusammenhang zwischen der Regelspannung  $u_{\text{ctl}}(t)$  und der Ausgangsfrequenz  $f_{\text{vco}}$





**Abbildung 3.5.:** Schematischer Aufbau eines linearisierten Phasenregelkreises zur Frequenzsynthese: Der PFD mit Ladungspumpe ist durch eine Subtraktionsstelle mit Proportionalglied dargestellt. Das Filter wird durch eine Übertragungsfunktion  $H_{LF}(s)$  definiert. Der spannungsgesteuerte Oszillator kann durch ein Proportionalglied, eine Additionsstelle für die Ruhefrequenz  $f_{0,vco}$  und einem Integrator modelliert werden. Der Teiler stellt sich als Porportionalglied dar.

des spannungsgesteuerten Oszillators. Der Teiler kann an dieser Stelle auch als Proportionalglied modelliert werden. In Abbildung 3.5 ist das Blockschaltbild eines linearisierten Modells einer CP-PLL dargestellt. Demnach kann die Phasenübertragungsfunktion

$$H(s) = \frac{\Phi_{div}(s)}{\Phi_{ref}(s)} = \frac{KH_{LF}(s) + \frac{\omega_{0,vco}}{N}}{\frac{\omega_{0,vco}}{N} + s + KH_{LF}(s)} \quad (3.4)$$

mit  $\omega_{0,vco} = 2\pi f_{0,vco}$  angegeben werden. Wird die Ruhefrequenz des Oszillators  $f_{0,vco}$  zu Null gesetzt, lassen sich die in der Literatur [2,13] zu findende Phasenübertragungsfunktion

$$H(s) = \frac{\Phi_{div}(s)}{\Phi_{ref}(s)} = \frac{KH_{LF}(s)}{s + KH_{LF}(s)} \quad (3.5a)$$

und die Fehlerübertragungsfunktion

$$H_e(s) = \frac{\Phi_e(s)}{\Phi_{ref}(s)} = 1 - H(s) = \frac{s}{s + KH_{LF}(s)} \quad (3.5b)$$

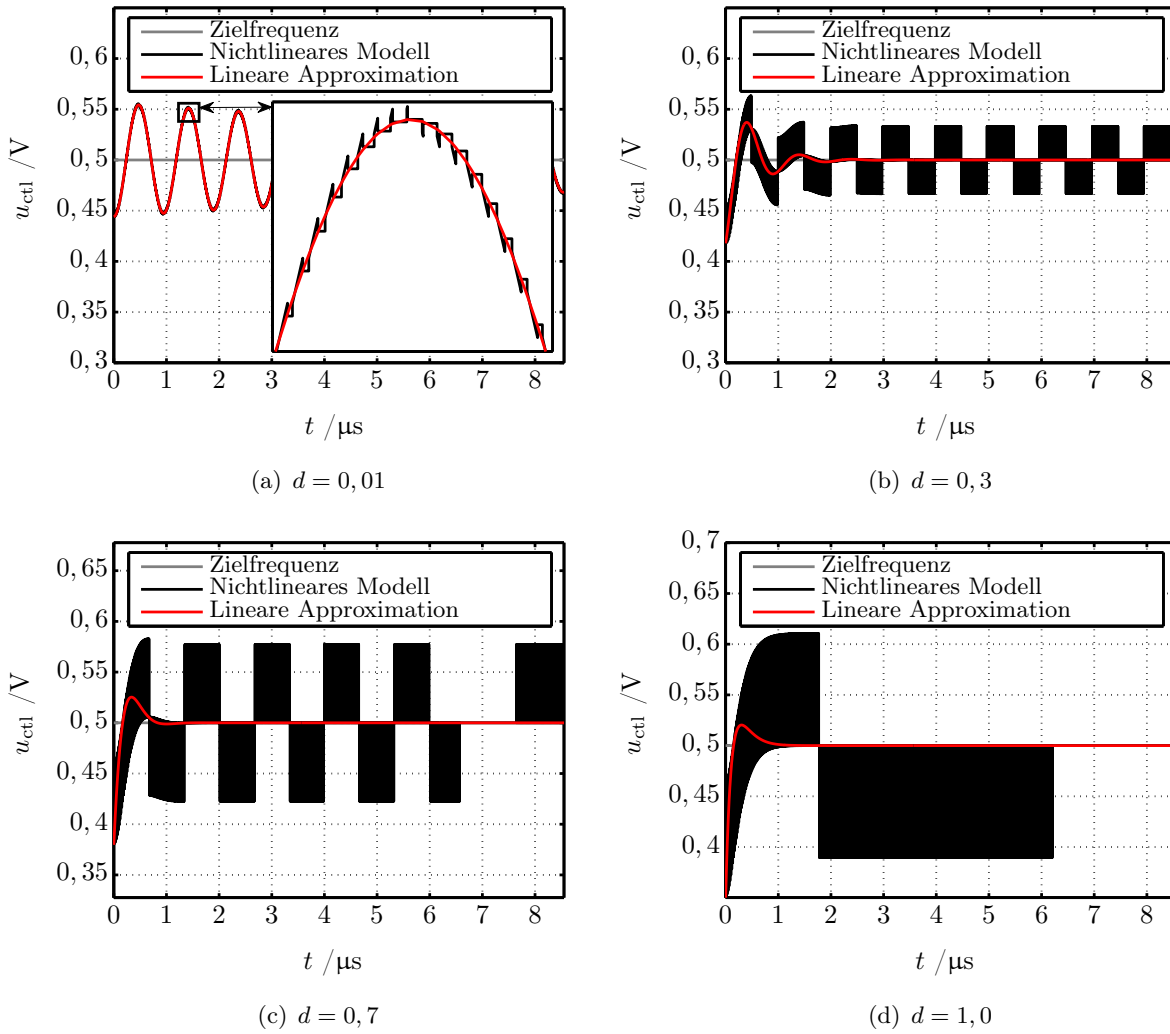
angeben, wobei  $K = I_p K_{v,\omega} / (2\pi N)$  ist und  $H_{LF}$  die Übertragungsfunktion des Schleifenfilters darstellt. Wird das Filter erster Ordnung nach Abbildung 3.4 und die *Charge-Pump* nach Abbildung 3.3(b) verwendet, so ergibt sich die Phasenübertragungsfunktion zu

$$H(s) = \frac{2d\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2d\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3.6a)$$

und die Fehlerübertragungsfunktion zu

$$H_e = \frac{s^2}{s^2 + 2d\omega_n s + \omega_n^2}, \quad (3.6b)$$

### 3. Grundlagen digitaler Phasenregelkreise



**Abbildung 3.6.:** Vergleich der linearen kontinuierlichen Approximation einer CP-PLL zweiter Ordnung mit einer nichtlinearen CP-PLL. Modell mit linearem VCO, idealem PFD und einer idealen Ladungspumpe. In den Abbildungen (a) bis (d) sind diese Modelle mit unterschiedlichen Dämpfungsbeiwerten  $d$  gegenübergestellt.

wobei

$$\tau_1 = R_1 C_1 \quad , \quad \omega_n = \sqrt{\frac{K_{v,\omega} I_p}{2\pi C_1 N}} \quad , \quad \text{und} \quad d = \frac{\tau_1}{2} \sqrt{\frac{K_{v,\omega} I_p}{2\pi C_1 N}}$$

sind. Aus Gründen der Übersichtlichkeit seien die Regelkreise höherer Ordnung nicht weiter betrachtet. Tiefergehende Untersuchungen zur Analyse und zum Entwurf sind in [2,17,20,58,63–68] dargelegt. In den Abbildungen 3.6(a) bis 3.6(d) ist ersichtlich, dass die Approximation im Vergleich zu einer idealen, jedoch nichtlinearen PLL für größere Dämpfungsbeiwerte  $d$  auch zunehmend ungenauer im dynamischen Verhalten wird. Generell stellt das linearisierte Modell das durchschnittliche Verhalten des Regelkreises dar. Dies ist darin begründet, dass das schaltende Verhalten des Phasen- und Frequenz-Detektors einen

wichtigen Beitrag zur Dynamik liefert. An dieser Stelle sei erwähnt, dass das Abtastverhalten auch hinsichtlich der Stabilität einen nicht zu vernachlässigenden Einfluss hat [13, 16], worauf in Kapitel 3.1.3, 4 und 5 genauer eingegangen wird. In der Regel werden bei der Verwendung der linearen, kontinuierlichen Approximation sogenannte „Daumenregeln“ (*rules of thumb* [18]) verwendet. Eine dieser Regeln besagt, dass die Kreisfrequenz des Referenzsignals  $\omega_{\text{ref}}$  im Vergleich zur Eigenkreisfrequenz  $\omega_n$  des Regelkreises hinreichend klein sein muss [13, 16, 18]. Über die Rauschbandbreite  $B$  lässt sich eine ähnliche Regel formulieren. Vorab seien jedoch grundlegende Betrachtungen zur Definition der Rauschbandbreite kurz erläutert. Im Folgenden soll der Rauschprozess  $n(t)$  als stationär angenommen werden. Des Weiteren sei der zeitliche Mittelwert von  $n(t)$  gerade gleich Null. Die spektrale Leistungsdichte ist durch die FOURIER-Transformierte der Autokorrelationsfunktion gegeben. Es gilt somit

$$\mathcal{L}_n(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2T} \int_{+T}^{-T} n^*(t) n(t + \tau) dt \right\} e^{j\omega\tau} d\tau. \quad (3.7)$$

$\mathcal{L}_n(\omega)$  ist eine gerade Funktion und kann somit durch eine einseitige Dichte beschrieben werden. Da ein Phasenregelkreis nichts anderes ist als ein Filter mit der Übertragungsfunktion  $H(j\omega)$ , ergibt sich für die einseitige spektrale Leistungsdichte am Ausgang der Zusammenhang

$$\mathcal{L}_o(\omega) = |H(j\omega)|^2 \mathcal{L}_i(\omega) \quad (3.8)$$

mit der einseitigen spektralen Leistungsdichte  $\mathcal{L}_i(\omega)$  am Eingang des Regelkreises. Die Varianz am Ausgang wird dann durch

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty |H(j\omega)|^2 \mathcal{L}_i(\omega) d\omega \quad (3.9)$$

beschrieben. Wird weißes Rauschen  $\mathcal{L}_i(\omega) = N_0$  angesetzt, so ist

$$\sigma^2 = \frac{N_0}{2\pi} \int_0^\infty |H(j\omega)|^2 d\omega. \quad (3.10)$$

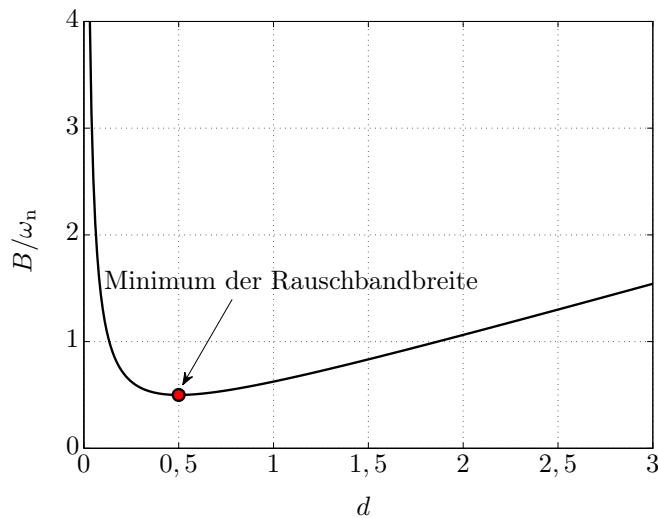
Dabei wird

$$B = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty |H(j\omega)|^2 d\omega \quad (3.11)$$

als Rauschbandbreite definiert und ist ein Maß für die Störfreiung. Wird ein CP-PLL zweiter Ordnung betrachtet, kann die Regel

$$B = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty |H(j\omega)|^2 d\omega = \frac{\omega_n}{2} \left( d + \frac{1}{4d} \right) < \frac{\omega_{\text{ref}}}{\alpha} \quad (3.12)$$

definiert werden, wobei  $\alpha$  im Allgemeinen zwischen Fünf und Zehn liegt, d. h. die Rauschbandbreite  $B$  des Systems soll kleiner ein Fünftel (ein Zehntel) der Referenzkreisfrequenz

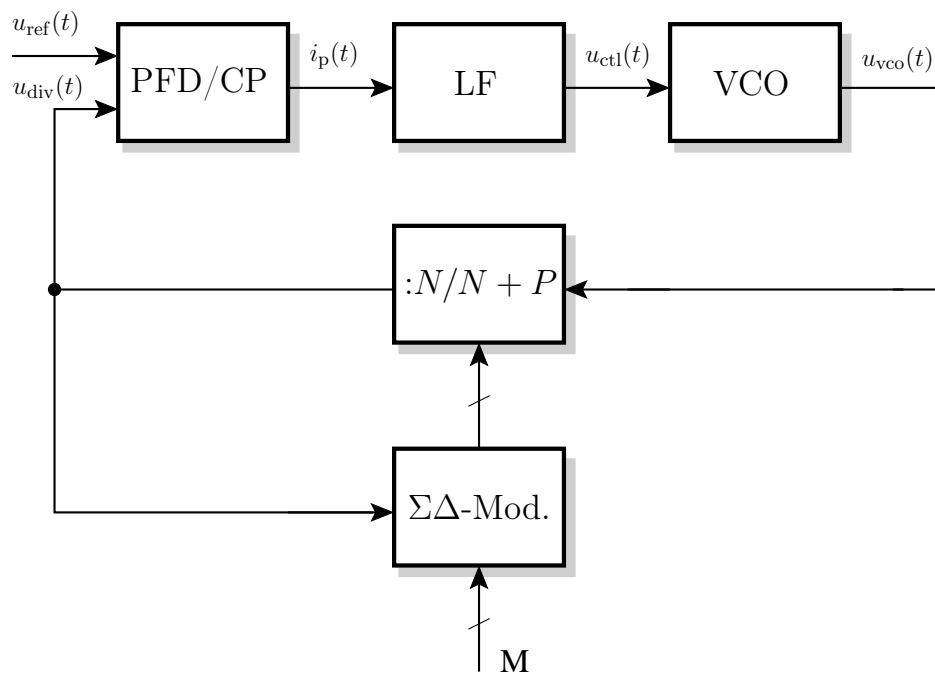


**Abbildung 3.7.:** Rauschbandbreite für einen Regelkreis 2. Ordnung mit einem Minimum bei  $d = 0,5$

sein. Abbildung 3.7 zeigt die Rauschbandbreite eines Regelkreises 2. Ordnung, normiert durch  $\omega_n$ , aufgetragen über der Dämpfung  $d$ . Es zeigt sich, dass sich für  $d = 0,5$  ein Minimum in der Rauschbandbreite  $B = \omega_n/2$  ergibt. Die Dämpfung  $d$  wird in der Regel zu 0,7 gewählt, da dieser Wert hinsichtlich des Einschwingens und Überschwingens einen sehr guten Kompromiss liefert und bezüglich der Rauschbandbreite noch sehr nahe am Minimum liegt. Da meist die Referenzfrequenz anfangs definiert wird und je nach Anwendung die Dämpfung sich gemäß der Rauschbandbreite ergibt, so kann durch Festlegen von  $\omega_n$  und  $d$  ein entsprechender Entwurf für die PLL-Parameter angegeben werden. Ähnliche Annahmen wurden auf Regelkreise höherer Ordnung erweitert. Beispielsweise soll bei Verwendung des Filters zweiter Ordnung der Wert von  $C_2$  ein Zehntel des Wertes von  $C_1$  besitzen, wodurch zusätzlich eine Phasenreserve von  $40^\circ$  bis  $45^\circ$  erzielt wird [18].

#### 3.1.2. Fraktional- $N$ Phasenregelkreise

Die angesprochenen Nachteile der Integer- $N$  Frequenzsynthesizer (wie große Teilerwerte, d. h. Verschlechterung des Phasenrauschens der PLL und hohe Kosten, eingeschränkte Frequenzauflösung, die gerade gleich der Eingangsfrequenz ist, die Verknüpfung der Bandbreite mit der Ausregelzeit sowie die Problematik, dass bei schmalbandiger Auslegung des Regelkreises das Phasenrauschen des VCO nicht ausreichend ausgefiltert werden kann) ergeben hinsichtlich schmalbandiger Anwendungen, wie GSM oder Bluetooth Probleme, wodurch sich bestimmte Spezifikationen nicht einhalten lassen. Anders ausgedrückt, wird die Schleifenbandbreite niedrig gewählt, damit die Oberwellen des Referenztaktes ausgefiltert werden können, so wird die Zeit, die der Regelkreis zum Einschwingen benötigt, vergrößert. Insgesamt ist es wünschenswert, beliebige rationale Teilerwerte einzustellen, damit auch beliebige rationale Frequenzen am Ausgang des Regelkreises synthetisiert werden können.

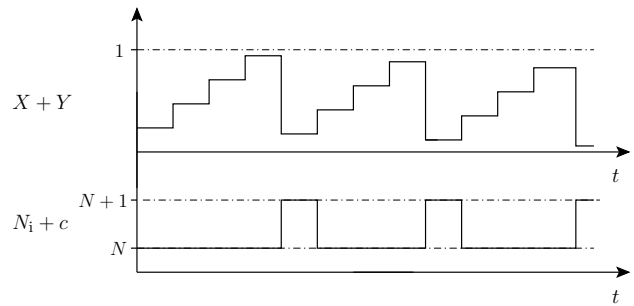
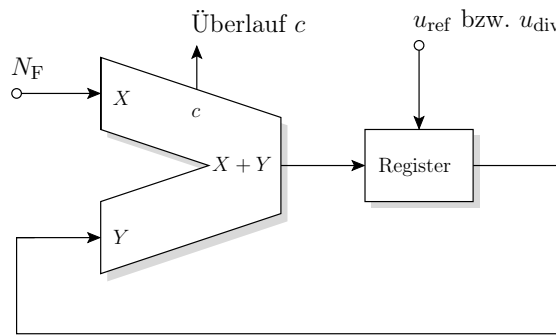


**Abbildung 3.8.:** Schematischer Aufbau eines  $\Sigma\Delta$ -Phasenregelkreises zur Frequenzsynthese

Das grundlegende Konzept eines Fraktional- $N$  Phasenregelkreises zur Frequenzsynthese ist recht einfach. Damit ein mehr oder weniger beliebiges Teilungsverhältnis zwischen der Frequenz der Referenzspannung  $u_{\text{ref}}(t)$  und der des VCO-Signals  $u_{\text{vco}}(t)$  eingestellt werden kann, wird der Teilungswert  $N$  zwischen zwei ganzzahligen Werten moduliert, so dass sich im Mittel das gewünschte Teilverhältnis und somit die gewünschte Ausgangsfrequenz einstellt. In vielen Architekturen werden mehr als zwei Werte des Teilungswertes verwendet, wobei das Prinzip jedoch erhalten bleibt. Generell liegt die Problematik darin, dass eine geeignete Sequenz zum Schalten des Teilers gefunden werden muss und die damit verbundenen Unreinheiten des Frequenzspektrums am Ausgang des Regelkreises unterdrückt werden müssen. Diese Unreinheiten, oder auch *Fractional Spurs* (niederfrequent) werden durch die Schaltsequenzen des Teilers (Dual-Modulo- oder Multimodulo-Teiler) hervorgerufen und können innerhalb der Schleifenbandbreite liegen, wodurch sich verschiedene Konzepte der Störtonunterdrückung ergeben haben, da ansonsten dieses Konzept wiederum Vorgaben an die Frequenzreinheit nicht erfüllen würde. Insbesondere können die folgenden Verfahren hervorgehoben werden [1, 8, 13, 37, 55, 69]:

- (1) Phasenschätzung mit einem Digital-Analog-Umsetzer
- (2) Erzeugung von Zufallszahlen
- (3) Phaseninterpolation
- (4) Erzeugung von Pulsen
- (5) Ausblenden von Pulsen

### 3. Grundlagen digitaler Phasenregelkreise



(a) Einfache Darstellung zur Erzeugung der Schaltsequenzen mit Hilfe einer ALU und eines Registers.  $N_F$  ist der fraktionale Teil des gewünschten Teilungswertes und das Register wird entweder durch  $u_{\text{ref}}(t)$  oder  $u_{\text{div}}(t)$  getaktet.

(b) Modulation des Teilungswertes

**Abbildung 3.9.:** Schematische Darstellung der Schaltung zur Erzeugung der Teilersequenzen (a) sowie die zeitlichen Verläufe der Signale  $X+Y$  und  $N_i + c$  (b)

#### (6) $\Sigma\Delta$ -Rauschformung

An dieser Stelle soll ausschließlich das Verfahren mittels der  $\Sigma\Delta$ -Rauschformung betrachtet werden. Die Prinzipschaltung einer  $\Sigma\Delta$ -Fraktional- $N$  PLL ist in Abbildung 3.8 dargestellt. Ausführliche Beschreibungen zu den einzelnen Verfahren und zu Fraktional- $N$  Phasenregelkreisen sind in [13, 37, 55, 70–72] dargelegt. Grundlegend für die folgende Betrachtung ist Abbildung 3.9. Damit beliebige fraktionale Teilverhältnisse erzeugt werden können, wird der erwünschte Teilungswert in einen ganzzahligen Anteil  $N_I$  und in einen fraktionalen Teil  $N_F$  zerlegt. Der fraktionale Teil  $N_F$  ist ein Eingangssignal ( $X = N_F$ ) einer ALU (*Arithmetic Logic Unit*) mit einem maximalen Wert 1, wobei die Summe der Signale in ein Register geschrieben wird, welches durch das Referenz- oder das Rückkopplungssignal getaktet ist. Der Ausgang des Registers wird auf den Eingang  $Y$  der ALU zurückgekoppelt. Dadurch liefert der *Carry*-Ausgang bei einem Überlauf gerade eine Teilerwertänderung. Dieses Prinzip entspricht gerade dem eines  $\Sigma\Delta$ -Modulators. Die Motivation für die Verwendung von  $\Sigma\Delta$ -Modulatoren liegt in deren Eigenschaft, die spektrale Leistungsdichte bei niedrigen Frequenzen zu vermindern und bei hohen Frequenzen zu erhöhen. Dieser Vorgang wird als Rauschformung oder *Noise Shaping* bezeichnet. Allgemein kann gesagt werden, dass, je größer die Ordnung des  $\Sigma\Delta$ -Modulators ist, desto besser ist die Rauschformung, wobei dann insbesondere die Stabilität des  $\Sigma\Delta$ -Modulators überprüft werden muss [13, 55]. Ausnahmen stellen dabei die MASH-Architekturen (*M*ultiple *s*tAge *N*oise *S*Haping) dar, bei denen die Stabilität immer gewährleistet ist [13, 37, 55, 69].

#### 3.1.3. Nichtlinearitäten in digitalen Phasenregelkreisen

Im Folgenden werden die inhärenten Nichtlinearitäten einer CP-PLL dargelegt. Es lassen sich dabei die durch die *Mixed-Signal*-Architektur gegebenen Nichtidealitäten/Nichtlinearitäten (das Schalten des Stromes sowie des Teilers, die nichtlineare Kenn-

linie des spannungsgesteuerten Oszillators und die von der *Charge-Pump* und dem PFD verursachten Nichtidealitäten) unterscheiden. Diese Betrachtungen werden insbesondere im Kapitel 5 aufgenommen und in ein erweitertes Konzept zur Simulation und Analyse eingearbeitet, um dann genauere Untersuchungen der einzelnen Nichtlinearitäten bezüglich des dynamischen Verhaltens sowie deren Beiträge zur Verschlechterung der Frequenzreinheit anzugeben.

### Schaltende Parameter

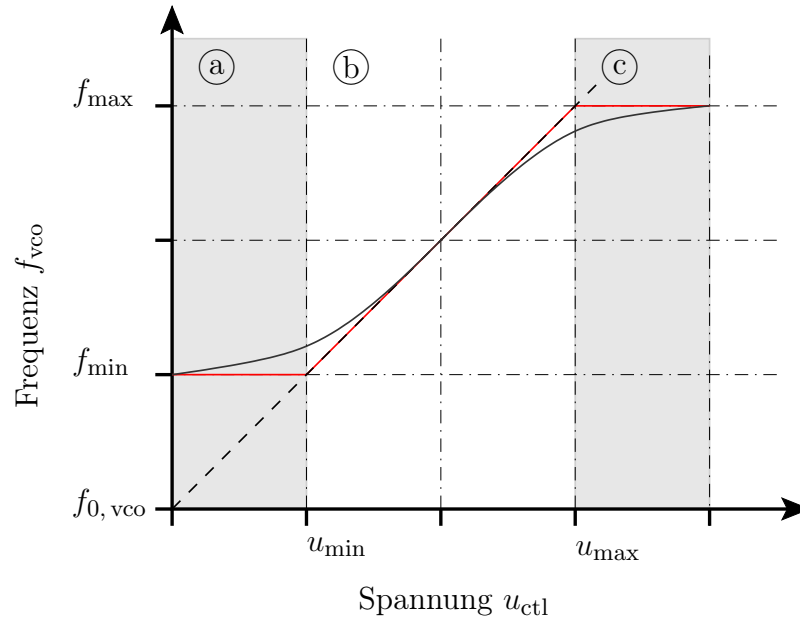
Da sich der Phasendetektor als ein digitales Bauelement darstellt und die Signale des Phasendetektors im idealen Fall die Ladungspumpe von einem zu einem anderen Wert ideal schalten, wobei dies proportional zum Phasenfehler der Eingangssignale geschieht, ergibt sich am Ausgang der Ladungspumpe ein pulswertenmoduliertes Signal. D. h., der Regelkreis ist als offen anzusehen, sobald ein Ereignis (ein Wechsel der Signale am Eingang der Ladungspumpe) erfolgt. Durch diesen Sachverhalt ist es schwierig, genaue Stabilitätsuntersuchungen anzuwenden, die diese Form der Nichtlinearität mit berücksichtigt. Insbesondere ergibt sich dadurch, wie von GARDNER [16] beschrieben, dass die Eingangsfrequenz einen Einfluss auf die Stabilität des Systems ausübt. Der Phasenregelkreis verhält sich dann wie ein Abtastsystem und es ist erforderlich, zumindest ein linearisiertes zeitdiskretes Modell zu verwenden, um die Stabilität für kleinere Eingangsfrequenzen zu gewährleisten oder zu bestimmen.

Ein ähnliches Problem ergibt sich, wenn ein Integer- $N$  Phasenregelkreis zur Frequenzsynthese nicht mehr ausreicht, um den Ansprüchen des zu entwerfenden Systems zu genügen. In diesem Fall können die Fraktional- $N$  Frequenzsynthesizer verwendet werden. Wie schon erwähnt, wird bei diesen Architekturen der Teilerwert gerade so geschaltet, dass sich im Mittel auch rationale Teilverhältnisse der Eingangsfrequenz synthetisieren lassen. Durch dieses Schalten ergibt sich eine periodische oder auch stochastische Variation der Schleifenverstärkung, wodurch innerhalb des Entwurfes insbesondere die Architektur und Ordnung des Schleifenfilters betroffen sind [6, 13, 18, 27, 55, 69], damit die Nebentöne im Spektrum des Ausgangssignals minimiert werden.

Diese beiden durch den Digitalteil verursachten Nichtlinearitäten (Schalten des Stromes und des Teilerwertes) lassen sich innerhalb der Modellierung als schaltende Parameter annehmen, wodurch sich ein lineares, kontinuierliches, schaltendes oder ein nichtlineares, schaltendes, zeitdiskretes Modell ergibt. Insbesondere wird sich zeigen, dass die zeitdiskrete Variante für die Simulation und die Stabilitätsuntersuchungen von Bedeutung ist.

### Charakteristik des spannungsgesteuerten Oszillators

Der spannungsgesteuerte Oszillator stellt in sich ein nichtlineares Bauelement dar, wobei eine Vielzahl von Architekturen existieren, auf die hier jedoch nicht genauer eingegangen werden soll. Tiefergehende Behandlungen können in [8, 60–62] nachgelesen werden. An dieser Stelle soll ein einfaches nichtlineares Modell eines spannungsgesteuerten Oszillators



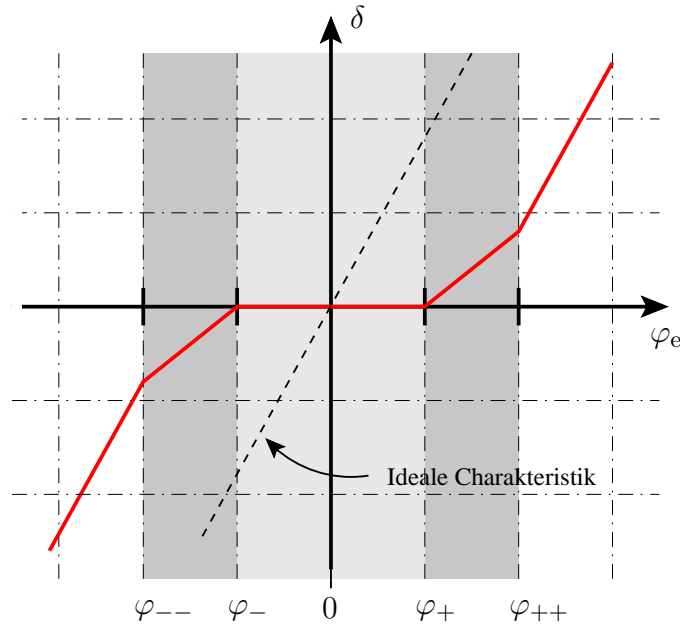
**Abbildung 3.10.:** Charakteristiken des spannungsgesteuerten Oszillators: Die schwarze gestrichelte Linie stellt eine lineare Funktion dar, die durch die Frequenz  $f_{0,\text{vco}}$  und die Steigung  $K_v$  (Verstärkungsbeiwert) definiert ist. Die rote Charakteristik ist eine stückweise lineare Darstellung, bestimmt durch den Verstärkungsbeiwert  $K_v$ , die minimale und maximale Spannung  $u_{\min}$  bzw.  $u_{\max}$  sowie durch die minimale und maximale Ausgangsfrequenz  $f_{\min}$  und  $f_{\max}$ . Die schwarze Funktion ist eine typische nichtlineare Charakteristik eines VCO, gegeben durch die Funktion  $f(\cdot)$  (siehe Gleichung (3.13)).

vorgestellt werden:

$$u_{\text{vco}}(t) = g \left( \varphi_{0,\text{vco}} + 2\pi K_v \int_0^t f(u_{\text{ctl}}(\tau)) \, d\tau \right), \quad (3.13)$$

wobei  $g$  eine reelle periodische Funktion ist,  $\varphi_{0,\text{vco}}$  die Phase zum Zeitpunkt  $t = 0$  angibt,  $K_v$  als Verstärkungsbeiwert bezeichnet wird und die nichtlineare Charakteristik  $f$  des VCO durch die Spannung  $u_{\text{ctl}}(t)$  geregelt wird. In Abbildung 3.10 sind drei Charakteristiken der Funktion  $f$  dargestellt. Wird der VCO innerhalb des Regelkreises betrachtet, ist ersichtlich, dass sich die Schleifenverstärkung mit der Funktion  $f$  ändert. Hinzukommend lässt sich bei Verwendung des stückweise linearen Modells feststellen, dass sich eine Art von Stellgrößenbeschränkung ergibt, wodurch der *Wind-Up*-Effekt auftreten kann. Da sich der Zustand des Regelkreises nur zu diskreten Zeitpunkten ändert und dieser zwischen zwei Ereigniszeitpunkten ohnehin als offen anzusehen ist, wird sich dieser Effekt anders als bei kontinuierlichen Systemen ausbilden. Ist die Zielfrequenz größer  $f_{\max}$ , so wird der *Wind-Up*-Effekt vollständig auftreten, jedoch ist dann auch der Entwurf schlecht gewählt. Ist die Zielfrequenz noch unterhalb der Maximalfrequenz und wird die Stellgrößenbeschränkung aufgrund des Einschwingvorganges der Regelgröße  $u_{\text{ctl}}(t)$  aktiv, wird sich der Effekt etwas abmildern.





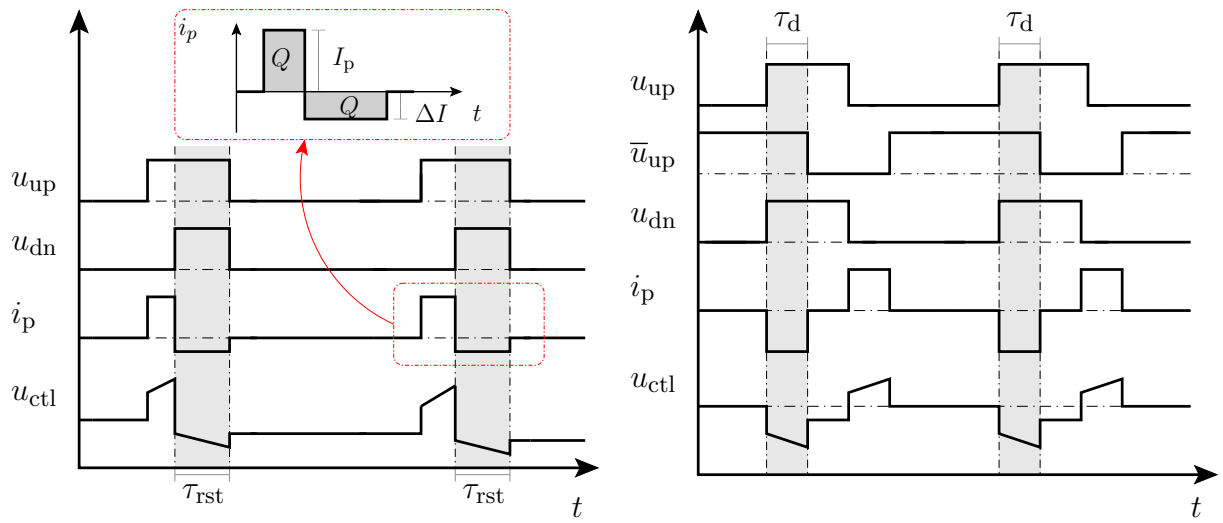
**Abbildung 3.11.:** Schematische Darstellung der Charakteristik des PFD bezüglich des Phasenfehlers  $\varphi_e$  und des Tastverhältnisses  $\delta$ . Für einen Phasenfehler  $\varphi_- \leq \varphi_e \leq \varphi_+$  ist die Dead-Zone als Konsequenz der Laufzeiten aktiv und in den Bereichen  $\varphi_{--} \leq \varphi_e \leq \varphi_-$  und  $\varphi_+ \leq \varphi_e \leq \varphi_{++}$  ergibt sich eine Änderung der Steigung als Folge der endlichen Flankensteilheiten.

### Nichtlineare Charakteristik des PFD

Die Charakteristik des Phasen- und Frequenz-Detektors ist bei genauer Betrachtung eine Nichtidealität/Nichtlinearität, die sich zum einen aus den Laufzeiten des PFD und zum anderen aus den Flankensteilheiten der Signale ergibt. D. h. für kleine Phasenfehler zwischen den Eingangssignalen  $u_{\text{ref}}(t)$  und  $u_{\text{div}}(t)$  kann der Phasendetektor keine äquivalente Pulsbreite des Stromes  $i_p(t)$  oder der Spannung  $u_d(t)$  liefern, wodurch sich der Regelkreis in diesem Bereich nicht mehr steuern lässt. Zur Charakterisierung des PFD kann das Tastverhältnis

$$\delta = \frac{T_p}{T_g} \quad (3.14)$$

angesetzt werden, wobei  $T_p$  die Pulsbreite von  $u_{\text{up}}(t)$  bzw.  $u_{\text{dn}}(t)$  bezeichnet und  $T_g$  ist die Periodendauer, die sich von einem Puls zum nächsten Puls von  $u_{\text{up}}(t)$  bzw.  $u_{\text{dn}}(t)$  ergibt. Wird das Tastverhältnis  $\delta$  über den Phasenfehler aufgetragen, so ergibt sich die Charakteristik nach Abbildung 3.11. Dabei ist die reine *Dead-Zone* eine Folge der Verzögerungen und zum Teil die Folge der endlichen Flankensteilheiten oder genauer der nichtidealen Pulsform. Die endlichen Flankensteilheiten stellen insbesondere eine Änderung der Steigung in der Charakteristik dar, wobei an dieser Stelle von idealen Schaltern für die Ladungspumpe ausgegangen wird. Diese Änderung bewirkt auch hier eine Variation der Schleifenverstärkung des Regelkreises. Insbesondere im ausgeglichenen Zustand ergibt sich dadurch eine geringere Schleifenverstärkung.

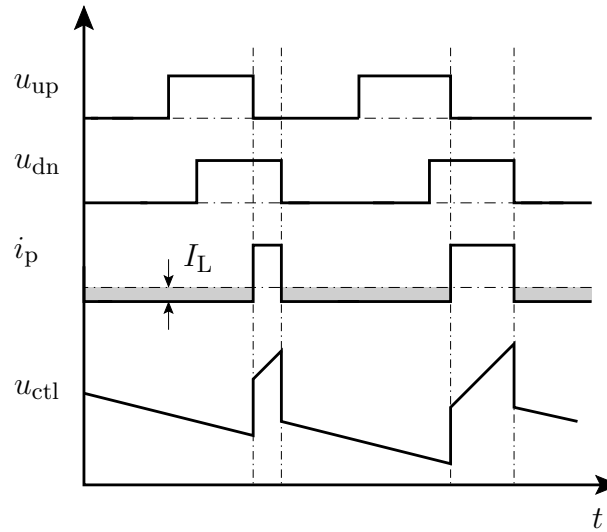


(a) Stromungleichgewicht zwischen den Signalen  $u_{up}(t)$  und  $u_{dn}(t)$  (b) Zeitliche Diskrepanz zwischen  $\bar{u}_{up}(t)$  und  $u_{dn}(t)$  durch die Invertierung des UP-Signals  $u_{up}(t)$

**Abbildung 3.12.:** Schematische Darstellung der Auswirkung des Stromungleichgewichts zwischen  $u_{up}(t)$  und  $u_{dn}(t)$  (a) sowie der zeitlichen Diskrepanz zwischen  $\bar{u}_{up}(t)$  und  $u_{dn}(t)$  durch die Invertierung des UP-Signals  $u_{up}(t)$  (b)

#### Charge-Pump-Ungleichgewicht

Die reale Ladungspumpe legt einen bestimmten Anteil der *Reference Spurs* fest, wodurch sich die Frequenzreinheit entsprechend verschlechtert. Ein wichtiges Problem ist dabei das Ungleichgewicht der UP- und DN-Ströme, d. h.  $|I_{up}| \neq |I_{dn}|$ . Bei Betrachtung der Architektur des PFD (siehe Abbildung 3.12), wenn der Regelkreis ausgeglichen ist und der Zustand von  $\mathcal{S}_{+1}$  nach  $\mathcal{S}_0$  oder von  $\mathcal{S}_{-1}$  nach  $\mathcal{S}_0$  wechselt, ergibt sich für die Zeit  $\tau_{rst}$ , die der PFD zum Zurücksetzen der Flipflops benötigt, ein ungewollter Strom  $\Delta I_p$ . Dies wiederum hat zur Folge, dass sich die Ladung in den Kapazitäten des Filters ändern, wodurch sich dementsprechend auch die Regelspannung  $u_{ctl}$  ändert. Damit wird sich eine periodische Modulation der Regelspannung ergeben, die sich als Nebentöne im Spektrum des Signals  $u_{vco}$  ausbilden. Abbildung 3.12(a) beschreibt gerade diesen Zusammenhang hinsichtlich der Signale  $u_{dn}$ ,  $u_{up}$ ,  $i_p$  und  $u_{ctl}$ , wobei der Einfachheit halber ein Regelkreis der Ordnung Zwei angesetzt wurde. Ein anderer Effekt, der als *Effect of Skew* bezeichnet wird, tritt dann auf, wenn aufgrund der verwendeten MOS-Transistoren das UP-Signal des PFD invertiert werden muss, wodurch sich eine Verzögerung  $\tau_d$  ergibt. D. h. durch die Verzögerung  $\tau_d$  zur Invertierung des Signals  $u_{up}$  wird der UP-Zweig der Ladungspumpe verzögert und prägt somit den Strom  $I_{p,up}$  zeitlich versetzt in das Filter ein. Dadurch wird über die Zeit  $\tau_d$  der DN-Strom dominierend. Der DN-Strom wird dann etwas später durch das Schalten des UP-Zweiges aufgehoben bis der UP-Zweig dominiert. In Abbildung 3.12(b) ist dieser Sachverhalt dargelegt. Dieser Effekt beschreibt demnach auch das zeitliche Ungleichgewicht (*Timing Mismatch*) [27].



**Abbildung 3.13.:** Schematische Darstellung bezüglich der Auswirkung eines Leckstromes innerhalb der Charge-Pump auf die Regelspannung und somit auf die Ausgangsfrequenz

### Leckstrom

Eine wichtiges Problem innerhalb des Entwurfs von Ladungspumpen ist der Leckstrom, der die Regelspannung  $u_{ctl}$  direkt beeinflusst [73]. Der Leckstrom kann zum einen durch die Ladungspumpe selbst oder auch durch *On-Chip*-Varaktoren hervorgerufen werden. Der Einfluss des Leckstromes lässt sich mit Hilfe der Abbildung 3.13 beschreiben. Im Grunde ergibt sich durch den Leckstrom für den Phasenregelkreis, dass sich ein Strom  $I_L$  einstellt, obgleich sich der PFD im Zustand  $S_0$  befindet und eigentlich kein Strom in das Filter eingepreßt werden sollte. Durch diesen Sachverhalt wird ein Phasenfehler im ausgeregelten Zustand des Systems durch den Phasendetektor erkannt und entsprechend korrigiert. Dadurch wird der Regelkreis kontinuierlich dazu gezwungen, den Leckstrom zu kompensieren und es entstehen somit wieder Nebentöne im Spektrum des Ausgangssignals  $u_{vco}(t)$  mit einem Abstand von  $\pm f_{ref}$  zur Grundschiwingung. Anders ausgedrückt, um die durch den Leckstrom verursachte Frequenzverschiebung auszugleichen, ergibt sich ein konstanter Phasenfehler, der den Leckstrom durchschnittlich kompensiert.

## 3.2. Untersuchung des Einrastverhaltens

Grundlegend für die folgende Betrachtung sei die Architektur nach Abbildung 3.2 mit einem *Tri-State*-PFD als Phasendetektor. Im Allgemeinen stellt sich die Frage, wann ein Phasenregelkreis eingerastet (*locked*) ist. Je nachdem, wie dieser Begriff aufgefasst wird, ergeben sich unterschiedliche Definitionen oder Ansichten [74].

**Definition 3.1 (Signale: *locked*)** Ein Phasenregelkreis wird als eingerastet oder *locked* bezeichnet, falls die Signale  $u_{ref}(t)$  und  $u_{div}(t)$  *locked* sind, d. h. die Signale  $u_{ref}(t)$  und  $u_{div}(t)$  sind zueinander phasensynchron.

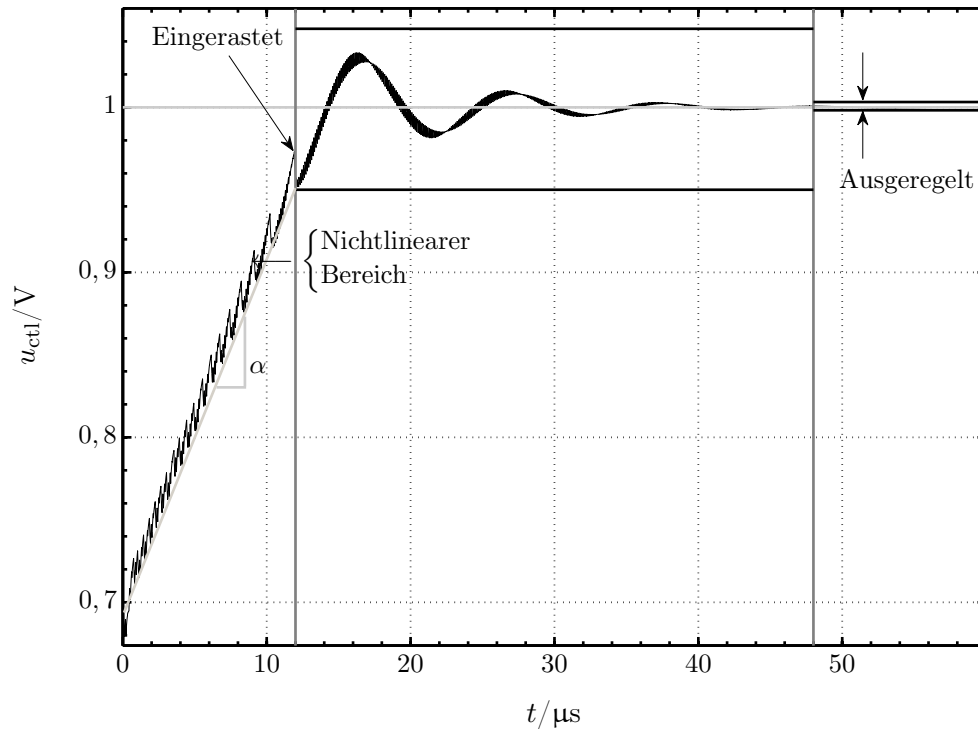


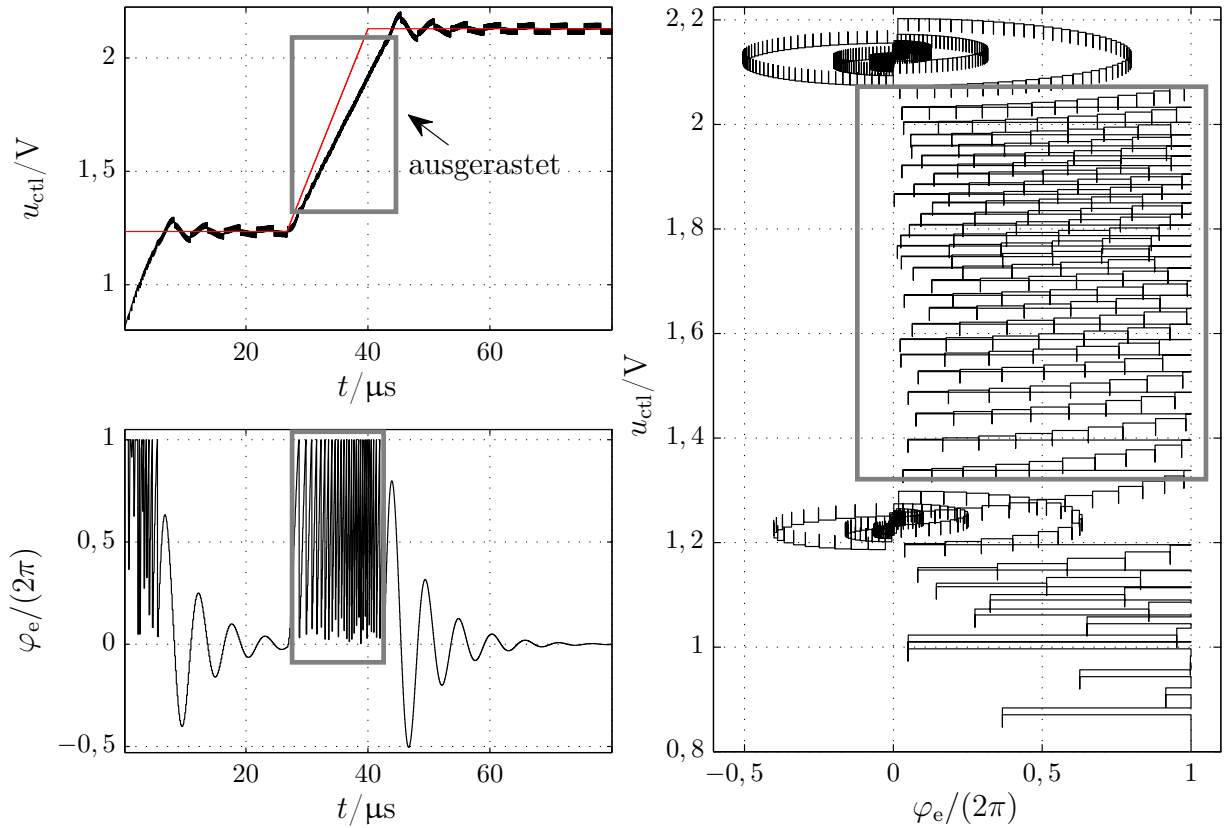
Abbildung 3.14.: Zum Einrast- und Ausregelverhalten von digitalen Phasenregelkreisen

**Definition 3.2 (System: locked)** Ein Phasenregelkreis ist eingerastet oder locked, wenn der Phasenfehler  $|\varphi_e|$  der Signale  $u_{\text{ref}}(t)$  und  $u_{\text{div}}(t)$  kleiner als die Konstante  $\phi$  ist und dieser, sofern keine Änderung am Teilungsverhältnis, Filter oder am Eingangssignal vorgenommen wurde, in dem Bereich  $\varphi_e < \phi$  bleibt.  $\phi$  ist dabei eine Konstante, die von der Architektur des Phasendetektors abhängt. Für einen Tri-State-PFD nach Abbildung 3.2 ist  $\phi = 2\pi$ .

Die Definition 3.1 kann aus systemtheoretischer Betrachtung gerade als der Zustand angesehen werden, bei dem der Regelkreis vollständig ausgeregelt (*settled*) ist. Im Folgenden werde ausschließlich Definition 3.2 verwendet. Offensichtlich ergibt sich aus Definition 3.2 direkt der Bereich, in dem der Phasenregelkreis ausgerastet (*out-of-lock*) ist.

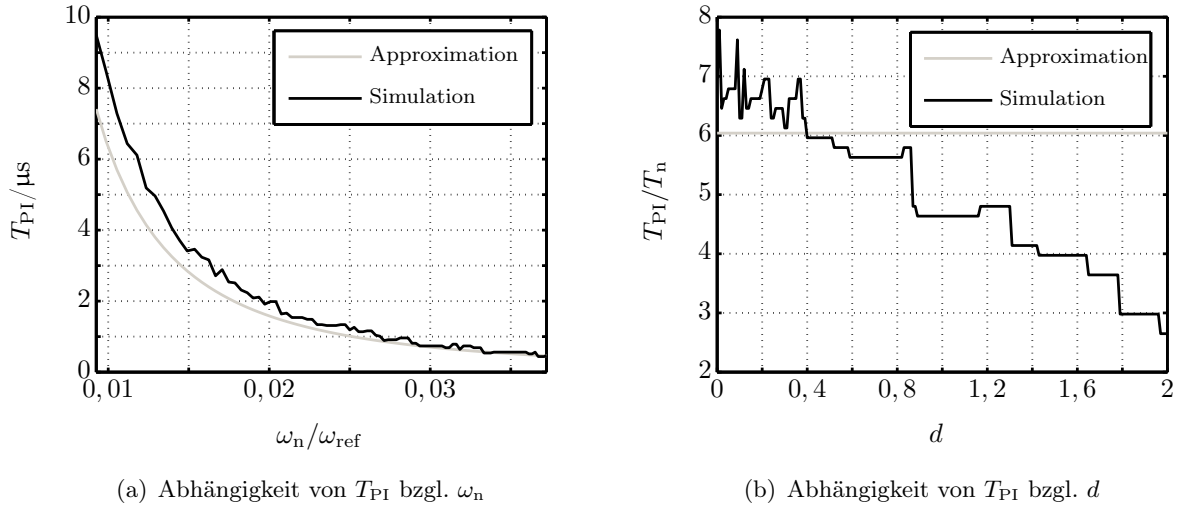
**Definition 3.3 (System: out-of-lock)** Der Phasenregelkreis wird als ausgerastet (*out-of-lock*) bezeichnet, wenn der Phasenfehler  $\varphi_e(t)$  der Signale  $u_{\text{ref}}(t)$  und  $u_{\text{div}}(t)$  größer oder gleich  $\phi$  ist.

In der Literatur [24, 25, 75] wird das Verhalten im ausgerasteten Zustand des Phasenregelkreises häufig als nichtlinear und chaotisch bezeichnet und, wenn der Regelkreis eingerastet ist, als linear. Es sei jedoch darauf hingewiesen, dass, obgleich der Regelkreis eingerastet ist, das Abtastverhalten des Phasendetektors weiterhin ein Schalten der Ströme liefert. Wenn die Eingangsfrequenz hinreichend klein gegenüber der Eigenfrequenz  $f_n$  des Systems ist, so lässt sich der „lineare“ Bereich auch nicht mehr durch das vorgestellte linearisierte



**Abbildung 3.15.:** Simulation einer CP-PLL zweiter Ordnung mit einer Frequenzrampe am Eingang. Im Bereich der Frequenzrampe ist ersichtlich, dass der Regelkreis der Steigung nicht folgen kann. Dieser Bereich ist durch eine graue Box kenntlich gemacht und es lässt sich an dieser Stelle das nichtlineare Verhalten erkennen.

kontinuierliche Modell beschreiben (siehe Abschnitt 3.1.1). Die Dynamik des nichtlinearen Bereichs, oder auch Ziehbereich genannt, ist im eigentlichen Sinne durch das endliche Gedächtnis des Phasendetektors bestimmt. Wird der vorgestellte PFD als Phasendetektor verwendet, so können nur Phasenfehler  $\varphi_e(t)$  kleiner oder gleich  $2\pi$  berechnet werden. D. h. der PFD ist nicht in der Lage, einen Phasenfehler größer  $2\pi$  zu detektieren, auch wenn ein großer Frequenzunterschied offensichtlich ist. Aus diesem Grunde sind gerade die Zeitpunkte charakteristisch, bei denen ein Phasenfehler von  $\varphi_e = \phi$  durch den Phasendetektor angegeben wurde. In Abbildung 3.15 ist eine Simulation einer CP-PLL zweiter Ordnung dargestellt. Dabei wurde eine Frequenzrampe für das Eingangssignal  $u_{\text{ref}}(t)$  definiert, so dass der Regelkreis der Steigung nicht mehr folgen kann und somit ausrastet. Sobald der Regelkreis eingerastet ist und keinerlei Änderung am Eingang erfolgt, konvergiert die Trajektorie gegen die entsprechende Ruhelage. Im ausgerasteten Zustand jedoch zeigt sich insbesondere beim Phasenfehler ein starkes nichtlineares Verhalten. Durch das Betrachten eines Regelkreises zweiter Ordnung lässt sich hinzukommend auch das Schalten des



**Abbildung 3.16.:** Vergleich der Pull-In-Zeit  $T_{PI}$  aus Gleichung (3.16) und dem nichtlinearen idealen Modell einer CP-PLL zweiter Ordnung

Charge-Pump-Stromes gut erkennen. Innerhalb des Phasendiagramms ist dies durch einen Spannungssprung der Höhe  $R_1 I_p$  gekennzeichnet. Im Hinblick auf den Entwurf einer CP-PLL ist die Ausregelzeit ein wichtiges Kriterium. Für diese Betrachtung ist es erforderlich, eine hinreichend gute Abschätzung für die Einrastzeit und Ausregelzeit zu finden.

**Definition 3.4 (Einrastzeit oder Lock-Zeit)** Die Einrastzeit  $T_L$  sei die Zeit, die der Regelkreis benötigt, um vom ausgerasteten Zustand in den eingerasteten Zustand zu gelangen.

Sobald der Regelkreis eingerastet ist, können verschiedene Abschätzungen für die Ausregelzeit angegeben werden [13], wobei die Einrastzeit  $T_L$  nicht berücksichtigt wird. Die exakte Bestimmung dieser Zeit ist aufgrund der Sensibilität der Anfangsbedingungen des Systems, wie die gespeicherte Ladung im Schleifenfilter, die Anfangsphase des Referenz- und des VCO-Signals sowie der Anfangszustand des PFD, nicht möglich. Im Allgemeinen wird eine lineare Abschätzung der Steigung des nichtlinearen Bereiches vorgenommen (siehe Abbildung 3.14). In [13] wurde dazu für einen Regelkreis zweiter Ordnung und mit  $N = 1$  die Gleichung

$$\alpha = \frac{I_p}{2C_1} K_v \quad (3.15)$$

angegeben. Mit dem Frequenzsprung  $\Delta f$  ergibt sich somit für die Pull-In-Zeit

$$T_{PI} = \frac{2C\Delta f}{I_p K_v} = \frac{2\pi\Delta f}{\omega_n^2}. \quad (3.16)$$

In Abbildung 3.16 ist die nach Gleichung (3.16) angegebene Pull-In-Zeit  $T_{PI}$  einer Simulation eines nichtlinearen idealen Modells einer CP-PLL zweiter Ordnung gegenübergestellt.

Es ist ersichtlich, dass die Abhängigkeit von  $\omega_n$  eine gute Übereinstimmung zeigt, jedoch ist trotzdem innerhalb des nichtlinearen Modells auch eine Abhängigkeit bezüglich des Dämpfungsbeiwertes  $d$  zu erkennen. Es ist offensichtlich, dass die Approximation der *Pull-In*-Zeit etwas optimistischer veranschlagt ist. Da aber für den Entwurf meist nur eine Abschätzung benötigt wird, stellt diese Approximation einen guten Ansatz dar.

### 3.2.1. *Pull-Out*-Bereich $\Delta\omega_{PO}$

Wird das linearisierte Modell angenommen, so lässt sich aus Definition 3.3 der *Pull-Out*-Bereich  $\Delta\omega_{PO}$  bestimmen. Dieser gibt an, welcher Frequenzsprung notwendig ist, um den Regelkreis zum Ausrasten zu bringen. Wird ein Frequenzsprung mit der Höhe  $\Delta\omega_{PO}$  auf die Fehlerübertragungsfunktion gegeben, das Maximum im Zeitbereich bestimmt, dann gleich  $2\pi$  gesetzt und abschließend nach  $\Delta\omega_{PO}$  aufgelöst, ist der *Pull-Out*-Bereich bestimmt. Ein Sprung in der Frequenz bedeutet eine Rampe für die Phase. Aus

$$\max_t \left\{ \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{\Delta\omega_{PO}}{s^2} H_e(s) e^{-st} ds \right\} = \max_t \{r_e(t)\} \stackrel{\Delta}{=} 2\pi, \quad (3.17)$$

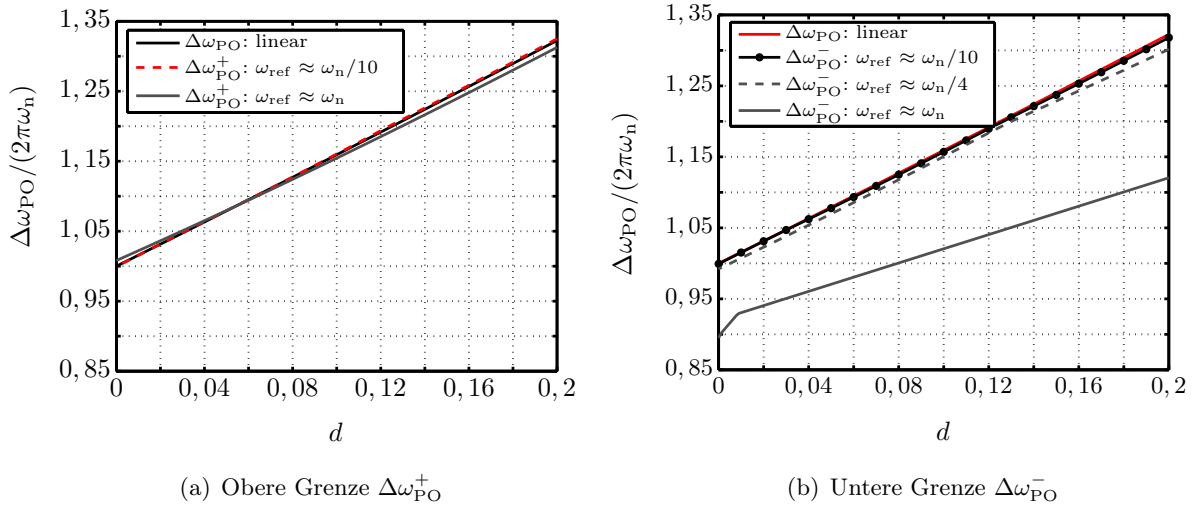
kann somit der *Pull-Out*-Bereich  $\Delta\omega_{PO}$  berechnet werden, wobei  $r_e(t)$  die Rampenantwort des Systems darstellt. Wird von der Phasenübertragungsfunktion eines Regelkreises 2. Ordnung (siehe Gleichung (3.6b)) die inverse LAPLACE-Transformierte bestimmt, wobei am Eingang eine Rampe mit der Steigung  $\Delta\omega_{PO}$  anliegt, ergibt sich die Rampenantwort

$$r_e(t) = \begin{cases} \frac{\Delta\omega_{PO} e^{-d\omega_n t} \sin(\sqrt{1-d^2} \omega_n t)}{\sqrt{1-d^2} \omega_n} & d < 1 \\ \Delta\omega_{PO} t e^{-\omega_n t} & d = 1 \\ \frac{\Delta\omega_{PO} e^{-d\omega_n t} \sinh(\sqrt{d^2-1} \omega_n t)}{\sqrt{d^2-1} \omega_n} & d > 1 \end{cases} \quad (3.18)$$

In dem Punkt

$$t_{\max} = \begin{cases} \frac{\arctan\left(\frac{\sqrt{1-d^2}}{d}\right)}{\sqrt{1-d^2} \omega_n} & d < 1 \\ \frac{1}{\omega_n} & d = 1 \\ \frac{\operatorname{Artanh}\left(\frac{\sqrt{d^2-1}}{d}\right)}{\sqrt{d^2-1} \omega_n} & d > 1 \end{cases} \quad (3.19)$$

### 3. Grundlagen digitaler Phasenregelkreise



**Abbildung 3.17.:** Gegenüberstellung des Pull-Out-Bereiches  $\Delta\omega_{PO}(d)$  des linearen kontinuierlichen Modells und der simulativ berechneten Kurven für  $\Delta\omega_{PO}^+(d)$  und  $\Delta\omega_{PO}^-(d)$  des nichtlinearen idealen Modells

hat  $r_e(t)$  ein Maximum. Wird dann  $t_{\max}$  in die Funktion  $r_e(t)$  eingesetzt und nach  $\Delta\omega_{PO}$  aufgelöst, so ergibt sich

$$\Delta\omega_{PO} = \begin{cases} 2\pi\omega_n e^{\frac{d}{\sqrt{1-d^2}} \arctan\left(\frac{1-d^2}{d}\right)} & d < 1 \\ 2\pi\omega_n e & d = 1 \\ 2\pi\omega_n e^{\frac{d}{\sqrt{d^2-1}} \operatorname{Artanh}\left(\frac{d^2-1}{d}\right)} & d > 1 \end{cases} \quad (3.20)$$

Unter Verwendung des *Tri-State*-PFD lässt sich durch die Bestimmung des *Pull-Out*-Bereiches das maximale Überspringen bestimmen. Problematisch bei der Berechnung des *Pull-Out*-Bereiches ist das Abtastverhalten des Regelkreises. Dies hat nicht nur Auswirkungen auf die Stabilität [13, 16], sondern auch auf die Dynamik des Systems. Wenn die Eingangsfrequenz wesentlich größer der Eigenfrequenz des Systems ist, so hat das Abtastverhalten weniger Einfluss und die lineare Approximation stellt eine immer besser werdende Näherung dar. Des Weiteren ergeben sich innerhalb des nichtlinearen Modells eine obere Grenze  $\Delta\omega_{PO}^+$  und eine untere Grenze  $\Delta\omega_{PO}^-$  für den *Pull-Out*-Bereich. Dies lässt sich durch den Sachverhalt erklären, dass, wenn die Regelgröße sich unterhalb der Zielfrequenz befindet, der Einfluss des Eingangssignals  $u_{ref}(t)$  dominiert. Für den anderen Fall, dass sich die Regelgröße oberhalb der Zielfrequenz befindet, liegt eine Dominanz des rückgekoppelten Signals  $u_{vco}(t)$  vor. Insbesondere für die untere Grenze  $\Delta\omega_{PO}^-$  ergibt sich diese Abhängigkeit der Eingangsfrequenz  $f_{ref}$ . In Abbildung 3.17 ist dieser Sachverhalt dargelegt. Es



ist ersichtlich, dass die im vorigen Kapitel eingeführten Faustformeln zum Entwurf eines Phasenregelkreises mittels der linearen kontinuierlichen Approximation zutreffend sind.

### 3.2.2. Dynamik und Logik des Regelkreises

Innerhalb dieses Abschnittes werden verschiedene Zustandssequenzen des PFD angegeben werden, die das dynamische Verhalten des Systems charakterisieren. Zudem werden passende Zustandsgraphen zur Detektion dieser Sequenzen entwickelt.

Da der PFD ein flankengesteuertes digitales Bauelement darstellt und sich somit Änderungen der Regelung nur zu diskreten Zeitpunkten ergeben, verhält sich der geschlossene Regelkreis ansonsten wie ein offener Regelkreis, wobei der Zustand des PFD die Richtung des Ziehprozesses angibt. Offensichtlich ergibt sich bei einer Zustandsänderung von  $\mathcal{S}_{-1}$  zu  $\mathcal{S}_{+1}$  über  $\mathcal{S}_0$  zumindest in näherer Umgebung ein Minimum in der Frequenz. Diese Zustandsfolge sei mit  $\mathcal{S}_- = \{\mathcal{S}_{-1}, \mathcal{S}_0, \mathcal{S}_{+1}\}$  bezeichnet. Die Sequenz liefert einen Phasen-nulldurchgang des Phasenfehlers  $\varphi_e$  und es ändert sich an dieser Stelle das Vorzeichen des *Charge-Pump*-Stromes. In den Abbildungen 3.19 wird dieser Sachverhalt anhand der Regelspannung  $u_{ctl}$ , dem Phasenfehler  $\varphi_e$  und dem Zustand des PFD visualisiert. Wird der Zusammenhang von Phase und Frequenz innerhalb des Regelkreises betrachtet, ergibt sich intuitiv für einen Phasenregelkreis zweiter Ordnung bei einem Nulldurchgang des Phasenfehlers ein Extremum in der Frequenz. Bei Regelkreisen höherer Ordnung verschiebt sich das Extremum aufgrund der Tatsache, dass sich Umladevorgänge ergeben. Des Weiteren ist ein weiterer Nulldurchgang des Phasenfehlers bei der Zustandsfolge  $\mathcal{S}_+ = \{\mathcal{S}_{+1}, \mathcal{S}_0, \mathcal{S}_{-1}\}$  zu identifizieren. Die nächsten beiden Sequenzen lassen sich ebenfalls mit Hilfe der Abbildungen 3.19 und der Definition 3.3 finden. Für den PFD kann die Konstante  $\phi = 2\pi$  angegeben werden. Offensichtlich ergibt sich dieser Wert, wenn zweimal eine fallende oder steigende Flanke des Referenzsignals  $u_{ref}$  oder Teiler Ausgangssignals  $u_{div}$  hintereinander erfolgt. Für den PFD lassen sich dadurch die Zustandsfolgen

$$\mathcal{S}_{ool1} = \{\mathcal{S}_{-1}, \mathcal{S}_{-1}\} \quad (3.21a)$$

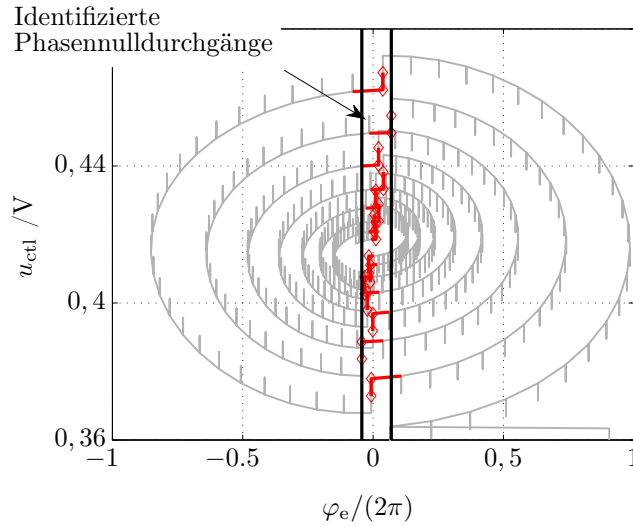
und

$$\mathcal{S}_{ool2} = \{\mathcal{S}_{+1}, \mathcal{S}_{+1}\} \quad (3.21b)$$

finden. Zusammenfassend können so zwei Folgerungen angeführt werden.

**Folgerung 3.1** *Erfolgen die Zustandssequenzen  $\mathcal{S}_+ = \{\mathcal{S}_{+1}, \mathcal{S}_0, \mathcal{S}_{-1}\}$  oder  $\mathcal{S}_- = \{\mathcal{S}_{-1}, \mathcal{S}_0, \mathcal{S}_{+1}\}$  des PFD, so entspricht dies einem Phasennulldurchgang des Phasenfehlers  $\varphi_e$ , wobei  $\mathcal{S}_-$  als negativer Phasennulldurchgang und  $\mathcal{S}_+$  als positiver Phasennulldurchgang bezeichnet werde.*

**Folgerung 3.2** *Treten die Zustandsfolgen  $\mathcal{S}_{ool1} = \{\mathcal{S}_{-1}, \mathcal{S}_{-1}\}$  oder  $\mathcal{S}_{ool2} = \{\mathcal{S}_{+1}, \mathcal{S}_{+1}\}$  auf, so entspricht dies einem Phasenfehler  $\varphi_e$  von  $2\pi$ .*



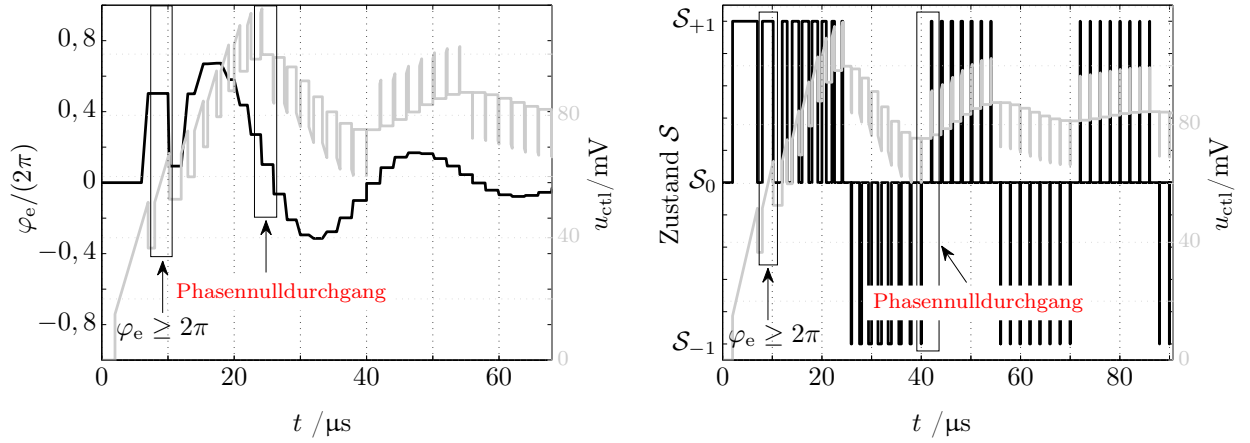
**Abbildung 3.18.:** Trajektorie eines Phasenregelkreises zweiter Ordnung mit identifizierten Phasennulldurchgängen

In Abbildung 3.18 ist eine Trajektorie eines Phasenregelkreises zweiter Ordnung mit entsprechend identifizierten Phasennulldurchgängen dargestellt. Die Abbildungen 3.19(a) und 3.19(b) zeigen die Phasennulldurchgänge bezüglich der Spannung  $u_{\text{ctl}}(t)$  und des Phasenfehlers  $\varphi_e(t)$  sowie der Spannung  $u_{\text{ctl}}(t)$  und des Zustandes  $\mathcal{S}$  des PFD. Der Regelkreis ist eingerastet, wenn Definition 3.2 erfüllt ist. Bei Betrachtung des Ziehprozesses und Folgerung 3.2 lässt sich erkennen, dass, wenn  $\mathcal{S}_{\text{ool1}}$  oder  $\mathcal{S}_{\text{ool2}}$  direkt vor  $\mathcal{S}_+$  oder  $\mathcal{S}_-$  auftreten, so ist der Regelkreis eingerastet, wobei zu diesem Zeitpunkt von einem idealem System ausgegangen wird. Durch diese Folgerungen kann demnach der Einrastzeitpunkt bestimmt werden sowie bei Kenntnis der Dynamik auch der Ausregelzeitpunkt detektiert werden. Insbesondere hinsichtlich eines vertrauenswürdigen Taktsignals und für *Fast-Locking*-Anwendungen [13, 76–80] ist dies von großer Bedeutung, denn es lässt sich so der Zeitpunkt bestimmen, an dem die Bandbreite des Systems gemäß den Vorgaben gewechselt werden kann.

#### 3.2.3. Lock/Settling-Detektor

Durch die im vorangegangenen Abschnitt dargelegten Ergebnisse sollen im Folgenden zwei sequenzielle Automaten vorgestellt werden, um die Sequenzen  $\mathcal{S}_-$ ,  $\mathcal{S}_+$ ,  $\mathcal{S}_{\text{ool1}}$  und  $\mathcal{S}_{\text{ool2}}$  zu identifizieren. Des Weiteren wird eine Schaltung angegeben, die sich insbesondere für *Fast-Locking*-Anwendungen anbietet [13, 76, 78–84]. Vorerst jedoch sollen kurz die wichtigsten schaltungstechnischen Verfahren zur Einrastidentifikation dargelegt werden.

Es existieren verschiedene Arten von *Lock*-Detektoren (*In-Lock*-Detektoren). Eine Variante basiert auf der Zeitmessung zwischen zwei folgenden fallenden oder steigenden Flanken der Signale  $u_{\text{ref}}(t)$  und  $u_{\text{div}}(t)$ . Die Messung wird mehrmals durchgeführt und wenn die Messzeit  $\tau_{\text{M}}$  jedesmal kleiner einer vorgegebenen Zeit  $\tau_{\text{b}}$  ist, so wird angezeigt, dass der Regelkreis eingerastet ist [2, 85]. Im Sinne der eingeführten Definitionen wird hier überprüft,



(a) Regelspannung und Phasenfehler: Bei einem Extremum der Regelspannung ergibt sich ein Nulldurchgang des Phasenfehlers. (b) Regelspannung und Zustand des PFD: Bei einem Überspringen ergibt sich die Zustandssequenz  $S_+$  und wenn zweimal hintereinander der Zustand  $S_{+1}$  durchlaufen wird, kann die Sequenz  $S_{ool}$  identifiziert werden.

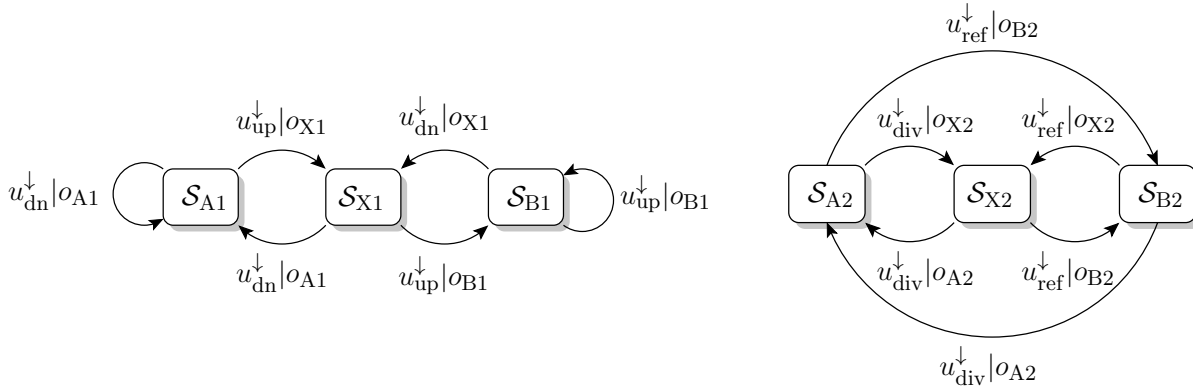
**Abbildung 3.19.:** Zum logischen und dynamischen Verhalten von CP-PLL-Systemen mit PFD, wobei exemplarisch ein Regelkreis der Ordnung Zwei angesetzt wurde.

ob die Signale  $u_{ref}(t)$  und  $u_{div}$  phasensynchron sind, d. h., ob der Regelkreis ausgeglet ist.

Ein sehr ähnliches Verfahren basiert auf programmierbaren Teilern durch Pulsweitenmessung des UP-Signals  $u_{up}(t)$  und des DN-Signals  $u_{dn}(t)$  (siehe [84]). Dabei dient das VCO-Signal  $u_{vco}(t)$  als Eingangssignal ( $clk$ -Eingang) des ersten Teilers und der *Enable*-Eingang des Teilers ist verschaltet mit der Verknüpfung  $u_{up}(t) \vee u_{dn}(t)$ . Das *Carry*-Signal des Teilers wird dann als *Enable*-Signal eines zweiten Teilers verwendet, wobei dieser durch das Referenzsignal getaktet wird. Wenn also die Weite der UP- und DN-Pulse kleiner dem eingestellten *Preset*-Wert entspricht, so wird der zweite Zähler aktiviert und der zweite Teiler zählt zu jeder Referenzperiode die Werte der Pulsbreite, die kleiner der *Preset*-Zeit sind. Eine ähnliche Variante ist in [86] zu finden.

Ein weiteres Verfahren zur Bestimmung des ausgegletten Zustandes ist in [87] beschrieben. Dabei werden die Pulsbreiten der UP- und DN-Signale verglichen. Dieser Ansatz ist dahingehend begründet, dass, wenn die Eingangssignale des PFD phasensynchron sind, die Pulsbreiten von  $u_{up}(t)$  und  $u_{dn}(t)$  gleich sind.

Eine andere Variante basiert auf der Filterung des Signals  $u_{pulse}(t) = u_{dn}(t) \bar{\vee} u_{up}(t)$  [88]. Wenn die Pulse der UP- und DN-Signale sehr schmal werden, werden diese Pulse durch ein Filter ausgefiltert und durch einen nachgeschalteten SCHMITT-Trigger kann dann angezeigt werden, wann die Signale mehr oder weniger phasensynchron sind.



(a) Endlicher Automat zur Identifikation der Zustandssequenzen  $\mathcal{S}_+$  oder  $\mathcal{S}_-$

(b) Endlicher Automat zur Identifikation der Zustandssequenzen  $\mathcal{S}_{ool1}$  und  $\mathcal{S}_{ool2}$

**Abbildung 3.20.:** Darstellung der endlichen Automaten zur Identifikation der Sequenzen nach den Folgerungen 3.1 und 3.2

#### Endlicher Automat zu Folgerung 3.1

Offensichtlich können die Zustandssequenzen  $\mathcal{S}_+$  und  $\mathcal{S}_-$  mittels des endlichen Automaten des PFD identifiziert werden. Der im Folgenden erläuterte endliche Automat ist in Abbildung 3.20(a) dargestellt. An dieser Stelle wird das Eingabealphabet durch die Signale  $u_{up}(t)$  und  $u_{dn}(t)$  definiert, da sie direkt den Zustand des PFD wiedergeben. Demnach ergibt sich  $\mathcal{I} = (u_{up}^{\downarrow}, u_{dn}^{\downarrow})$ . Des Weiteren kann die Ausgabemenge  $\mathcal{O} = (o_{A1}, o_{X1}, o_{B1})$  mit  $o_{A1} = u_L$ ,  $o_{X1} = u_H$  und  $o_{B1} = u_L$ , die Zustandsmenge  $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_{A1}, \mathcal{S}_{B1}, \mathcal{S}_{X1})$  mit dem Anfangszustand  $\mathcal{S}_i \in \mathcal{S}$ , der Funktion  $\gamma : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{S}$  zur Berechnung des nächsten Zustandes mit

$$\gamma : \begin{cases} \mathcal{S}_{A1} \rightarrow \mathcal{S}_{A1} & , \text{ wenn } u_{dn}^{\downarrow} \\ \mathcal{S}_{A1} \rightarrow \mathcal{S}_{X1} & , \text{ wenn } u_{up}^{\downarrow} \\ \mathcal{S}_{X1} \rightarrow \mathcal{S}_{A1} & , \text{ wenn } u_{dn}^{\downarrow} \\ \mathcal{S}_{X1} \rightarrow \mathcal{S}_{B1} & , \text{ wenn } u_{up}^{\downarrow} \\ \mathcal{S}_{B1} \rightarrow \mathcal{S}_{X1} & , \text{ wenn } u_{dn}^{\downarrow} \\ \mathcal{S}_{B1} \rightarrow \mathcal{S}_{B1} & , \text{ wenn } u_{up}^{\downarrow} \end{cases} \quad (3.22)$$

angegeben werden. Die Ausgabefunktion  $\eta : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{O}$  lässt sich wieder durch  $\eta : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{O}$  darstellen und kann somit durch

$$\eta = \begin{cases} o_{A1} & , \text{ wenn } \mathcal{S}_{X1} \rightarrow \mathcal{S}_{A1} \vee \mathcal{S}_{A1} \rightarrow \mathcal{S}_{A1} \\ o_{X1} & , \text{ wenn } \mathcal{S}_{A1} \rightarrow \mathcal{S}_{X1} \vee \mathcal{S}_{B1} \rightarrow \mathcal{S}_{X1} \\ o_{B1} & , \text{ wenn } \mathcal{S}_{X1} \rightarrow \mathcal{S}_{B1} \vee \mathcal{S}_{B1} \rightarrow \mathcal{S}_{B1} \end{cases} \quad (3.23)$$

beschrieben werden.

### Endlicher Automat zu Folgerung 3.2

Abbildung 3.20(b) beschreibt den Zustandsautomaten zur Identifikation der Sequenzen  $\mathcal{S}_{\text{ool1}}$  und  $\mathcal{S}_{\text{ool2}}$ . Das Eingabealphabet ist gegeben durch  $\mathcal{I} = (u_{\text{ref}}^{\downarrow}, u_{\text{var}}^{\downarrow})$ , wobei der hochgestellte nach unten zeigende Pfeil darauf hinweist, dass es sich um fallende Flanken handelt. Des Weiteren ergibt sich die Ausgabemenge  $\mathcal{O} = (o_{\text{A2}}, o_{\text{X2}}, o_{\text{B2}})$  mit  $o_{\text{A2}} = o_{\text{B2}} = u_{\text{L}}$ ,  $o_{\text{X2}} = u_{\text{H}}$ , die Zustandsmenge  $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_{\text{A2}}, \mathcal{S}_{\text{B2}}, \mathcal{S}_{\text{X2}})$  mit dem Anfangszustand  $\mathcal{S}_i \in \mathcal{S}$  und der Funktion  $\gamma : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{S}$  zur Berechnung des nächsten Zustandes mit

$$\gamma : \begin{cases} \mathcal{S}_{\text{A2}} \rightarrow \mathcal{S}_{\text{B2}} & , \text{ wenn } u_{\text{ref}}^{\downarrow} \\ \mathcal{S}_{\text{A2}} \rightarrow \mathcal{S}_{\text{X2}} & , \text{ wenn } u_{\text{div}}^{\downarrow} \\ \mathcal{S}_{\text{X2}} \rightarrow \mathcal{S}_{\text{A2}} & , \text{ wenn } u_{\text{div}}^{\downarrow} \\ \mathcal{S}_{\text{X2}} \rightarrow \mathcal{S}_{\text{B2}} & , \text{ wenn } u_{\text{ref}}^{\downarrow} \\ \mathcal{S}_{\text{B2}} \rightarrow \mathcal{S}_{\text{X2}} & , \text{ wenn } u_{\text{ref}}^{\downarrow} \\ \mathcal{S}_{\text{B2}} \rightarrow \mathcal{S}_{\text{A2}} & , \text{ wenn } u_{\text{div}}^{\downarrow} \end{cases} . \quad (3.24)$$

Die Ausgabefunktion  $\eta : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{O}$  lässt sich wieder durch  $\eta : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{O}$  darstellen und kann somit durch

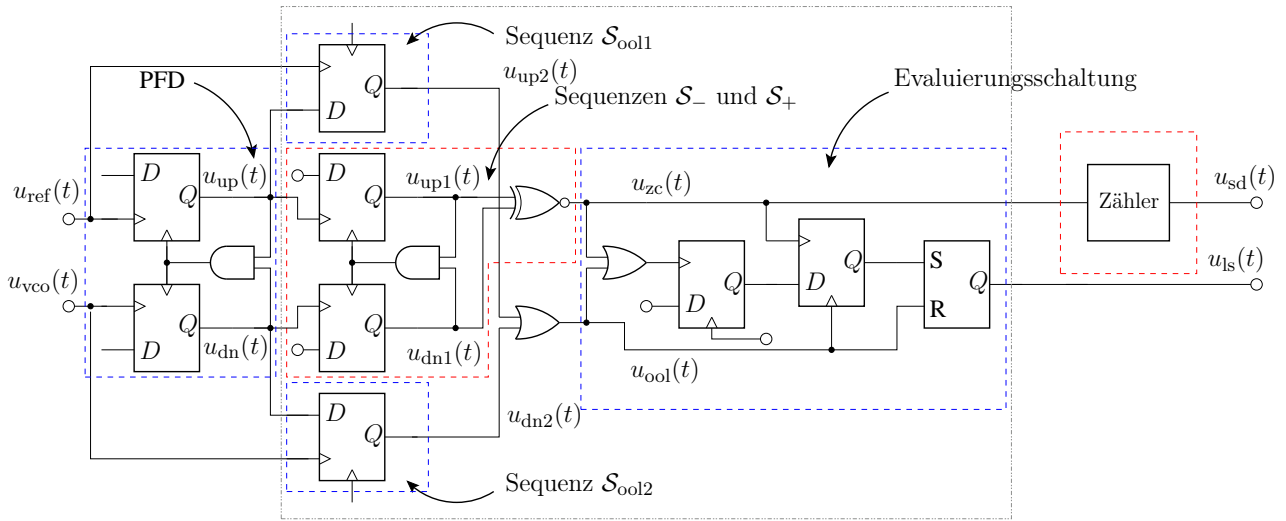
$$\eta = \begin{cases} o_{\text{A2}} & , \text{ wenn } \mathcal{S}_{\text{B2}} \rightarrow \mathcal{S}_{\text{A2}} \vee \mathcal{S}_{\text{X2}} \rightarrow \mathcal{S}_{\text{A2}} \\ o_{\text{X2}} & , \text{ wenn } \mathcal{S}_{\text{B2}} \rightarrow \mathcal{S}_{\text{X2}} \vee \mathcal{S}_{\text{A2}} \rightarrow \mathcal{S}_{\text{X2}} \\ o_{\text{B2}} & , \text{ wenn } \mathcal{S}_{\text{A2}} \rightarrow \mathcal{S}_{\text{B2}} \vee \mathcal{S}_{\text{X2}} \rightarrow \mathcal{S}_{\text{B2}} \end{cases} \quad (3.25)$$

beschrieben werden.

### Schaltung zur Einrast- und Ausregel-Identifikation

Um sicher zu sein, dass der Regelkreis eingerastet ist, ist die Identifikation eines Phasennulldurchganges nicht ausreichend, da insbesondere während des Einschwingens des Regelkreises ein Nulldurchgang des Phasenfehlers auftreten kann. Hinzukommend ist es in verschiedenen Anwendungen erforderlich, die Ausgangsfrequenzen durch den Teiler zu modulieren, beziehungsweise zu wechseln. Während eines solchen Wechsels der Ausgangsfrequenz kann sich der Regelkreis im ausgerasteten Zustand befinden. Abbildung 3.21 zeigt die schematische Realisierung zur Identifikation des internen Zustandes (eingerastet, ausgerastet oder ausgeregelt). Die Sequenzen  $\mathcal{S}_{\text{ool1}}$  und  $\mathcal{S}_{\text{ool2}}$  werden dabei mit Hilfe der Signale  $u_{\text{ref}}(t)$ ,  $u_{\text{vco}}(t)$ ,  $u_{\text{up}}(t)$  und  $u_{\text{dn}}(t)$  mittels zweier D-Flipflops und eines nachgeschalteten Oder-Gatters identifiziert. Diese Schaltung zur Bestimmung des Ausrastzeitpunktes wurde schon in [89] zur Erweiterung des PFD verwendet. Die Topologie des Zustandsgraphen zur Identifikation der Folgen  $\mathcal{S}_+$  und  $\mathcal{S}_-$  ist identisch und somit kann dieser endliche Automat durch die in Abbildung 3.2 dargestellte Variante des PFD repräsentiert werden, wobei die beiden Ausgänge mit einer *Exclusive*-Oder-Verknüpfung verschaltet sind. Damit ergeben

### 3. Grundlagen digitaler Phasenregelkreise



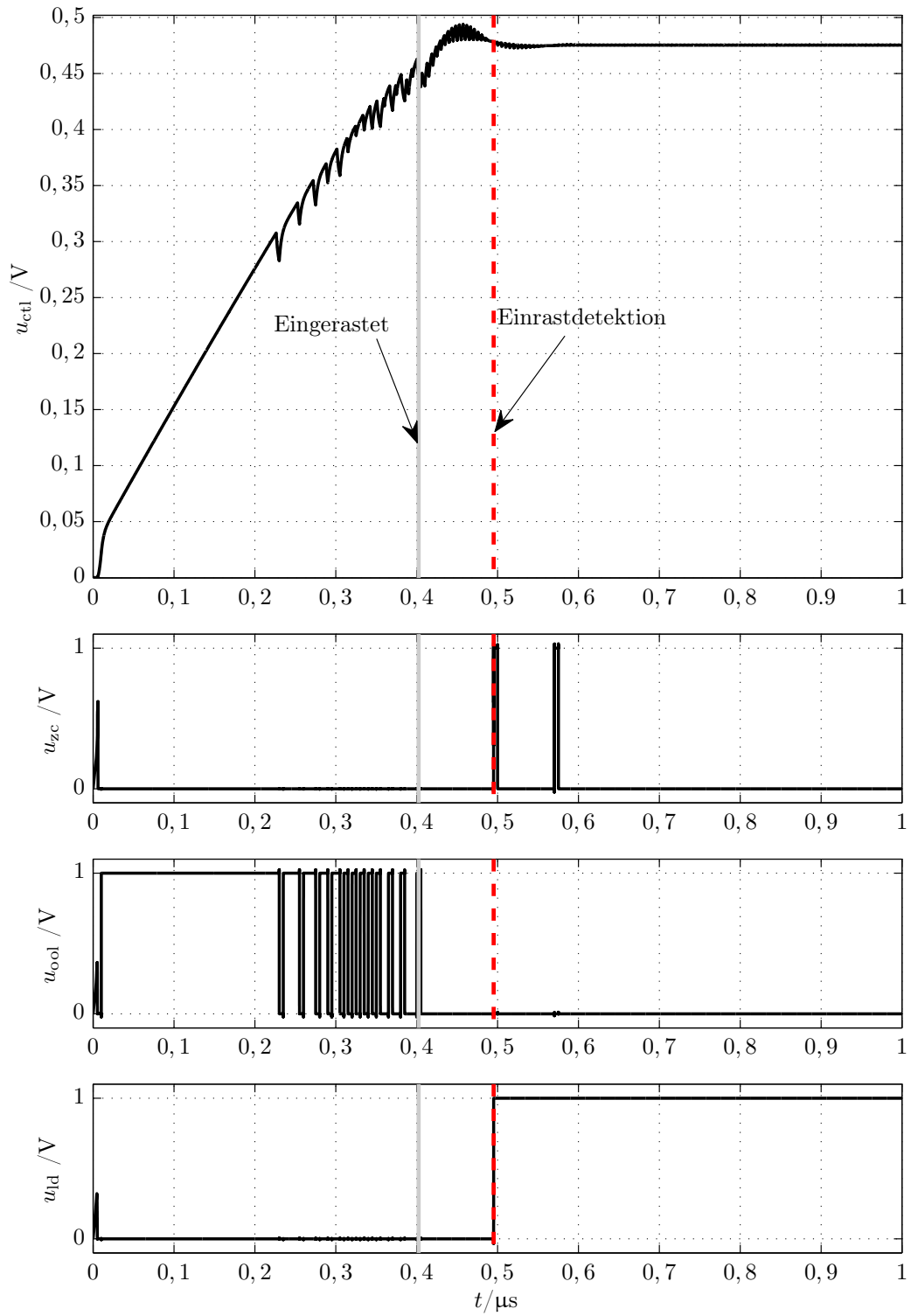
**Abbildung 3.21.:** Schematische Darstellung des Detektors zur Identifikation des Zustandes des Regelkreises (eingeraus, ausgerastet oder ausgeregelt)

sich die Signale  $u_{zc}(t)$  und  $u_{ool}(t)$ . Diese werden mit Hilfe der nachfolgenden Logik ausgewertet. Dabei wird überprüft, ob die Sequenz  $S_+$  (oder  $S_-$ ) direkt nach  $S_{ool1}$  (oder  $S_{ool2}$ ) aufgetreten ist. Falls  $S_{ool1}$  und  $S_{ool2}$  nicht aufgetreten sind, wird ein zweiter Nulldurchgang gezählt, bis das Signal  $u_{ld}(t)$  auf logisch Eins gesetzt wird und somit der Regelkreis eingerastet ist. Um festzustellen, ob der Regelkreis ausgeregelt ist, können die Phasen nulldurchgänge  $S_+$  und  $S_-$  gezählt werden.

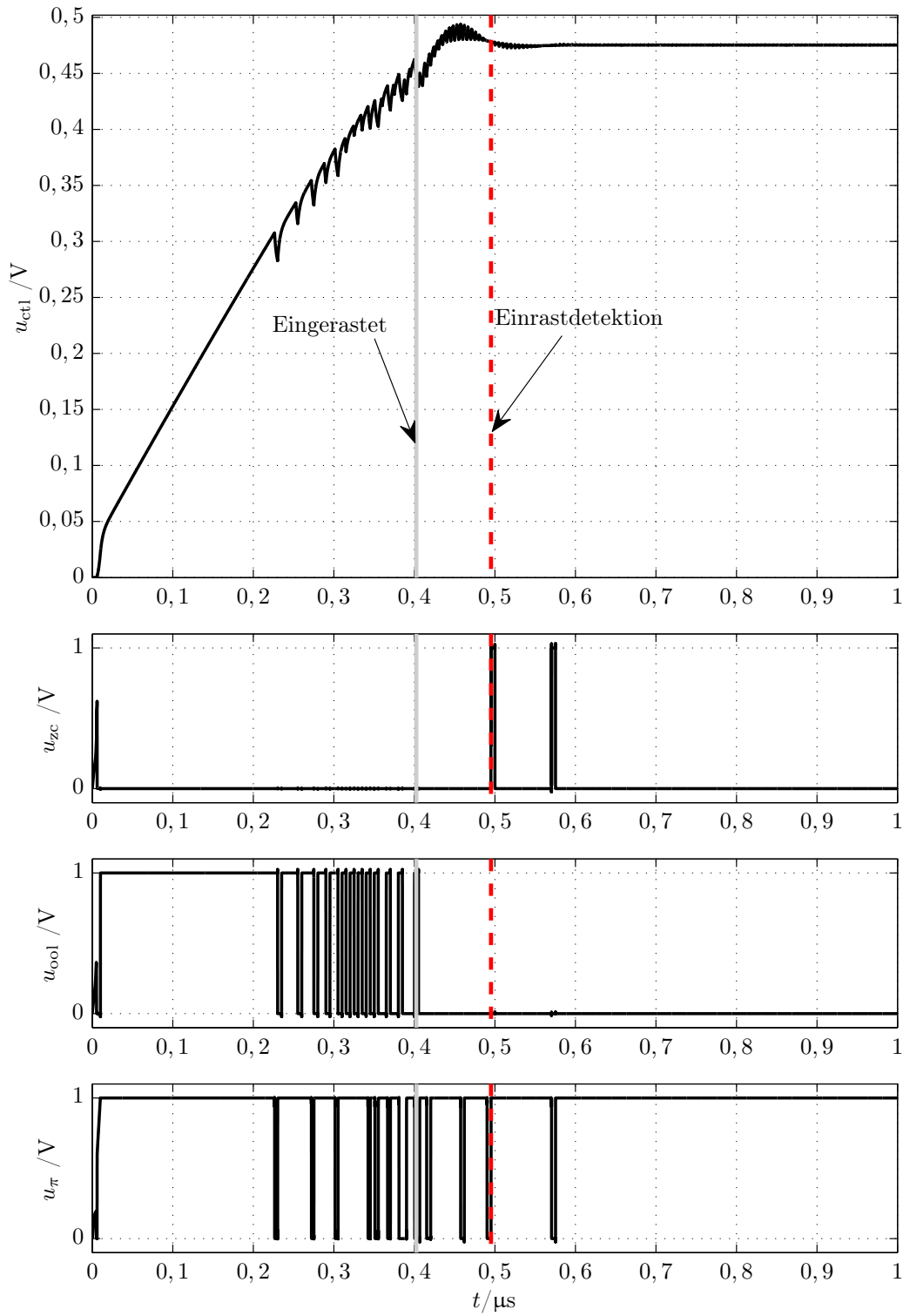
In Abbildung 3.22 ist eine Spectre-Simulation (mit einer 90 nm Technologie) einer CP-PLL dritter Ordnung und der Einrastidentifikation dargestellt. Es ist ersichtlich, dass der wahre Einrastzeitpunkt nicht bestimmt wurde, jedoch wurde nach dem ersten Nulldurchgang des Phasenfehlers der Einrastzeitpunkt angegeben. Bei hinreichender Dämpfung des Systems kann dann der Ausregelzeitpunkt durch den zweiten Nulldurchgang der Phase identifiziert werden.

#### Detektion des Phasenfehlers für ganzzahlige Vielfache von $\pi$

Durch die digitale Logik des PFD lassen sich mittels der Folgerungen 3.1 und 3.2 Nulldurchgänge des Phasenfehlers sowie Phasenfehler mit ganzzahligen Vielfachen von  $2\pi$  einfach identifizieren. Wird bei den Signalen  $u_{ref}(t)$  und  $u_{vco}(t)$  jeweils von einem Tastverhältnis von 50% ausgegangen, so können auch Phasenfehler mit Vielfachen von  $\pi$  bestimmt werden. Dabei lässt sich die Detektion mit Hilfe des PFD und zweier zusätzlicher D-Flipflops (DFF1 und DFF2) realisieren. Die Ausgänge der D-Flipflops sind die Eingänge des PFD.  $u_{ref}(t)$  liegt am  $clk$ -Eingang von DFF1 und  $u_{var}(t)$  liegt am  $rst$ -Eingang an. Genau umgekehrt bezüglich der Signale  $u_{ref}(t)$  und  $u_{var}(t)$  ist dann DFF2 beschaltet. Der  $clk$ -Eingang ist dabei flankengesteuert und der  $rst$ -Eingang pegelgesteuert. Die beiden Ausgänge des PFD sind die Eingänge eines *Exclusive-Or*-Gatters. Das Blockschaltbild ist in Abbildung



**Abbildung 3.22.:** Spectre-Simulation der Einrastidentifikation für einen digitalen Phasenregelkreis dritter Ordnung



**Abbildung 3.23.:** Spectre-Simulation der Einrastidentifikation und  $\pi$ -Detektor für einen digitalen Phasenregelkreis dritter Ordnung



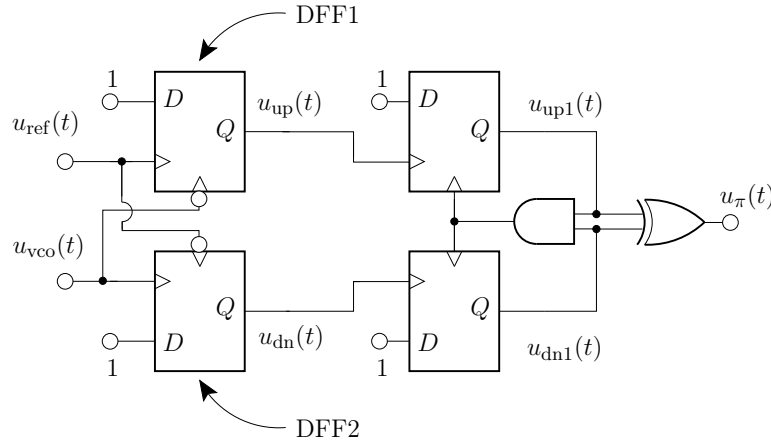


Abbildung 3.24.: Schematische Darstellung des  $\pi$ -Detektors

3.24 dargestellt. In Abbildung 3.23 ist eine Spectre-Simulation des  $\pi$ -Detektors angegeben sowie die Simulationen zu den Schaltungen nach den Folgerungen 3.1 und 3.2.

### Zusammenfassung

Dieses vorgestellte Verfahren zur Identifikation des internen Zustandes eines digitalen Phasenregelkreises mit *Tri-State*-PFD liefert die Möglichkeit, das transiente Verhalten auf der Ebene der logischen Zustände des PFD zu analysieren und festzustellen, ob das System eingerastet und/oder ausgeglet ist. Weiter können die vorgestellten Zustandsautomaten dazu verwendet werden, die Bandbreite so zu adaptieren, dass sogenannte *Fast-Locking*-Anwendungen ermöglicht werden. Dazu ist es erforderlich, den *Charge-Pump*-Strom oder das Filter zu schalten. Eine größere Bandbreite kann dann beispielsweise während des Wechsels von einer zu einer anderen Frequenz benutzt werden, d. h. durch das Variieren des *Charge-Pump*-Stromes oder durch die Änderung der Eigenschaften des Filters. Wenn der Regelkreis eingerastet ist, kann die Bandbreite verwendet werden, die für die entsprechende Anwendung vorgesehen ist. In [13, 76, 84, 90] sind tiefergehende Erläuterungen zu *Fast-Locking*-PLL-Systemen zu finden.

Neben der angeführten Schaltung lässt sich dieses Verfahren für Simulationen verwenden, da dadurch eine Abbruchbedingung für verschiedene Simulationen gegeben ist. Dadurch lässt sich insbesondere bei Parametervariationen die Simulationszeit drastisch verkürzen. Die vorgestellten Zustandsautomaten wurden beispielsweise zur numerischen und automatisierten Bestimmung des *Pull-Out*-Bereiches im vorangegangenen Kapitel 3.2.1 verwendet.



---

## Modellierung und Analyse digitaler Phasenregelkreise

---

*Da für Filtertypen höherer Ordnung die Phasengleichung des spannungsgesteuerten Oszillators nicht bijektiv ist und somit die Modelle ausschließlich mittels numerischer Verfahren gelöst werden müssen, werden in diesem Abschnitt Phasenregelkreise der Ordnung Zwei betrachtet und geeignete Approximationen vorgestellt, um analytische Modelle zu erhalten. Dabei werden die Modelle von GARDNER, VAN PAEMEL, ACCO und HEDAYAT zunächst eingeführt und an geeigneter Stelle ergänzt. Hinzukommend werden zwei Modelle angegeben, die das Dead-Zone-Verhalten und die Leckstromproblematik analytisch beschreiben. Als Grundlage der Betrachtungen dienen die Modelle von VAN PAEMEL und HEDAYAT. Des Weiteren wird ein Ansatz zur Modellierung digitaler Phasenregelkreise mit beliebiger Ordnung vorgestellt.*

### 4.1. Modellierung und Analyse von Phasenregelkreisen

Im Laufe der letzten 30 Jahre wurden verschiedene Modelle zur Beschreibung, Charakterisierung und zum Entwurf von Phasenregelkreisen entwickelt. Jedes dieser Modelle kann für unterschiedliche Betrachtungen herangezogen werden. Generell liefert jedes Modell für ein System unter bestimmten Randbedingungen unterschiedliche Aussagen im Hinblick auf Stabilität und Parameterbestimmung oder Simulation. Häufig werden beim Entwurf oder

bei der Simulation die Randbedingungen, auf denen das Modell beruht, nicht berücksichtigt, was unter Umständen zu Problemen im späteren System führen kann. Im Folgenden sollen deshalb die wichtigsten nichtlinearen Modelle für Regelkreise zweiter Ordnung erläutert und bezüglich ihrer Randbedingungen und Grenzen dargelegt werden. 1980 wurde von GARDNER [16] erstmals eine Stabilitätsgrenze für Regelkreise der Ordnung Zwei und Drei unter Berücksichtigung des Abtastverhaltens der Phasenregelkreise durch gezielte Linearisierung bestimmt. Die grundlegende Betrachtung liegt dabei in den Phasensignalen. Die Grenze für die Stabilität von Regelkreisen der Ordnung Zwei konnte dann 1994 von VAN PAEMEL [32] auf Basis eines nichtlinearen Modells bestätigt werden. Es wurde ein nicht-lineares schaltendes Modell mit zwei Zuständen angegeben - den Pulsbreiten des *Charge-Pump*-Stromes und der Regelspannung. Die Linearisierungen waren den GARDNERS nicht unähnlich. 2001 wurde das Modell von VAN PAEMEL durch ACCO [33] normalisiert und in allen Sektoren einzeln mittels der TAYLOR-Reihenentwicklung linearisiert, wodurch auch dort die von GARDNER bestimmte Stabilitätsgrenze validiert wurde. Ein etwas anderer Ansatz als bei VAN PAEMEL wurde 1997 von HEDAYAT beschrieben, wodurch auf Basis der Phasengleichungen und der internen Logik des PFD ein analytisches Modell für den Phasenregelkreis der Ordnung Zwei beschrieben wurde, wobei hier insbesondere die ereignisgesteuerte Modellierung im Vordergrund stand. Dieses Modell wird im Folgenden dahingehend modifiziert, dass eine ähnliche Analyse wie bei ACCO erfolgen kann.

### 4.1.1. Modellierung und Stabilität des Modells nach GARDNER

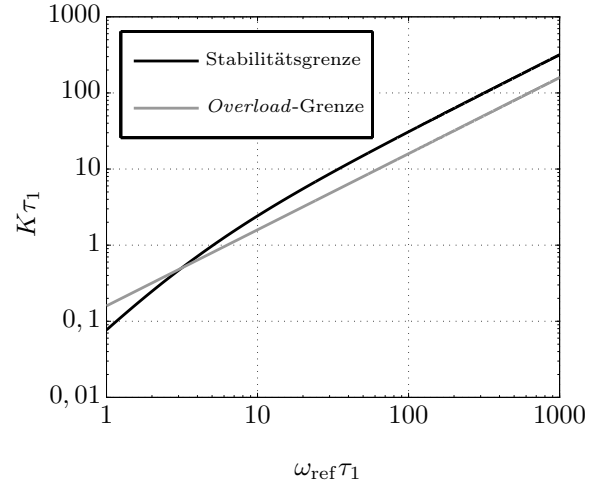
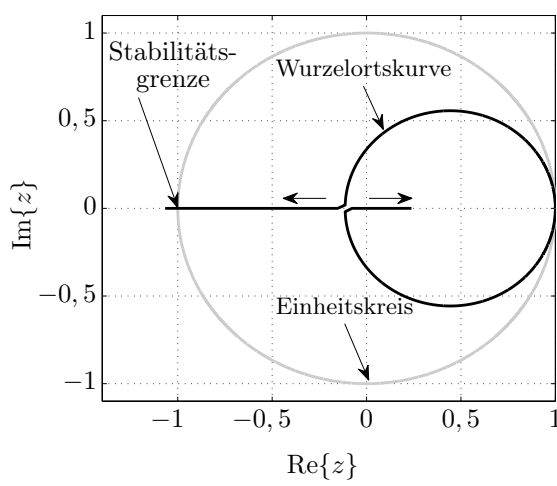
Das grundlegende Problem der Analyse von digitalen Phasenregelkreisen ist der schaltende Strom  $i_p \in (+I_p, 0 \text{ A}, -I_p)$ , der durch den PFD gesteuert wird. Diese Problematik wird durch die komplexe Beziehung der Schaltzeitpunkte zu der Referenzphase  $\varphi_{\text{ref}}$  und der VCO-Phase  $\varphi_{\text{vco}}$  erschwert. Von GARDNER [16] wurde erkannt, dass, sobald eine fallende oder steigende Flanke an einem der Eingänge des PFD erfolgt und der *Charge-Pump*-Strom geschaltet wurde, der Regelkreis als offen angesehen werden kann. Zudem wird das System zwischen zwei Schaltzeitpunkten durch ein lineares Differenzialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten beschrieben. Durch diesen Ansatz (siehe [16]) konnte die nichtlineare Differenzengleichung

$$\varphi_{\text{vco}}(t_2) = \varphi_{\text{vco}}(t_0) + \omega_{\text{vco}} t_2 + \frac{2\pi K_v}{N} \left( i_p R_1 t_1 - \frac{i_p t_1^2}{2C_1} + u_{C_1}(t_0) t_2 + \frac{i_p t_1 t_2}{C_1} \right) \quad (4.1)$$

angegeben werden. Dabei wurde angenommen, dass das System nahe dem Fixpunkt ist. Die *Charge-Pump* wurde durch  $i_p = I_p \cdot \text{sign}\{\varphi_e\}$  modelliert. Hinzukommend wurden die Annahmen

$$t_1 = \frac{|\varphi_e|}{\omega_{\text{ref}}}, \quad (4.2a)$$

$$i_p t_1 = I_p \frac{\varphi_e}{\omega_{\text{ref}}} \quad (4.2b)$$



(a) Wurzelortskurve des linearisierten, zeitdiskreten Modells für einen digitalen Phasenregelkreis zweiter Ordnung

(b) Stabilitätsgrenze des linearisierten, zeitdiskreten Modells für einen digitalen Phasenregelkreis zweiter Ordnung

**Abbildung 4.1.:** Wurzelortskurve und Stabilitätsgrenze des linearisierten, zeitdiskreten Modells für einen digitalen Phasenregelkreis zweiter Ordnung

und

$$t_2 = \frac{2\pi}{\omega_{\text{ref}}} \quad (4.2c)$$

zur Linearisierung angeben. Gleichung (4.2a) lässt sich aus dem Sachverhalt ableiten, dass im Zustand  $\mathcal{S}_{-1}$  bei einem Phasenfehler  $\varphi_e = \varphi_{\text{vco}}$  durch die nächste fallende (steigende) Flanke des Referenzsignals  $u_{\text{ref}}(t)$  der Zustand  $\mathcal{S}_0$  erreicht wird. Wird aber angenommen, dass sich zum Zeitpunkt  $t_0$  der PFD im Zustand  $\mathcal{S}_{-1}$  befindet und eine fallende Flanke des VCO-Signals erfolgt, so ist die Annahme der Gleichung (4.2a) nicht mehr zutreffend, da die Phase des spannungsgesteuerten Oszillators durch die Schleife (Regelung) bestimmt wird. Somit ist auch Gleichung (4.2c) während des Zustandswechsels eine Approximation, die, insofern die Frequenzen und Phasen am Eingang des PFD näherungsweise gleich sind, als sinnvoll erscheinen. Mit  $\omega_e = \omega_{\text{ref}} - \omega_{\text{vco}}$  und  $\varphi_e = \varphi_{\text{ref}} - \varphi_{\text{vco}}$  sowie den angegebenen Approximationen können die linearen Differenzengleichungen

$$\varphi_e(t_2) = \varphi_e(t_0) + 2\pi \frac{\omega_e}{\omega_{\text{ref}}} - \frac{2\pi K_v I_p \varphi_e(t_0)}{N \omega_{\text{ref}}} \left( R_1 + \frac{2\pi}{\omega_{\text{ref}} C_1} \right) - \frac{(2\pi)^2 K_v u_{C_1}(t_0)}{N \omega_{\text{ref}}} \quad (4.3a)$$

und

$$u_{C_1}(t_2) = u_{C_1}(t_0) + \frac{\varphi_e(t_0) I_p}{\omega_{\text{ref}} C_1} \quad (4.3b)$$

aufgestellt werden. Entsprechend kann das Differenzengleichungssystem

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A} \mathbf{x}_k + \mathbf{b} \quad (4.4)$$

angegeben werden, mit der Systemmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 - 2\pi K_v I_p \frac{R_1 + \frac{2\pi}{N\omega_{\text{ref}} C_1}}{\omega_{\text{ref}}} & -\frac{(2\pi)^2 K_v}{N\omega_{\text{ref}}} \\ \frac{I_p}{\omega_{\text{ref}} C_1} & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

dem Zustandsvektor  $\mathbf{x}_k = [\varphi_{e,k}, v_{\text{ctl},k}]^T = [\varphi_k, v_k]^T$  und dem Vektor  $\mathbf{b} = [2\pi\omega_e/\omega_{\text{ref}}, 0]^T$ . Wird nun das charakteristische Polynom der Matrix  $\mathbf{A}$  mit Hilfe des JURY-Kriteriums auf ein Einheitskreispolynom geprüft, ergeben sich die Ungleichung

$$K' < \frac{1}{\frac{\pi}{\omega_{\text{ref}} \tau_1} \left( 1 + \frac{\pi}{\omega_{\text{ref}} \tau_1} \right)}, \quad (4.6)$$

und

$$K' < \frac{1}{\frac{2\pi}{\omega_{\text{ref}} \tau_1}}, \quad (4.7)$$

wobei  $K' = K\tau_1$  durch

$$K' = \frac{K_v I_p R_1}{N} \tau_1$$

definiert ist. Wenn die Ungleichung (4.6) eingehalten ist, so gilt auch die Ungleichung (4.7). In der Abbildung 4.1 ist die Wurzelortkurve dargestellt sowie die berechnete Stabilitätsgrenze nach Ungleichung (4.6).

In derselben Veröffentlichung [16] wurde eine Stabilitätsgrenze basierend auf den eben vorgestellten Verfahren für einen Regelkreis der Ordnung Drei dargelegt. Das Kriterium ergibt sich zu

$$K\tau_1 < \frac{4(1+\alpha)}{\frac{2\pi(\beta-1)}{\beta\omega_{\text{ref}}\tau_1} \left( \frac{2\pi(1+\alpha)}{\omega_{\text{ref}}\tau_1} + \frac{2(1-\alpha)(\beta-1)}{\beta} \right)}, \quad (4.8a)$$

mit

$$\alpha = e^{-\frac{2\pi\beta}{\omega_{\text{ref}}\tau_1}} \quad (4.8b)$$

und

$$\beta = 1 + \frac{C_1}{C_2}. \quad (4.8c)$$

Die Problematik, die sich an dieser Stelle zeigt, ist, dass die Linearisierung zwar oberflächlich betrachtet als schlüssig zu werten ist, jedoch konnte bislang keine Abschätzung des Fehlers bei der Linearisierung erbracht werden. Die Annahmen, die GARDNER zur Linearisierung angesetzt hatte, die im mathematischen Sinne nicht den Ansprüchen zur Charakterisierung des Systems genügen, sollen im Laufe dieser Arbeit noch diskutiert werden. Da jedoch die Grundlagen für diese Betrachtung erst später durch das Modell von VAN PAEMEL [32] und durch ACCO [33] aufgezeigt wurden, sollen diese Arbeiten zunächst vorgestellt werden.

### 4.1.2. Modellierung und Stabilität des Modells nach VAN PAEMEL

Im Folgenden soll das von VAN PAEMEL eingeführte Modell dargelegt werden [32]. Durch die Eingangssignale  $u_{\text{ref}}(t)$  und  $u_{\text{var}}(t)$  des PFD werden die Pulsweiten  $\tau_k$  des Stromes  $i_p$  der *Charge-Pump* innerhalb des Regelkreises bestimmt. Wird für die Pulsbreite des Signals  $u_{\text{up}}(t)$  ein positives Vorzeichen und für die Pulsbreite des Signals  $u_{\text{dn}}(t)$  ein negatives Vorzeichen angenommen, so kann der *Charge-Pump*-Strom durch

$$i_p = \begin{cases} I_p \cdot \text{sign}\{\tau_k\} & \forall \tau_k \neq 0 \\ 0 \text{ A} & \forall \tau_k = 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

beschrieben werden. Offensichtlich ist  $\tau_k$  ein Zustand des Differenzialgleichungssystems. Der andere Zustand ist die Spannung über der Kapazität des Schleifenfilters. Damit kann das Differenzialgleichungssystem in ein Differenzengleichungssystem mit zwei Zuständen überführt werden, wobei vier Sequenzen betrachtet werden (siehe Abbildung 4.2(a) bis 4.2(d)). Das Modell beinhaltet innerhalb der Publikation [32] zwar sechs Fallunterscheidungen, jedoch wird durch die anderen beiden Fallunterscheidungen der Ziehbereich in der Simulation mit betrachtet, d.h. wenn für den Phasenfehler  $|\varphi_e| > 2\pi$  gilt. Da die Pulsweiten des *Charge-Pump*-Stromes betrachtet werden, lässt sich die folgende Beziehung zur Bestimmung der Zustandsvariablen  $\tau$  angeben:

$$\int_0^{T+\tau_{k+1}-\tau_k} f_{\text{vco}}(t) dt = 1, \quad (4.10)$$

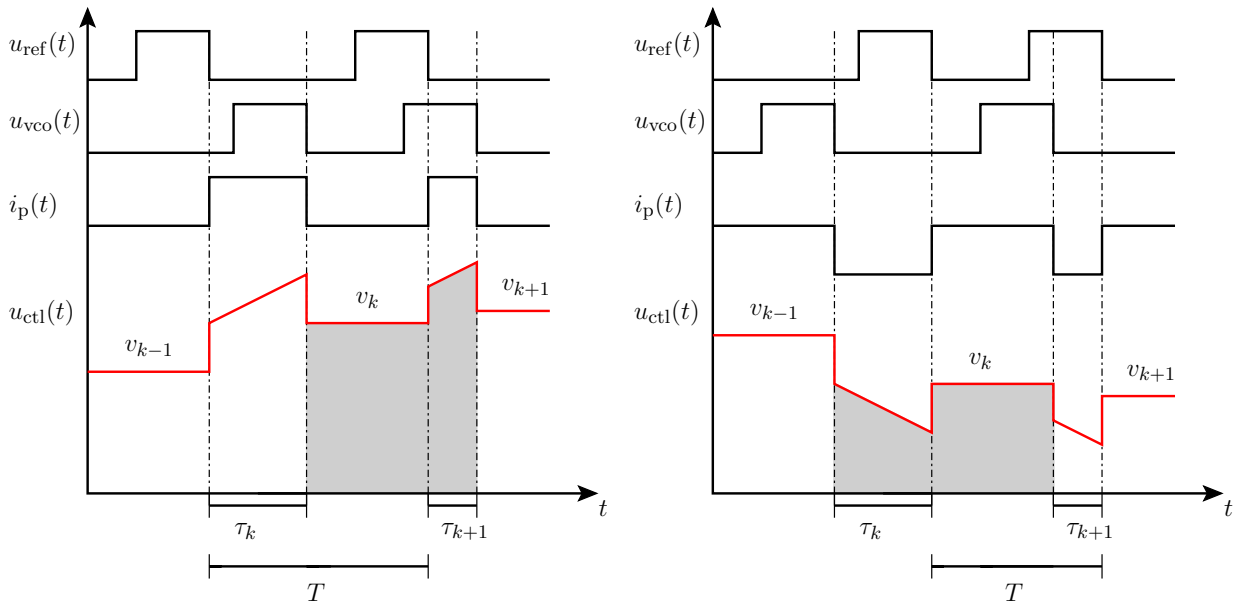
wobei  $T = 1/f_{\text{ref}}$  und  $f_{\text{vco}}(t)$  die Ausgangsfrequenz des spannungsgesteuerten Oszillators darstellt. Es gilt

$$f_{\text{vco}}(t) = K_v \cdot u_{\text{ctl}}(t) \quad (4.11)$$

mit der Steuerspannung  $u_{\text{ctl}}(t)$  und dem Verstärkungsbeiwert  $K_v$ . Es ergibt sich die Gleichung

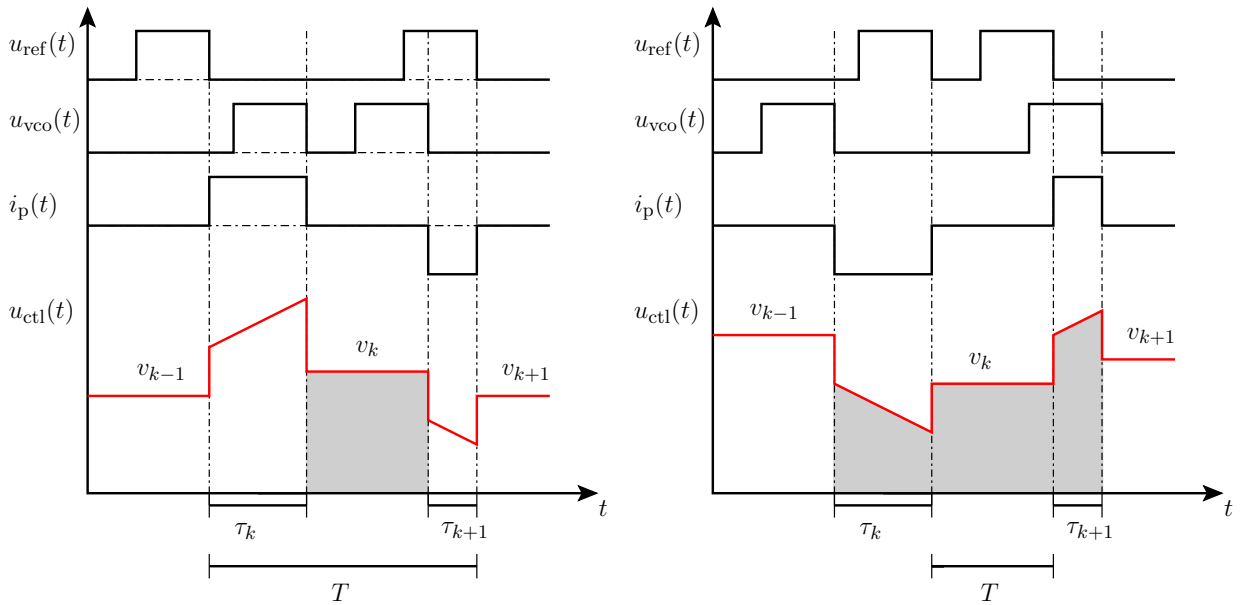
$$v_{k+1} = v_k + \frac{I_p}{C_1} \tau_{k+1} \quad (4.12)$$

#### 4. Modellierung und Analyse digitaler Phasenregelkreise



(a) Fall 1: Mit  $\tau_k \geq 0$  und  $\tau_{k+1} > 0$  gelten die Gleichungen (4.12) und (4.13a).

(b) Fall 2: Mit  $\tau_k < 0$  und  $\tau_{k+1} \leq 0$  gelten die Gleichungen (4.12) und (4.13b).



(c) Fall 3: Mit  $\tau_k \geq 0$  und  $\tau_{k+1} \leq 0$  gelten die Gleichungen (4.12) und (4.13c).

(d) Fall 4: Mit  $\tau_k < 0$  und  $\tau_{k+1} > 0$  gelten die Gleichungen (4.12) und (4.13d).

**Abbildung 4.2.:** Behandlung der Fallunterscheidungen, die sich bei der Betrachtung der Gleichung (4.10) und der möglichen Zustände ergeben, wobei hier ausschließlich der eingerastete Bereich berücksichtigt wird.

für die Spannung über der Kapazität, wobei diese offensichtlich von der zu bestimmenden Zustandsgröße  $\tau_{k+1}$  abhängt. Aus Gleichung (4.10) und Abbildung 4.2 können die folgenden



Beziehungen für den Zustand  $\tau_{k+1}$  hergeleitet werden:

$$\tau_{k+1}^{\text{F1}} = \frac{-(I_p R_1 + v_k) + \sqrt{(I_p R_1 + v_k)^2 - \frac{2I_p}{C_1} \left( v_k (T - \tau_k) - \frac{1}{K_v} \right)}}{\frac{I_p}{C_1}} \quad (4.13a)$$

$$\tau_{k+1}^{\text{F2}} = \tau_k - T + \frac{\frac{1}{K_v} - I_p R_1 \tau_k - \frac{I_p \tau_k^2}{2C_1}}{v_k} \quad (4.13b)$$

$$\tau_{k+1}^{\text{F3}} = \tau_k - T + \frac{1}{K_v v_k} \quad (4.13c)$$

$$\tau_{k+1}^{\text{F4}} = \frac{-(I_p R_1 + v_k)}{\frac{I_p}{C_1}} + \frac{\sqrt{(I_p R_1 + v_k)^2 + \frac{2I_p}{C_1} \left( v_k (\tau_k - T) + \frac{1}{K_v} - I_p \left( R_1 \tau_k + \frac{\tau_k^2}{2C_1} \right) \right)}}{\frac{I_p}{C_1}} \quad (4.13d)$$

Somit ergibt sich

$$\tau_{k+1} = \begin{cases} \tau_{k+1}^{\text{F1}} & \forall \tau_k \geq 0, \tau_{k+1} > 0 \\ \tau_{k+1}^{\text{F2}} & \forall \tau_k < 0, \tau_{k+1} \leq 0 \\ \tau_{k+1}^{\text{F3}} & \forall \tau_k \geq 0, \tau_{k+1} \leq 0 \\ \tau_{k+1}^{\text{F4}} & \forall \tau_k < 0, \tau_{k+1} > 0 \end{cases}. \quad (4.14)$$

Die Gleichungen (4.13a), (4.13b), (4.13c) und (4.13d) lassen sich dabei mit Hilfe der Abbildungen 4.2(a), 4.2(b), 4.2(c) und 4.2(d) herleiten. Dazu ist es erforderlich, die grau unterlegten Flächen zu bestimmen und nach  $\tau_{k+1}$  aufzulösen.

Um die Stabilität des Systems nach Gleichung (4.14) analytisch zu untersuchen und einen geschlossenen Ausdruck auf der  $z$ -Ebene zu erhalten, wurde von VAN PAEMEL [32] eine Linearisierung eingeführt. Unter der Annahme, dass der Term  $\tau_k^2$  vernachlässigt werden kann, ergibt sich aus den Gleichungen (4.12) und (4.13b)

$$\Sigma_L : \begin{cases} \tau_{k+1} &= -T a_k + \tau_k (1 - I_p R_1 K_v T (1 - a_k)) \\ a_{k+1} &= a_k + \frac{I_p K_v T}{C_1} \tau_{k+1} \end{cases}, \quad (4.15)$$

wobei die Substitution  $v_k = (1 + a_k)/(K_v T)$  und die Approximation

$$\frac{1}{v_k} = K_v T (1 - a_k) \quad (4.16)$$

angesetzt wurden. Durch das Einsetzen von  $\tau_{k+1}$  (siehe Gleichung (4.15)) in  $a_{k+1}$  (siehe Gleichung (4.15)) und durch  $(a_k - a_{k-1})C_1/(K_v I_p T) \approx 0$  ergibt sich

$$a_{k+1} + \left( \frac{K_N}{\tau_{1N}} + K_N - 2 \right) a_k + (1 - K_N) a_{k-1} = 0 \quad (4.17)$$

mit  $K_N = I_p R_1 K_v T$  und  $\tau_{1N} = R_1 C_1 / T$ . Damit kann für die Nullstellen des Polynoms

$$D(z) = z^2 + \left( \frac{K_N}{\tau_{1N}} + K_N - 2 \right) z + (1 - K_N) > 0 \quad (4.18)$$

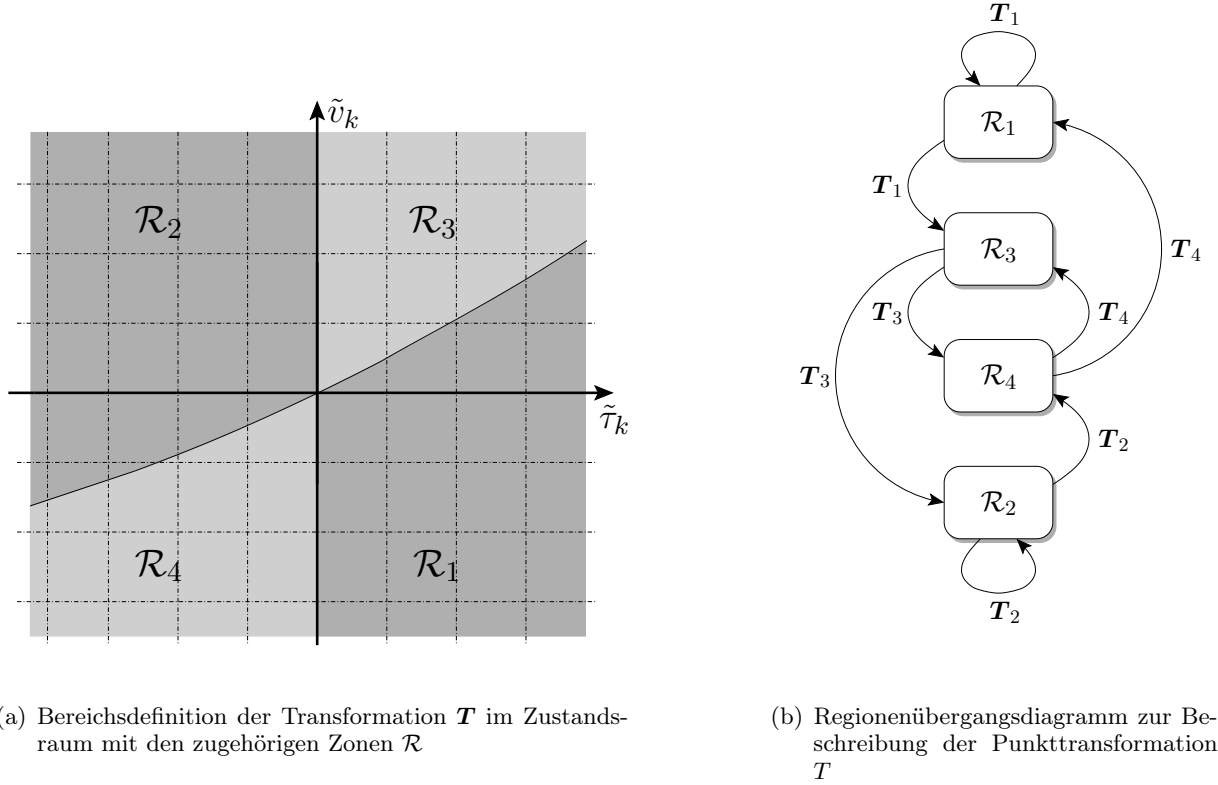
die Bedingung

$$K_N < \frac{2}{1 + \frac{1}{2\tau_{1N}}} \quad (4.19)$$

angegeben werden. Durch einfache Umformungen kann die Stabilitätsgrenze (4.19) nach VAN PAEMEL in die von GARDNER (4.6) überführt werden. Die Problematik des Ansatzes nach VAN PAEMEL ist ähnlich wie die bei GARDNER. Auch hier wurde keine Fehlerabschätzung angegeben. Es wurde letztendlich angenommen, da sich das Gleichungssystem (4.14) in vier Gebiete unterteilt und die Linearisierung genau auf der Grenze aller Gebiete durchgeführt wurde, dass es ausreicht, die Stabilität einer Gleichung zu überprüfen. Es wurde die Annahme zu Grunde gelegt, dass, wenn die Stabilität für den Fall 2 gezeigt ist, dann werden auch die anderen Fälle sowie das Schalten zwischen den einzelnen Fällen stabil sein. Diese Annahme ist im Allgemeinen falsch, da es selbst, wenn zwei lineare, autonome und stabile Systeme untereinander geschaltet werden, vorkommen kann, dass das resultierende System instabil ist. Dementsprechend konnte zwar eine Stabilitätsgrenze angegeben werden, diese konnte jedoch nicht in voller Konsequenz bewiesen werden und es wurde bezüglich der Linearisierung keine Abschätzung des Fehler angegeben.

### 4.1.3. Modellierung und Stabilität des Modells nach ACCO

Die Arbeiten von ACCO [33–35] hinsichtlich der Modellierung basieren auf dem Modell nach VAN PAEMEL [32]. Dabei wurden die Gleichungen normiert und der Fixpunkt in den Ursprung verschoben, wodurch sich eine kompaktere Schreibweise mit verschiedenen Vorteilen gegenüber den ursprünglichen Gleichungen ergibt. Insbesondere vereinfacht diese Darstellung die Betrachtung der Stabilität mittels Linearisierung erheblich.



**Abbildung 4.3.:** Bereichsdefinition und Regionenübergangsdiagramm der Transformation  $T$  im Zustandsraum mit den zugehörigen Zonen  $\mathcal{R}_1$  bis  $\mathcal{R}_4$  mit  $\mathcal{R}_i \in \mathbb{R}^2$  und  $i \in (1, 2, 3, 4)$

Im Folgenden soll kurz das zugehörige normierte und in den Nullpunkt verschobene Modell angegeben werden, um innerhalb der Stabilitätsanalyse mittels der zugehörigen JACOBI-Matrizen kompaktere Ausdrücke mit ausschließlich zwei Parametern zu erhalten. Durch die Normierung  $\tilde{\tau}_k = \tau_k/T$ , die Verschiebung  $\tilde{v}_k = TK_v v_k - 1$  und die beiden Substitutionen

$$a = K_v I_p R_1 T \quad (4.20a)$$

und

$$b = \frac{K_v I_p T^2}{2C_1} \quad (4.20b)$$

können die Gleichungen (4.13a) bis (4.13d) von VAN PAEMEL umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_{k+1}^{\text{F1}} &= \frac{-(\tilde{v}_k + a + 1) + \sqrt{(\tilde{v}_k + a + 1)^2 - 4b((\tilde{v}_k + 1)(1 - \tilde{\tau}_k) - 1)}}{2b} \\ &= g_1(\tilde{\tau}_k, \tilde{v}_k) \end{aligned} \quad (4.21a)$$

$$\tilde{\tau}_{k+1}^{\text{F2}} = \tilde{\tau}_k - 1 + \frac{1 - a\tilde{\tau}_k - b\tilde{\tau}_k^2}{1 + \tilde{v}_k} \quad (4.21b)$$

$$= g_2(\tilde{\tau}_k, \tilde{v}_k)$$

$$\tilde{\tau}_{k+1}^{\text{F3}} = \tilde{\tau}_k - 1 + \frac{1}{1 + \tilde{v}_k} \quad (4.21c)$$

$$= g_3(\tilde{\tau}_k, \tilde{v}_k)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_{k+1}^{\text{F4}} &= \frac{-(\tilde{v}_k + a + 1)}{2b} + \\ &\quad \frac{\sqrt{(\tilde{v}_k + a + 1)^2 - 4b((\tilde{v}_k + 1)(1 - \tilde{\tau}_k) - 1 + (a\tilde{\tau}_k + b\tilde{\tau}_k^2))}}{2b} \end{aligned} \quad (4.21d)$$

$$= g_4(\tilde{\tau}_k, \tilde{v}_k)$$

Somit ergibt sich das vollständige Differenzengleichungssystem zu

$$\tilde{\tau}_{k+1} = \begin{cases} \tilde{\tau}_{k+1}^{\text{F1}} & \forall (\tilde{\tau}_k, \tilde{v}_k) \in \mathcal{R}_1 \\ \tilde{\tau}_{k+1}^{\text{F2}} & \forall (\tilde{\tau}_k, \tilde{v}_k) \in \mathcal{R}_2 \\ \tilde{\tau}_{k+1}^{\text{F3}} & \forall (\tilde{\tau}_k, \tilde{v}_k) \in \mathcal{R}_3 \\ \tilde{\tau}_{k+1}^{\text{F4}} & \forall (\tilde{\tau}_k, \tilde{v}_k) \in \mathcal{R}_4 \end{cases} \quad (4.22a)$$

und

$$\tilde{v}_{k+1} = \tilde{v}_k + 2b\tilde{\tau}_{k+1}. \quad (4.22b)$$

Dabei wird der Zustandsraum durch

$$LC_0 : \tilde{\tau}_k = 0 \quad (4.23a)$$

$$LC_1 : \tilde{\tau}_{k+1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\tilde{v}_k + 1} - 1 + \tilde{\tau}_k = 0, & \forall \tilde{\tau}_k \leq 0 \\ (\tilde{v} + 1)(1 - \tilde{\tau}_k) + a\tilde{\tau}_k + b\tilde{\tau}_k^2 - 1 = 0, & \forall \tilde{\tau}_k \geq 0 \end{cases} \quad (4.23b)$$

aufgeteilt. Innerhalb der Arbeiten von VAN PAEMEL liegt der Fixpunkt auf der Koordinate  $[\tau_k, v_k] = [0 \text{ s}, 1/(K_v T)]$ . Durch  $\tilde{\tau}_k = \tau_k/T$  und  $\tilde{v}_k = TK_v v_k - 1$  ergibt sich für die Gleichungen nach ACCO  $[\tilde{\tau}_k, \tilde{v}_k] = [0, 0]$ . Die Gleichungen (4.21a) bis (4.21d) können in die Matrix-Darstellung

$$\begin{bmatrix} \tilde{\tau}_{k+1} \\ \tilde{v}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_i(\tilde{\tau}_k, \tilde{v}_k) \\ v_k + 2bg_i(\tilde{\tau}_k, \tilde{v}_k) \end{bmatrix} = \mathbf{T}_i(\tilde{\tau}_k, \tilde{v}_k) = \mathbf{T}_i(\mathbf{x}_k) \quad (4.24)$$

umgeformt werden, mit  $i \in (1, 2, 3, 4)$ . Durch die Einführung einer Punkttransformationen  $\mathbf{T}_i$ , definiert durch Gleichung (4.22a) oder (4.24), kann die Topologie analysiert werden. Dabei beschreibt Abbildung 4.3(a) den in vier Gebiete unterteilten Zustandsraum und Abbildung 4.3(b) zeigt die Übergänge von einem Gebiet in ein anderes, beschrieben durch die Punkttransformationen  $\mathbf{T}_i$ . Hinsichtlich der Punkttransformation wurde von ACCO [35] auch das inverse Modell eingeführt, welches die topologischen Eigenschaften des Systems tiefergehend charakterisiert, wobei an dieser Stelle nicht weiter darauf eingegangen wird. Mittels der TAYLOR-Approximation kann das Gleichungssystem

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \tilde{\tau}_k} g_i(\tilde{\tau}_k, \tilde{v}_k) & \frac{\partial}{\partial \tilde{v}_k} g_i(\tilde{\tau}_k, \tilde{v}_k) \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{\tau}_k} g_i(\tilde{\tau}_k, \tilde{v}_k) & 1 + 2b \frac{\partial}{\partial \tilde{v}_k} g_i(\tilde{\tau}_k, \tilde{v}_k) \end{bmatrix} \mathbf{x}_k = \mathbf{A}_i \mathbf{x}_k \quad (4.25)$$

angegeben werden mit dem Zustandsvektor  $\mathbf{x}_k = [\tilde{\tau}_k, \tilde{v}_k]^T$  und den JACOBI-Matrizen  $\mathbf{A}_i$ , wobei  $i \in (1, 2, 3, 4)$  ist. Es ergeben sich

$$\mathbf{A}_1 = \frac{1}{1+a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2b & 1+a-2b \end{bmatrix}, \quad (4.26a)$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1-a & -1 \\ 2b(1-a) & 1-2b \end{bmatrix}, \quad (4.26b)$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2b & 1-2b \end{bmatrix} \quad (4.26c)$$

und

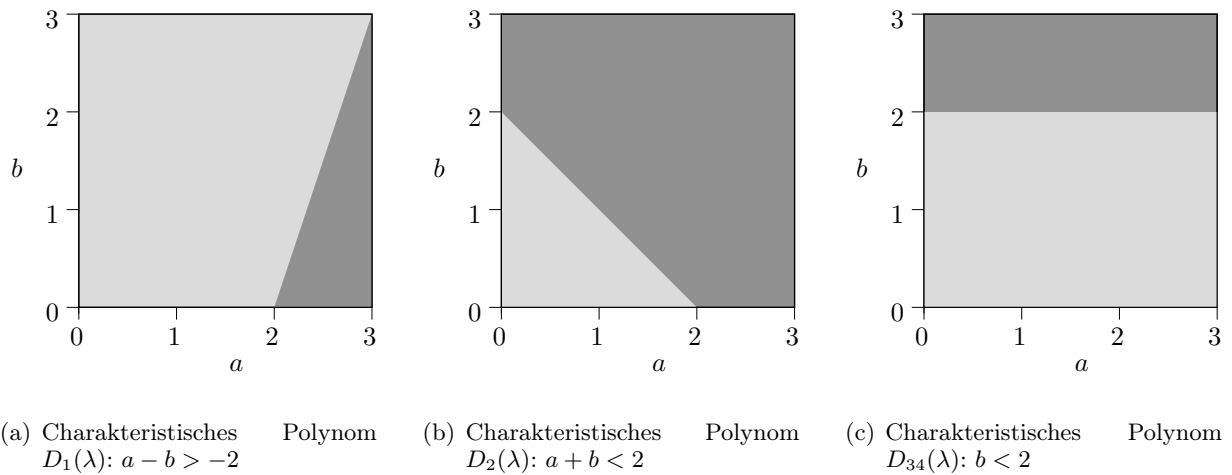
$$\mathbf{A}_4 = \frac{1}{1+a} \begin{bmatrix} 1-a & -1 \\ 2b(1-a) & 1+a-2b \end{bmatrix}. \quad (4.26d)$$

In [33] wurden vier Fälle unterschieden, wobei alle Grenzen nicht korrekt bestimmt wurden: Die beiden möglichen a-periodischen Grenzfälle (Fall 1 und Fall 2) und der Schwingfall (wenn der Fall 3 zu Fall 4 führt und umgekehrt). Zu diesem Zweck wurden die charakteristischen Polynome der Matrizen  $\mathbf{A}_1$ ,  $\mathbf{A}_2$ ,  $\mathbf{A}_{34} = \mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{A}_4$  und  $\mathbf{A}_{43} = \mathbf{A}_4 \cdot \mathbf{A}_3$  berechnet und die Einschränkungen erörtert, die sich für die Parameter  $a$  und  $b$  ergeben, damit die charakteristischen Polynome Einheitskreispolynome darstellen. Für die Matrix  $\mathbf{A}_1$  ergibt sich das charakteristische Polynom zu

$$D_1(\lambda) = \lambda^2 + \frac{2b-2-a}{a+1}\lambda + \frac{1}{a+1} = 0, \quad (4.27)$$

wobei für  $a > 0$ ,  $b > 0$  und  $a-b > -2$  Gleichung (4.27) ein Einheitskreispolynom darstellt. Für die Matrix  $\mathbf{A}_2$  kann das charakteristische Polynom

$$D_2(\lambda) = \lambda^2 + (2b-2+a)\lambda + (1-a) = 0 \quad (4.28)$$



**Abbildung 4.4.:** Wertebereiche der Parameter  $a$  und  $b$ , bei denen die zugehörigen charakteristischen Polynome Einheitskreispolynome sind. Die hellgrauen Gebiete bezeichnen die Bereiche der Parameter  $a$  und  $b$ , indem das entsprechende charakteristische Polynom ein Einheitskreispolynom ist. Die dunkelgrau gekennzeichneten Flächen sind die Bereiche, bei denen das betrachtete charakteristische Polynom kein Einheitskreispolynom ist.

angegeben werden, wobei die Eigenwerte für  $a > 0$ ,  $b > 0$  und  $a + b < 2$  innerhalb des Einheitskreises liegen. Wiederum kann gezeigt werden, dass die Bedingung  $a + b < 2$  sowie die Bedingungen nach GARDNER [16] und VAN PAEMEL [32] übereinstimmen. An dieser Stelle kann festgestellt werden, dass die Linearisierung nach GARDNER und VAN PAEMEL Linearisierungen innerhalb des Gebietes  $\mathcal{R}_2$  sind. Für die Matrizen  $\mathbf{A}_3$  und  $\mathbf{A}_4$  ergeben sich die charakteristischen Polynome

$$D_3(\lambda) = \lambda^2 + (2b - 2)\lambda + 1 \quad (4.29)$$

und

$$D_4(\lambda) = \lambda^2 + \frac{(2b - 2)\lambda}{1 + a} + \frac{1 - a}{1 + a}. \quad (4.30)$$

Das charakteristische Polynom  $D_3(\lambda)$  liefert für  $0 < b < 2$  ausschließlich Nullstellen auf dem Einheitskreis. Für  $a > 0$  und  $0 < b < 2$  ist  $D_4(\lambda)$  ein Einheitskreispolynom. Werden die Matrizen  $\mathbf{A}_{43}$  und  $\mathbf{A}_{34}$  betrachtet, ergibt sich das charakteristische Polynom

$$D_{34}(\lambda) = D_{43}(z) = \lambda^2 + \frac{-2 - 4b^2 + 8b}{a + 1}\lambda + \frac{1 - a}{a + 1} = 0. \quad (4.31)$$

Das Polynom nach Gleichung (4.31) stellt sich als Einheitskreispolynom dar, wenn die Beziehungen  $a > 0$  und  $b < 2$  gelten.

Da weder von GARDNER, VAN PAEMEL noch von ACCO untersucht wurde, inwieweit die Linearisierung gültig ist, oder ob sie überhaupt angesetzt werden darf (siehe Theorem 2.3), soll dies hier erfolgen. Dazu soll das Restglied nach LAGRANGE angegeben werden, um den

Fehler der TAYLOR-Approximation zu beschreiben. Da ein TAYLOR-Polynom 1. Ordnung angegeben wurde (siehe Gleichung (4.25)) und ausschließlich die Funktionen  $g_i(\tau, v)$  von Interesse sind, kann die Betrachtung des Fehlers auf die Funktionen  $g_i$  beschränkt werden. Das Restglied nach LAGRANGE (1. Ordnung) ergibt sich für die Funktionen  $g_i(\cdot, \cdot)$  zu

$$R_1(\tilde{\tau}, \tilde{v}) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{\tau}^2} g_i(\theta \tilde{\tau}, \theta \tilde{v}) \tau^2 + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{\tau} \partial \tilde{v}} g_i(\theta \tilde{\tau}, \theta \tilde{v}) \tilde{v} \tilde{\tau} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{v}^2} g_i(\theta \tilde{\tau}, \theta \tilde{v}) \tilde{v}^2, \quad (4.32)$$

wobei  $\theta \in (0, 1)$  gilt. Es gilt:

$$R_1^{F1}(\tilde{\tau}, \tilde{v}) = \frac{(a+1-b)\tilde{v}^2}{\sqrt{\xi(\tilde{\tau}, \tilde{v}, a, b)}^3} + \frac{((a+1)^2 + 2b - 1) \tilde{\tau} \tilde{v}}{\sqrt{\xi(\tilde{\tau}, \tilde{v}, a, b)}^3} + \frac{b\tilde{\tau}^2}{\sqrt{\xi(\tilde{\tau}, \tilde{v}, a, b, \theta)}^3}, \quad (4.33)$$

mit

$$\xi(\tilde{\tau}, \tilde{v}, a, b, \theta) = (a+1)^2 + \theta(4b\tilde{\tau} + 2(a-2b+1)\tilde{v}) + \theta^2(\tilde{v}^2 + 4b\tilde{\tau}\tilde{v}). \quad (4.34)$$

$$R_1^{F2}(\tilde{\tau}, \tilde{v}) = -\frac{b\tilde{\tau}^2}{(\theta\tilde{v}+1)^3} + \frac{\tilde{\tau}\tilde{v}\alpha}{(\theta\tilde{v}+1)^3} + \frac{\tilde{v}^2}{(\theta\tilde{v}+1)^3} \quad (4.35)$$

$$R_1^{F3}(\tilde{\tau}, \tilde{v}) = \frac{\tilde{v}^2}{(\theta\tilde{v}+1)^3} \quad (4.36)$$

$$R_1^{F4}(\tilde{\tau}, \tilde{v}) = \frac{(a+1-b)\tilde{v}^2}{\sqrt{\chi(\tilde{\tau}, \tilde{v}, a, b)}^3} + \frac{((a+1)^2 - (a+1) + b(1-a)) \tilde{\tau} \tilde{v}}{\sqrt{\chi(\tilde{\tau}, \tilde{v}, a, b)}^3} + \frac{(2b(1+a^2)) \tilde{\tau}^2}{\sqrt{\chi(\tilde{\tau}, \tilde{v}, a, b, \theta)}^3}, \quad (4.37)$$

mit

$$\chi(\tilde{\tau}, \tilde{v}, a, b, \theta) = (a+1)^2 + \theta(4b(1-a)\tilde{\tau} + 2(a-2b+1)\tilde{v}) + \theta^2(\tilde{v}^2 + 4b(\tilde{\tau}\tilde{v} - b\tilde{\tau}^2)). \quad (4.38)$$

Insbesondere durch die Gleichungen (4.33), (4.35) und (4.37) ergeben sich Abhängigkeiten des Fehlers bezüglich der Parameter  $a$  und  $b$ . Eine ähnliche Abhängigkeit konnte in den Abbildungen 3.6(a) bis 3.6(d) dargelegt werden. D. h., dass die Eingangsfrequenz und die Dämpfung des Systems einen Einfluss auf die Validität oder Güte der Approximation des linearen Modells haben.

#### 4.1.4. Modellierung und Stabilität des Modells nach HEDAYAT

Im Gegensatz zu den Arbeiten von VAN PAEMEL und ACCO wurden bezüglich des folgenden Modells keinerlei analytische Stabilitätsbetrachtungen durchgeführt. Die Grundlagen der Modellierung, die in [24] beschrieben wurden, sind dabei die Phasensignale des Referenzsignals  $\varphi_{\text{ref}}(t)$  und des VCO-Signals  $\varphi_{\text{ref}}(t)$  (bzw. des Teiler Ausgangssignals). Obgleich

#### 4. Modellierung und Analyse digitaler Phasenregelkreise

**Tabelle 4.1.:** Dargestellt sind die Zusammenhänge zwischen den Zuständen des Phasen- und Frequenzdetektors, der Ereignisse des Eingangssignals  $u_{\text{ref}}$ , des Ausgangssignals  $u_{\text{vco}}$  und des sprunghaften Spannungsabfalls über dem Widerstand  $R_1$  des Schleifenfilters erster Ordnung.

Zustand des PFD zum Zeitpunkt $t_n^-$	Ereignis zum Zeitpunkt $t_n$	Zustand des PFD zum Zeitpunkt $t_n^+$	Kontrollspannung $u_{\text{ctl}}(t_n^+)$
$\mathcal{S}_0$	$u_{\text{ref}}^\downarrow$	$\mathcal{S}_{+1}$	$u_{\text{ctl}}(t_n^-) + R_1 \cdot I_p$
$\mathcal{S}_{+1}$	$u_{\text{ref}}^\downarrow$	$\mathcal{S}_{+1}$	$u_{\text{ctl}}(t_n^-)$
$\mathcal{S}_{+1}$	$u_{\text{vco}}^\downarrow$	$\mathcal{S}_0$	$u_{\text{ctl}}(t_n^-) - R_1 \cdot I_p$
$\mathcal{S}_0$	$u_{\text{vco}}^\downarrow$	$\mathcal{S}_{-1}$	$u_{\text{ctl}}(t_n^-) - R_1 \cdot I_p$
$\mathcal{S}_{-1}$	$u_{\text{vco}}^\downarrow$	$\mathcal{S}_{-1}$	$u_{\text{ctl}}(t_n^-)$
$\mathcal{S}_{-1}$	$u_{\text{ref}}^\downarrow$	$\mathcal{S}_0$	$u_{\text{ctl}}(t_n^-) + R_1 \cdot I_p$

DEMIR [91] schon einen ähnlichen Ansatz publiziert hatte, wurde von HEDAYAT ein analytisches Modell für den Regelkreis zweiter Ordnung [24] angegeben und für den Regelkreis dritter Ordnung [25] ein Algorithmus entwickelt. Im Folgenden soll das Modell zweiter Ordnung ohne Teiler angegeben und kurz erläutert werden. Der Sachverhalt, dass kein Teiler verwendet wird, stellt keinerlei Einschränkung hinsichtlich der Allgemeinheit dar, da der Verstärkungsbeiwert  $K_v$  nur durch den Teilungsbeiwert dividiert werden müsste. Innerhalb dieses Verfahrens sollen ausschließlich die Zeitpunkte berechnet werden, in denen der PFD einen Zustandswechsel durchführt. Es kann für das Referenzsignal mit einer konstanten Frequenz die Phasengleichung

$$\varphi_{\text{ref}}(t_{n+1}) = \varphi_{\text{ref}}(t_n) + 2\pi f_{\text{ref}}(t_{n+1} - t_n) \quad (4.39)$$

aufgestellt werden, sowie deren Lösung

$$t_{n+1}^{\text{ref}} = t_n + \frac{1 - \frac{\varphi_{\text{ref}}(t_n)}{2\pi}}{f_{\text{ref}}}. \quad (4.40)$$

Für den spannungsgesteuerten Oszillator des Regelkreises ergeben sich je nach Zustand des PFD unterschiedliche Ströme, wodurch die Kontrollspannung  $u_{\text{ctl}}(t)$  moduliert wird. Erfolgt ein Zustandswechsel innerhalb des PFD, so bewirkt dies einen sprunghaften Spannungsabfall über dem Widerstand  $R_1$  des passiven Filters erster Ordnung. Damit lassen sich die Spannungsgleichung

$$u_{\text{ctl}}(t_{n+1}) = u_{\text{ctl}}(t_n^+) + \alpha \cdot (t_{n+1} - t_n^+) \quad (4.41)$$



und die Phasengleichung

$$\varphi_{\text{vco}}(t_{n+1}) = \varphi_{\text{vco}}(t_n) + 2\pi \cdot \left[ \frac{\alpha K_v}{2} (t_{n+1}^2 - t_n^2) + (f_{0,\text{vco}} - K_v [\alpha t_n - u_{\text{ctl}}(t_n^+)]) (t_{n+1} - t_n) \right] \quad (4.42)$$

angeben, wobei  $\alpha = i_p/C_1$  (mit  $i_p \in (+I_p, 0 \text{ A}, -I_p)$ ) ist und das hochgestellte „+“ den Zeitpunkt bezeichnet, der direkt nach einem Ereignis liegt (das hochgestellte „−“ bezeichnet den Zeitpunkt, der direkt vor einem Ereignis liegt). Der nächste Zeitpunkt, an dem ein Transitionswechsel (eine fallende Flanke des VCO) erfolgt, ergibt sich aus der Phasengleichung des VCO (siehe Gleichung (4.41)) und aus der Tabelle 4.1:

$$t_{n+1}^{\text{vco}} = t_n + \begin{cases} \frac{-\xi(t_n^+) + \sqrt{\xi^2(t_n^+) + 2 \cdot \alpha \cdot K_v \left(1 - \frac{\varphi_{\text{vco}}(t_n)}{2\pi}\right)}}{\alpha \cdot K_v}, & \forall \mathcal{S} \setminus \{\mathcal{S}_0\} \\ \frac{1 - \frac{\varphi_{\text{vco}}(t_n)}{2\pi}}{\xi(t_n^+)}, & \forall \mathcal{S}_0 \end{cases} \quad (4.43)$$

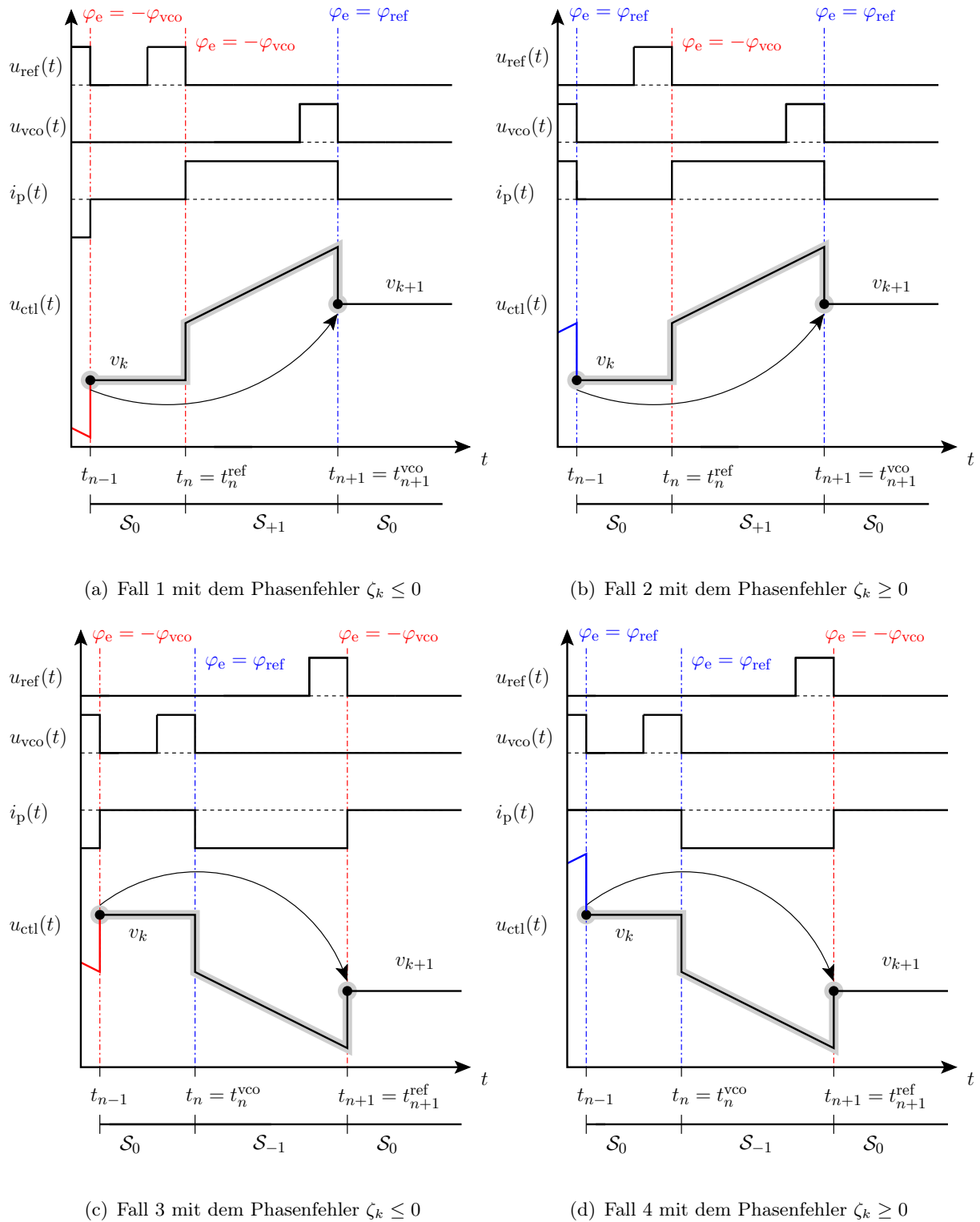
Dabei ist  $\xi(t_n^+) = (K_v \cdot u_{\text{ctl}}(t_n^+) + f_{0,\text{vco}})$ . Die Menge der Zustände des PFD wird mit  $\mathcal{S} \in (\mathcal{S}_{-1}, \mathcal{S}_0, \mathcal{S}_{+1})$  bezeichnet. Abschließend muss der kleinste Wert von  $t_{n+1}^{\text{ref}}$  und  $t_{n+1}^{\text{vco}}$  bestimmt werden, wodurch sich

$$t_{n+1} = \min \{t_{n+1}^{\text{ref}}, t_{n+1}^{\text{vco}}\} \quad (4.44)$$

ergibt. Die Stabilitätsuntersuchungen dieses Modells stellen sich ungleich schwerer dar als die für die vorher angegebenen Modelle. Zwar liefert die Phasenbetrachtung ein intuitives Modell und insbesondere ein Modell, mit dem variable Simulationen effizient durchgeführt werden können, jedoch ergeben sich  $3+n$ -Zustandsgleichungen, wobei  $n$  die Anzahl der Zustände im Schleifenfilter angibt. Im Folgenden soll das von HEDAYAT beschriebene Modell für den Phasenregelkreis zweiter Ordnung in eine kompaktere Form geschrieben werden. Das Modell wird in ein schaltendes, autonomes, nichtlineares Differenzengleichungssystem umgeschrieben. Zu diesem Zweck werden die Zustände  $v_k$  und  $\zeta_k$  definiert,  $v_k$  kann analog zu den Betrachtungen von VAN PAEMEL verstanden werden und  $\zeta_k$  entspricht dem Phasenfehler zwischen den Signalen  $\varphi_{\text{ref}}$  und  $\varphi_{\text{vco}}$ . Sei  $f_{0,\text{vco}} = 0$ . Des Weiteren werden die Zustandswechsel von  $\mathcal{S}_0$  nach  $\mathcal{S}_0$  über  $\mathcal{S}_{+1}$  oder über  $\mathcal{S}_{-1}$  betrachtet. Abbildung 4.5 beschreibt dieses Vorgehen, wobei ausgehend vom Zeitpunkt  $t_{n-1}$  der Phasenfehler  $\zeta$  und die Spannung  $v$  zum Zeitpunkt  $t_{n+1}^+$  bestimmt wird. Offensichtlich ergeben sich vier Differenzengleichungssysteme:

$$\zeta_{k+1}^{\text{F1}} = \frac{-K_v (v_k + R_1 I_p) + \sqrt{K_v^2 (v_k + R_1 I_p)^2 + 2 \frac{I_p K_v}{C_1} \left(1 + \frac{\zeta_k}{2\pi} - \frac{K_v v_k}{f_{\text{ref}}}\right)}}{\frac{I_p}{2\pi C_1 f_{\text{ref}}} K_v} \quad (4.45a)$$

#### 4. Modellierung und Analyse digitaler Phasenregelkreise



**Abbildung 4.5.:** Behandlung der Fallunterscheidungen: (a) und (b) also Fall 1 und 2 unterscheiden sich nur zum Zeitpunkt  $t_{n-1}$  bzgl. ihres Phasenfehlers. Bei Fall 1 sei zum Zeitpunkt  $t_{n-1}$  eine fallende Flanke des Referenzsignals erfolgt, bei Fall 2 eine fallende Flanke des VCO-Signals. (c) und (d) also Fall 3 und 4 unterscheiden sich ebenfalls zum Zeitpunkt  $t_{n-1}$  bzgl. ihres Phasenfehlers. Bei Fall 3 sei zum Zeitpunkt  $t_{n-1}$  eine fallende Flanke des Referenzsignals erfolgt, bei Fall 4 eine fallende Flanke des VCO-Signals.

$$\zeta_{k+1}^{\text{F2}} = \frac{-K_v(v_k + R_1 I_p) + \sqrt{K_v^2(v_k + R_1 I_p)^2 + \frac{2I_p K_v}{C_1} \left(1 - K_v v_k \frac{1 - \frac{\zeta_k}{2\pi}}{f_{\text{ref}}}\right)}}{\frac{I_p}{2\pi C_1 f_{\text{ref}}} K_v} \quad (4.45b)$$

$$\begin{aligned} \zeta_{k+1}^{\text{F3}} = & \frac{\zeta_k^2}{v_k^2} \frac{I_p}{4\pi K_v C_1} + \zeta_k \left(1 - \frac{R_1 I_p + \frac{I_p}{C_1 f_{\text{ref}}}}{v_k} + \frac{I_p}{C_1 K_v} \frac{1}{v_k^2}\right) + \\ & 2\pi \left(1 - \frac{K_v v_k}{f_{\text{ref}}} + \frac{R_1 I_p K_v}{f_{\text{ref}}} + \frac{I_p K_v}{2C_1 f_{\text{ref}}^2} - \frac{R_1 I_p + \frac{I_p}{C_1 f_{\text{ref}}}}{v_k} + \frac{I_p}{2K_v C_1} \frac{1}{v_k^2}\right) \end{aligned} \quad (4.45c)$$

$$\begin{aligned} \zeta_{k+1}^{\text{F4}} = & \frac{I_p K_v}{4\pi f_{\text{ref}}^2 C_1} \zeta_k^2 + \left((v_k - R_1 I_p) \frac{K_v}{f_{\text{ref}}} + \left(\frac{1}{v_k} - \frac{K_v}{f_{\text{ref}}}\right) \frac{I_p}{C_1 f_{\text{ref}}}\right) \zeta_k + \\ & 2\pi \left(1 + \frac{I_p K_v}{2C_1 f_{\text{ref}}} - (v_k - R_1 I_p) \frac{K_v}{f_{\text{ref}}} - \frac{\frac{I_p}{f_{\text{ref}} C_1} + R_1 I_p}{v_k} + \frac{I_p}{2v_k^2 K_v C_1}\right) \end{aligned} \quad (4.45d)$$

$$v_{k+1}^{\text{F1}} = v_k + \frac{I_p}{C_1} \frac{\zeta_{k+1}^{\text{F1}}}{2\pi f_{\text{ref}}} \quad (4.45e)$$

$$v_{k+1}^{\text{F2}} = v_k + \frac{I_p}{C_1} \frac{\zeta_{k+1}^{\text{F2}}}{2\pi f_{\text{ref}}} \quad (4.45f)$$

$$v_{k+1}^{\text{F3}} = v_k - \frac{I_p}{C_1} \left(\frac{1}{f_{\text{ref}}} - \left(1 + \frac{\zeta_k}{2\pi}\right) \frac{1}{K_v v_k}\right) \quad (4.45g)$$

$$v_{k+1}^{\text{F4}} = v_k - \frac{I_p}{C_1} \left(\left(1 - \frac{\zeta_k}{2\pi}\right) \frac{1}{f_{\text{ref}}} - \frac{1}{K_v v_k}\right) \quad (4.45h)$$

Fall 1 und Fall 3 beziehen sich auf die Fälle mit  $\zeta_k < 0$  und Fall 2 und 4 gelten, wenn  $\zeta_k > 0$  ist. Der Zustandsraum lässt sich in vier Gebiete unterteilen. Die Frage, die sich nun stellt, ist, wie sich der Zustandsraum bezüglich dieser Gebiete unterteilt. Bei Betrachtung der vier Fälle ist es offensichtlich, dass sich bei dem Phasenfehler  $\zeta = 0$  der Zustandsraum in zwei Teile zerlegen lässt. Liegt ein positiver Phasenfehler  $\zeta_k > 0$  vor, so können zwei Fälle unterschieden werden: Wenn  $\zeta_{k+1} \leq 0$  ist oder  $\zeta_{k+1} \geq 0$  ist. Dementsprechend kann formal

der Zeitpunkt berechnet werden, bei dem sich  $\zeta_{k+1} = 0$  ergibt und somit die Fälle 2 und 4 identisch sind. Offensichtlich liegt ein Phasenfehler von  $\zeta_{k+1} = 0$  vor, wenn zum Zeitpunkt  $t_n$  eine fallende Flanke des Referenzsignals und des VCO-Signals erfolgt. Es ergibt sich

$$t_n = t_{n-1} + \frac{1}{f_{\text{ref}}} = t_{n-1} + \frac{1 + \frac{\zeta_{n-1}}{2\pi}}{K_v v_{n-1}}. \quad (4.46)$$

Liegt ein negativer Phasenfehler  $\zeta_k < 0$  vor, so können wieder zwei Fälle unterschieden werden: Wenn  $\zeta_{k+1} \leq 0$  oder  $\zeta_{k+1} \geq 0$  ist. Auch hier ist gerade der Zeitpunkt zu bestimmen, bei dem  $\zeta_{k+1} = 0$  gilt. Es kann

$$t_n = t_{n-1} + \frac{1 - \frac{\zeta_{n-1}}{2\pi}}{f_{\text{ref}}} = t_{n-1} + \frac{1}{K_v v_{n-1}}. \quad (4.47)$$

angegeben werden. Somit ergibt sich die Aufteilung des Zustandsraumes durch

$$LC_0 : \zeta_k = 0 \quad (4.48)$$

und

$$LC_1 : \zeta_{k+1} = 0 \Rightarrow v_k = \begin{cases} \left(1 + \frac{\zeta_k}{2\pi}\right) \frac{f_{\text{ref}}}{K_v} & \forall \zeta_k \leq 0 \\ \left(1 - \frac{\zeta_k}{2\pi}\right)^{-1} \frac{f_{\text{ref}}}{K_v} & \forall \zeta_k \geq 0 \end{cases}. \quad (4.49)$$

Durch die Substitutionen nach den Gleichungen (4.20a) und (4.20b) kann das Gleichungssystem ausschließlich in Abhängigkeit der normierten Zustände  $\tilde{v}$  und  $\tilde{\zeta}$  sowie der Parameter  $a$  und  $b$  beschrieben werden:

$$\tilde{\zeta}_{k+1}^{\text{F1}} = \frac{-(\tilde{v}_k + 1 + a) + \sqrt{(\tilde{v}_k + 1 + a)^2 + 4b(\tilde{\zeta}_k - \tilde{v}_k)}}{2b} \quad (4.50a)$$

$$\tilde{\zeta}_{k+1}^{\text{F2}} = \frac{-(\tilde{v}_k + 1 + a) + \sqrt{(\tilde{v}_k + 1 + a)^2 + 4b(1 - (1 + \tilde{v}_k)(1 - \tilde{\zeta}_k))}}{2b} \quad (4.50b)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}_{k+1}^{\text{F3}} = & \frac{\tilde{\zeta}_k^2 b}{(\tilde{v}_k + 1)^2} + \tilde{\zeta}_k \left(1 - \frac{a + 2b}{\tilde{v}_k + 1} + \frac{2b}{(\tilde{v}_k + 1)^2}\right) \\ & - \tilde{v}_k + a + b - \frac{a + 2b}{\tilde{v}_k + 1} + \frac{b}{(\tilde{v}_k + 1)^2} \end{aligned} \quad (4.50c)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}_{k+1}^{\text{F4}} = \tilde{\zeta}_k^2 b + \tilde{\zeta}_k \left( \tilde{v}_k + 1 - a + 2b \left( \frac{1}{\tilde{v}_k + 1} - 1 \right) \right) + \\ \frac{b}{(\tilde{v}_k + 1)^2} - \frac{2b + a}{\tilde{v}_k + 1} - \tilde{v}_k + a + b \quad (4.50\text{d}) \end{aligned}$$

Es ergibt sich die Form

$$\begin{bmatrix} \tilde{\zeta}_{k+1} \\ \tilde{v}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_i(\tilde{\zeta}_k, \tilde{v}_k) \\ \tilde{v}_k + 2bf_i(\tilde{\zeta}_k, \tilde{v}_k) \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

mit  $i \in (1, 2, 3, 4)$ ,

$$g_1(\tilde{\zeta}_k, \tilde{v}_k) = f_1(\tilde{\zeta}_k, \tilde{v}_k) = \tilde{\zeta}_{k+1}^{\text{F1}},$$

$$g_2(\tilde{\zeta}_k, \tilde{v}_k) = f_2(\tilde{\zeta}_k, \tilde{v}_k) = \tilde{\zeta}_{k+1}^{\text{F2}},$$

$$g_3(\tilde{\zeta}_k, \tilde{v}_k) = \tilde{\zeta}_{k+1}^{\text{F3}},$$

$$g_4(\tilde{\zeta}_k, \tilde{v}_k) = \tilde{\zeta}_{k+1}^{\text{F4}},$$

$$f_3(\tilde{\zeta}_k, \tilde{v}_k) = 1 - \frac{\tilde{\zeta}_k + 1}{\tilde{v}_k + 1}$$

und

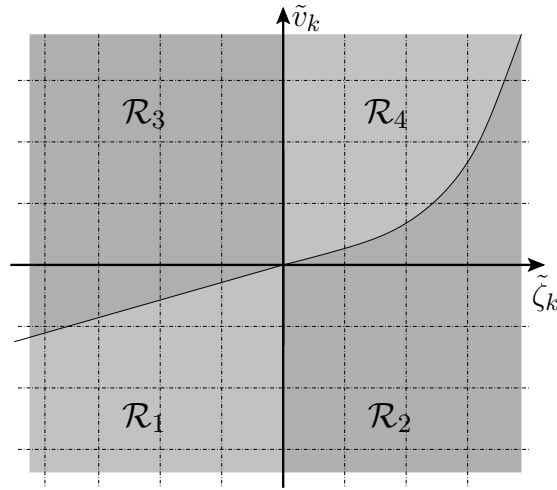
$$f_4(\tilde{\zeta}_k, \tilde{v}_k) = 1 - \frac{1}{\tilde{v}_k + 1} - \tilde{\zeta}_k.$$

Die Aufteilung des Zustandsraumes ist gegeben durch

$$LC_0 : \tilde{\zeta}_k = 0 \quad (4.52)$$

und

$$LC_1 : \tilde{\zeta}_{k+1} = 0 \Rightarrow \tilde{v}_k = \begin{cases} \tilde{\zeta}_k & \forall \tilde{\zeta}_k \leq 0 \\ \frac{\tilde{\zeta}_k}{1 - \tilde{\zeta}_k} & \forall \tilde{\zeta}_k \geq 0 \end{cases}. \quad (4.53)$$



**Abbildung 4.6.:** Einteilung des Zustandsraum in vier Sektoren  $\mathcal{R}_i$  mit  $i \in (1, 2, 3, 4)$

Entsprechend ergibt sich der Zustandsraum nach Abbildung 4.6.

Damit kann im Ursprung durch die TAYLOR-Reihenentwicklung das linearisierte Modell

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_i \mathbf{x}_k \quad (4.54)$$

aufgestellt werden, wobei die vier JACOBI-Matrizen durch

$$\mathbf{J}_1 = \mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2 = \frac{1}{1+a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2b & 1+a-2b \end{bmatrix} \quad (4.55a)$$

$$\mathbf{J}_2 = \mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 1-a & -(1-a) \\ 2b & 1-2b \end{bmatrix} \quad (4.55b)$$

gegeben sind. Das charakteristische Polynom der Matrix  $\mathbf{J}_1$  ist gegeben durch

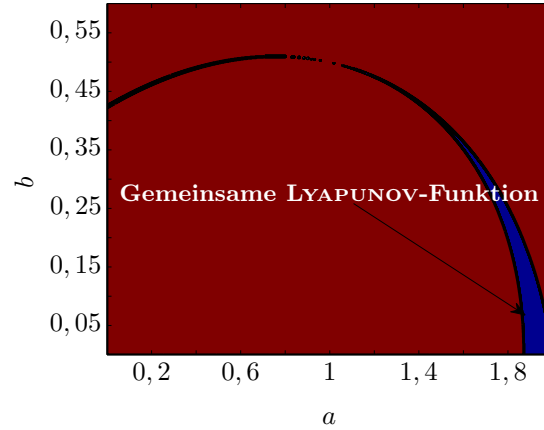
$$D_1(\lambda) = \lambda^2 + \frac{2b-2-a}{1+a}\lambda + \frac{1}{1+a}, \quad (4.56)$$

wobei für  $a > 0$ ,  $b > 0$  und  $a - b > -2$   $D_1(\lambda)$  ein Einheitskreispolynom ist. Diese Randbedingung ist identisch zu der von ACCO für das charakteristische Polynom nach Gleichung (4.27). Das Polynom

$$D_2(\lambda) = \lambda^2 + (2b - 2 + a)\lambda + 1 - a \quad (4.57)$$

besitzt genau dann ausschließlich Nullstellen im Einheitskreis, wenn  $a > 0$ ,  $b > 0$  und  $a + b < 2$  erfüllt ist. Die Aussagen von GARDNER (siehe Gleichung (4.6)), VAN PAEMEL (siehe Gleichung (4.19)) und ACCO (siehe Gleichung (4.28)) werden dadurch bestätigt. Werden abschließend noch die Fälle  $\mathbf{J}_{12} = \mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{J}_2$  und  $\mathbf{J}_{21} = \mathbf{J}_2 \cdot \mathbf{J}_1$  betrachtet, wobei sich das charakteristische Polynom

$$D_{12}(\lambda) = D_{21}(\lambda) = \lambda^2 + \frac{-2 + 8b - 4b^2}{1+a}\lambda + \frac{1-a}{1+a} \quad (4.58)$$



**Abbildung 4.7.:** Parameterraum zur gemeinsamen LYAPUNOV-Funktion  $V_1 = \mathbf{x}^T \mathbf{P}_1 \mathbf{x}$

aufstellen lässt und für  $a > 0$ ,  $b > 0$  und  $b < 2$  dieses sich als Einheitskreispolynom darstellt. Dies entspricht den Aussagen, die im vorangegangenen Kapitel 4.31 beschrieben wurden. Damit kann festgestellt werden, dass, wenn  $a > 0$ ,  $b > 0$  und  $b > 2$  gelten, der Phasenregelkreis instabil ist.

Für die JACOBI-Matrix  $\mathbf{J}_1$  kann eine LYAPUNOV-Funktion  $V_2 = \mathbf{x}^T \mathbf{P}_1 \mathbf{x}$  bestimmt werden mit

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1 + 2a + 2b + a^2}{a(a + 2 - b)} & \frac{a^2 + 2a - 2ba - 2b - 1}{2a(a + 2 - b)} \\ \frac{a^2 + 2a - 2ba - 2b - 1}{2a(a + 2 - b)} & \frac{a^3 + 2a^2 + 4ba + a + 4b + 2}{4a(a + 2 - b)b} \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

als Lösung der diskreten LYAPUNOV-Gleichung, wobei hier die Ungleichung  $a - b > -2$  gelten muss. Für die Ungleichungen

$$\frac{(4a + 4)b^2 + (3 - a^2 + 2a)b - 3a + a^3 - 2}{a + 2 - b} < 0 \quad (4.60)$$

und

$$-\frac{\alpha_1 b^3 + \alpha_2 b^2 + (-4a^3 - 2a^2 + 12a + 10)b + \alpha_3}{(a + 2 - b)^2} < 0 \quad (4.61)$$

mit

$$\alpha_1 = -8a - 8,$$

$$\alpha_2 = 19 + 11a^2 + 26a$$

und

$$\alpha_3 = -7 + 2a^4 - 14a + 4a^3 - 5a^2$$

ergibt sich eine gemeinsame LYAPUNOV-Funktion für  $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{J}_1 \mathbf{x}_k$  und  $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{J}_2 \mathbf{x}_k$ . In Abbildung 4.7 ist der Parameterraum dargestellt, für den die Matrix  $\mathbf{P}_1$  eine gemeinsame LAYPUNOV-Funktion für das schaltende Differenzengleichungssystem ist. Offensichtlich ist diese Randbedingung an die Parameter wesentlich strenger, als die von GARDNER eingeführte Stabilitätsgrenze. Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass es wohl noch andere gemeinsame LYAPUNOV-Funktionen gibt, die einen größeren oder anderen Parameterbereich abdecken.

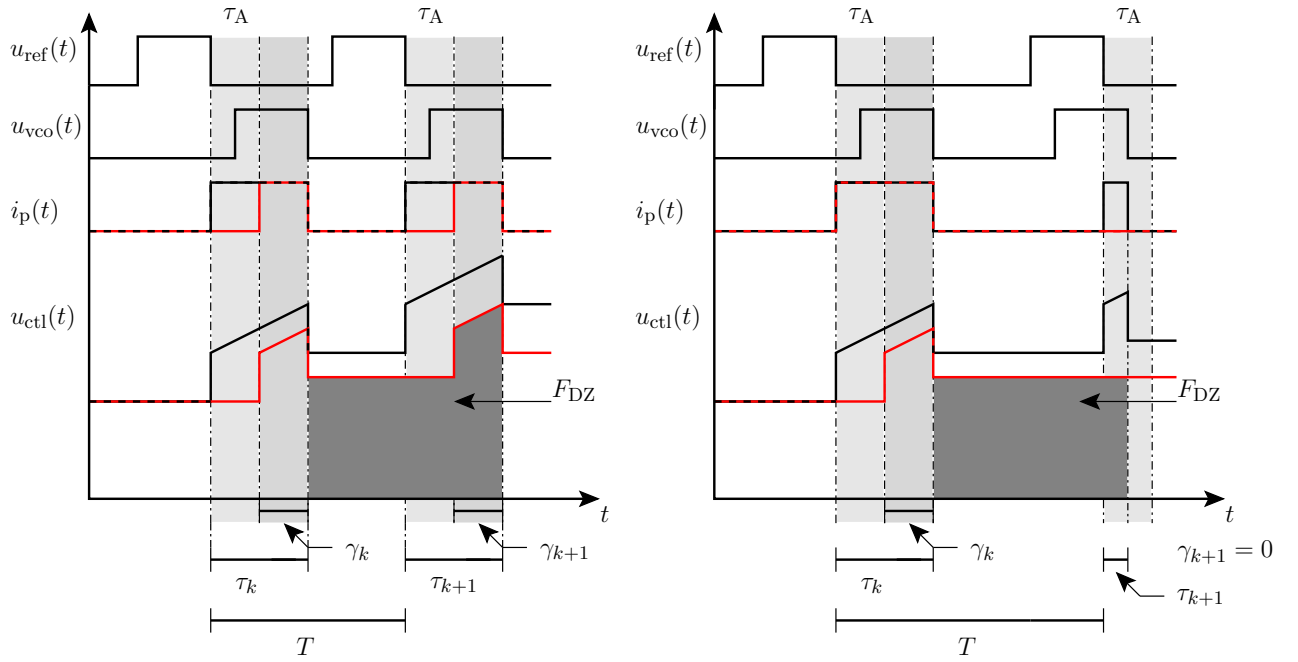
## 4.2. Phasenregelkreis mit *Dead-Zone*-Charakteristik

In diesem Kapitel wird das Modell nach VAN PAEMEL und HEDAYAT hinsichtlich der *Dead-Zone*-Charakteristik des PFD erweitert. Die *Dead-Zone* wird dabei mittels Verzögerungszeiten, die sich beim Zustandsübergang von  $\mathcal{S}_0$  nach  $\mathcal{S}_{+1}$  ( $\mathcal{S}_{-1}$ ) bzw. von  $\mathcal{S}_0$  nach  $\mathcal{S}_0$  ergeben, modelliert. Des Weiteren wird der Sachverhalt des Leckstromes in das ideale Modell nach VAN PAEMEL integriert.

### 4.2.1. Erweiterung des Modells nach VAN PAEMEL: *Dead-Zone*

Zur Modellierung der *Dead-Zone* wird das Modell nach VAN PAEMEL [32] mit dem Zustandsautomaten nach [31] kombiniert (siehe auch Kapitel 5.2.1). An dieser Stelle sei angenommen, dass ausschließlich der Übergang von Zustand  $\mathcal{S}_0$  nach  $\mathcal{S}_{-1}$  sowie von  $\mathcal{S}_0$  nach  $\mathcal{S}_{+1}$  jeweils eine Verzögerung aufweist. Es sei erwähnt, dass, wenn beispielsweise der PFD im Zustand  $\mathcal{S}_0$  ist und eine fallende Flanke des Referenzsignals erfolgt, innerhalb des Zeitraums der entsprechenden Verzögerung kein Wechsel im Ausgangssignal zu verzeichnen ist. Ergibt sich innerhalb der Verzögerungszeit, beginnend mit der fallenden Flanke des Referenzsignals, keine fallende Flanke des rückgekoppelten Signals, so erfolgt der Wechsel auf Zustand  $\mathcal{S}_{+1}$ . Wenn jedoch genau in der definierten Verzögerungszeit eine fallende Flanke des rückgekoppelten Signals auftritt, so bleibt der PFD im Zustand  $\mathcal{S}_0$ . Zur Beschreibung des eingerasteten Bereiches ergeben sich 16 mögliche Fälle, die in den Abbildungen 4.8 bis 4.13 dargestellt sind. Da im ursprünglichen Modell von VAN PAEMEL die Pulsbreite  $\tau_k$  und die Spannung  $v_k$  als Zustandsgrößen eingeführt wurden und für das Modell nach [31] zusätzliche Verzögerungen innerhalb des Zustandsautomaten integriert wurden, ist es erforderlich, die Zustandsgrößen neu zu definieren. Dabei wird  $\tau_k$  die Zeit sein, die zwischen einer fallenden Flanke des Referenzsignals und des VCO-Signals liegt. Des Weiteren werde  $\gamma_k$  definiert als die Zeit, in der ein Strom  $i_p$  in oder aus dem Schleifenfilter fließt, d. h. die Zustandsgröße  $\gamma_k$  ist genau die Strompulsbreite. Das Vorzeichen von  $\tau_k$  oder  $\tau_{k+1}$  ist dabei positiv, wenn zum Zeitpunkt  $t_0$  die Referenzspannung und zum Zeitpunkt  $t_1$  die VCO-Spannung eine fallende Flanke aufweist, wobei  $t_0 < t_1$  gilt. Ein negatives Vorzeichen ergibt sich, wenn zum Zeitpunkt  $t_0$  das VCO-Signal und zum Zeitpunkt  $t_1$  das Referenzsignal eine fallende Flanke aufweist. Weiter sei  $\tau_{A,B} < \tau_k$  oder  $\tau_{A,B} < \tau_{k+1}$ , dann kann das gleiche Vorzeichen für  $\gamma_k$  bzw.  $\gamma_{k+1}$  angegeben werden. Ist jedoch  $\tau_{A,B} \geq \tau_k$  oder  $\tau_{A,B} \geq \tau_{k+1}$ , so





(a) Fall 1.1 mit  $\tau_k > \tau_A > 0$  und  $\tau_{k+1} > \tau_A > 0$  und den Gleichungen (4.63a) für die Fläche  $F_{DZ}$ , (4.63b) für den Zustand  $\gamma_{k+1}$ , (4.63c) für den Zustand  $\tau_{k+1}$  und (4.62) für die Spannung  $v_{k+1}$  über  $C_1$

(b) Fall 1.2: mit  $\tau_k > \tau_A > 0$  und  $\tau_A \geq \tau_{k+1} > 0$  und den Gleichungen (4.64a) für die Fläche  $F_{DZ}$ , (4.64b) für den Zustand  $\gamma_{k+1}$ , (4.64c) für den Zustand  $\tau_{k+1}$  und (4.62) für die Spannung  $v_{k+1}$  über  $C_1$

**Abbildung 4.8.:** Behandlung der Fälle 1.1 und 1.2: Die roten Linien des Stromes  $i_p(t)$  und der Spannung  $u_{ctl}(t)$  beschreiben die durch  $u_{ref}(t)$  und  $u_{var}(t)$  mit Dead-Zone verursachten Verläufe. Die schwarzen Verläufe von  $i_p(t)$  und  $u_{ctl}(t)$  ergeben sich, wenn der PFD als ideal angenommen wird und somit keine Dead-Zone beinhaltet. Hervorgehoben ist die resultierende Fläche  $F_{DZ}$ .

ist  $\gamma_k = 0$  bzw.  $\gamma_{k+1} = 0$ . Dadurch ergibt sich die Spannung

$$v_{k+1} = v_k + \frac{i_p}{C_1} \gamma_{k+1}. \quad (4.62)$$

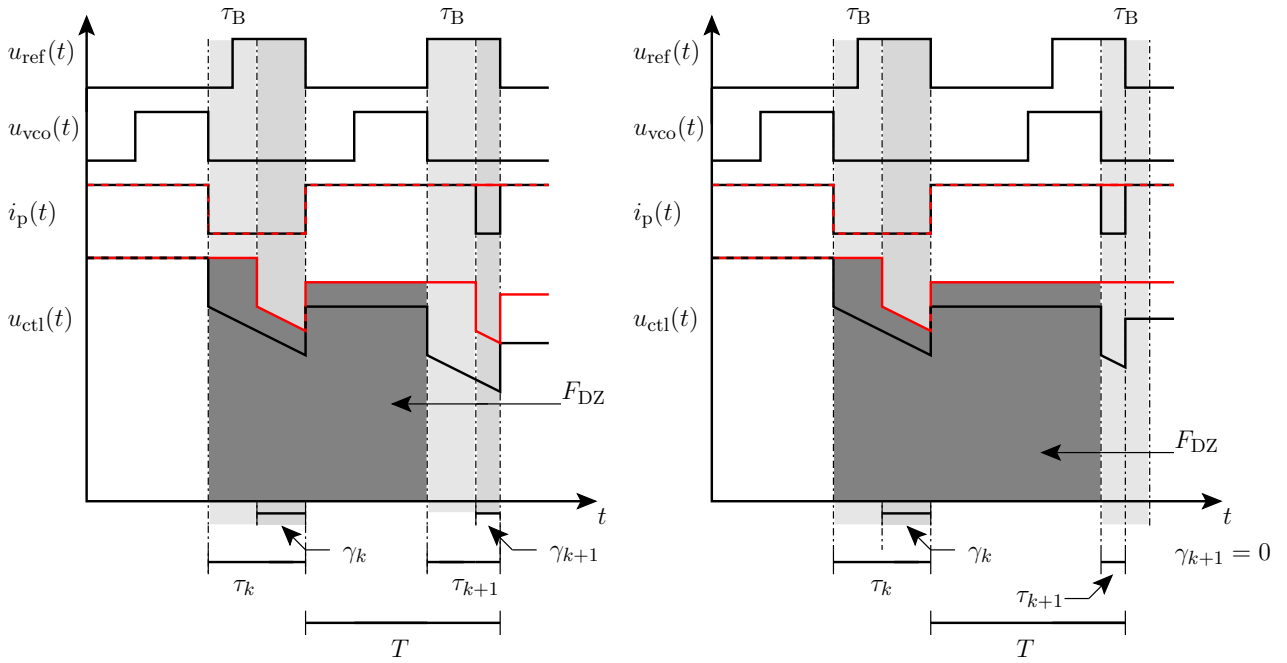
Das Modell von VAN PAEMEL basiert auf der Bestimmung der Fläche unter der Regelspannung  $u_{ctl}(t)$  innerhalb einer Periode des VCO-Signals. Im Detail müssen 16 Fälle unterschieden werden, die jedoch aufgrund verschiedener Symmetrien in Untergruppen eingeteilt werden und sich sechs Gleichungssysteme ergeben werden. Die Abbildungen 4.8(a) und 4.8(b) zeigen die Fälle 1.1 und 1.2. Es folgen für die Zustandsgrößen beider Fälle die Nebenbedingungen  $\tau_k > \tau_A > 0$  und  $\gamma_k > 0$ . Des Weiteren ergibt sich für Fall 1.1  $\tau_{k+1} > \tau_A > 0$  und  $\gamma_{k+1} > 0$ , wodurch sich

$$v_k (T - \tau_k + \tau_{k+1}) + I_p \left( R_1 (\tau_{k+1} - \tau_A) + \frac{(\tau_{k+1} - \tau_A)^2}{2C_1} \right) = \frac{1}{K_v} \quad (4.63a)$$

und

$$\gamma_{k+1}^{F1.1} = \tau_{k+1} - \tau_A \quad (4.63b)$$

#### 4. Modellierung und Analyse digitaler Phasenregelkreise



- (a) Fall 2.1 mit  $\tau_k < -\tau_B < 0$  und  $\tau_{k+1} < -\tau_B < 0$  und den Gleichungen (4.65a) für die Fläche  $F_{DZ}$ , (4.65b) für den Zustand  $\gamma_{k+1}$ , (4.65c) für den Zustand  $\tau_{k+1}$  und (4.62) für die Spannung  $v_{k+1}$  über  $C_1$
- (b) Fall 2.2: mit  $\tau_k < -\tau_B < 0$  und  $-\tau_B \leq \tau_{k+1} < 0$  und den Gleichungen (4.65a) für die Fläche  $F_{DZ}$ , (4.66) für den Zustand  $\gamma_{k+1}$ , (4.65c) für den Zustand  $\tau_{k+1}$  und (4.62) für die Spannung  $v_{k+1}$  über  $C_1$

**Abbildung 4.9.:** Behandlung der Fälle 2.1 und 2.2: Die roten Linien des Stromes  $i_p(t)$  und der Spannung  $u_{ctl}(t)$  beschreiben die durch  $u_{ref}(t)$  und  $u_{var}(t)$  mit Dead-Zone verursachten Verläufe. Die schwarzen Verläufe von  $i_p(t)$  und  $u_{ctl}(t)$  ergeben sich, wenn der PFD als ideal angenommen wird und somit keine Dead-Zone beinhaltet. Hervorgehoben ist die resultierende Fläche  $F_{DZ}$ .

angeben lassen, wobei sich aus Gleichung (4.63a) dann der Zustand

$$\tau_{k+1}^{F1.1} = \tau_A - \frac{(v_k + I_p R_1) - \sqrt{(v_k + I_p R_1)^2 + 2 \frac{I_p}{C_1} \left( v_k (\tau_k - T - \tau_A) + \frac{1}{K_v} \right)}}{\frac{I_p}{C_1}} \quad (4.63c)$$

ergibt. Aus Abbildung 4.8(b) kann die Relation  $\tau_A \geq \tau_{k+1} > 0$  für Fall 1.2 abgeleitet werden und es gelten

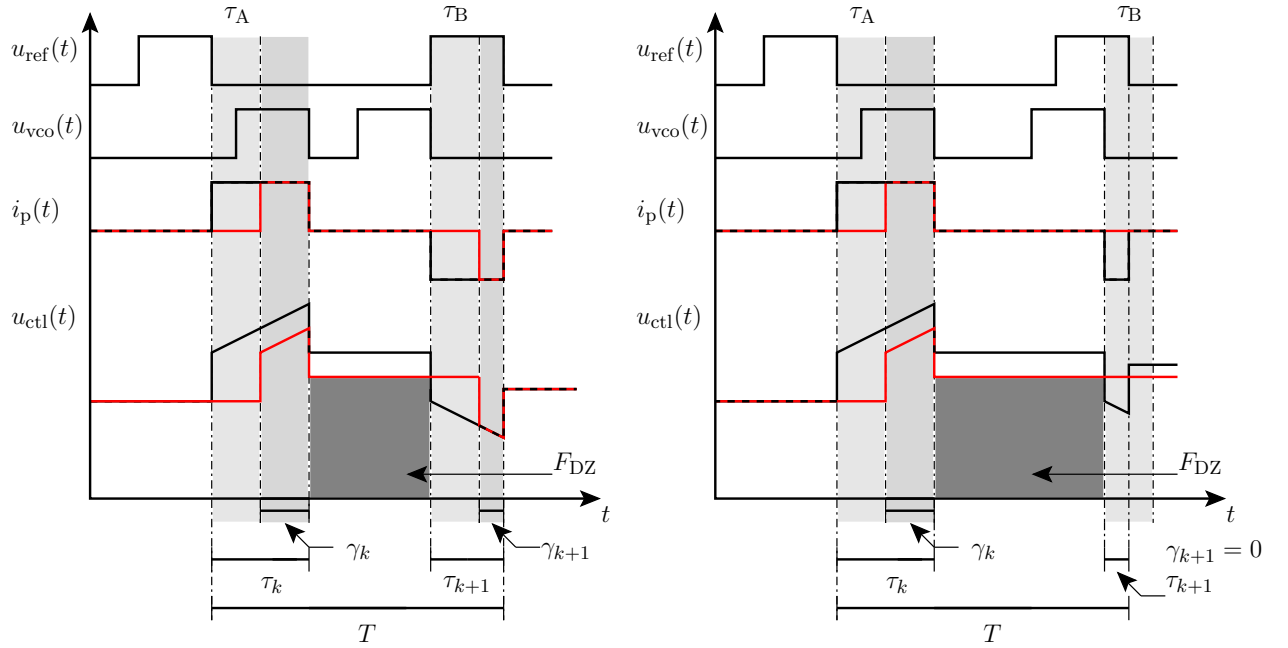
$$v_k (T - \tau_k + \tau_{k+1}) = \frac{1}{K_v} \quad (4.64a)$$

und

$$\gamma_{k+1}^{F1.2} = 0. \quad (4.64b)$$

Aus Gleichung (4.64a) ergibt sich

$$\tau_{k+1}^{F1.2} = -T + \tau_k + \frac{1}{K_v v_k}. \quad (4.64c)$$



(a) Fall 3.1 mit  $0 < \tau_A < \tau_k$  und  $\tau_{k+1} < -\tau_B < 0$  und den Gleichungen (4.67a) für die Fläche  $F_{DZ}$ , (4.67b) für den Zustand  $\gamma_{k+1}$ , (4.67c) für den Zustand  $\tau_{k+1}$  und (4.62) für die Spannung  $v_{k+1}$  über  $C_1$

(b) Fall 3.2: mit  $0 < \tau_A < \tau_k$  und  $-\tau_B \leq \tau_{k+1} < 0$  und den Gleichungen (4.67a) für die Fläche  $F_{DZ}$ , (4.68) für den Zustand  $\gamma_{k+1}$ , (4.67c) für den Zustand  $\tau_{k+1}$  und (4.62) für die Spannung  $v_{k+1}$  über  $C_1$

**Abbildung 4.10.:** Behandlung der Fälle 3.1 und 3.2: Die roten Linien des Stromes  $i_p(t)$  und der Spannung  $u_{ctl}(t)$  beschreiben die durch  $u_{ref}(t)$  und  $u_{var}(t)$  mit *Dead-Zone* verursachten Verläufe. Die schwarzen Verläufe von  $i_p(t)$  und  $u_{ctl}(t)$  ergeben sich, wenn der PFD als ideal angenommen wird und somit keine *Dead-Zone* beinhaltet. Hervorgehoben ist die resultierende Fläche  $F_{DZ}$ .

Die Fälle 2.1 und 2.2 können den Abbildungen 4.9(a) und 4.9(b) entnommen werden. Somit lassen sich für den Fall 2.1 die Randbedingungen  $\tau_k < -\tau_B < 0$ ,  $\tau_{k+1} < -\tau_B < 0$  und die Zustandsgleichungen aufstellen. Es ergibt sich

$$\tau_B \left( v_k + \frac{I_p (\tau_k + \tau_B)}{C_1} \right) + I_p \xi (\tau_k + \tau_B) + v_k (T - \tau_k + \tau_{k+1}) = \frac{1}{K_v} \quad (4.65a)$$

als gesuchte Fläche unter der Regelspannung  $u_{ctl}(t)$ , wobei die Funktion  $\xi(\cdot)$  durch

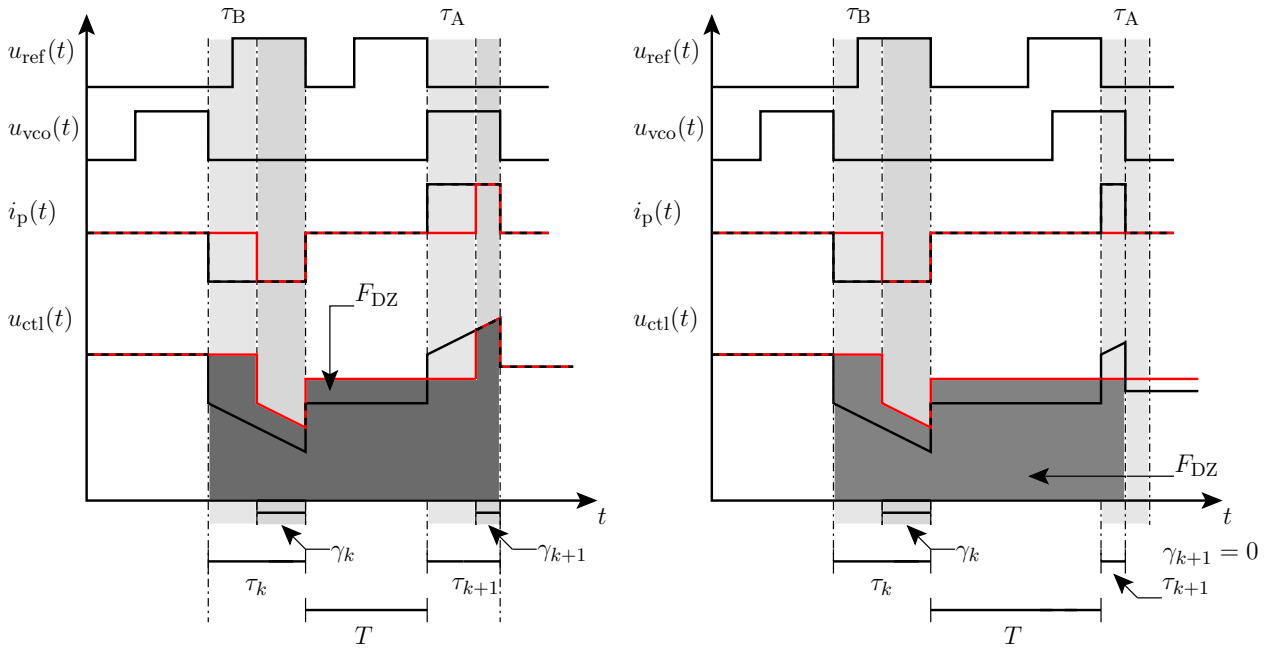
$$\xi(x) = x R_1 + \frac{x^2}{2C_1}$$

definiert ist. Hinzukommend ist

$$\gamma_{k+1}^{F2.1} = \tau_{k+1} + \tau_B. \quad (4.65b)$$

Aus Gleichung (4.65c) kann

$$\tau_{k+1}^{F2.1} = \tau_k - T + \frac{1}{K_v v_k} - \frac{I_p R_1 (\tau_k + \tau_B) + \frac{I_p}{2C_1} (\tau_k^2 - \tau_B^2)}{v_k} \quad (4.65c)$$



- (a) Fall 4.1 mit  $\tau_k < -\tau_B < 0$  und  $\tau_{k+1} > \tau_A > 0$  und den Gleichungen (4.69a) für die Fläche  $F_{DZ}$ , (4.69b) für den Zustand  $\gamma_{k+1}$ , (4.69c) für den Zustand  $\tau_{k+1}$  und (4.62) für die Spannung  $v_{k+1}$  über  $C_1$
- (b) Fall 4.2: mit  $\tau_k < -\tau_B < 0$  und  $\tau_A \geq \tau_{k+1} > 0$  und den Gleichungen (4.70a) für die Fläche  $F_{DZ}$ , (4.70b) für den Zustand  $\gamma_{k+1}$ , (4.70c) für den Zustand  $\tau_{k+1}$  und (4.62) für die Spannung  $v_{k+1}$  über  $C_1$

**Abbildung 4.11.:** Behandlung der Fälle 4.1 und 4.2: Die roten Linien des Stromes  $i_p(t)$  und der Spannung  $u_{ctl}(t)$  beschreiben die durch  $u_{ref}(t)$  und  $u_{var}(t)$  mit Dead-Zone verursachten Verläufe. Die schwarzen Verläufe von  $i_p(t)$  und  $u_{ctl}(t)$  ergeben sich, wenn der PFD als ideal angenommen wird und somit keine Dead-Zone beinhaltet. Hervorgehoben ist die resultierende Fläche  $F_{DZ}$ .

abgeleitet werden. Die Fläche zum Fall 2.2 wird wie Fall 2.1 durch (4.65a) beschrieben und somit wird der Zustand  $\tau_{k+1}$  durch die Gleichung (4.65c) bestimmt. Im Gegensatz zu Fall 2.1 (vergleiche Gleichung (4.65b)) ist

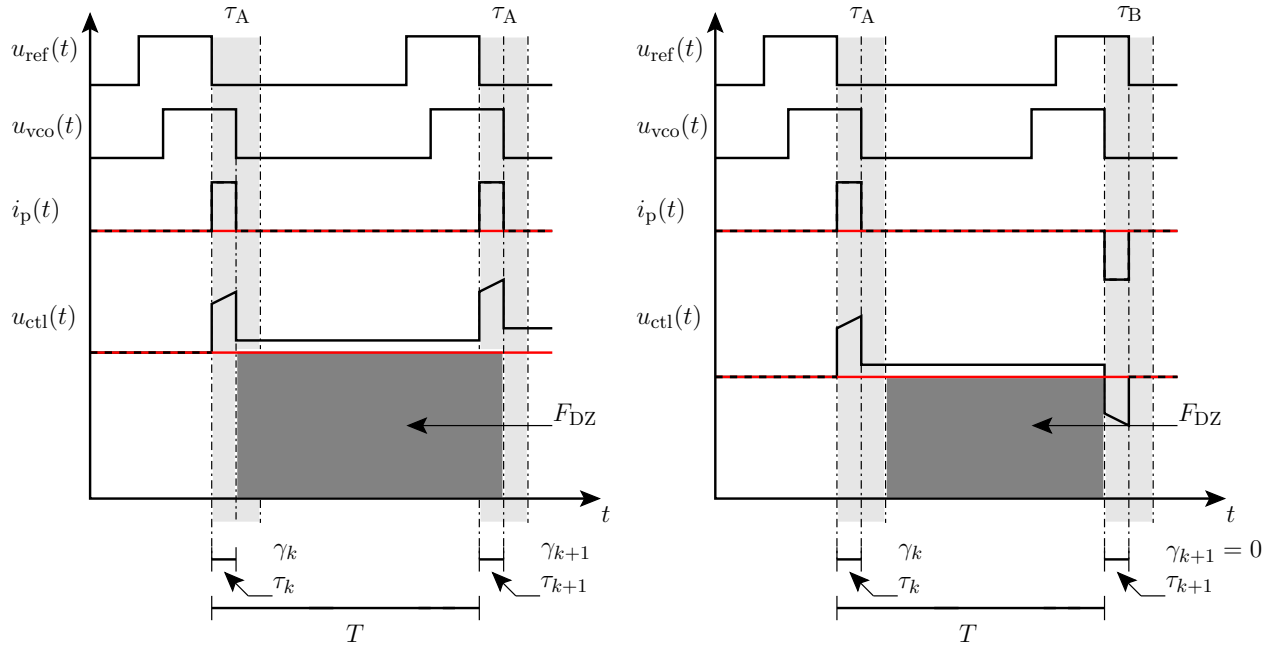
$$\gamma_{k+1}^{F2.2} = 0, \quad (4.66)$$

wobei  $\tau_k < -\tau_B < 0$  und  $-\tau_B \leq \tau_{k+1} < 0$  gelten. Werden die Gebiete  $\tau_k > \tau_A > 0$  und  $\tau_{k+1} < -\tau_B < 0$  betrachtet, können die folgenden Gleichungen zu Fall 3.1 aufgestellt werden:

$$v_k(T - \tau_k + \tau_{k+1}) = \frac{1}{K_v} \quad (4.67a)$$

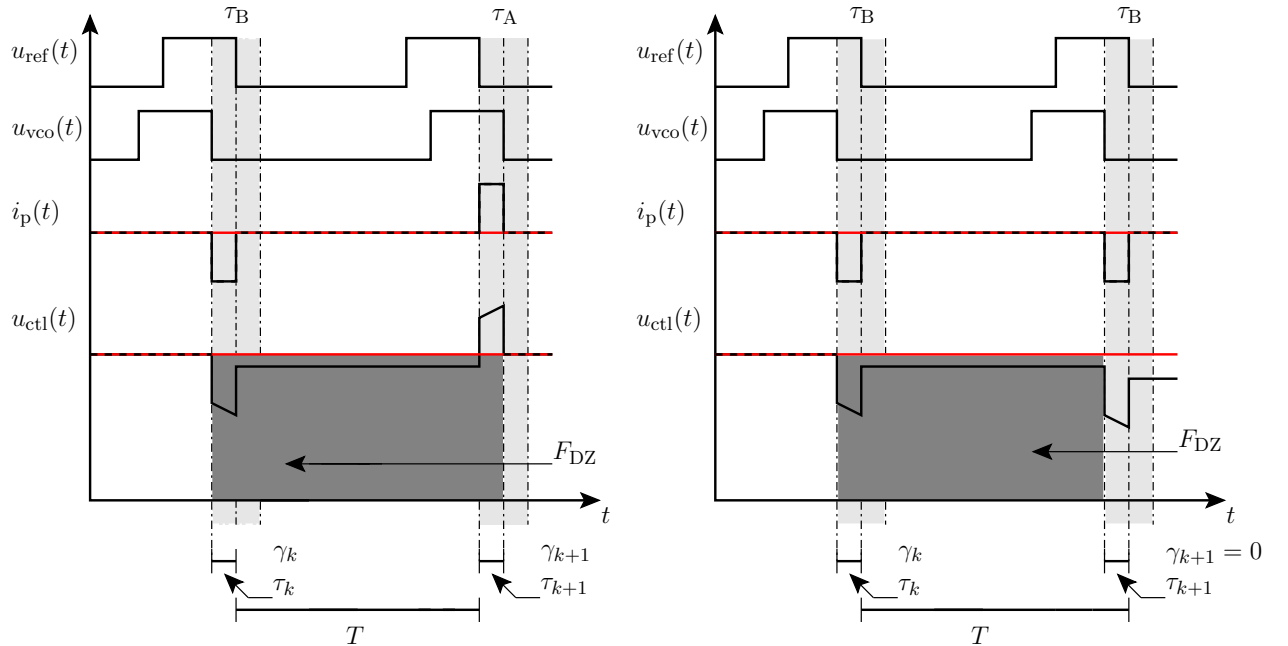
$$\gamma_{k+1}^{F3.1} = \tau_{k+1} + \tau_B \quad (4.67b)$$

$$\tau_{k+1}^{F3.1} = \tau_k - T + \frac{1}{K_v v_k} \quad (4.67c)$$



(a) Fall 5.1 mit  $\tau_A \geq \tau_k > 0$  und  $\tau_A \geq \tau_{k+1} > 0$  und den Gleichungen (4.71a) für die Fläche  $F_{DZ}$ , (4.71b) für den Zustand  $\gamma_{k+1}$ , (4.71c) für den Zustand  $\tau_{k+1}$  und (4.62) für die Spannung  $v_{k+1}$  über  $C_1$

(b) Fall 5.2: mit  $\tau_A \geq \tau_k > 0$  und  $-\tau_B \leq \tau_{k+1} < 0$  und den Gleichungen (4.71a) für die Fläche  $F_{DZ}$ , (4.71b) für den Zustand  $\gamma_{k+1}$ , (4.71c) für den Zustand  $\tau_{k+1}$  und (4.62) für die Spannung  $v_{k+1}$  über  $C_1$

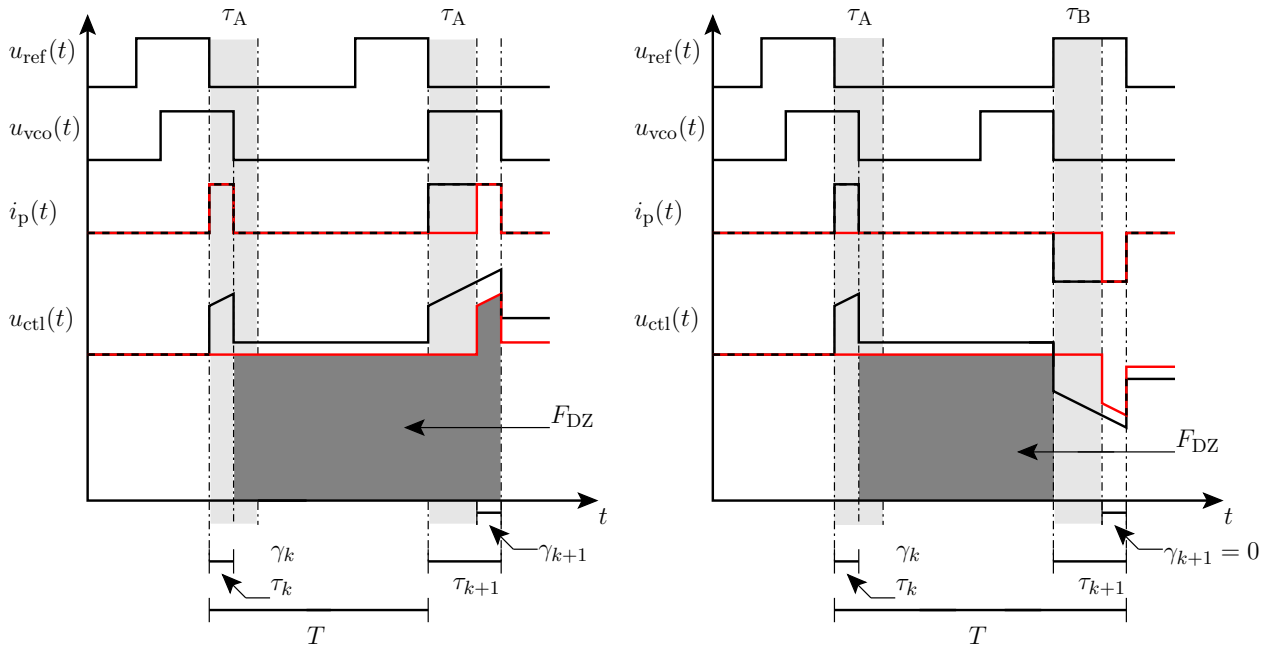


(c) Fall 5.3 mit  $-\tau_B \leq \tau_k < 0$  und  $\tau_A \geq \tau_{k+1} > 0$  und den Gleichungen (4.71a) für die Fläche  $F_{DZ}$ , (4.71b) für den Zustand  $\gamma_{k+1}$ , (4.71c) für den Zustand  $\tau_{k+1}$  und (4.62) für die Spannung  $v_{k+1}$  über  $C_1$

(d) Fall 5.4: mit  $-\tau_B \leq \tau_k < 0$  und  $-\tau_B \leq \tau_{k+1} < 0$  und den Gleichungen (4.71a) für die Fläche  $F_{DZ}$ , (4.71b) für den Zustand  $\gamma_{k+1}$ , (4.71c) für den Zustand  $\tau_{k+1}$  und (4.62) für die Spannung  $v_{k+1}$  über  $C_1$

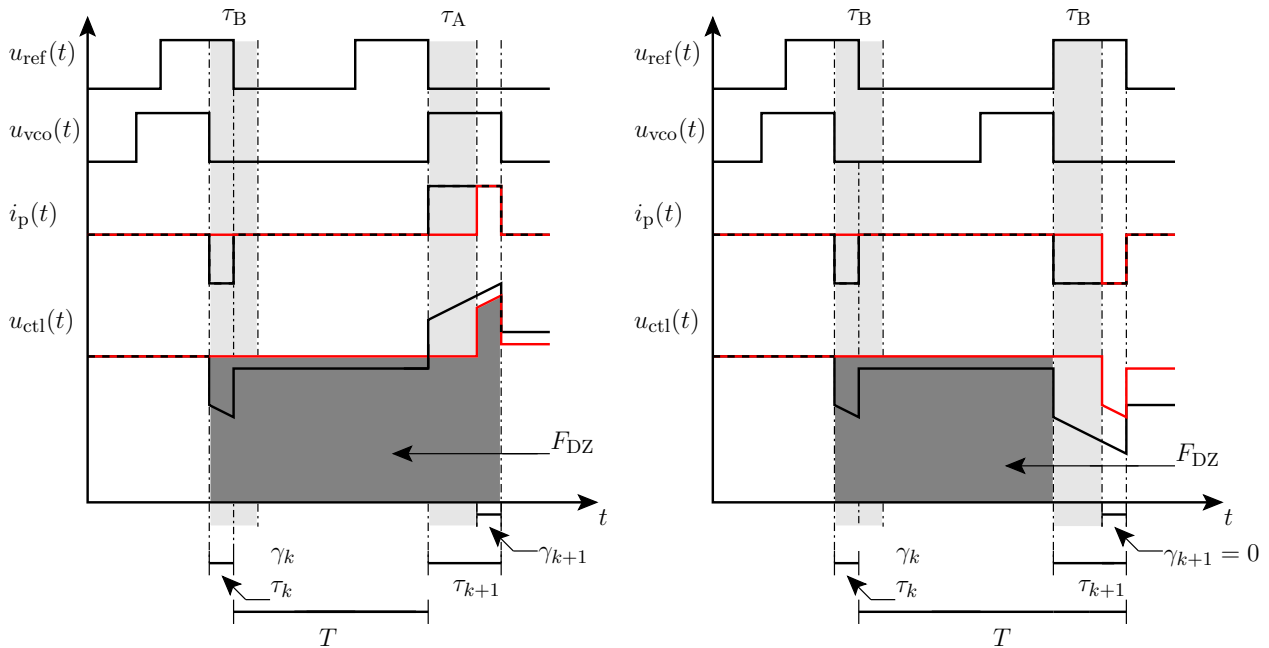
**Abbildung 4.12.:** Behandlung der Fälle 5.1, 5.2, 5.3 und 5.4: Die roten Linien des Stromes  $i_p(t)$  und der Spannung  $u_{ctl}(t)$  beschreiben die durch  $u_{ref}(t)$  und  $u_{var}(t)$  mit *Dead-Zone* verursachten Verläufe. Die schwarzen Verläufe von  $i_p(t)$  und  $u_{ctl}(t)$  ergeben sich, wenn der PFD als ideal angenommen wird und somit keine *Dead-Zone* beinhaltet. Hervorgehoben ist die resultierende Fläche  $F_{DZ}$ .

#### 4. Modellierung und Analyse digitaler Phasenregelkreise



(a) Fall 6.1 mit  $\tau_A \geq \tau_k > 0$  und  $\tau_{k+1} > \tau_A > 0$  und den Gleichungen (4.72a) für die Fläche  $F_{DZ}$ , (4.72b) für den Zustand  $\gamma_{k+1}$ , (4.72c) für den Zustand  $\tau_{k+1}$  und (4.62) für die Spannung  $v_{k+1}$  über  $C_1$

(b) Fall 6.2: mit  $\tau_A \geq \tau_k > 0$  und  $\tau_{k+1} < -\tau_B < 0$  und den Gleichungen (4.73a) für die Fläche  $F_{DZ}$ , (4.73b) für den Zustand  $\gamma_{k+1}$ , (4.73c) für den Zustand  $\tau_{k+1}$  und (4.62) für die Spannung  $v_{k+1}$  über  $C_1$



(c) Fall 6.3 mit  $-\tau_B \leq \tau_k < 0$  und  $\tau_{k+1} > \tau_A > 0$  und den Gleichungen (4.72a) für die Fläche  $F_{DZ}$ , (4.72b) für den Zustand  $\gamma_{k+1}$ , (4.72c) für den Zustand  $\tau_{k+1}$  und (4.62) für die Spannung  $v_{k+1}$  über  $C_1$

(d) Fall 6.4: mit  $-\tau_B \leq \tau_k < 0$  und  $\tau_{k+1} < -\tau_B < 0$  und den Gleichungen (4.73a) für die Fläche  $F_{DZ}$ , (4.73b) für den Zustand  $\gamma_{k+1}$ , (4.73c) für den Zustand  $\tau_{k+1}$  und (4.62) für die Spannung  $v_{k+1}$  über  $C_1$

**Abbildung 4.13.:** Behandlung der Fälle 6.1, 6.2, 6.3 und 6.4: Die roten Linien des Stromes  $i_p(t)$  und der Spannung  $u_{ctl}(t)$  beschreiben die durch  $u_{ref}(t)$  und  $u_{var}(t)$  mit Dead-Zone verursachten Verläufe. Die schwarzen Verläufe von  $i_p(t)$  und  $u_{ctl}(t)$  ergeben sich, wenn der PFD als ideal angenommen wird und somit keine Dead-Zone beinhaltet. Vorgehoben ist die resultierende Fläche  $F_{DZ}$ .

Offensichtlich entspricht Fall 3.1 einem Nulldurchgang des Phasefehlers, da sich der Zustand des PFD von  $\mathcal{S}_{+1}$  über  $\mathcal{S}_0$  nach  $\mathcal{S}_{-1}$  ändert. Dieser Fall tritt genau dann auf, wenn die Trajektorie noch relativ weit vom Fixpunkt entfernt ist und die *Dead-Zone* nur einen geringen Einfluss hat. Für  $\tau_k > \tau_A > 0$  und  $-\tau_B \leq \tau_{k+1} < 0$  kann die Fläche nach Gleichung (4.67a) und der Zustand  $\tau_{k+1}$  nach Gleichung (4.67c) für den Fall 3.2 nach Abbildung 4.10(b) angegeben werden. Für die Pulsbreite  $\gamma_{k+1}$  wird

$$\gamma_{k+1}^{\text{F3.2}} = 0 \quad (4.68)$$

gesetzt. Der Fall 4.1 entspricht wie der Fall 3.1 einem Nulldurchgang des Phasefehlers, wobei der Zustandswechsel von  $\mathcal{S}_{-1}$  über  $\mathcal{S}_0$  nach  $\mathcal{S}_{+1}$  erfolgt. Damit kann durch  $\tau_k < -\tau_B < 0$  und  $\tau_{k+1} > \tau_A > 0$  die Fläche

$$\tau_B \left( v_k + \frac{I_p (\tau_k + \tau_B)}{C_1} \right) + I_p (\xi(\tau_k + \tau_B) + \xi(\tau_{k+1} - \tau_A)) + \quad (4.69a)$$

$$v_k (T - \tau_k + \tau_{k+1}) = \frac{1}{K_v}$$

angegeben werden und es folgt

$$\gamma_{k+1}^{\text{F4.1}} = \tau_{k+1} - \tau_A \quad (4.69b)$$

sowie

$$\tau_{k+1}^{\text{F4.1}} = \tau_A + \frac{-(v_k + R_1 I_p)}{\frac{I_p}{C_1}} + \frac{\sqrt{(v_k + R_1 I_p)^2 - \frac{I_p^2}{C_1^2} (\tau_k^2 - \tau_B^2) + 2 \frac{I_p}{C_1} h(v_k, \tau_k)}}{\frac{I_p}{C_1}} \quad (4.69c)$$

mit

$$h(v_k, \tau_k) = v_k (\tau_k - \tau_A - T) - I_p R_1 (\tau_k + \tau_B) + \frac{1}{K_v}. \quad (4.69d)$$

Mit  $\tau_k < -\tau_B < 0$  und  $\tau_A \geq \tau_{k+1} > 0$  können die Gleichungen für den Fall 4.2 aufgestellt werden:

$$\tau_B \left( v_k + \frac{I_p (\tau_k + \tau_B)}{C_1} \right) + I_p \xi(\tau_k + \tau_B) + v_k (T - \tau_k + \tau_{k+1}) = \frac{1}{K_v} \quad (4.70a)$$

$$\gamma_{k+1}^{\text{F4.2}} = 0 \quad (4.70b)$$

$$\tau_{k+1}^{\text{F4.2}} = \tau_k - T + \frac{1}{K_v v_k} + \frac{I_p R_1 (\tau_k + \tau_B) + \frac{I_p}{2C_1} (\tau_k^2 - \tau_B^2)}{v_k} \quad (4.70c)$$

#### 4. Modellierung und Analyse digitaler Phasenregelkreise

---

Aus den Abbildungen 4.12(a), 4.12(b), 4.12(c) und 4.12(d) ist ersichtlich, dass sich sowohl für  $\tau_{k+1}$ ,  $\gamma_{k+1}$  und  $v_{k+1}$  dieselben Gleichungen für die Fälle 5.1, 5.2, 5.3 und 5.4 ergeben. Somit gelten die Gleichungen

$$v_k (T - \tau_k + \tau_{k+1}) = \frac{1}{K_v}, \quad (4.71a)$$

$$\gamma_{k+1}^{\text{F5}} = 0, \quad (4.71b)$$

und

$$\tau_{k+1}^{\text{F5}} = \tau_k - T + \frac{1}{K_v v_k}. \quad (4.71c)$$

Offensichtlich findet gerade bei diesen Fallunterscheidungen keine Regelung statt, da keine Strompulse aufgrund des kleinen Phasenfehlers zwischen den Phasensignalen  $\varphi_{\text{ref}}(t)$  und  $\varphi_{\text{vco}}(t)$  erzeugt werden können und somit die Spannung am Ausgang des Schleifenfilters konstant bleibt. Formal gelten jedoch für den Fall 5.1 die Ungleichungen  $0 < \tau_k \leq \tau_A$  und  $0 < \tau_{k+1} \leq \tau_A$ . Für den Fall 5.2 ergibt sich  $0 < \tau_k \leq \tau_A$  und  $-\tau_B \leq \tau_{k+1} < 0$ . Fall 5.3 ist für den Bereich  $-\tau_B \leq \tau_k < 0$  und  $0 < \tau_{k+1} \leq \tau_A$  definiert. Abbildung 4.12(d) liefert  $-\tau_B \leq \tau_k < 0$  und  $-\tau_B \leq \tau_{k+1} < 0$  für Fall 5.4. Wird der Bereich verlassen, in dem keine Regelung stattfindet, ergeben sich die letzten vier Fallunterscheidungen. D. h. die Strompulsbreite  $\gamma_{k+1}$  ist größer Null. Für die Fälle 6.1 und 6.3 können die folgenden Gleichungen ermittelt werden:

$$v_k (T - \tau_k + \tau_{k+1}) + I_p \left( (\tau_{k+1} - \tau_A) R_1 + \frac{1}{2} \frac{(\tau_{k+1} - \tau_A)^2}{C_1} \right) = \frac{1}{K_v} \quad (4.72a)$$

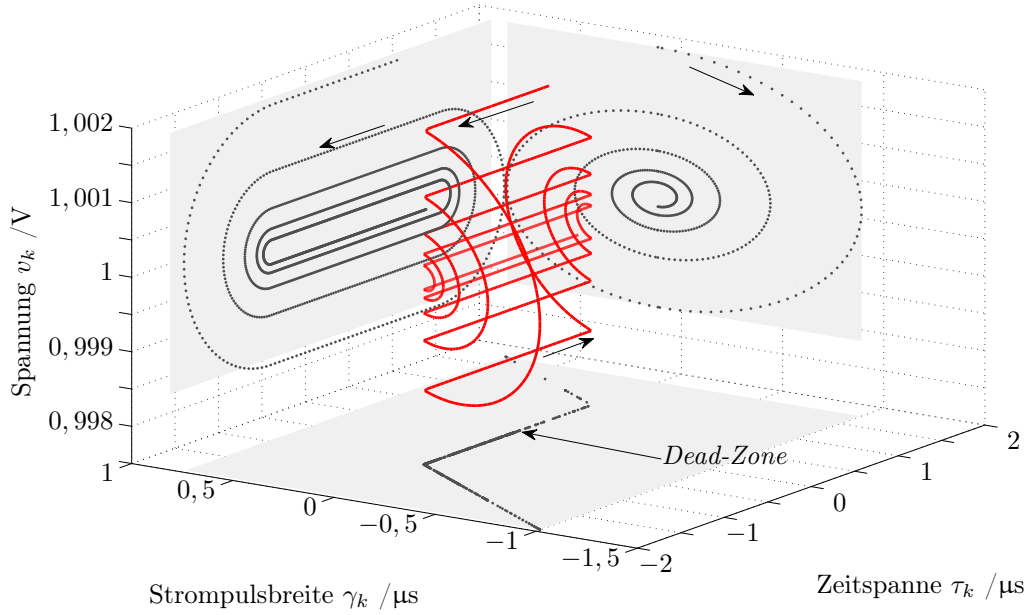
$$\gamma_{k+1}^{\text{F6.1/F6.3}} = \tau_{k+1} - \tau_A \quad (4.72b)$$

$$\begin{aligned} \tau_{k+1}^{\text{F6.1/F6.3}} = \tau_A + \frac{-(v_k + I_p R_1)}{\frac{I_p}{C_1}} \\ + \frac{\sqrt{(v_k + I_p R_1)^2 + \frac{2I_p}{C_1} \left( v_k (\tau_k - \tau_A - T) + \frac{1}{K_v} \right)}}{\frac{I_p}{C_1}} \end{aligned} \quad (4.72c)$$

Dabei gelten für den Fall 6.1  $\tau_A \geq \tau_k < 0$  und  $\tau_{k+1} > \tau_A > 0$ . Entsprechend ergibt sich  $-\tau_B \leq \tau_k < 0$  und  $\tau_{k+1} > \tau_A > 0$  für den Fall 6.3. Die letzten beiden Fallunterscheidungen 6.2 und 6.4 werden durch die Fläche

$$v_k (T - \tau_k + \tau_{k+1}) = \frac{1}{K_v}, \quad (4.73a)$$





**Abbildung 4.14.:** Dreidimensionaler Zustandsraum mit der Strompulsbreite  $\gamma_k$ , der Zeitspanne  $\tau_k$  zwischen zwei Ereignissen und der Regelspannung  $u_{ctl}$ .

die Zustandsgrößen

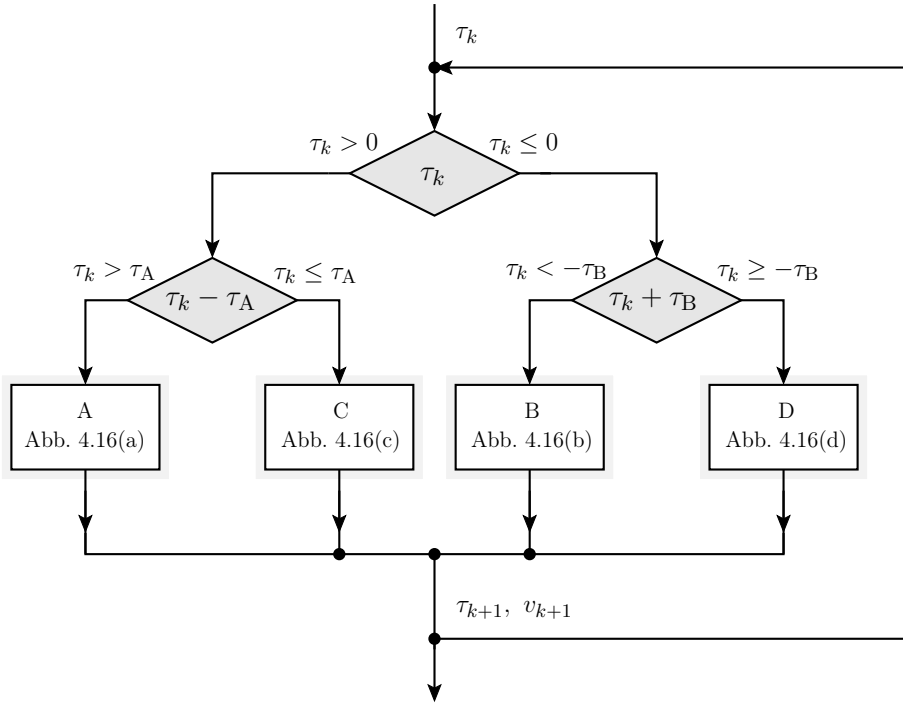
$$\gamma_{k+1}^{F6.2/F6.4} = \tau_{k+1} + \tau_B \quad (4.73b)$$

und

$$\tau_{k+1}^{F6.2/F6.4} = \tau_k - T + \frac{1}{K_v v_k} \quad (4.73c)$$

beschrieben, mit  $\tau_A \geq \tau_k > 0$  und  $\tau_{k+1} < -\tau_B < 0$  für den Fall 6.2 und  $-\tau_B \leq \tau_k < 0$  und  $\tau_{k+1} < -\tau_B < 0$  für Fall 6.4.

Es sei darauf hingewiesen, dass der Zustand  $\gamma_k$  im Grunde ein virtueller Zustand ist. Jedoch kann unter Betrachtung der Zustände  $v_k$  und  $\tau_k$  sowie des virtuellen Zustandes  $\gamma_k$  die *Dead-Zone* schon während der Simulation im Mittel gut dargestellt und charakterisiert werden. Definitionsgemäß stellt  $\tau_k$  die Differenz der Zeitpunkte einer fallenden Flanke des Referenzsignals und einer fallenden Flanke des VCO-Signals dar und  $\gamma_k$  ist gerade das Zeitintervall, bei dem der Strom  $i_p$  einen Wert ungleich Null annimmt. Abbildung 4.14 zeigt den dreidimensionalen Zustandsraum, wobei drei Projektionen dargestellt werden. Auf der Projektionsebene  $v_k - \gamma_k$  ist nicht zu erkennen, ob das System eine *Dead-Zone* aufweist oder nicht. In der Ebene  $v_k - \tau_k$  ist ersichtlich, dass im Bereich  $-\tau_B \leq \tau_k \leq \tau_A$  die Spannungswerte  $v_k$  konstant sind und somit in diesem Bereich keine Regelung stattfindet. Die Ebene  $\gamma_k - \tau_k$  stellt gerade das mittlere Verhalten der *Dead-Zone* dar. Es entspricht dabei dem Tastverhältnis  $\delta$ . Die angegebenen Gleichungen zur Beschreibung des Verhaltens können kompakter geschrieben werden. Hierfür wird der eingeführte Zustand  $\gamma_k$  nicht mehr



**Abbildung 4.15.:** Ablaufdiagramm des Algorithmus' zur Simulation des Phasenregelkreises mit Dead-Zone auf Basis der Arbeiten von VAN PAEMEL. In den Blöcken A bis D erfolgt die Bestimmung der Menge im Phasenraum. Eine detaillierte Beschreibung der Blöcke A bis D ist in den Abbildungen 4.16(a) bis 4.16(d) zu finden.

explizit ausgeschrieben. Dadurch lassen sich die Gleichungssysteme ausschließlich durch den Zustand  $v_k$  und  $\tau_k$  beschreiben. Dabei können die 16 betrachteten Fälle durch sechs Gleichungssysteme beschrieben werden.

Für die Fälle 1.1, 4.1, 6.1 und 6.3 kann

$$\begin{bmatrix} \tau_{k+1} \\ v_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{1,4}(\tau_k, v_k) \\ v_k + \alpha(g_{1,4}(\tau_k, v_k) - \tau_A) \end{bmatrix} = \mathbf{f}_{1,4}(\tau_k, v_k) \quad (4.74a)$$

bestimmt werden, wobei die Relationen

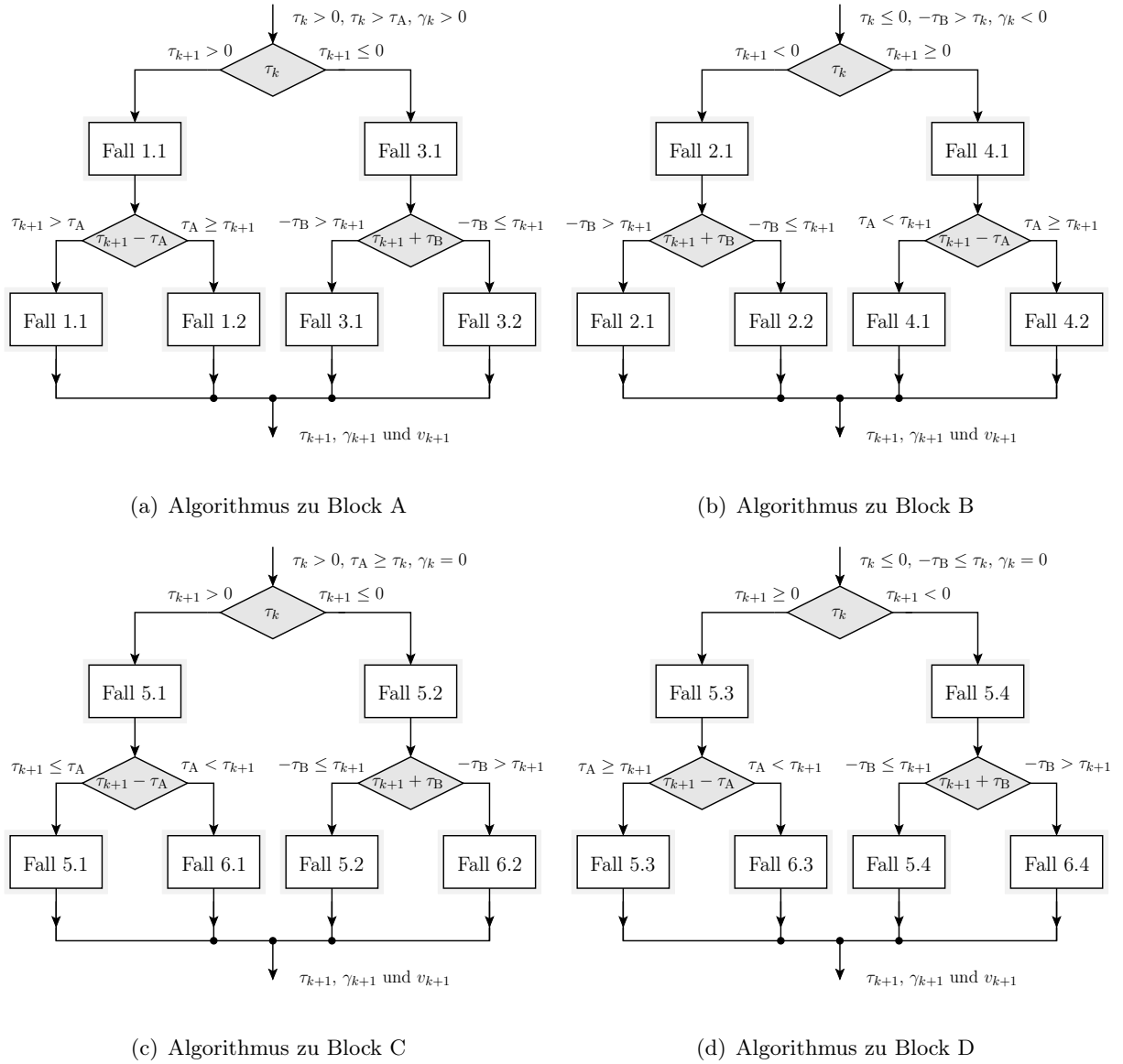
$$\underbrace{(\tau_k > \tau_A > 0)}_{\mathbf{f}_1(\tau_k, v_k)} \vee \underbrace{(\tau_A \geq \tau_k > 0)}_{\mathbf{f}_1(\tau_k, v_k)} \vee \underbrace{(-\tau_B \leq \tau_k < 0)}_{\mathbf{f}_1(\tau_k, v_k)} \vee \underbrace{(\tau_k < -\tau_B < 0)}_{\mathbf{f}_4(\tau_k, v_k)}$$

und

$$\tau_{k+1} > \tau_A > 0$$

gelten. Des Weiteren werde den Fällen 1.1, 6.1 und 6.3 die Funktion  $g_1(\tau_k, v_k)$  zugewiesen und dem Fall 4.1 die Funktion  $g_4(\tau_k, v_k)$ . Für das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \tau_{k+1} \\ v_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{2,3}(\tau_k, v_k) \\ v_k + \alpha(g_{2,3}(\tau_k, v_k) + \tau_B) \end{bmatrix} = \mathbf{f}_{2,3}(\tau_k, v_k) \quad (4.74b)$$



**Abbildung 4.16.:** Die Algorithmen der Blöcke A bis D zur Fallunterscheidung basierend auf dem Zustand  $\tau_{k+1}$

können die Bedingungen

$$\begin{aligned}
 & \overbrace{(\tau_k > \tau_A > 0)}^{\text{Fall 3.1}} \vee \overbrace{(\tau_k < -\tau_B < 0)}^{\text{Fall 2.1}} \vee \overbrace{(\tau_A \geq \tau_k > 0)}^{\text{Fall 6.2}} \vee \overbrace{(-\tau_B \leq \tau_k < 0)}^{\text{Fall 6.4}} \\
 & \mathbf{f}_3(\tau_k, v_k) \quad \mathbf{f}_2(\tau_k, v_k) \quad \mathbf{f}_3(\tau_k, v_k) \quad \mathbf{f}_3(\tau_k, v_k)
 \end{aligned}$$

und

$$\tau_{k+1} < -\tau_B < 0$$

aufgestellt werden, wobei den Fällen 3.1, 6.2 und 6.4 die Funktion  $g_2(\tau_k, v_k)$  und dem Fall 2.1 die Funktion  $g_3(\tau_k, v_k)$  zugewiesen wird. Das letzte Gleichungssystem beschreibt den

Sachverhalt, wenn der Phasenfehler zwischen den Eingangssignalen des PFD so klein ist, dass keine Regelung stattfindet. Es ergibt sich

$$\begin{bmatrix} \tau_{k+1} \\ v_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{2,3}(\tau_k, v_k) \\ v_k \end{bmatrix} = \mathbf{f}_{5,6}(\tau_k, v_k) \quad (4.74c)$$

mit den Relationen

$$\underbrace{(\tau_A \geq \tau_k > 0)}_{\mathbf{f}_5(\tau_k, v_k)} \vee \underbrace{(-\tau_B \leq \tau_k < 0)}_{\mathbf{f}_5(\tau_k, v_k)} \vee \underbrace{(\tau_k > \tau_A > 0)}_{\mathbf{f}_5(\tau_k, v_k)} \vee \underbrace{(\tau_k < -\tau_B < 0)}_{\mathbf{f}_6(\tau_k, v_k)}$$

und

$$\tau_A \geq \tau_{k+1} > 0$$

oder

$$\underbrace{(\tau_A \geq \tau_k > 0)}_{\mathbf{f}_5(\tau_k, v_k)} \vee \underbrace{(-\tau_B \leq \tau_k < 0)}_{\mathbf{f}_5(\tau_k, v_k)} \vee \underbrace{(\tau_k < -\tau_B < 0)}_{\mathbf{f}_6(\tau_k, v_k)} \vee \underbrace{(-\tau_B > \tau_A > 0)}_{\mathbf{f}_5(\tau_k, v_k)}$$

und

$$-\tau_B \leq \tau_{k+1} < 0.$$

Dabei gilt für die Fälle 3.2, 5.1, 5.2, 5.3, 5.4 und 1.2 die Funktion  $g_2(\tau_k, v_k)$ . Die Fälle 2.2, 4.2 sind mit der Funktion  $g_3(\tau_k, v_k)$  verknüpft.

### 4.2.2. Analyse des erweiterten Modells nach VAN PAEMEL:

#### *Dead-Zone*

Im Folgenden soll formal eine Punkttransformation  $\mathbf{T}(\cdot)$  eingeführt werden, wobei das Differenzengleichungssystem vorab normiert wird. Durch die Normierung  $\tilde{\tau}_k = \tau_k/T$ , die Verschiebung  $\tilde{v}_k = TK_v v_k - 1$  und die beiden Substitutionen

$$a = K_v I_p R_1 T \quad (4.75a)$$

und

$$b = \frac{K_v I_p T^2}{2C_1} \quad (4.75b)$$

sowie  $\tilde{\tau}_B = \tau_A/T$  und  $\tilde{\tau}_B = \tau_B/T$  ergeben sich für Funktionen  $g_i(\tau_k, v_k)$  mit  $i \in (1, 2, 3, 4)$  die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_{k+1}^{F1} &= \tilde{\tau}_B - \frac{(a + \tilde{v}_k + 1) + \sqrt{(a + \tilde{v}_k + 1)^2 - 4b((1 + \tilde{v}_k)(1 - \tilde{\tau}_k + \tilde{\tau}_B) - 1)}}{2b} \\ &= \tilde{g}_1(\tilde{\tau}_k, \tilde{v}_k) \end{aligned} \quad (4.76a)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}_{k+1}^{\text{F2}} &= \tilde{\tau}_k - 1 + \frac{1 - a(\tilde{\tau}_k + \tilde{\tau}_B) - b(\tilde{\tau}_k^2 - \tilde{\tau}_B^2)}{1 + \tilde{v}_k} \\ &= \tilde{g}_2(\tilde{\tau}_k, \tilde{v}_k)\end{aligned}\quad (4.76b)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}_{k+1}^{\text{F3}} &= \tilde{\tau}_k - 1 + \frac{1}{1 + \tilde{v}_k} \\ &= \tilde{g}_3(\tilde{\tau}_k, \tilde{v}_k)\end{aligned}\quad (4.76c)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}_{k+1}^{\text{F4}} &= \tilde{\tau}_B - \frac{(a + \tilde{v}_k + 1)}{2b} + \frac{\sqrt{(a + \tilde{v}_k + 1)^2 - 4bh(\tilde{\tau}_k, \tilde{v}_k)}}{2b} \\ &= \tilde{g}_4(\tilde{\tau}_k, \tilde{v}_k)\end{aligned}\quad (4.76d)$$

mit

$$h(\tilde{\tau}_k, \tilde{v}_k) = (1 + \tilde{v}_k)(1 - \tilde{\tau}_k + \tilde{\tau}_B) - 1 + a(\tilde{\tau}_k + \tilde{\tau}_B) + b(\tilde{\tau}_k^2 - \tilde{\tau}_B^2)$$

$$\tilde{\tau}_{k+1}^{\text{F5}} = \tilde{g}_2(\tilde{\tau}_k, \tilde{v}_k) \quad (4.76e)$$

$$\tilde{\tau}_{k+1}^{\text{F6}} = \tilde{g}_3(\tilde{\tau}_k, \tilde{v}_k) \quad (4.76f)$$

Die Punkttransformation  $\mathbf{T}$  werde durch

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{T}(\mathbf{x}_k) = \begin{cases} \mathbf{T}_1(\mathbf{x}_k) & , \quad \forall \mathbf{x}_k \in \mathcal{M}_1 \\ \mathbf{T}_2(\mathbf{x}_k) & , \quad \forall \mathbf{x}_k \in \mathcal{M}_2 \\ \mathbf{T}_3(\mathbf{x}_k) & , \quad \forall \mathbf{x}_k \in \mathcal{M}_3 \\ \mathbf{T}_4(\mathbf{x}_k) & , \quad \forall \mathbf{x}_k \in \mathcal{M}_4 \\ \mathbf{T}_5(\mathbf{x}_k) & , \quad \forall \mathbf{x}_k \in \mathcal{M}_5 \\ \mathbf{T}_6(\mathbf{x}_k) & , \quad \forall \mathbf{x}_k \in \mathcal{M}_6 \end{cases} \quad (4.77)$$

definiert, wobei der Zustandsvektor durch  $\mathbf{x}_k = [\tilde{\tau}_k, \tilde{v}_k]^T$  angegeben wird und die Transformationen  $\mathbf{T}_{1,4}$  durch die Gleichungen

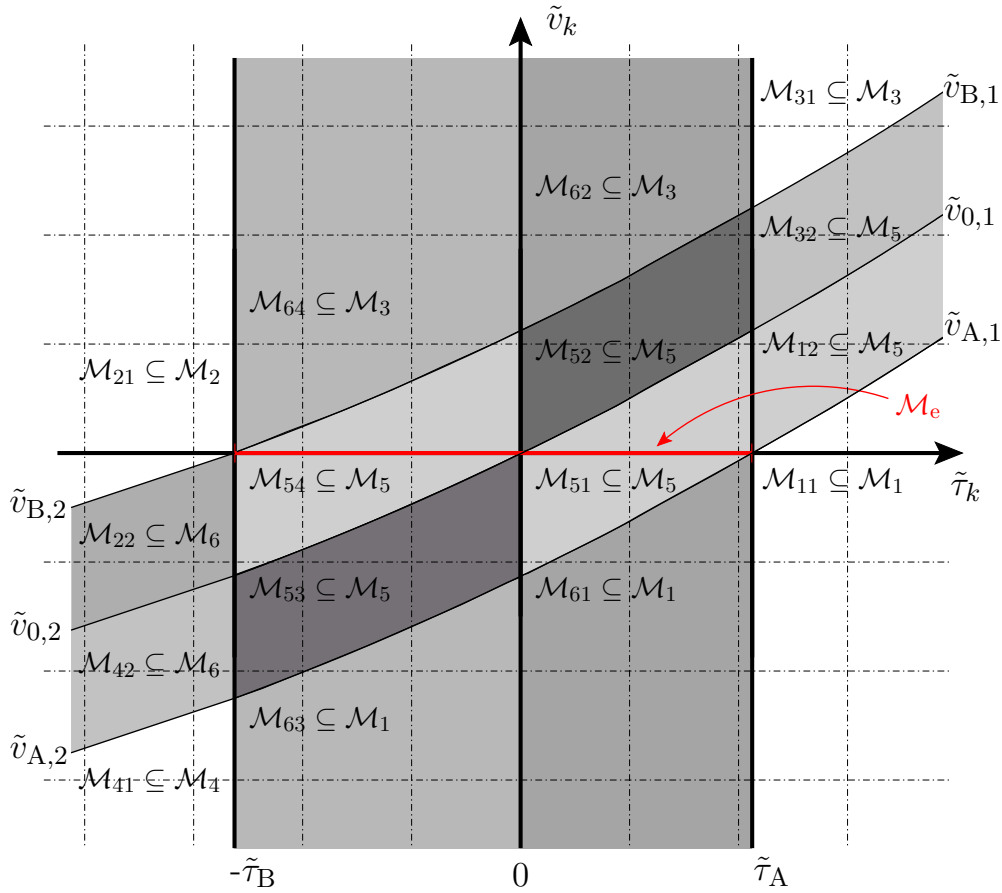
$$\begin{bmatrix} \tilde{\tau}_{k+1} \\ \tilde{v}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{g}_{1,4}(\tilde{\tau}_k, \tilde{v}_k) \\ \tilde{v}_k + 2b(\tilde{g}_{1,4}(\tilde{\tau}_k, \tilde{v}_k) - \tilde{\tau}_B) \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{f}}_{1,4}(\tilde{\tau}_k, \tilde{v}_k), \quad (4.78)$$

$\mathbf{T}_{2,3}$  durch

$$\begin{bmatrix} \tilde{\tau}_{k+1} \\ \tilde{v}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{g}_{2,3}(\tilde{\tau}_k, \tilde{v}_k) \\ \tilde{v}_k + 2b(\tilde{g}_{2,3}(\tilde{\tau}_k, \tilde{v}_k) + \tilde{\tau}_B) \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{f}}_{2,3}(\tilde{\tau}_k, \tilde{v}_k) \quad (4.79)$$

und  $\mathbf{T}_{5,6}$  durch

$$\begin{bmatrix} \tilde{\tau}_{k+1} \\ \tilde{v}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{g}_{2,3}(\tilde{\tau}_k, \tilde{v}_k) \\ \tilde{v}_k \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{f}}_{5,6}(\tilde{\tau}_k, \tilde{v}_k) \quad (4.80)$$



**Abbildung 4.17.:** Bereichsdefinition der Transformation  $T$  im Zustandsraum mit den zugehörigen Mengen  $\mathcal{M}$

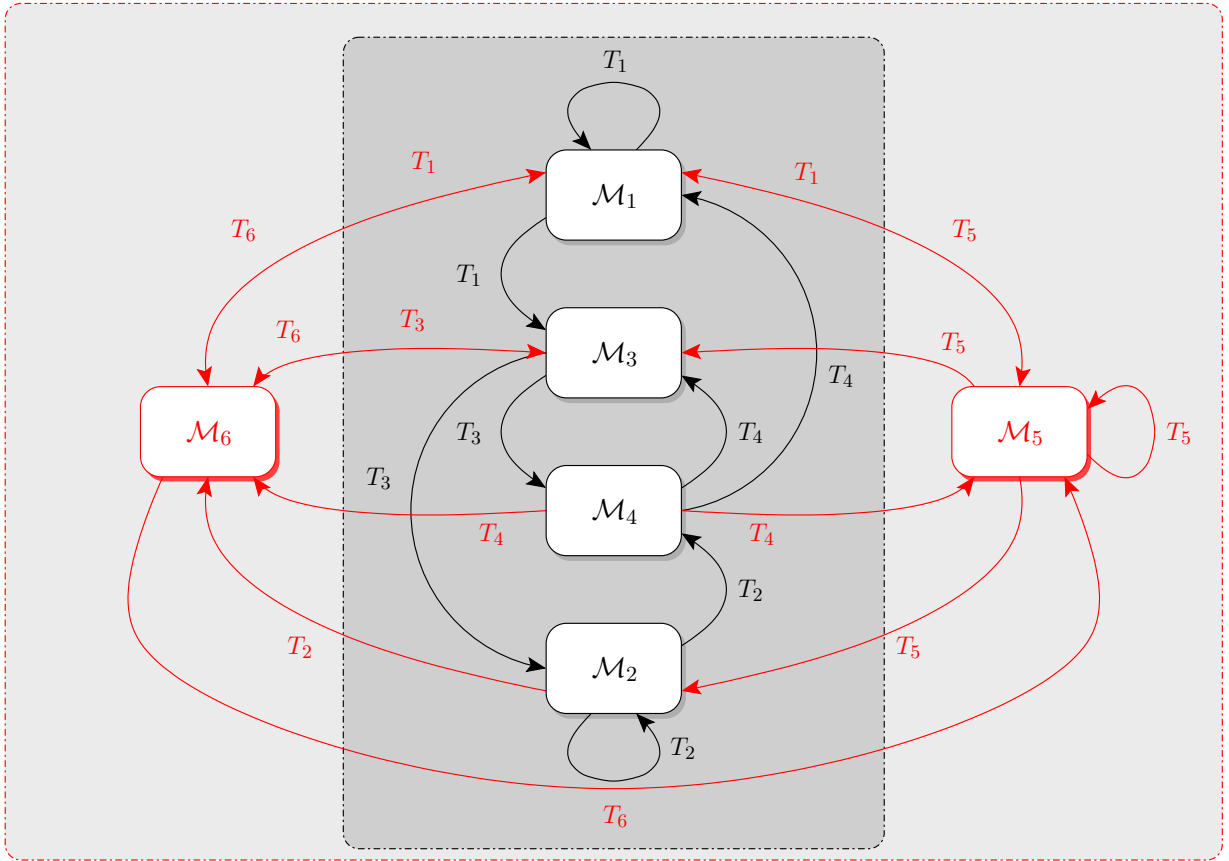
definiert sind. Abbildung 4.18 zeigt das zugehörige Regionenübergangsdiagramm, wobei die schwarzen Blöcke mit den Mengen  $\mathcal{M}_1$  bis  $\mathcal{M}_4$  und den schwarz gekennzeichneten Übergängen der Punkttransformationen  $T_1$  bis  $T_4$  sich zu dem Diagramm ergeben, was von ACCO in [33] erarbeitet wurde. Die roten Übergänge und Mengen sind die Folge der modellierten *Dead-Zone* durch die Verzögerungen  $\tilde{\tau}_A$  und  $\tilde{\tau}_B$ . Die Grenzen der Gebiete können durch

$$\mathbf{x}_k(1) = \tilde{\tau}_k \stackrel{\Delta}{=} \tilde{\tau}_A, \quad (4.81a)$$

$$\mathbf{x}_k(1) = \tilde{\tau}_k \stackrel{\Delta}{=} -\tilde{\tau}_B, \quad (4.81b)$$

$$\mathbf{x}_{k+1}(1) = \tilde{\tau}_{k+1} = T_i(\mathbf{x}_k) \stackrel{\Delta}{=} 0, \quad (4.81c)$$

$$\mathbf{x}_{k+1}(1) = \tilde{\tau}_{k+1} = T_i(\mathbf{x}_k) \stackrel{\Delta}{=} \tilde{\tau}_A, \quad (4.81d)$$



**Abbildung 4.18.:** *Regionenübergangsdiagramm zur Beschreibung der Punkttransformation  $T$ . Die schwarz gekennzeichneten Mengen und Transitionen sind die des ursprünglichen Modells nach VAN PAEMEL. Die rot gekennzeichneten Blöcke und Transitionen sind die, die sich durch das Hinzufügen der Verzögerungen  $\tilde{\tau}_A$  und  $\tilde{\tau}_B$  ergeben, wodurch sich der Einfluss der modellierten *Dead-Zone* charakterisieren lässt.*

und durch

$$\mathbf{x}_{k+1}(1) = \tilde{\tau}_{k+1} = T_i(\mathbf{x}_k) \triangleq -\tilde{\tau}_B \quad (4.81e)$$

berechnet werden, wobei die Grenze zwischen zwei Gebieten beiden zugehörig ist. Diese Grenzen unterteilen den Phasenraum in 16 Gebiete. Dabei beschreibt Abbildung 4.18 die Übergangstransitionen und Abbildung 4.17 zeigt schematisch die Mengen und Grenzen auf, die über die Gleichungssysteme definiert wurden. Es ergeben sich für den Bereich  $-\tilde{\tau}_B \leq \tilde{\tau}_k \leq 1$  die Gleichungen

$$\tilde{v}_{A,1}(\tilde{\tau}) = \frac{1}{1 - \tilde{\tau} + \tilde{\tau}_A} - 1 \quad (4.82a)$$

$$\tilde{v}_{0,1}(\tilde{\tau}) = \frac{1}{1 - \tilde{\tau}} - 1 \quad (4.82b)$$

und

$$\tilde{v}_{B,1}(\tilde{\tau}) = \frac{1}{1 - \tilde{\tau} - \tilde{\tau}_B} - 1. \quad (4.82c)$$

Für  $-\tilde{\tau}_B \geq \tilde{\tau}_k \geq -1$  können die Beziehungen

$$\tilde{v}_{A,2}(\tilde{\tau}) = \frac{1 - a(\tilde{\tau}_k + \tilde{\tau}_B) - b(\tilde{\tau}_k^2 - \tilde{\tau}_B^2)}{1 - \tilde{\tau} + \tilde{\tau}_A} - 1 \quad (4.82d)$$

$$\tilde{v}_{0,2}(\tilde{\tau}) = \frac{1 - a(\tilde{\tau}_k + \tilde{\tau}_B) - b(\tilde{\tau}_k^2 - \tilde{\tau}_B^2)}{1 - \tilde{\tau}} - 1 \quad (4.82e)$$

und

$$\tilde{v}_{B,2}(\tilde{\tau}) = \frac{1 - a(\tilde{\tau}_k + \tilde{\tau}_B) - b(\tilde{\tau}_k^2 - \tilde{\tau}_B^2)}{1 - \tilde{\tau} + \tilde{\tau}_B} - 1 \quad (4.82f)$$

angegeben werden. Offensichtlich lässt sich mittels der Darstellung der Mengen  $\mathcal{M}$  und der Punkttransformation der Algorithmus (siehe Abbildung 4.15) zur Auswahl der Gleichungen vereinfachen.

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{cases} \mathbf{T}_1(\mathbf{x}_k) = \mathbf{f}_1(\tilde{\tau}_k, \tilde{v}_k) & , \quad \tilde{v}_{A,1} \geq \tilde{v}_k & , \quad -\tilde{\tau}_B \leq \tilde{\tau}_k \leq 1 \\ \mathbf{T}_2(\mathbf{x}_k) = \mathbf{f}_2(\tilde{\tau}_k, \tilde{v}_k) & , \quad \tilde{v}_{B,2} \leq \tilde{v}_k & , \quad -1 \leq \tilde{\tau}_k \leq -\tilde{\tau}_B \\ \mathbf{T}_3(\mathbf{x}_k) = \mathbf{f}_3(\tilde{\tau}_k, \tilde{v}_k) & , \quad \tilde{v}_{B,1} \leq \tilde{v}_k & , \quad -\tilde{\tau}_B \leq \tilde{\tau}_k \leq 1 \\ \mathbf{T}_4(\mathbf{x}_k) = \mathbf{f}_4(\tilde{\tau}_k, \tilde{v}_k) & , \quad \tilde{v}_{A,2} \geq \tilde{v}_k & , \quad -1 \leq \tilde{\tau}_k \leq -\tilde{\tau}_B \\ \mathbf{T}_5(\mathbf{x}_k) = \mathbf{f}_5(\tilde{\tau}_k, \tilde{v}_k) & , \quad \tilde{v}_{A,1} \leq \tilde{v}_k \leq \tilde{v}_{B,1} & , \quad -\tilde{\tau}_B \leq \tilde{\tau}_k \leq 1 \\ \mathbf{T}_6(\mathbf{x}_k) = \mathbf{f}_6(\tilde{\tau}_k, \tilde{v}_k) & , \quad \tilde{v}_{A,2} \leq \tilde{v}_k \leq \tilde{v}_{B,2} & , \quad -1 \leq \tilde{\tau}_k \leq -\tilde{\tau}_B \end{cases} \quad (4.83)$$

Trivialerweise liegt der Ursprung auf der Grenze der Gebiete  $\mathcal{M}_{51}$ ,  $\mathcal{M}_{52}$ ,  $\mathcal{M}_{53}$  und  $\mathcal{M}_{54}$  und bildet für  $\tilde{\tau}_k = \tilde{\tau}_e \in (-\tilde{\tau}_B, \tilde{\tau}_A)$  und  $\tilde{v}_e = \tilde{v}_k = 0$  (für das nichtnormalisierte Modell ergibt sich  $v_k = 1/(K_v T)$  und  $\tau_k = \tau_e \in (-\tau_B, \tau_A)$ ) sich selbst auf  $[\tilde{\tau}_e, \tilde{v}_e]^T$  ab.

Mit der Menge  $\mathcal{M}_e = \{\tilde{\tau} : -\tilde{\tau}_B < \tilde{\tau} < \tilde{\tau}_A \wedge \tilde{v}_k = 0\}$  ergibt sich die Abbildung  $T : \mathcal{M}_e \rightarrow \mathcal{M}_e$ , wobei sogar jeder Punkt  $(\tilde{\tau}_e, \tilde{v}_k = 0) \in \mathcal{M}_e$  sich auf sich selbst abbildet.  $\mathcal{M}_e$  stellt somit eine Menge von Fixpunkten dar. Somit ist offensichtlich die Linearisierung um die Menge  $\mathcal{M}_e$  erforderlich. Für das System auf der Menge  $\mathcal{M}_1$  erfolgt die Linearisierung um  $\tilde{v} = 0$  und  $\tilde{\tau} = \tilde{\tau}_A$ , wodurch sich

$$\begin{bmatrix} \tilde{\tau}_{k+1} \\ \tilde{v}_{k+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{1+a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2b & 1+a-2b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{\tau}_k \\ \tilde{v}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\tau}_A - \frac{\tilde{\tau}_A}{1+a} \\ \frac{2b\tilde{\tau}_A}{1+a} \end{bmatrix} \quad (4.84)$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_k + \mathbf{b}_1$$

ergibt. Wird das Differenzengleichungssystem der Menge  $\mathcal{M}_2$  um  $\tilde{v} = 0$  und  $\tilde{\tau} = -\tilde{\tau}_B$  linearisiert, so liefert die TAYLOR-Reihenentwicklung

$$\begin{bmatrix} \tilde{\tau}_{k+1} \\ \tilde{v}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi & -1 \\ 2b\chi & 1-2b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{\tau}_k \\ \tilde{v}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\chi-1)\tilde{\tau}_B \\ 2b\tilde{\tau}_B\chi \end{bmatrix}, \quad (4.85)$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_k + \mathbf{b}_2$$



mit  $\chi = 1 - a + 2b\tilde{\tau}_B$ . Innerhalb der Menge  $\mathcal{M}_3$  befindet sich ein Fixpunkt an der Stelle  $\tilde{v} = 0$  und  $\tilde{\tau} = -\tilde{\tau}_B$  und es kann das lineare Differenzengleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \tilde{\tau}_{k+1} \\ \tilde{v}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2b & 1 - 2b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{\tau}_k \\ \tilde{v}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2b\tilde{\tau}_B\chi \end{bmatrix} \quad (4.86)$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_3\mathbf{x}_k + \mathbf{b}_3$$

angegeben werden. Der Bereich  $\mathcal{M}_5$  beinhaltet die Menge von Fixpunkten  $\mathcal{M}_e$ . Wird um den Fixpunkt  $\tilde{v} = 0$  und  $\tilde{\tau}_e \in \mathcal{M}_5$  linearisiert, so kann

$$\begin{bmatrix} \tilde{\tau}_{k+1} \\ \tilde{v}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{\tau}_k \\ \tilde{v}_k \end{bmatrix} \quad (4.87)$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_5\mathbf{x}_k$$

bestimmt werden. Wird das Differenzgleichungssystem der Menge  $\mathcal{M}_6$  betrachtet, so lässt sich das nichtlineare Differenzgleichungssystem um  $\tilde{v} = 0$  und  $\tilde{\tau} = -\tilde{\tau}_B$  linearisieren. Es gilt

$$\begin{bmatrix} \tilde{\tau}_{k+1} \\ \tilde{v}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{\tau}_k \\ \tilde{v}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\tau}_B(\chi - 1) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.88)$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_6\mathbf{x}_k + \mathbf{b}_6.$$

Da auf der Menge  $\mathcal{M}_4$  kein Fixpunkt liegt, soll das nichtlineare Differenzgleichungssystem auf  $\mathcal{M}_4$  nicht linearisiert werden. Dementsprechend ist die Linearisierung an dieser Stelle abgeschlossen. Im Vergleich zu den vorher behandelten Linearisierungen, handelt es sich hier um ein sogenanntes stückweise affines System (PWA = *Piecewise Affine*).

Da sich der Zustandsraum des schaltenden, linearisierten Differenzgleichungssystems bezüglich der Grenzen im Vergleich zum schaltenden, nichtlinearen Differenzgleichungssystem unterscheidet und somit auch die Mengen sich ändern, ist es erforderlich, die Mengen des linearisierten Modells zu definieren. Das Differenzgleichungssystem der Menge  $\mathcal{M}_i$  werde linearisiert. Die sich ergebene Menge, auf dem die Linearisierung gültig ist, werde mit  $\mathcal{N}_i$  bezeichnet. Hinsichtlich der Stabilitätsbetrachtungen ist es ersichtlich, dass die linearisierte Transformation auf der Menge  $\mathcal{N}_5$  problematisch ist. Wird die Matrix  $\mathbf{A}_5$  betrachtet, so ergeben sich die Eigenwerte  $\lambda_{1,2} = 1$ . Damit liegen beide Eigenwerte auf dem Einheitskreis. Es ist jedoch offensichtlich, unter Berücksichtigung der Topologie des Zustandsraums und der Matrix  $\mathbf{A}_5$ , dass der Spannungswert  $v$  immer konstant ist, während  $\tau$  auf dem Gebiet wächst. Da jedoch das Gebiet  $\mathcal{N}_5$  begrenzt ist und die Berechnungen durch  $\mathbf{A}_5$  nur Zustände liefert, die in  $\mathcal{N}_5$ ,  $\mathcal{N}_3$  oder  $\mathcal{N}_2$  liegen, ist es hinreichend, wenn

die Transformationen auf  $\mathcal{N}_2$  und  $\mathcal{N}_3$  stabil sind, wobei das Schalten untereinander berücksichtigt werden muss. Des Weiteren gilt diese Betrachtung analog für den Übergang von  $\mathcal{N}_6$  nach  $\mathcal{N}_1$ . Demnach kann die Überlegung angestellt werden, dass, wenn  $\mathcal{N}_1$ ,  $\mathcal{N}_2$  und  $\mathcal{N}_3$  und deren Übergänge zu den begrenzten Gebieten asymptotisch stabil sind, auch das Gesamtsystem asymptotisch stabil ist. Ergibt sich für die Gebiete  $\mathcal{N}_1$ ,  $\mathcal{N}_2$  und  $\mathcal{N}_3$  eine *multiple* LYAPUNOV-Funktion, so kann auf quadratische Stabilität geschlossen werden trotz der Problematik der zunehmenden Pulsbreite  $\tau$  auf dem Gebiet  $\mathcal{N}_5$ . Letztendlich ist die Pulsbreite durch die Zeitverzögerungen  $\tau_A$  und  $\tau_B$  begrenzt. Im ersten Schritt sollen die charakteristischen Polynome der Matrizen  $\mathbf{A}_1$ ,  $\mathbf{A}_2$ ,  $\mathbf{A}_3$ ,  $\mathbf{A}_5$  und  $\mathbf{A}_6$  auf Einheitskreispolynome untersucht werden. Diesbezüglich sollen die Terme  $\mathbf{b}_i$  unberücksichtigt bleiben. Für die Matrix  $\mathbf{A}_1$  ergibt sich das charakteristische Polynom zu

$$D_1(\lambda) = \lambda^2 + \frac{2b - a - 2}{1 + a}\lambda + \frac{1}{(1 + a)} \quad (4.89)$$

und stellt für  $b > 0$ ,  $a > 0$  und  $a - b > -2$  ein Einheitskreispolynom dar. Damit das Differenzengleichungssystem mit der Matrix  $\mathbf{A}_2$  asymptotisch stabil ist, muss das Polynom

$$D_2(\lambda) = \lambda^2 + (a + 2b - 2 - 2b\tilde{\tau}_B)\lambda + 1 - a + 2b\tilde{\tau}_B \quad (4.90)$$

den Ungleichungen

$$1 > |1 - a + 2b\tilde{\tau}_B| \quad (4.91)$$

und

$$0 < (2\tilde{\tau}_B - 1)b + 2 - a \quad (4.92)$$

genügen. Diese Ungleichungen stellen komplexere Randbedingungen an die Parameter als die, die in Kapitel 4.1 dargelegt wurden. In Abbildung 4.19 sind diese für das Polynom  $D_2(\lambda)$  grafisch für drei feste Werte von  $\tilde{\tau}_B$  dargestellt. Die Betrachtung der Matrix  $\mathbf{A}_3$  ist etwas komplizierter, da sich die Eigenwerte

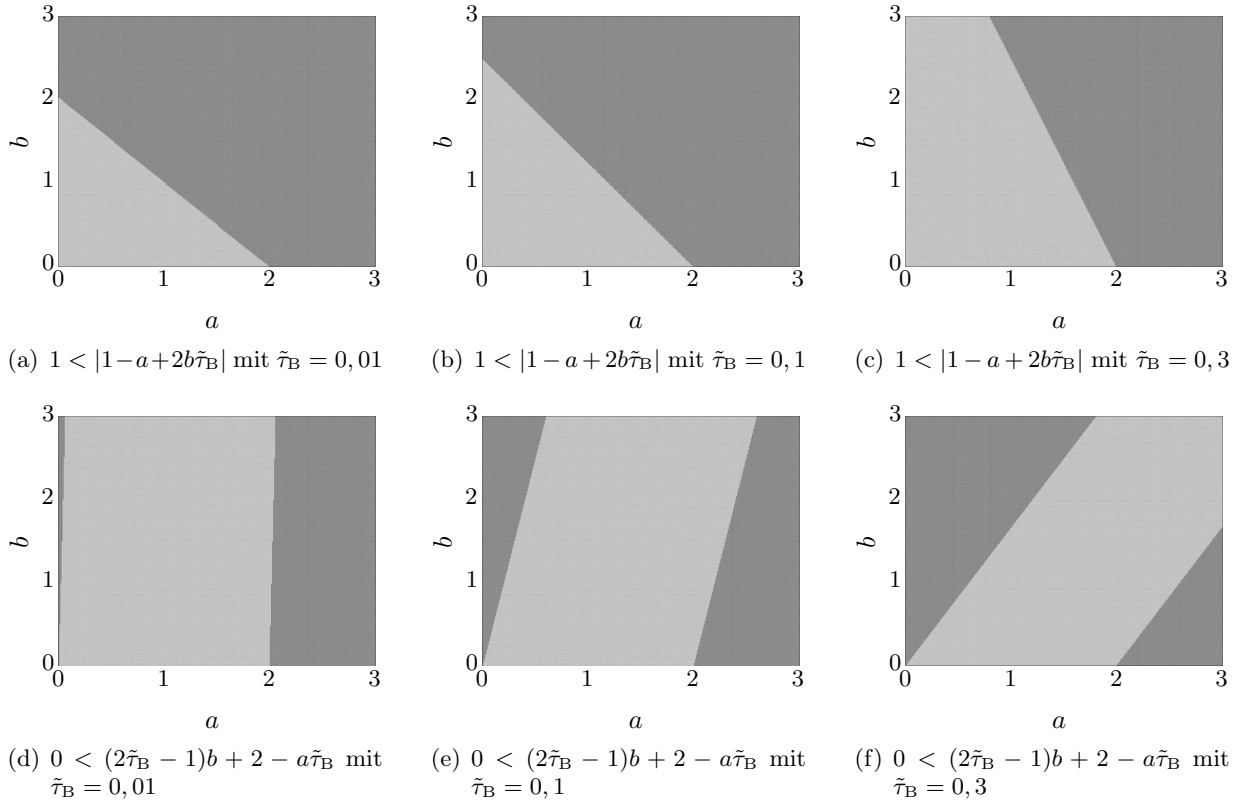
$$\lambda_{1,2} = 1 - b \pm \sqrt{b^2 - 2b} \quad (4.93)$$

ergeben. Damit liegen die Eigenwerte für  $0 < b < 2$  auf dem Einheitskreis, wobei für  $b = 0$  gar keine Regelung stattfindet, da somit der *Charge-Pump*-Strom  $I_p = 0$  A, der Verstärkungsbeiwert des VCO  $K_v = 0$  oder die Referenzfrequenz  $f_{\text{ref}} = 0$  wäre. Die Matrix  $\mathbf{A}_5$  besitzt hingegen zwei Eigenwerte direkt auf dem Einheitskreis ( $\lambda_{1,2} = 1$ ), wodurch dieses Differenzengleichungssystem gerade kein Einheitskreispolynom darstellt. Für die Matrix  $\mathbf{A}_6$  ergeben sich die Eigenwerte

$$\lambda_1 = 1 - a + 2b\tilde{\tau}_B \quad (4.94)$$

und

$$\lambda_2 = 1, \quad (4.95)$$



**Abbildung 4.19.:** Projektion der Parameter  $a$  und  $b$  bei festem  $\tilde{\tau}_B$ , damit das charakteristische Polynom  $D_2(\lambda)$  ein Einheitskreispolynom ist. Die hellen Flächen bezeichnen die Werte für  $a$  und  $b$ , bei denen  $D_2(\lambda)$  ein Einheitskreispolynom darstellt. Die dunklen Flächen entsprechen demnach den Parameterwerten  $a$  und  $b$ , bei denen  $D_2(\lambda)$  kein Einheitskreispolynom darstellt.

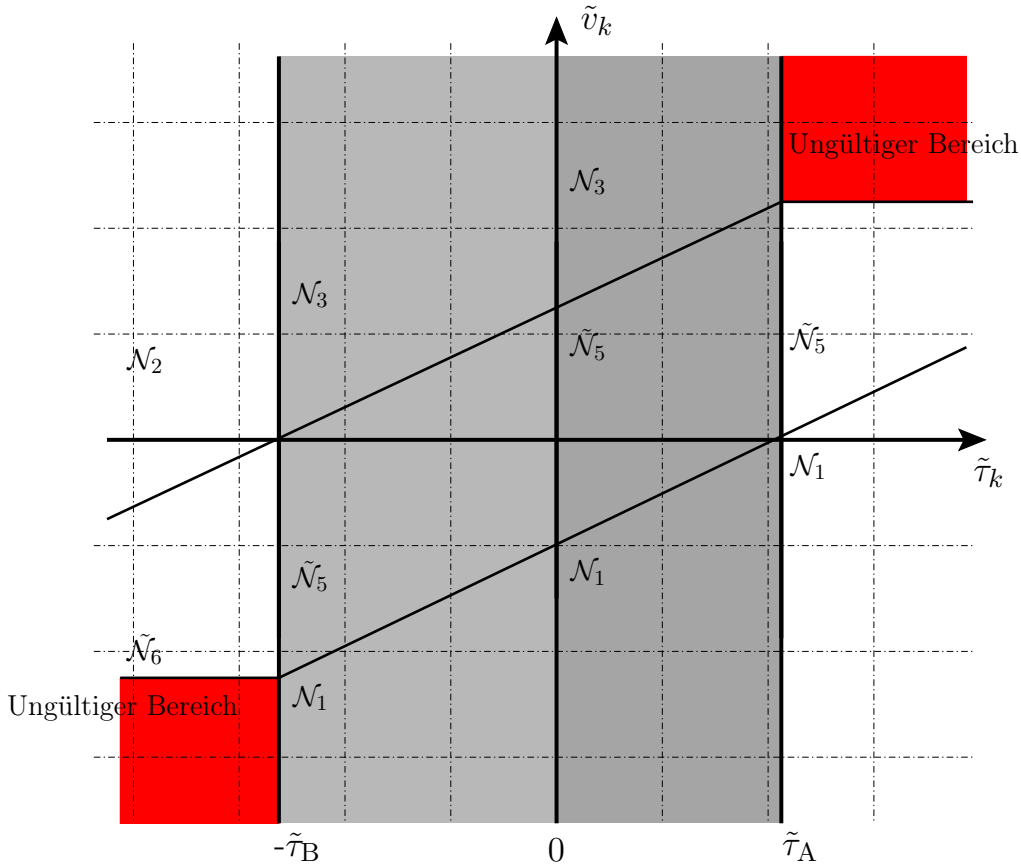
wodurch sich auch hier kein Einheitskreispolynom ergibt. Zur Beurteilung der Stabilität ist es erforderlich, die Topologie des Zustandsraumes und die Transitionen, die von einem Gebiet in ein anderes führen, zu untersuchen. Für diese Betrachtung werde angenommen, dass hinsichtlich des nichtlinearen Modells die Trajektorien so verlaufen, dass das Gebiet  $\mathcal{N}_4$  nicht erreicht wird. Dies entspricht der Tatsache, dass alle Zustände und somit nur die Trajektorien im eingerasteten Bereich in einer hinreichend kleinen Umgebung der Menge  $\mathcal{N}_e$  liegen. Demnach wird das Gebiet  $\mathcal{N}_6$  durch die Gerade

$$g_{\mathcal{N}_6}^{\text{lb}}(\tau) = \frac{1}{1 + \tilde{\tau}_A + \tilde{\tau}_B} - 1 \quad (4.96)$$

begrenzt und von nun an mit  $\tilde{\mathcal{N}}_6$  bezeichnet (siehe Abbildung 4.20). Ähnlich wird auch das Gebiet  $\mathcal{N}_5$  begrenzt. Die obere Grenze ist gegeben durch

$$g_{\mathcal{N}_5}^{\text{ub}}(\tau) = \frac{1}{1 - \tilde{\tau}_A - \tilde{\tau}_B} - 1. \quad (4.97)$$

Für die Gewährleistung der Stabilität muss der verallgemeinerte Spektralradius  $\rho_k(\mathcal{A})$  kleiner Eins sein mit  $\mathcal{A} = \{\mathbf{A}_i : i \in (1, 2, 3, 5, 6)\}$ . Es muss sichergestellt werden, dass die



**Abbildung 4.20.:** Bereichsdefinition der Linearisierung der Transformation  $T$  im Zustandsraum

Transition von dem Gebiet  $\mathcal{N}_2$  zum begrenzten Gebiet  $\tilde{\mathcal{N}}_6$  stabil ist und dass

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_k + \mathbf{b}_2 \in \tilde{\mathcal{N}}_6 \quad (4.98)$$

gilt. Des Weiteren ergibt sich

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_6 \mathbf{x}_k + \mathbf{b}_6 \notin \mathcal{N}_4. \quad (4.99)$$

Der Übergang von Gebiet  $\mathcal{N}_6$  ist durch  $g_{\mathcal{N}_6}^{\text{lb}}$  und durch  $\tilde{\tau}_k < -\tilde{\tau}_B$  begrenzt. Da der Zustandsraum eingeteilt ist, müssen die zustandsabhängigen Transitionen untersucht werden. Die Problematik, dass auf der Menge  $\mathcal{N}_5$  die Matrix  $\mathbf{A}_5$  nur Eigenwerte auf dem Einheitskreis besitzt, lässt die Stabilitätsuntersuchung komplizierter werden, da für dieses System keine LYAPUNOV-Funktion existiert. Aufgrund des SYLVESTER-Kriteriums für positiv definite Matrizen müssen alle Hauptminoren größer Null sein. Es lässt sich zeigen, dass dies nicht der Fall ist. Für den ersten Hauptminor oder in diesem Fall für die Matrix-Elemente  $[1, 1]$  würde sich  $p_{1,1} = -q_{1,1}$  ergeben, wobei nach dem SYLVESTER-Kriterium  $p_{1,1} > 0$  und  $q_{1,1} > 0$  zu wählen sind. Diese beiden Forderungen an die Parameter schließen sich hier jedoch gegenseitig aus. Wird der Übergang von Gebiet  $\mathcal{N}_1$  nach  $\mathcal{N}_5$  betrachtet, ergibt sich

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_5 \mathbf{x}_k = \mathbf{A}_5 \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{A}_5 \mathbf{b}_1. \quad (4.100)$$

Das charakteristische Polynom der Matrix  $\mathbf{A}_{51} = \mathbf{A}_5 \mathbf{A}_1$  ist gegeben durch

$$D_{51}(\lambda) = \lambda^2 + \frac{4b - a - 2}{1 + a} \lambda + \frac{1}{1 + a}. \quad (4.101)$$

Für  $0 < 2 + a - 2b$  ist  $D_{51}(\lambda)$  ein Einheitskreispolynom. Mit dem Übergang von  $\mathcal{N}_1$  nach  $\mathcal{N}_3$  kann das Polynom

$$D_{31}(\lambda) = \lambda^2 + \frac{2ab - a - 4b^2 - 2 + 8b}{1 + a} \lambda + \frac{1}{1 + a} \quad (4.102)$$

angegeben werden. Mit  $0 < a - 2b + 4$  und  $0 < 2b^2 - (a + 4)b + 2 + a$  besitzt  $D_{31}(\lambda)$  ausschließlich Nullstellen im Einheitskreis. Bei der Betrachtung der Transition von Gebiet  $\mathcal{N}_5$  nach  $\mathcal{N}_3$  können die Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = 1 - 2b \pm 2\sqrt{-b + b^2} \quad (4.103)$$

der Matrix  $\mathbf{A}_{35} = \mathbf{A}_3 \mathbf{A}_5$  angegeben werden. Demnach ist diese Transition genau dann stabil, wenn  $0 < b < 1$  gilt. Der Übergang von  $\mathcal{N}_3$  nach  $\mathcal{N}_2$  liefert das Polynom

$$D_{23}(\lambda) = \lambda^2 + (-2 + a + 8b + 4\tilde{\tau}_B b^2 - 4b^2 - 2b\tilde{\tau}_B - 2ab) \lambda + 1 - a + 2b\tilde{\tau}_B. \quad (4.104)$$

Gelten die Ungleichungen

$$0 < 4 + 2b\tilde{\tau}_B - 2b - a, \quad (4.105)$$

$$0 < (-2\tilde{\tau}_B + 2)b^2 + (-4 + 2\tilde{\tau}_B + a)b + 2 - a \quad (4.106)$$

und

$$1 > |1 - a + 2b\tilde{\tau}_B|, \quad (4.107)$$

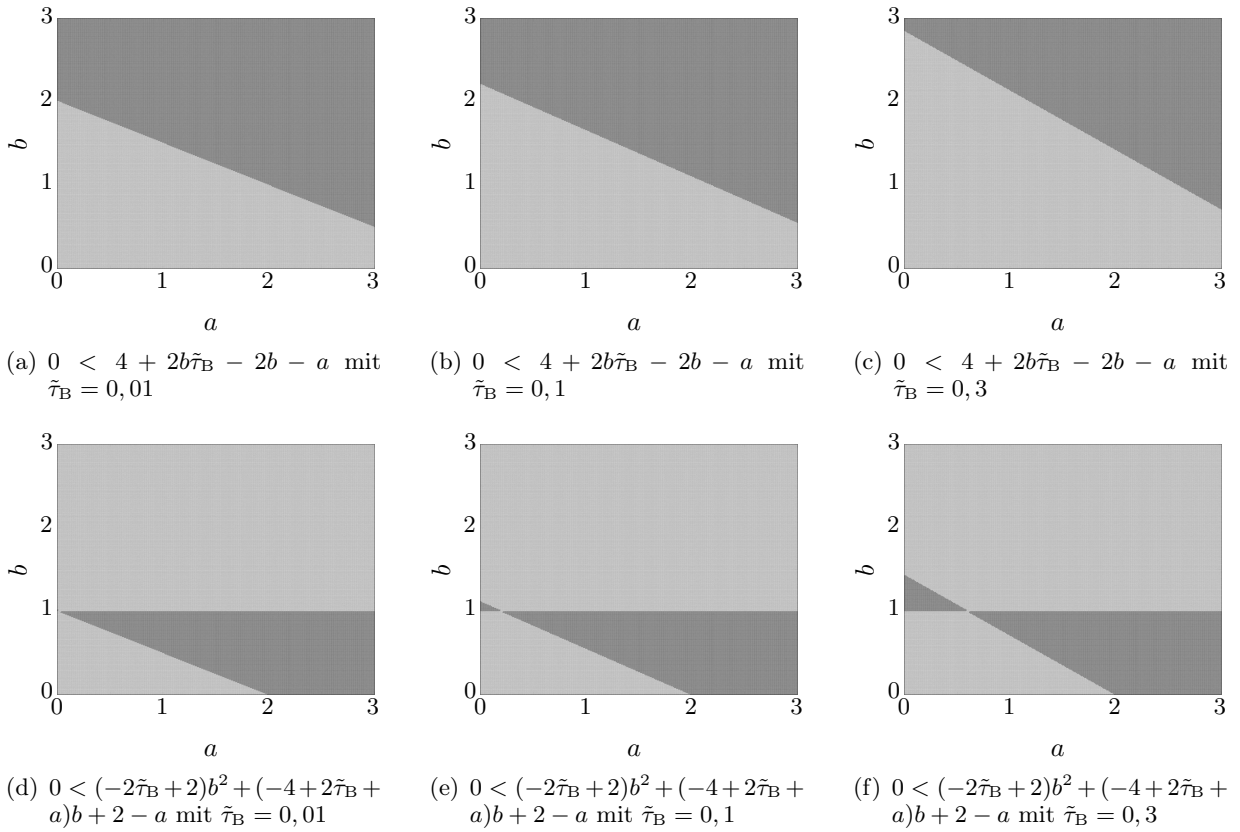
liegen die Nullstellen von  $D_{23}(\lambda)$  im Inneren des Einheitskreises. In Abbildung 4.21 sind die Randbedingungen für drei feste Werte von  $\tilde{\tau}_B$  dargestellt, damit  $D_{23}(\lambda)$  ein Einheitskreispolynom ist. Die Ungleichung (4.107) entspricht gerade der Ungleichung (4.91). Mit  $\mathbf{A}_{62} = \mathbf{A}_6 \mathbf{A}_2$  kann

$$D_{62}(\lambda) = \lambda^2 + (4b\tilde{\tau}_B(b + a - 1 - b\tilde{\tau}_B) + 2b(2 - a) - 1 - (a - 1)^2) \lambda + 4b(1 - a + \tilde{\tau}_B)\tilde{\tau}_B + (a - 1)^2 \quad (4.108)$$

angegeben werden und stellt für

$$0 < -a + 2b\tilde{\tau}_B + 2, \quad (4.109)$$

$$0 < (4\tilde{\tau}_B^2 - 2\tilde{\tau}_B)b^2 + (-4\tilde{\tau}_B a + 4\tilde{\tau}_B - 2 + a)b + 2 - 2a + a^2 \quad (4.110)$$



**Abbildung 4.21.:** Projektion der Parameter  $a$  und  $b$  bei festem  $\tilde{\tau}_B$ , damit das charakteristische Polynom  $D_{23}(\lambda)$  ein Einheitskreispolynom ist. Die hellen Flächen bezeichnen die Werte für  $a$  und  $b$ , bei denen  $D_{23}(\lambda)$  ein Einheitskreispolynom darstellt. Die dunklen Flächen entsprechen demnach den Parameterwerten  $a$  und  $b$ , bei denen  $D_{23}(\lambda)$  kein Einheitskreispolynom darstellt.

und

$$1 > |4b(1 - a + b\tilde{\tau}_B)\tilde{\tau}_B + (a - 1)^2| \quad (4.111)$$

ein Einheitskreispolynom dar. In Abbildung 4.23 sind die Randbedingungen für drei feste Werte von  $\tilde{\tau}_B$  dargestellt, damit  $D_{62}(\lambda)$  ein Einheitskreispolynom ist. Das Modell liefert den Übergang von Gebiet  $\mathcal{N}_6$  nach Gebiet  $\mathcal{N}_1$ . Dadurch ergibt sich das charakteristische Polynom

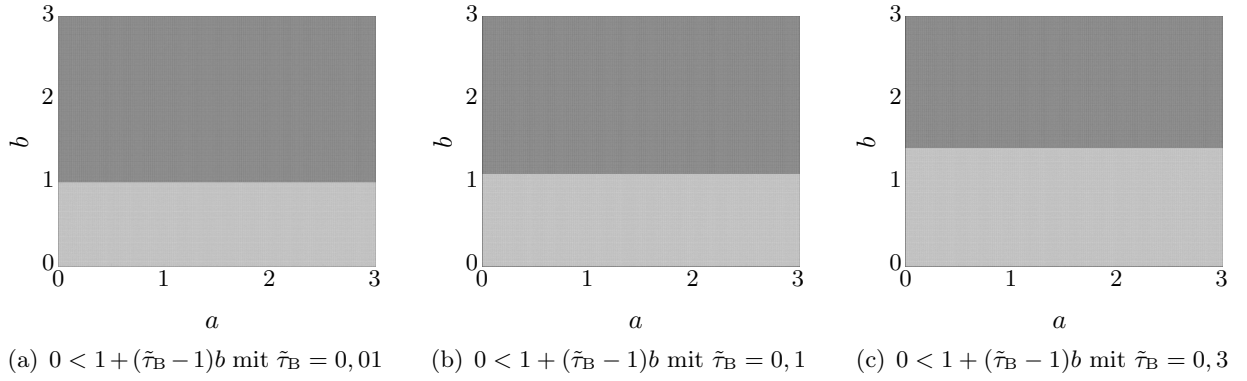
$$D_{61}(\lambda) = \lambda^2 + \frac{4b - 2b\tilde{\tau}_B - 2}{1 + a}\lambda + \frac{1 + 2b\tilde{\tau}_B - a}{1 + a}. \quad (4.112)$$

Mit

$$0 < 1 + (\tilde{\tau}_B - 1)b \quad (4.113)$$

und

$$1 > \left| \frac{1 - a + 2b\tilde{\tau}_B}{1 + a} \right| \quad (4.114)$$



**Abbildung 4.22.:** Projektion der Parameter  $a$  und  $b$  bei festem  $\tilde{\tau}_B$ , damit das charakteristische Polynom  $D_{61}(\lambda)$  ein Einheitskreispolynom ist. Die hellen Flächen bezeichnen die Werte für  $a$  und  $b$ , bei denen  $D_{61}(\lambda)$  ein Einheitskreispolynom darstellt. Die dunklen Flächen entsprechen demnach den Parameterwerten  $a$  und  $b$ , bei denen  $D_{61}(\lambda)$  kein Einheitskreispolynom darstellt.

ist  $D_{61}(\lambda)$  ein Einheitskreispolynom. Der Übergang von der Menge  $\mathcal{N}_3$  nach  $\mathcal{N}_6$  liefert das charakteristische Polynom

$$D_{63} = \lambda^2 + (-2 + a - 2b\tilde{\tau}_B + 4b)\lambda + 1 - a + 2b\tilde{\tau}_B, \quad (4.115)$$

wobei

$$0 < (2\tilde{\tau}_B - 2)b + 2 - a \quad (4.116)$$

und

$$1 > |1 - a + 2b\tilde{\tau}_B| \quad (4.117)$$

die Bedingungen sind, damit  $D_{63}$  nur Nullstellen im Einheitskreis aufweist. Abbildung 4.24 beschreibt den Zusammenhang (4.117) mit  $\tilde{\tau}_B = 0,01$ ,  $\tilde{\tau}_B = 0,1$  und  $\tilde{\tau}_B = 0,3$ . Der Übergang von Gebiet  $\mathcal{N}_2$  nach  $\mathcal{N}_5$  liefert das charakteristische Polynom

$$D_{52}(\lambda) = \lambda^2 + (-2 + a - 2b\tilde{\tau}_B + 4b - 2ab + 4\tilde{\tau}_B b^2)\lambda + 1 - a + 2b\tilde{\tau}_B. \quad (4.118)$$

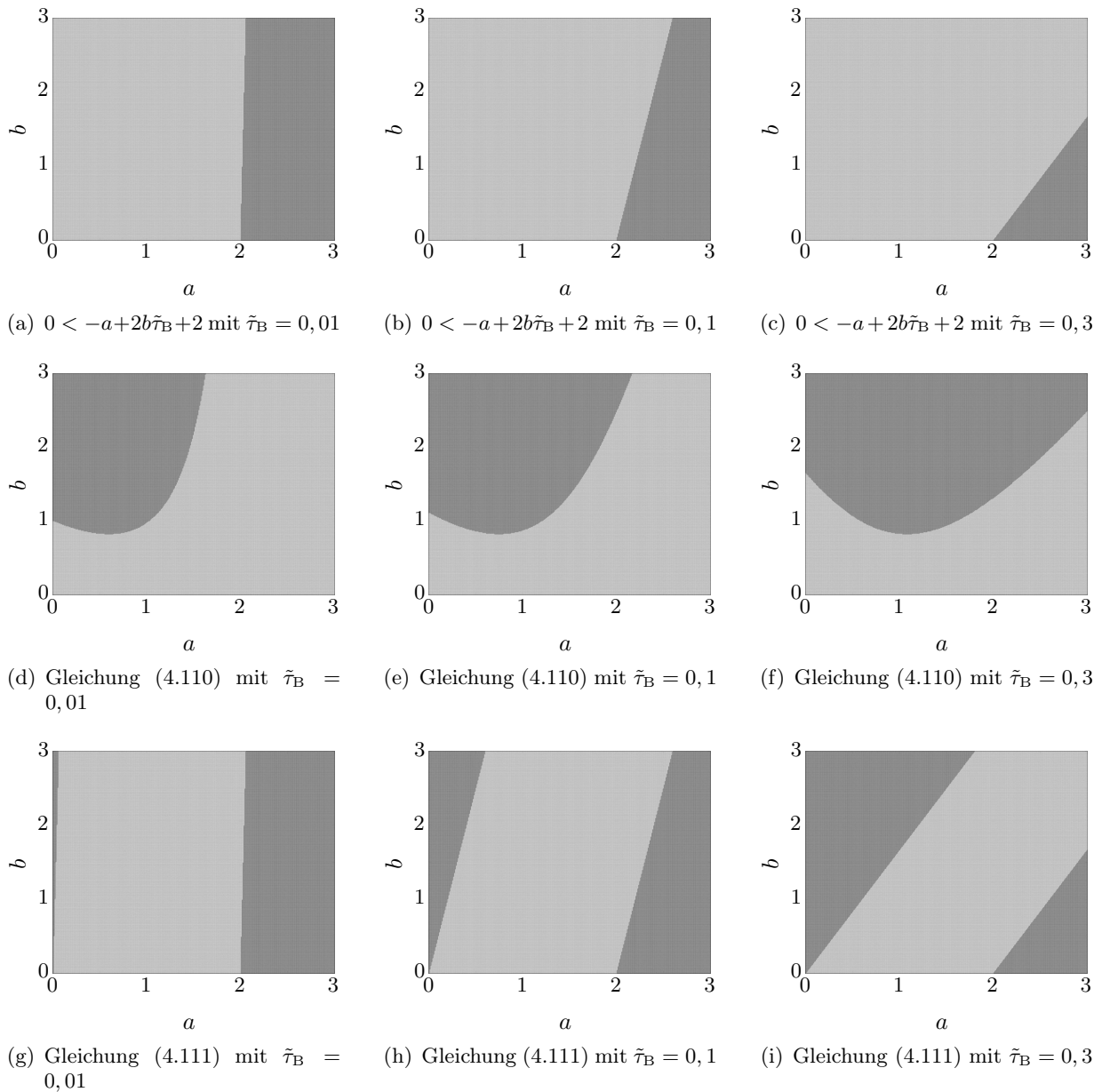
Diese Transition ist genau dann stabil, wenn  $D_{52}(\lambda)$  den Ungleichungen

$$0 < -a + 2b\tilde{\tau}_B + 2, \quad (4.119)$$

$$0 < -2\tilde{\tau}_B b^2 + (2\tilde{\tau}_B - 2 + a)b + 2 - a \quad (4.120)$$

und

$$1 > |1 - a + 2b\tilde{\tau}_B| \quad (4.121)$$

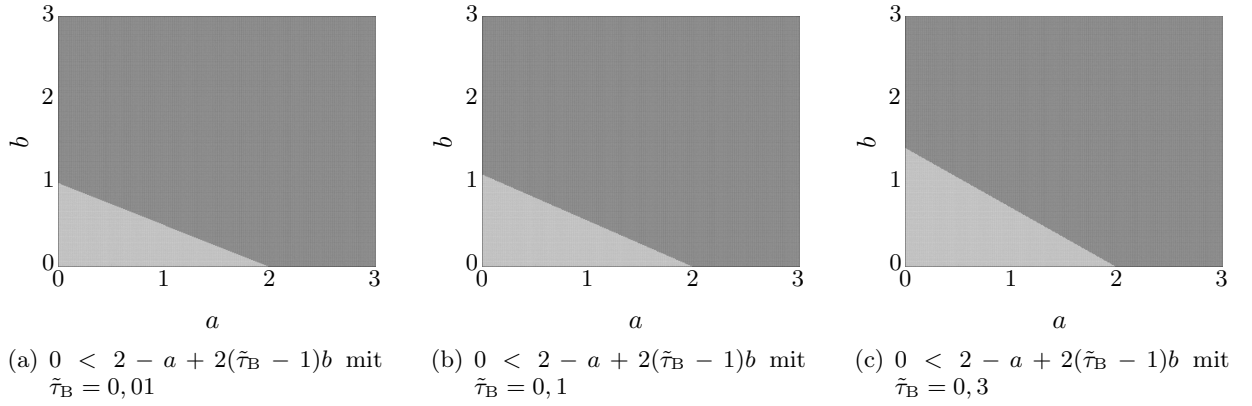


**Abbildung 4.23.:** Projektion der Parameter  $a$  und  $b$  bei festem  $\tilde{\tau}_B$ , damit das charakteristische Polynom  $D_{62}(\lambda)$  ein Einheitskreispolynom ist. Die hellen Flächen bezeichnen die Werte für  $a$  und  $b$ , bei denen  $D_{62}(\lambda)$  ein Einheitskreispolynom darstellt. Die dunklen Flächen entsprechen demnach den Parameterwerten  $a$  und  $b$ , bei denen  $D_{62}(\lambda)$  kein Einheitskreispolynom darstellt.

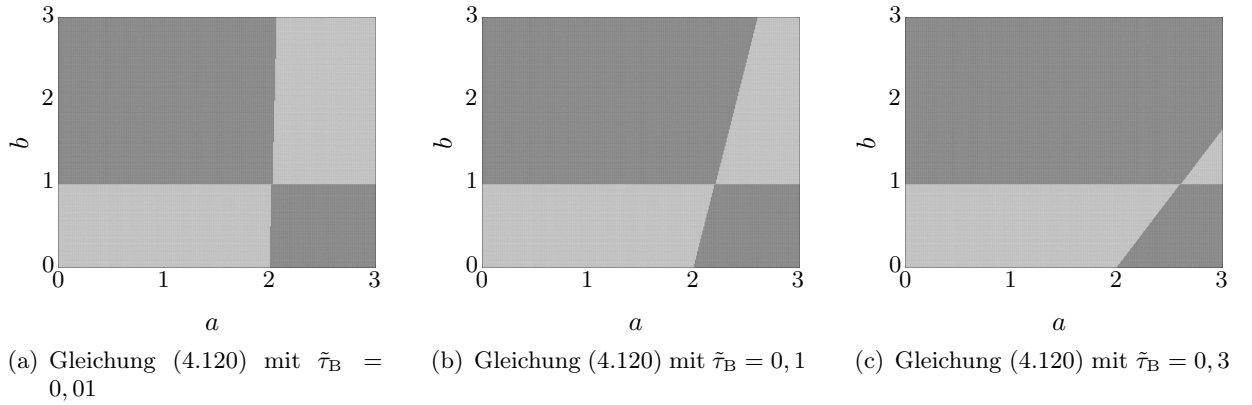
genügt. Abbildung 4.25 zeigt den Parameterbereich für  $a$  und  $b$  bei drei festen  $\tilde{\tau}_B$ -Werten auf, bei dem das Polynom  $D_{52}(\lambda)$  ausschließlich Nullstellen innerhalb des Einheitskreises aufweist, wobei nur die Gleichung (4.120) dargestellt ist, da die Randbedingungen (4.119) und (4.121) schon durch die Betrachtung der Polynome  $D_{62}(\lambda)$  und  $D_2(\lambda)$  (bzw.  $D_{23}(\lambda)$ ) abgedeckt wurden. Der Übergang von  $\mathcal{N}_6$  nach  $\mathcal{N}_5$  ergibt das Polynom

$$D_{56}(\lambda) = \lambda^2 + (-2 + a - 2b\tilde{\tau}_B)\lambda + 1 - a + 2b\tilde{\tau}_B \quad (4.122)$$





**Abbildung 4.24.:** Projektion der Parameter  $a$  und  $b$  bei festem  $\tilde{\tau}_B$ , damit das charakteristische Polynom  $D_{63}(\lambda)$  ein Einheitskreispolynom ist. Die hellen Flächen bezeichnen die Werte für  $a$  und  $b$ , bei denen  $D_{63}(\lambda)$  ein Einheitskreispolynom darstellt. Die dunklen Flächen entsprechen demnach den Parameterwerten  $a$  und  $b$ , bei denen  $D_{63}(\lambda)$  kein Einheitskreispolynom darstellt.



**Abbildung 4.25.:** Projektion der Parameter  $a$  und  $b$  bei festem  $\tilde{\tau}_B$ , damit das charakteristische Polynom  $D_{52}(\lambda)$  ein Einheitskreispolynom ist. Die hellen Flächen bezeichnen die Werte für  $a$  und  $b$ , bei denen  $D_{52}(\lambda)$  ein Einheitskreispolynom darstellt. Die dunklen Flächen entsprechen demnach den Parameterwerten  $a$  und  $b$ , bei denen  $D_{52}(\lambda)$  kein Einheitskreispolynom darstellt.

mit den Eigenwerten

$$\lambda_1 = 1 - a + 2b\tilde{\tau}_B \quad (4.123)$$

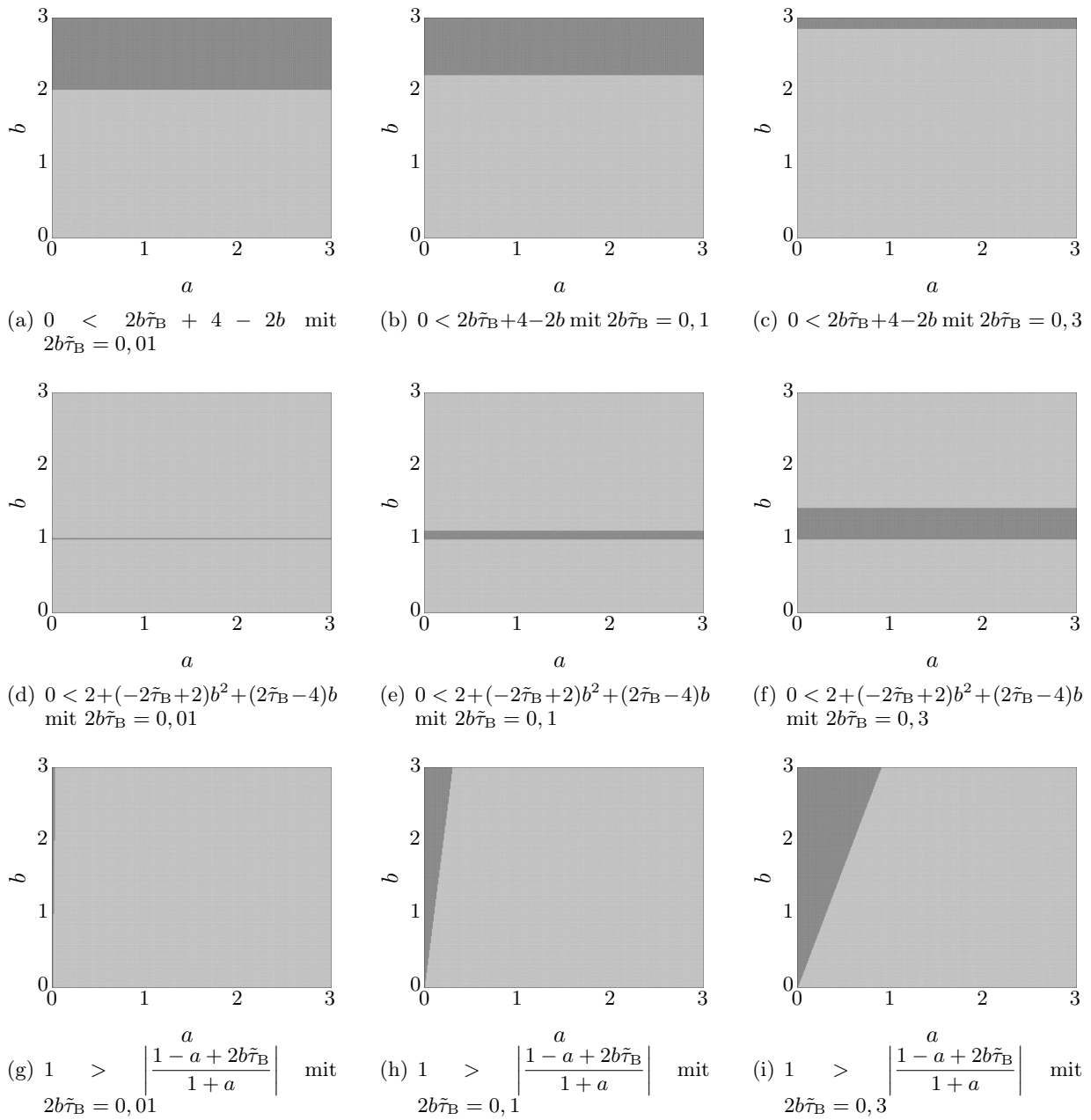
und

$$\lambda_2 = 1. \quad (4.124)$$

Die letzte mögliche Transition erfolgt von Menge  $\mathcal{N}_2$  nach  $\mathcal{N}_1$ , wobei darauf hinzuweisen ist, dass diese praktisch nicht auftritt, jedoch der Vollständigkeit halber dargelegt wird. Es ergibt sich das charakteristische Polynom zu

$$D_{12}(\lambda) = \lambda^2 + \frac{(-2b\tilde{\tau}_B - 2 + 4\tilde{\tau}_B b^2 + 8b - 4b^2) \lambda}{1 + a} + \frac{1 - a + 2b\tilde{\tau}_B}{1 + a}. \quad (4.125)$$

#### 4. Modellierung und Analyse digitaler Phasenregelkreise

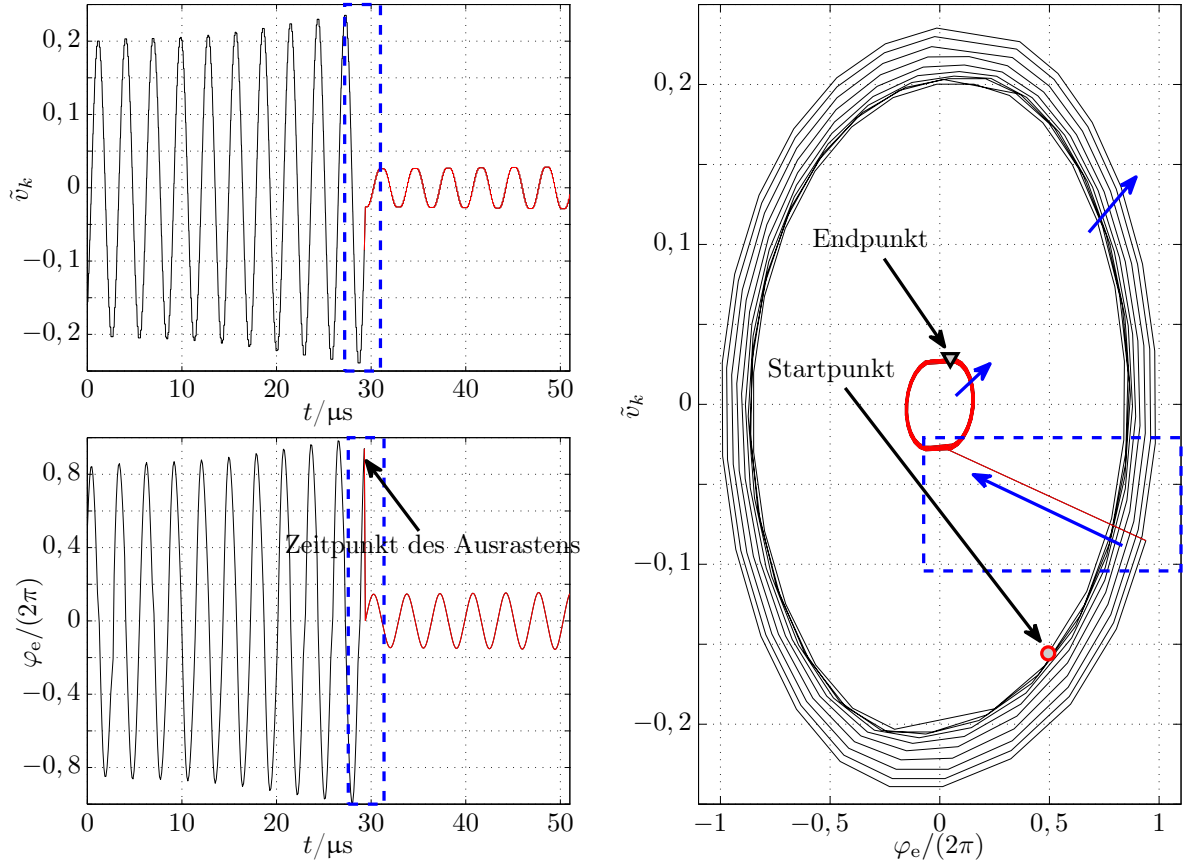


**Abbildung 4.26.:** Projektion der Parameter  $a$  und  $b$  bei festem  $\tilde{\tau}_B$ , damit das charakteristische Polynom  $D_{12}(\lambda)$  ein Einheitskreispolynom ist. Die hellen Flächen bezeichnen die Werte für  $a$  und  $b$ , bei denen  $D_{12}(\lambda)$  ein Einheitskreispolynom darstellt. Die dunklen Flächen entsprechen demnach den Parameterwerten  $a$  und  $b$ , bei denen  $D_{12}(\lambda)$  kein Einheitskreispolynom darstellt.

$D_{12}(\lambda)$  ist ein Einheitskreispolynom, wenn

$$0 < b\tilde{\tau}_B + 2 - b \quad (4.126)$$

$$0 < 1 + (1 - \tilde{\tau}_B)b^2 + (\tilde{\tau}_B - 2)b, \quad (4.127)$$



**Abbildung 4.27.:** Zur Instabilität des Phasenregelkreises mit *Dead-Zone*

und

$$1 > \left| \frac{1 - a + 2b\tilde{\tau}_B}{1 + a} \right| \quad (4.128)$$

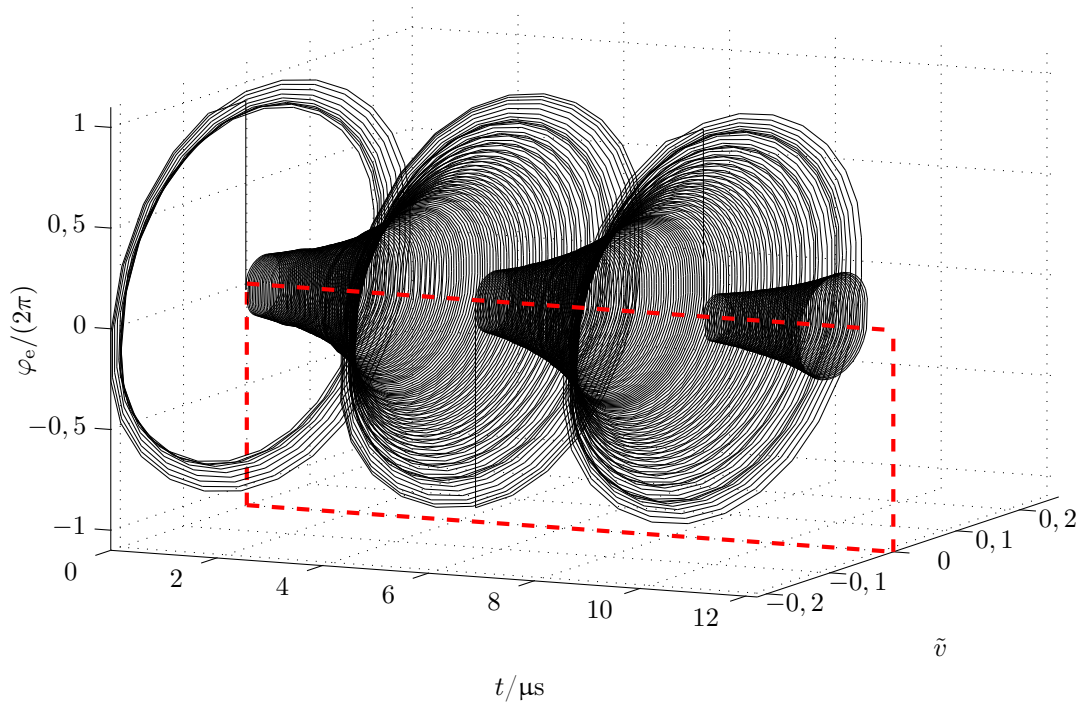
gelten. In Abbildung 4.26 sind genau die Randbedingungen an die Parameter dargestellt. Es lässt sich zeigen, dass bei Betrachtung der dargelegten Ungleichungen die folgenden Beziehungen die strengsten Bedingungen darstellen, damit der Phasenregelkreis mit *Dead-Zone* stabil ist. Es ergeben sich

$$0 < (2\tilde{\tau}_B - 2)b + 2 - a \quad (4.129)$$

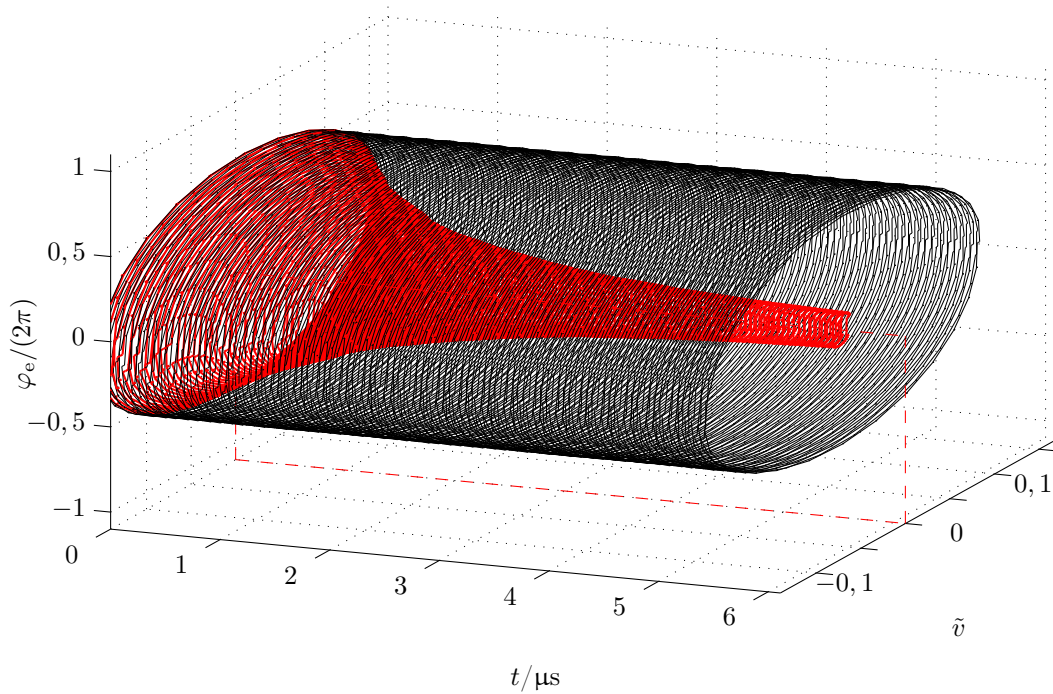
und

$$1 > |1 - a + 2b\tilde{\tau}_B|. \quad (4.130)$$

Werden die Ungleichungen (4.129) und (4.130) eingehalten, so ist das erweiterte VAN PAE-MEL-Modell und damit der Phasenregelkreis mit *Dead-Zone*-Modell stabil.



(a) Darstellung einer Simulation eines Phasenregelkreises mit instabilem ( $R_1 = 0 \Omega$ ) Verhalten



(b) Darstellung einer Simulation eines Phasenregelkreises mit stabilem (rote Kurve mit  $\tau_B/\tau_1 = 1$ ) und grenzstabilem (schwarze Kurve mit  $\tau_B/\tau_1 \approx 2$ ) Verhalten

**Abbildung 4.28.:** Zur Stabilität, Grenzstabilität und Instabilität eines Phasenregelkreises mit Dead-Zone

Diese Grenzen lassen sich auch hinsichtlich der Schleifenverstärkung betrachten, wie es von GARDNER vorgeschlagen wurde (siehe Kapitel 4.1.1 oder [16]). Entsprechend ergeben sich

$$\tau_B < \tau_1, \quad (4.131)$$

$$K\tau_1 < \frac{1}{\frac{\pi}{\omega_{\text{ref}}\tau_1} \left(1 - \frac{\tau_B}{\tau_1}\right)} \quad (4.132)$$

und

$$K\tau_1 < \frac{1}{\frac{\pi}{\omega_{\text{ref}}\tau_1} \left(1 - \frac{\tau_B}{\tau_1} + \frac{2\pi}{\omega_{\text{ref}}\tau_1}\right)}. \quad (4.133)$$

Wird das von GARDNER vorgeschlagene Verfahren hinsichtlich der *Dead-Zone* durchgeführt, so kann

$$K\tau_1 < \frac{1}{\frac{\pi}{\omega_{\text{ref}}\tau_1} \left(1 - \frac{\tau_B}{\tau_1} + \frac{\pi}{\omega_{\text{ref}}\tau_1}\right)} \quad (4.134)$$

angegeben werden.

Dieses Ergebnis ist kohärent mit den vorangegangenen Untersuchungen, da sich der Ansatz von GARDNER als Linearisierung der Gleichungen des Sektors  $\mathcal{M}_2$  des erweiterten Modells nach VAN PAEMEL mit *Dead-Zone* interpretieren lässt und somit das charakteristische Polynom  $D_2$  zu analysieren ist. Offensichtlich liefert jedoch der Übergang von  $\mathcal{N}_3$  nach  $\mathcal{N}_6$  die strengste Bedingung, damit sich für jeden Übergang und für jedes Gebiet ein stabiles Differenzengleichungssystem ergibt. In Abbildung 4.27 ist eine Simulation eines Phasenregelkreises mit *Dead-Zone* dargestellt. Dabei ergibt sich durch die Nichtidealität instabiles Verhalten. Die Regelspannung und der Phasenfehler divergieren solange bis der Regelkreis ausrastet und somit sich ein Phasenfehler größer  $2\pi$  einstellt. Nachdem der Regelkreis ausgerastet ist, rastet dieser jedoch direkt wieder ein, wobei die Trajektorie dann wieder divergiert. Zum Zeitpunkt des Wiedereinrastens liefert der Regelkreis einen Phasenfehler  $\varphi_e \approx 0$  rad. Mit den Abbildungen 4.28(a) und 4.28(b) zeigt sich, dass die bestimmte Stabilitätsgrenze (siehe Gleichungen (4.129) und (4.130)) konservativer ist als die des nichtlinearen Systems. Entsprechend konnte hier eine Möglichkeit dargelegt werden, das Stabilitätsverhalten eines Regelkreises der Ordnung Zwei mit *Dead-Zone* zu bestimmen. Unter Berücksichtigung verschiedener Simulation kann die Grenze nach Gleichung 4.131 etwas strenger angesetzt werden. Es sei

$$\tau_B < 2\tau_1. \quad (4.135)$$

Dieser Sachverhalt ist auch in den Abbildungen 4.28(a) und 4.28(b) dargelegt. Es ergibt sich, dass die Simulation mit  $\tau_B/\tau_1 \approx 2$  ein grenzstabiles Verhalten aufweist, d. h., dass sich ein weder divergentes noch konvergentes Verhalten ergibt. Wird jedoch  $\tau_B/\tau_1 = 1$  angesetzt, so ergibt sich ein eindeutig stabiles Verhalten.

### 4.2.3. *Dead-Zone* im erweiterten Modell nach HEDAYAT: Modellierung

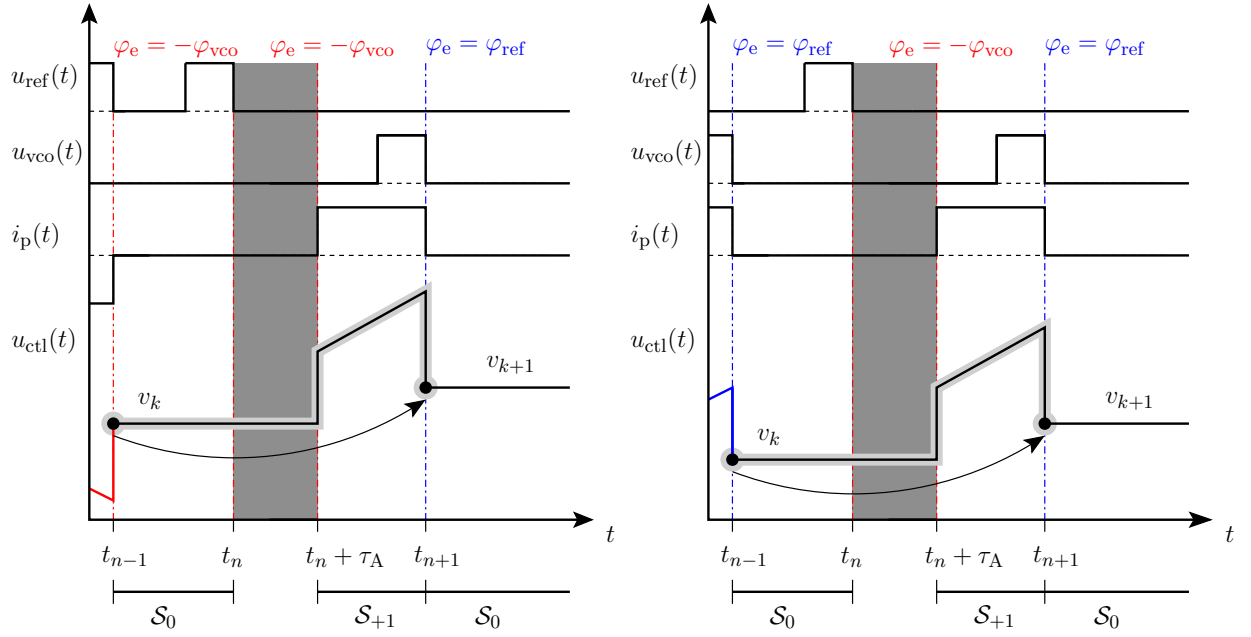
Durch die Annahme, dass die Übergänge des Zustandsautomaten von  $\mathcal{S}_0$  nach  $\mathcal{S}_{+1}$  und von  $\mathcal{S}_0$  nach  $\mathcal{S}_{-1}$  nicht instantan erfolgen, sondern eine gewisse Zeit  $\tau_{A,B}$  benötigen, können die in Abbildung 4.29 und 4.30 dargestellten Fallunterscheidungen angegeben werden. Diese Betrachtung der Verzögerungen erfolgt analog zu Kapitel 4.2.1, wobei das erweiterte Modell nach HEDAYAT angesetzt wird (siehe Kapitel 4.1.4). Dabei werden die Phasensignale des spannungsgesteuerten Oszillators und die des Referenzsignals in die Form

$$\zeta_{k+1} = \varphi_{\text{ref}}(t_{k+1}) - \varphi_{\text{vco}}(t_{k+1}) \quad (4.136)$$

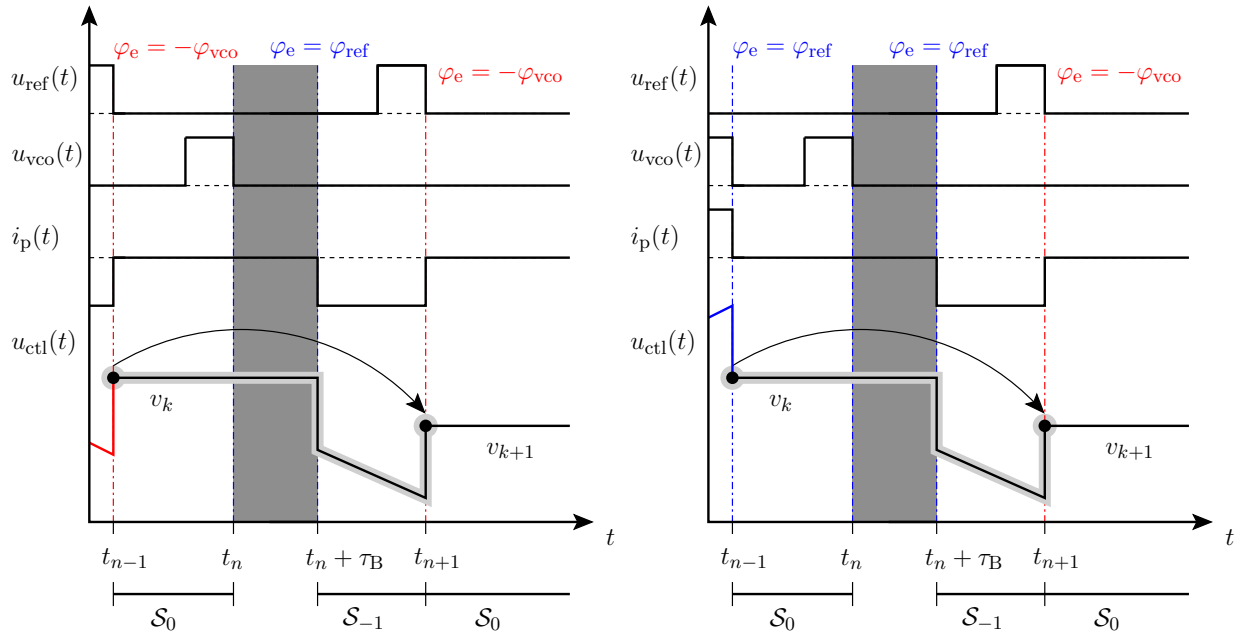
gebracht, wobei nur die Transitionen betrachtet werden, die beginnend vom Zustand  $\mathcal{S}_0$  auch wieder in den Zustand  $\mathcal{S}_0$  zurückführen. Es ergeben sich somit insgesamt acht Fallunterscheidungen. In den Fällen 1 bis 4 werden die Zustandstransitionen von Zustand  $\mathcal{S}_0$  über eine Verzögerung  $\tau_A$  in  $\mathcal{S}_{+1}$  und zurück nach  $\mathcal{S}_0$  betrachtet sowie von  $\mathcal{S}_0$  über eine Verzögerung  $\tau_B$  in  $\mathcal{S}_{-1}$  und zurück nach  $\mathcal{S}_0$ . Je nachdem, wie der Zustand  $\mathcal{S}_0$  zum Zeitpunkt  $t_0$  erreicht wurde, d. h. durch eine fallende Flanke des Referenzsignals oder des VCO-Signals, ergeben sich unterschiedliche Anfangsbedingungen. Damit können die Gleichungen für den Phasenfehler der ersten vier Fälle angegeben werden:

$$\zeta_{k+1}^{\text{F1}} = \frac{-K_v(v_k + R_1 I_p)}{\frac{I_p K_v}{2\pi C_1 f_{\text{ref}}}} + \frac{\sqrt{K_v^2(v_k + R_1 I_p)^2 + 2 \frac{I_p K_v}{C_1} \left(1 + \frac{\zeta_k}{2\pi} - \frac{K_v v_k}{f_{\text{ref}}} - K_v v_k \tau_A\right)}}{\frac{I_p K_v}{2\pi C_1 f_{\text{ref}}}} \quad (4.137a)$$

$$\zeta_{k+1}^{\text{F2}} = \frac{-K_v(v_k + R_1 I_p)}{\frac{I_p K_v}{2\pi C_1 f_{\text{ref}}}} + \frac{\sqrt{K_v^2(v_k + R_1 I_p)^2 + 2 \frac{I_p K_v}{C_1} \left(1 - \frac{K_v v_k}{f_{\text{ref}}} \left(1 - \frac{\zeta_k}{2\pi}\right) + K_v v_k \tau_A\right)}}{\frac{I_p K_v}{2\pi C_1 f_{\text{ref}}}} \quad (4.137b)$$



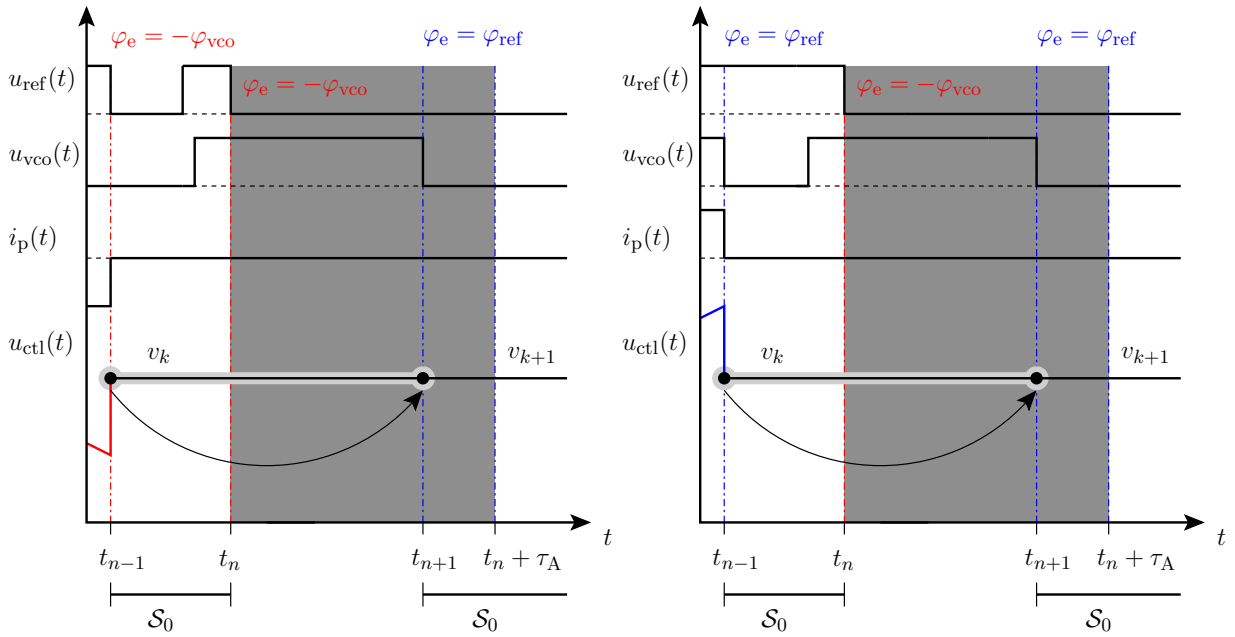
(a) Fall 1 mit dem Phasenfehler  $\zeta_k \leq 0$  und  $t_{n+1} > t_n + \tau_A$ , wobei  $t_n = t_n^{\text{ref}}$  und  $t_{n+1} = t_{n+1}^{\text{vco}}$  ist. (b) Fall 2 mit dem Phasenfehler  $\zeta_k \geq 0$  und  $t_{n+1} > t_n + \tau_A$ , wobei  $t_n = t_n^{\text{ref}}$  und  $t_{n+1} = t_{n+1}^{\text{vco}}$  ist.



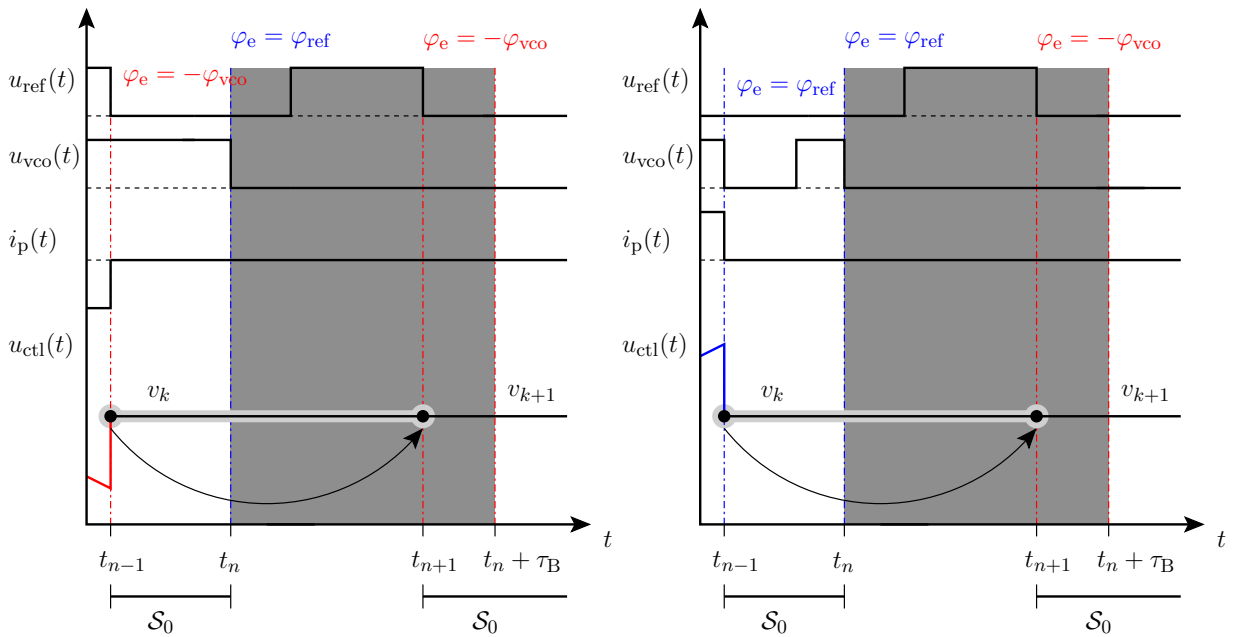
(c) Fall 3 mit dem Phasenfehler  $\zeta_k \leq 0$  und  $t_{n+1} > t_n + \tau_B$ , wobei  $t_n = t_n^{\text{vco}}$  und  $t_{n+1} = t_{n+1}^{\text{ref}}$  ist. (d) Fall 4 mit dem Phasenfehler  $\zeta_k \geq 0$  und  $t_{n+1} > t_n + \tau_B$ , wobei  $t_n = t_n^{\text{vco}}$  und  $t_{n+1} = t_{n+1}^{\text{ref}}$  ist.

**Abbildung 4.29.:** Behandlung der Fallunterscheidungen: Fall 1 und 2 unterscheiden sich nur zum Zeitpunkt  $t_{n-1}$  bzgl. ihres Phasenfehlers. Bei Fall 1 sei zum Zeitpunkt  $t_{n-1}$  eine fallende Flanke des Referenzsignals erfolgt, bei Fall 2 eine fallende Flanke des VCO-Signals. Fall 3 und 4 unterscheiden sich ebenfalls zum Zeitpunkt  $t_{n-1}$  bzgl. ihres Phasenfehlers. Bei Fall 3 sei zum Zeitpunkt  $t_{n-1}$  eine fallende Flanke des Referenzsignals erfolgt, bei Fall 4 eine fallende Flanke des VCO-Signals.

#### 4. Modellierung und Analyse digitaler Phasenregelkreise



(a) Fall 5 mit dem Phasenfehler  $\zeta_k \leq 0$ , wobei  $t_n = t_n^{\text{ref}}$  und  $t_{n+1} = t_{n+1}^{\text{vco}}$  ist. (b) Fall 6 mit dem Phasenfehler  $\zeta_k \geq 0$ , wobei  $t_n = t_n^{\text{ref}}$  und  $t_{n+1} = t_{n+1}^{\text{vco}}$  ist.



(c) Fall 7 mit dem Phasenfehler  $\zeta_k \leq 0$ , wobei  $t_n = t_n^{\text{vco}}$  und  $t_{n+1} = t_{n+1}^{\text{ref}}$  ist. (d) Fall 8 mit dem Phasenfehler  $\zeta_k \geq 0$ , wobei  $t_n = t_n^{\text{vco}}$  und  $t_{n+1} = t_{n+1}^{\text{ref}}$  ist.

**Abbildung 4.30.:** Behandlung der Fallunterscheidungen innerhalb der Dead-Zone: Fall 5 und 6 unterscheiden sich nur zum Zeitpunkt  $t_{n-1}$  bzgl. ihres Phasenfehlers. Bei Fall 5 sei zum Zeitpunkt  $t_{n-1}$  eine fallende Flanke des Referenzsignals erfolgt, bei Fall 6 eine fallende Flanke des VCO-Signals. Fall 7 und 8 unterscheiden sich ebenfalls zum Zeitpunkt  $t_{n-1}$  bzgl. ihres Phasenfehlers. Bei Fall 7 sei zum Zeitpunkt  $t_{n-1}$  eine fallende Flanke des Referenzsignals erfolgt, bei Fall 8 eine fallende Flanke des VCO-Signals.



$$\zeta_{k+1}^{F3} = -2\pi K_v v_k \tau_B + 2\pi \frac{I_p K_v}{2C_1} \left( \frac{1}{f_{\text{ref}}} - \tau_B - \frac{1 + \frac{\zeta_k}{2\pi}}{K_v v_k} \right)^2 -$$

$$2\pi K_v (v_k - R_1 I_p) \left( \frac{1}{f_{\text{ref}}} - \tau_B - \frac{1 + \frac{\zeta_k}{2\pi}}{K_v v_k} \right) \quad (4.137c)$$

$$\zeta_{k+1}^{F4} = -2\pi K_v v_k \tau_B + 2\pi \frac{I_p K_v}{2C_1} \left( \frac{1}{f_{\text{ref}}} - \tau_B - \frac{1 - \frac{\zeta_k}{2\pi}}{K_v v_k} \right)^2 -$$

$$2\pi K_v (v_k - R_1 I_p) \left( \frac{1}{f_{\text{ref}}} - \tau_B - \frac{1 - \frac{\zeta_k}{2\pi}}{K_v v_k} \right) \quad (4.137d)$$

Die Regelspannungen der ersten beiden Fälle

$$v_{k+1}^{F1} = v_k + \frac{I_p}{2\pi f_{\text{ref}} C_1} \zeta_{k+1}^{F1} \quad (4.138a)$$

und

$$v_{k+1}^{F2} = v_k + \frac{I_p}{2\pi f_{\text{ref}} C_1} \zeta_{k+1}^{F2} \quad (4.138b)$$

können direkt durch den Phasenfehler  $\zeta_{k+1}^{F1, F2}$  der entsprechenden Fallunterscheidungen ausgedrückt werden.

$$v_{k+1}^{F3} = v_k - \frac{I_p}{C_1} \left( \frac{1}{f_{\text{ref}}} - \frac{1}{K_v v_k} \left( 1 + \frac{\zeta_k}{2\pi} \right) - \tau_B \right) \quad (4.138c)$$

$$v_{k+1}^{F4} = v_k - \frac{I_p}{C_1} \left( \frac{1}{f_{\text{ref}}} \left( 1 - \frac{\zeta_k}{2\pi} \right) - \frac{1}{K_v v_k} - \tau_B \right) \quad (4.138d)$$

Es lässt sich zeigen, dass, wenn die Verzögerungen  $\tau_{A,B} = 0$  gewählt werden, sich das Modell nach Kapitel 4.1.4 ergibt. Im Folgenden werden Gleichungen zu den in Abbildungen 4.30 dargestellten Fallunterscheidungen angeführt.

$$\zeta_{k+1}^{F5} = 2\pi \left( \frac{f_{\text{ref}}}{K_v v_k} \left( 1 + \frac{\zeta_k}{2\pi} \right) - 1 \right) \quad (4.139a)$$

$$\zeta_{k+1}^{\text{F6}} = 2\pi \left( \frac{f_{\text{ref}}}{K_v v_k} + \frac{\zeta_k}{2\pi} - 1 \right) \quad (4.139\text{b})$$

$$\zeta_{k+1}^{\text{F7}} = -2\pi \left( \frac{K_v v_k}{f_{\text{ref}}} - \frac{\zeta_k}{2\pi} - 1 \right) \quad (4.139\text{c})$$

$$\zeta_{k+1}^{\text{F8}} = 2\pi \left( \frac{K_v v_k}{f_{\text{ref}}} \left( 1 - \frac{\zeta_k}{2\pi} \right) - 1 \right) \quad (4.139\text{d})$$

Die Spannungsgleichungen für die Fälle Fünf bis Acht können durch

$$v_{k+1}^{\text{F5-F8}} = v_k \quad (4.140)$$

beschrieben werden. An dieser Stelle sei erwähnt, dass die Fälle Fünf bis Acht natürlich auch jeweils den Sachverhalt für  $\zeta_k = 0$  mit beschreiben. Neben den dargelegten Differenzgleichungen für die Zustände  $\zeta$  und  $v$  ist die Topologie des Zustandsraumes von wichtiger Bedeutung. Wie schon in den vorigen Kapiteln erläutert, sind die Grenzen zwischen den einzelnen Gebieten zu bestimmen. Es ergeben sich die folgenden Randbedingungen aus den ersten vier Fällen. Für die ersten beiden Fälle kann

$$t_n^{\text{ref}} + \tau_A \leq t_{n+1}^{\text{vco}} \quad (4.141\text{a})$$

angegeben werden und für die Fälle 3 und 4 kann

$$t_n^{\text{vco}} + \tau_B \leq t_{n+1}^{\text{ref}} \quad (4.141\text{b})$$

bestimmt werden. Damit ergeben sich die Funktionen

$$v_{\text{F1}} = \frac{1 + \frac{\zeta}{2\pi}}{K_v \left( \tau_A + \frac{1}{f_{\text{ref}}} \right)}, \quad (4.142)$$

$$v_{\text{F2}} = \frac{1}{K_v \left( \frac{1 - \frac{\zeta}{2\pi}}{f_{\text{ref}}} + \tau_A \right)}, \quad (4.143)$$

$$v_{\text{F3}} = \frac{1 + \frac{\zeta}{2\pi}}{K_v \left( \frac{1}{f_{\text{ref}}} - \tau_B \right)}, \quad (4.144)$$

$$v_{\text{F4}} = \frac{1}{K_v \left( \frac{1 - \frac{\zeta}{2\pi}}{f_{\text{ref}}} - \tau_B \right)}, \quad (4.145)$$

$$v_{D1} = \frac{1 + \frac{\zeta}{2\pi}}{\frac{K_v}{f_{\text{ref}}}} \quad (4.146)$$

und

$$v_{D2} = \frac{f_{\text{ref}}}{K_v \left(1 - \frac{\zeta}{2\pi}\right)}, \quad (4.147)$$

die den Zustandsraum in acht Gebiete unterteilen. Mit der Einführung der Punkttransformation  $\mathbf{T}$  ergibt sich

$$\mathbf{T}_{k+1} = \begin{bmatrix} \zeta_{k+1} \\ v_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{cases} \mathbf{T}^{F1}(\zeta_k, v_k) & \forall \quad \zeta_k \leq 0 \wedge v_k \leq v_{F1} \\ \mathbf{T}^{F2}(\zeta_k, v_k) & \forall \quad \zeta_k \geq 0 \wedge v_k \leq v_{F2} \\ \mathbf{T}^{F3}(\zeta_k, v_k) & \forall \quad \zeta_k \leq 0 \wedge v_k \geq v_{F3} \\ \mathbf{T}^{F4}(\zeta_k, v_k) & \forall \quad \zeta_k \geq 0 \wedge v_k \geq v_{F4} \\ \mathbf{T}^{F5}(\zeta_k, v_k) & \forall \quad \zeta_k \leq 0 \wedge v_{F1} \leq v_k \leq v_{D1} \\ \mathbf{T}^{F6}(\zeta_k, v_k) & \forall \quad \zeta_k \geq 0 \wedge v_{F2} \leq v_k \leq v_{D2} \\ \mathbf{T}^{F7}(\zeta_k, v_k) & \forall \quad \zeta_k \leq 0 \wedge v_{D1} \leq v_k \leq v_{F3} \\ \mathbf{T}^{F8}(\zeta_k, v_k) & \forall \quad \zeta_k \geq 0 \wedge v_{D2} \leq v_k \leq v_{F4} \end{cases}. \quad (4.148)$$

#### 4.2.4. *Dead-Zone* im erweiterten Modell nach HEDAYAT: Analyse

Auch hier sollen die Gleichungen des nichtlinearen Differenzengleichungssystems vereinfacht und normiert werden. Wiederum können die Gleichungen aus Kapitel 4.1.3 angesetzt werden.

$$\tilde{\zeta}_{k+1}^{F1} = \frac{-(\tilde{v}_k + 1 + a) + \sqrt{(\tilde{v}_k + 1 + a)^2 + 4b(1 + \tilde{\zeta}_k - (\tilde{v}_k + 1)(1 + \tilde{\tau}_A))}}{2b} \quad (4.149a)$$

$$\tilde{\zeta}_{k+1}^{F2} = \frac{-(\tilde{v}_k + 1 + a) + \sqrt{(\tilde{v}_k + 1 + a)^2 + 4b(1 - (\tilde{v}_k + 1)(1 - \tilde{\zeta}_k + \tilde{\tau}_A))}}{2b} \quad (4.149b)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}_{k+1}^{F3} = & -(1 + \tilde{v}_k)\tilde{\tau}_B + b \left(1 - \tilde{\tau}_B - \frac{1 + \tilde{\zeta}_k}{1 + \tilde{v}_k}\right)^2 \\ & - (1 + \tilde{v}_k - a) \left(1 - \tilde{\tau}_B - \frac{1 + \tilde{\zeta}_k}{1 + \tilde{v}_k}\right) \end{aligned} \quad (4.149c)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\zeta}_{k+1}^{F4} = & -(1 + \tilde{v}_k)\tilde{\tau}_B + b \left(1 - \tilde{\tau}_B - \frac{1 - \tilde{\zeta}_k}{1 + \tilde{v}_k}\right)^2 \\ & - (1 + \tilde{v}_k - a) \left(1 - \tilde{\tau}_B - \frac{1 - \tilde{\zeta}_k}{1 + \tilde{v}_k}\right) \quad (4.149d)\end{aligned}$$

$$\tilde{\zeta}_{k+1}^{F5} = -1 + \frac{\tilde{\zeta}_k}{\tilde{v}_k + 1} + \frac{1}{\tilde{v}_k + 1} \quad (4.149e)$$

$$\tilde{\zeta}_{k+1}^{F6} = -1 + \tilde{\zeta}_k + \frac{1}{\tilde{v}_k + 1} \quad (4.149f)$$

$$\tilde{\zeta}_{k+1}^{F7} = \tilde{\zeta}_k + \tilde{v}_k \quad (4.149g)$$

$$\tilde{\zeta}_{k+1}^{F8} = -(1 - \tilde{\zeta}_k)(\tilde{v}_k + 1) + 1 \quad (4.149h)$$

$$\tilde{v}_{k+1}^{F1} = \tilde{v}_k + 2b\tilde{\zeta}_{k+1}^{F1} \quad (4.150a)$$

$$\tilde{v}_{k+1}^{F2} = \tilde{v}_k + 2b\tilde{\zeta}_{k+1}^{F2} \quad (4.150b)$$

$$\tilde{v}_{k+1}^{F3} = \tilde{v}_k - 2b \left(1 + \tilde{\tau}_B - \tilde{\zeta}_k - \frac{1}{\tilde{v}_k + 1}\right) \quad (4.150c)$$

$$\tilde{v}_{k+1}^{F4} = \tilde{v}_k - 2b \left(1 - \tilde{\tau}_B - \tilde{\zeta}_k - \frac{1}{\tilde{v}_k + 1}\right) \quad (4.150d)$$

Offensichtlich ergibt sich aus den Fällen Fünf bis Acht die Gleichung

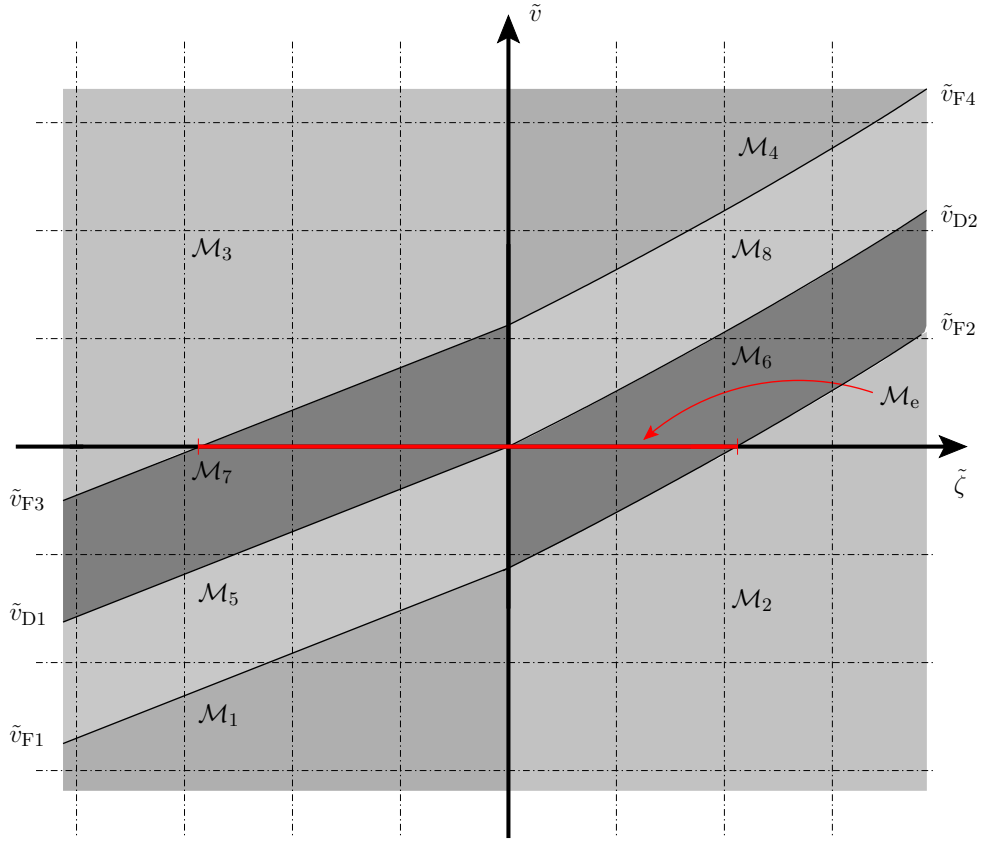
$$\tilde{v}_{k+1}^{F5-F8} = \tilde{v}_k. \quad (4.150e)$$

Des Weiteren kann die Einteilung des Zustandsraumes durch die Kurven

$$\tilde{v}_{F1} = -1 + \frac{1 + \tilde{\zeta}}{1 + \tilde{\tau}_A}, \quad (4.151a)$$

$$\tilde{v}_{F2} = -1 + \frac{1}{1 - \tilde{\zeta} + \tilde{\tau}_A}, \quad (4.151b)$$

$$\tilde{v}_{F3} = -1 + \frac{1 + \tilde{\zeta}}{1 - \tilde{\tau}_B}, \quad (4.151c)$$



**Abbildung 4.31.:** Unterteilung des Zustandsraums durch sechs Funktionen  $\tilde{v}_{Fi}$  mit  $i \in (1, 2, 3, 4, 5, 6)$  des erweiterten und normierten Modells einer CP-PLL mit *Dead-Zone*-Charakteristik. Es ergeben sich acht Mengen  $\mathcal{M}_j$  mit  $j \in (1, 2, \dots, 8)$ , die den Zustandsraum definieren.

$$\tilde{v}_{F4} = -1 + \frac{1}{1 - \tilde{\zeta} + \tilde{\tau}_A}, \quad (4.151d)$$

$$\tilde{v}_{D1} = \tilde{\zeta} \quad (4.151e)$$

und

$$\tilde{v}_{D2} = -1 + \frac{1}{1 - \tilde{\zeta}} \quad (4.151f)$$

angegeben werden. In Abbildung 4.31 ist der Zustandsraum mit den Mengen  $\mathcal{M}_j$  dargestellt, wobei  $j \in (1, 2, \dots, 8)$ . Der Index ist den entsprechenden Fällen zuzuordnen. Wie bei der Erweiterung des Modells nach VAN PAEMEL ergibt sich auch für dieses Modell eine Menge von Fixpunkten  $\mathcal{M}_e$  bzw. eine Fixpunktlinie.

Mit der Menge  $\mathcal{M}_e = \{\tilde{\tau} : -\tilde{\tau}_B < \tilde{\tau} < \tilde{\tau}_A \wedge \tilde{v}_k = 0\}$  ergibt sich die Abbildung  $T : \mathcal{M}_e \rightarrow \mathcal{M}_e$ , wobei sogar jeder Punkt  $(\tilde{\tau}_e, v_k = 0) \in \mathcal{M}_e$  sich auf sich selbst abbildet.  $\mathcal{M}_e$  stellt somit eine Menge von Fixpunkten dar. D.h. das erweiterte Modell mit DEAD-ZONE basierend auf dem VAN PAEMEL-Modell liefert den gleichen Sachverhalt wie

das in diesem Kapitel vorgestellte. Wie für das erweiterte Modell nach VAN PAEMEL im Abschnitt 4.2.2 betrachtet, soll an dieser Stelle das normierte Modell linearisiert und hinsichtlich der Stabilität untersucht werden. Da eine Fixpunktlinie in den Gebieten  $\mathcal{M}_6$  und  $\mathcal{M}_7$  gegeben ist, die Differenzengleichungssysteme auf den Mengen  $\mathcal{M}_5$  und  $\mathcal{M}_8$  sich einen Fixpunkt  $x_{\text{FP}_0} \in \mathcal{M}_e$  im Ursprung teilen,  $\mathcal{M}_3$  den Fixpunkt  $x_{\text{FP}_B} \in \mathcal{M}_e$  und  $\mathcal{M}_3$  den Fixpunkt  $x_{\text{FP}_A} \in \mathcal{M}_e$  aufweist und die Differenzengleichungssysteme auf  $\mathcal{M}_1$  und  $\mathcal{M}_4$  keine Fixpunkte auf der Zustandsebene besitzen, sind nur die Differenzengleichungen auf den Gebieten  $\mathcal{M}_2$ ,  $\mathcal{M}_3$ ,  $\mathcal{M}_6$ ,  $\mathcal{M}_7$  und  $\mathcal{M}_8$  zu linearisieren. Die Linearisierung mittels TAYLOR-Reihenentwicklung (siehe Kapitel 4.1.4 und 4.2.2) auf der Menge  $\mathcal{M}_2$  liefert

$$\mathbf{x}_{k+1} = \frac{1}{1+a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2b & 1+a-2b \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \frac{\tilde{\tau}_A}{1+a} \begin{bmatrix} -1 \\ -2b \end{bmatrix} = \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_k + \mathbf{b}_2, \quad (4.152)$$

wobei  $\mathbf{x}_k = [\tilde{\zeta}_k, \tilde{v}_k]^T$  den Zustandsvektor bezeichnet. Entsprechend ergibt sich das affine Differenzengleichungssystem

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1-a & -\tilde{\tau}_B - (1-a)(1-\tilde{\tau}_B) \\ 2b & 1-2b(1-\tilde{\tau}_B) \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} -a\tilde{\tau}_B \\ -2b\tilde{\tau}_B \end{bmatrix} = \mathbf{A}_3 \mathbf{x}_k + \mathbf{b}_3 \quad (4.153)$$

auf der Menge  $\mathcal{M}_3$ . Für die Mengen  $\mathcal{M}_5$ ,  $\mathcal{M}_6$ ,  $\mathcal{M}_7$  und  $\mathcal{M}_8$  kann

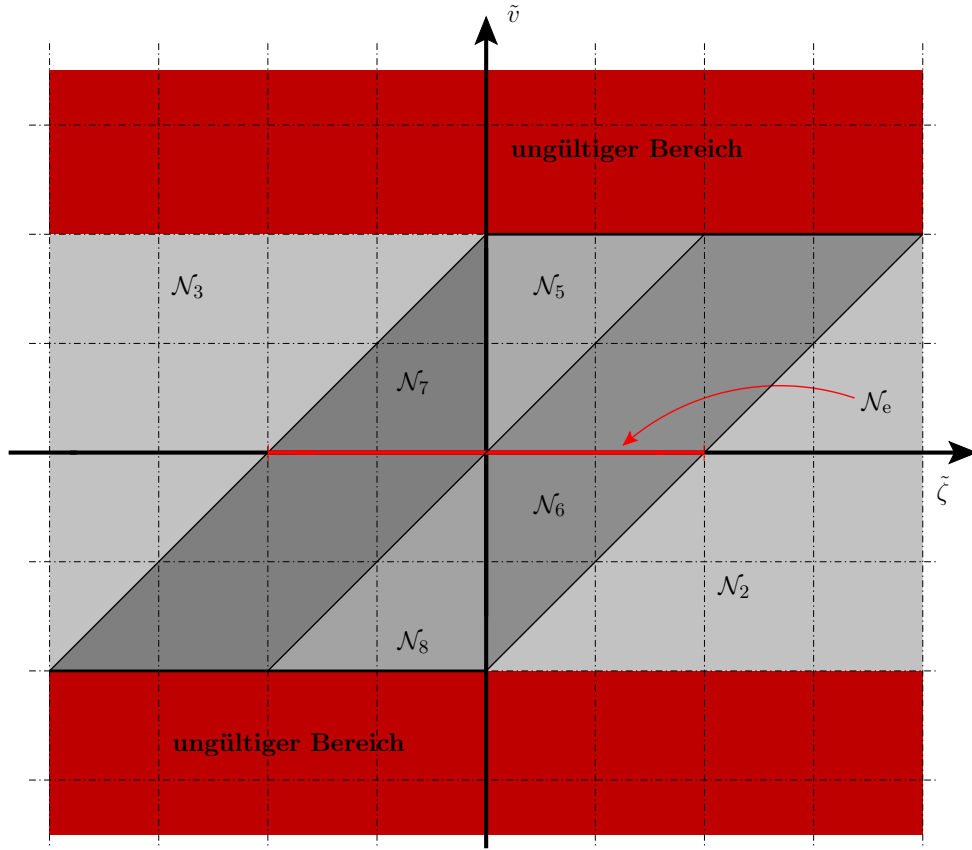
$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k = \mathbf{A}_0 \mathbf{x}_k \quad (4.154)$$

angegeben werden, wobei  $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}_5 = \mathbf{A}_6 = \mathbf{A}_7 = \mathbf{A}_8$  gilt. Wie schon bei der Erweiterung des Modells nach VAN PAEMEL ergibt sich auch hier ein PWA-Differenzengleichungssystem. Im Folgenden soll der Zustandsraum des linearisierten Systems dargelegt werden und die wichtigen Transitionen, die von einem in ein anderes Gebiet erfolgen, hinsichtlich der Stabilität untersucht werden. In Abbildung 4.32 ist der Zustandsraum für das PWA-System dargestellt, welches die Grundlage für die folgende Betrachtung darstellt.

Um die Stabilität zu untersuchen, werde angenommen, dass die Trajektorie nahe der Menge  $\mathcal{N}_e$  sei. Es ist offensichtlich, dass, wenn die Mengen  $\mathcal{N}_1$  und  $\mathcal{N}_4$  erreicht werden, so ist das System instabil oder die Gültigkeit des linearisierten Modells ist verlassen worden. Des Weiteren werden im Folgenden die Zustandsübergänge von der Menge  $\mathcal{N}_2$  nach  $\mathcal{N}_0$  und umgekehrt sowie von der Menge  $\mathcal{N}_3$  nach  $\mathcal{N}_0$  und umgekehrt untersucht. Neben diesen Transitionen sind natürlich auch die Abbildungen auf sich selbst wichtig. Entsprechend werden die drei Systeme auf  $\mathcal{N}_0$ ,  $\mathcal{N}_2$  und  $\mathcal{N}_3$  betrachtet. Beginnend mit den Matrizen  $\mathbf{A}_0$ ,  $\mathbf{A}_2$  und  $\mathbf{A}_3$  können die charakteristischen Polynome

$$N_0(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1, \quad (4.155)$$

$$N_2(\lambda) = \lambda^2 + \frac{2b-a-2}{1+a}\lambda + \frac{1}{1+a} \quad (4.156)$$



**Abbildung 4.32.:** Unterteilung des Zustandsraums hinsichtlich der Linearisierung

und

$$N_3(\lambda) = \lambda^2 + (-2 + a + 2b - 2b\tilde{\tau}_B)\lambda + 1 + 2b\tilde{\tau}_B - a \quad (4.157)$$

angegeben werden.  $N_0(\lambda)$  liefert somit die Eigenwerte  $\lambda_{1,2} = 1$ . Damit  $N_2(\lambda)$  ein Einheitskreispolynom darstellt, muss

$$0 < 2 + a - b \quad (4.158)$$

gelten. Für  $N_3(\lambda)$  können die Ungleichungen

$$0 < (-1 + 2\tilde{\tau}_B)b + 2 - a \quad (4.159)$$

und

$$1 > |1 - a + 2b\tilde{\tau}_B| \quad (4.160)$$

angegeben werden. Der Übergang von Gebiet  $\mathcal{N}_2$  nach Gebiet  $\mathcal{N}_0$  liefert das charakteristische Polynom

$$N_{02}(\lambda) = \lambda^2 + \frac{4b - a - 2}{1 + a}\lambda + \frac{1}{1 + a} \quad (4.161)$$

mit der Randbedingung

$$0 < 2 + a - 2b \quad (4.162)$$

für ein Einheitskreispolynom. Der Übergang von der Menge  $\mathcal{N}_0$  nach  $\mathcal{N}_3$  (bzw. von  $\mathcal{N}_3$  nach  $\mathcal{N}_0$ ) liefert das Polynom

$$N_{03}(\lambda) = \lambda^2 + (-2 + a + 4b - 2b\tilde{\tau}_B)\lambda + 1 - a + 2b\tilde{\tau}_B. \quad (4.163)$$

Damit  $N_{03}(\lambda)$  ausschließlich Nullstellen innerhalb des Einheitskreises aufweist, sind die Ungleichungen

$$0 < (-2 + 2\tilde{\tau}_B)b + 2 - a \quad (4.164)$$

und

$$1 > |1 - a + 2b\tilde{\tau}_B| \quad (4.165)$$

einzuhalten. Im Folgenden soll kurz auf die Äquivalenz zwischen den Ungleichungen aus Kapitel 4.2.2 und denen, die in diesem Kapitel dargelegt wurden, eingegangen werden. Offensichtlich entspricht das Polynom  $N_0(\lambda)$  gerade  $D_5(\lambda)$ . Dies ist bei beiden der Bereich, in dem keine Regelung stattfindet. Des Weiteren ergeben sich  $D_1(\lambda) = N_2(\lambda)$  und  $D_2(\lambda) = N_3(\lambda)$ . Für die in diesem Kapitel dargelegten Übergänge gelten

$$D_{51} = N_{02}, \quad (4.166)$$

$$D_{36} = N_{03} \quad (4.167)$$

und

$$D_{21} = N_{23}. \quad (4.168)$$

Demnach liefert diese Betrachtung das gleiche Ergebnis wie die Behandlung in Kapitel 4.2.2. Es gilt somit

$$0 < (2\tilde{\tau}_B - 2)b + 2 - a \quad (4.169)$$

und

$$1 > |1 - a + 2b\tilde{\tau}_B|. \quad (4.170)$$

Werden die Ungleichungen (4.169) und (4.170) eingehalten, so ist das erweiterte HEDAYAT-Modell mit *Dead-Zone* und damit der Phasenregelkreis mit *Dead-Zone*-Modell stabil.

Die in diesem Kapitel dargelegten Resultate entsprechen denen des erweiterten Modells nach VAN PAEMEL mit *Dead-Zone*. Entsprechend ergeben sich hier zwar weniger Ungleichungen, jedoch liefert auch dieses Modell hinsichtlich einer gewissermaßen konservativen Betrachtung das gleiche Ergebnis.



### 4.3. Erweiterung des Modells nach VAN PAEMEL: Leckstrom

Die Erweiterung des VAN PAEMEL-Modells inklusive Leckstrom liefert während des Zustandes  $\mathcal{S}_0$  gerade den Leckstrom  $i_L$ . Demnach ergibt sich eine Steigung der Spannung während des Zustandes  $\mathcal{S}_0$ , wodurch sich die Dynamik stark verändert.

Im Folgenden soll ein analytisches Modell auf der Basis des Abschnittes 4.1.2 aufgestellt werden, das das Auftreten des Leckstroms innerhalb der *Charge-Pump* oder durch Varaktoren mitberücksichtigt. Auch wenn sich der PFD im Zustand  $\mathcal{S}_0$  befindet, wird ein Strom  $i_L$  in das Filter eingeprägt. Durch den Ansatz von VAN PAEMEL können auch für diesen Fall vier Unterscheidungen und somit vier Gebiete im Zustandsraum identifiziert werden. Diese Fälle sind in den Abbildungen 4.33(a) bis 4.33(d) dargestellt. Der Unterschied zu dem von VAN PAEMEL eingeführten Modell ist insbesondere in der Definition des Zustandes  $v$  ersichtlich. Bei dem Standardmodell ist  $v$  in einem gewissen Bereich immer konstant. Durch die Einführung des Leckstromes  $i_L$  ergibt sich für jeden Sektor eine in der Struktur unterschiedliche Gleichung bezüglich der Spannungen. Die Flächen unter der Regelspannung  $u_{ctl}$  sowie die Zustandsgleichungen für  $v$  nach den Abbildungen 4.33(a) bis 4.33(d) lassen sich durch die folgenden Gleichungen bestimmen. Nach Abbildung 4.33(a) ergibt sich die Fläche unter  $u_{ctl}$  zu

$$v_k (T + \tau_{k+1} - \tau_k) + I_p \left( R_1 \tau_{k+1} + \frac{\tau_{k+1}^2}{2C_1} \right) - \frac{I_L (T - \tau_k)^2}{2C_1} = \frac{1}{K_v} \quad (4.171a)$$

sowie

$$v_{k+1} = v_k - \frac{I_L (T - \tau_k)}{C_1} + \frac{I_p \tau_{k+1}}{C_1} \quad (4.171b)$$

mit  $\tau_k > 0$  und  $\tau_{k+1} > 0$ . Für den zweiten Fall mit  $\tau_k < 0$  und  $\tau_{k+1} < 0$  kann die Gleichung

$$v_k (T + \tau_{k+1} - \tau_k) + \frac{I_p \tau_k^2}{2C_1} - \frac{I_L (T + \tau_{k+1})^2}{2C_1} + (I_p - I_L) R_1 \tau_k = \frac{1}{K_v} \quad (4.172a)$$

angegeben werden. Des Weiteren kann

$$v_{k+1} = v_k - \frac{I_L (T + \tau_{k+1})}{C_1} + \frac{I_p \tau_{k+1}}{C_1} \quad (4.172b)$$

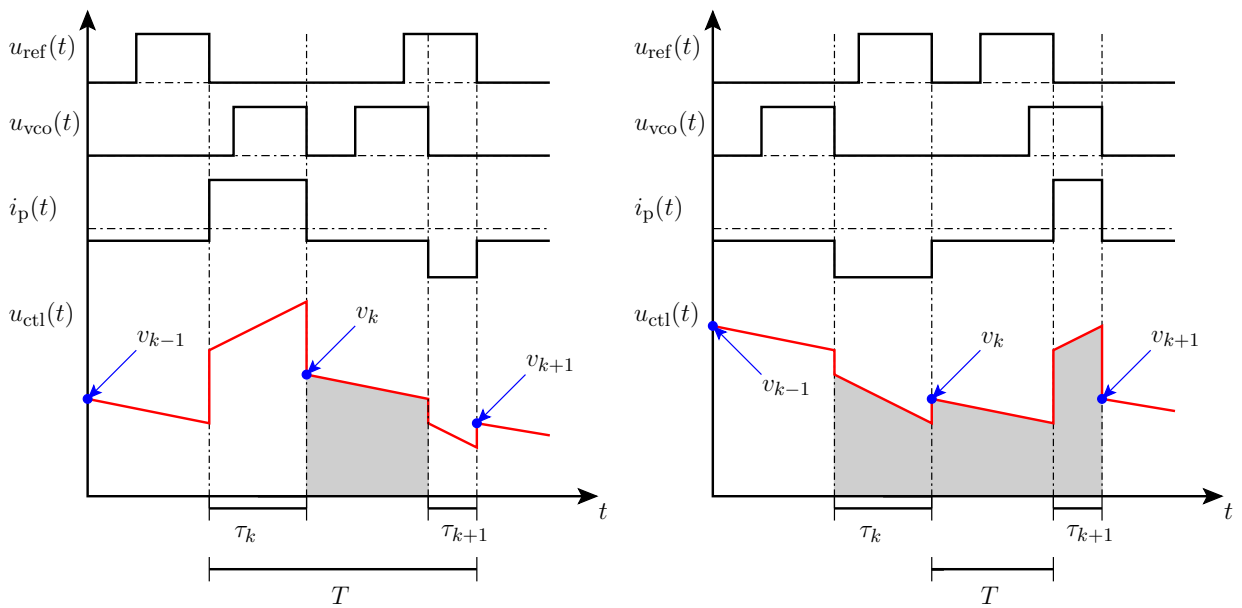
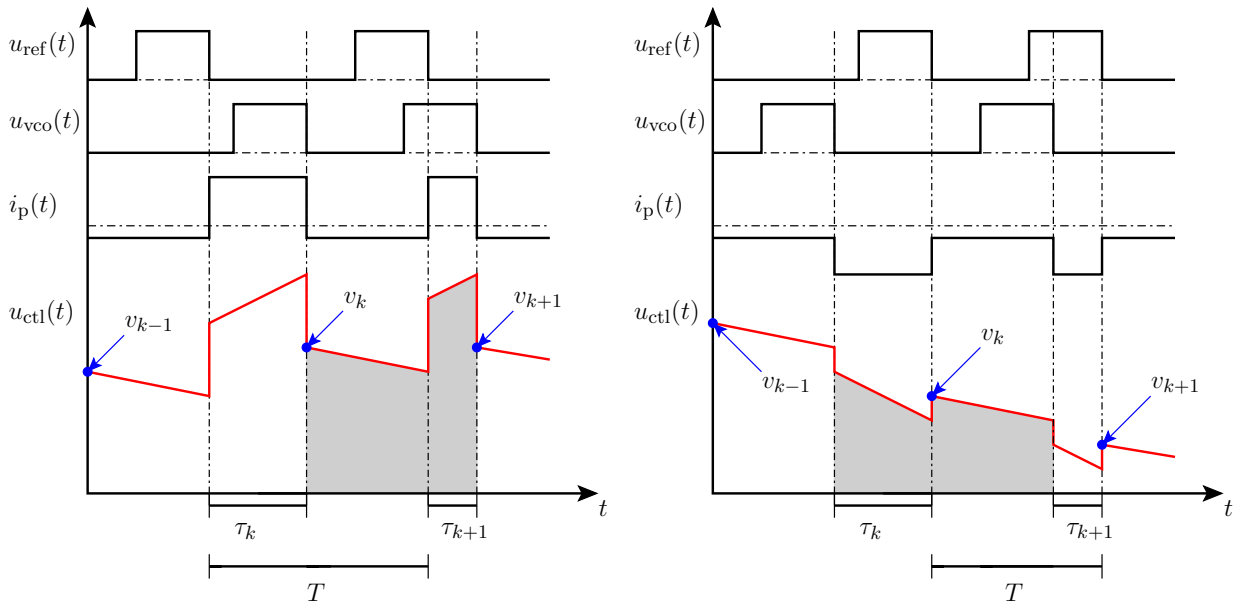
mittels Abbildung 4.33(b) bestimmt werden. Die Fläche für  $\tau_k > 0$  und  $\tau_{k+1} < 0$  ist durch

$$v_k (T + \tau_{k+1} - \tau_k) - \frac{I_L (T + \tau_{k+1} - \tau_k)^2}{2C_1} = \frac{1}{K_v} \quad (4.173a)$$

und die Spannung durch

$$v_{k+1} = v_k - \frac{I_L (T + \tau_{k+1} - \tau_k)}{C_1} + \frac{I_p \tau_{k+1}}{C_1} \quad (4.173b)$$

#### 4. Modellierung und Analyse digitaler Phasenregelkreise



**Abbildung 4.33.:** Behandlung der Fallunterscheidungen, die sich bei der Betrachtung der Gleichung (4.10), der möglichen Zustände und des Leckstromes ergeben, wobei hier ausschließlich der eingerastete Bereich berücksichtigt wird.

mittels der Abbildung 4.33(c) zu berechnen. Nach Abbildung 4.33(d) ergeben sich für

$\tau_k < 0$  und  $\tau_{k+1} > 0$  die Gleichungen

$$v_k(T + \tau_{k+1} - \tau_k) + I_p \left( R_1(\tau_k + \tau_{k+1}) + \frac{\tau_k^2 + \tau_{k+1}^2}{2C_1} \right) - I_L \left( \frac{T^2}{2C_1} + R_1\tau_k \right) = \frac{1}{K_v} \quad (4.174a)$$

und

$$v_{k+1} = v_k - \frac{I_L T}{C_1} + \frac{I_p \tau_{k+1}}{C_1}. \quad (4.174b)$$

Der Zustandsraum wird implizit durch die Funktionen  $LC_0$  und  $LC_1$  getrennt, wodurch das zustandsabhängige Schalten der Differenzengleichungen angegeben wird. Diese werden durch

$$LC_0 : \tau_k = 0$$

$$LC_1 : \tau_{k+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_k(T - \tau_k) + R_1 I_p \tau_k + \frac{I_p \tau_k^2}{2C_1} - \frac{I_L T^2}{2C_1} - I_L R_1 \tau_k = \frac{1}{K_v} & \forall \tau_k \geq 0 \\ v_k(T - \tau_k) - \frac{I_L (T - \tau_k)^2}{2C_1} = \frac{1}{K_v} & \forall \tau_k \leq 0 \end{cases} \quad (4.175)$$

beschrieben. Offensichtlich ist die Topologie des Zustandsraumes mit der des idealen Modells vergleichbar und recht ähnlich. Auch das schaltende Verhalten ergibt sich, wie es in Kapitel 4.1.3 dargelegt wurde. Mit den Substitutionen

$$\tilde{\tau}_k = \frac{\tau_k}{T}, \quad (4.176)$$

$$\tilde{v}_k = T K_v v_k - 1, \quad (4.177)$$

$$a = K_v I_p R_1 T, \quad (4.178)$$

$$b = \frac{K_v I_p T^2}{2C_1}, \quad (4.179)$$

$$\alpha = K_v I_L R_1 T \quad (4.180)$$

und

$$\beta = \frac{K_v I_L T^2}{2C_1} \quad (4.181)$$

können die normalisierten Gleichungen für den Zustand  $\tilde{\tau}$  bestimmt werden:

$$\tilde{\tau}_{k+1}^{F1} = \frac{-(\tilde{v}_k + 1 + a) - \sqrt{(\tilde{v}_k + 1 + a)^2 + 4b(\tilde{\tau}_k + \tilde{v}_k(\tilde{\tau}_k - 1) + \beta(\tilde{\tau}_k - 1)^2)}}{2b} \quad (4.182a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_{k+1}^{F2} &= \frac{-(1 + \tilde{v}_k) + 2\beta}{2(b - \beta)} \\ &\quad + \frac{\sqrt{(1 + \tilde{v}_k)^2 - 4\beta(1 + \tilde{\tau}_k(\tilde{v}_k - \alpha - 1) + 4bh(\tilde{\tau}_k, \tilde{v}_k))}}{2(b - \beta)} \end{aligned} \quad (4.182b)$$

mit

$$h(\tilde{\tau}_k, \tilde{v}_k) = \tilde{v}_k(\tilde{\tau}_k - 1) + \tilde{\tau}_k(1 + \alpha - a) + \beta$$

$$\tilde{\tau}_{k+1}^{F3} = \frac{\tilde{v}_k + 1 + 2\beta(\tilde{\tau}_k - 1) - \sqrt{(\tilde{v}_k + 1)^2 - 4\beta}}{2\beta} \quad (4.182c)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_{k+1}^{F4} &= \frac{(\tilde{v}_k + 1 + a)}{2b} \\ &\quad - \frac{\sqrt{(\tilde{v}_k + 1 + a)^2 + 4b(\beta + \tilde{\tau}_k((1 - \alpha - a) + \tilde{v}_k(\tilde{v}_k - 1) + b\tilde{\tau}_k))}}{2b} \end{aligned} \quad (4.182d)$$

Ferner ergeben sich

$$\tilde{v}_{k+1}^{F1} = \tilde{v}_k + 2\beta(1 - \tilde{\tau}_k) + 2b\tilde{\tau}_{k+1}^{F1}, \quad (4.183a)$$

$$\tilde{v}_{k+1}^{F2} = \tilde{v}_k + 2\beta(1 + \tilde{\tau}_{k+1}^{F2}) + 2b\tilde{\tau}_{k+1}^{F2}, \quad (4.183b)$$

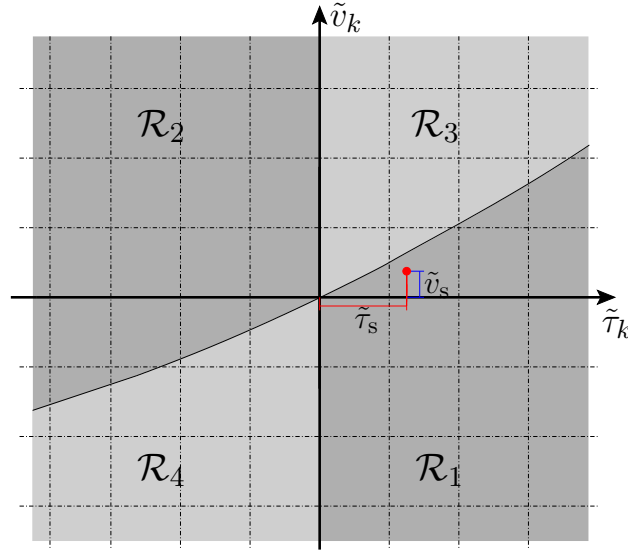
$$\tilde{v}_{k+1}^{F3} = \tilde{v}_k + 2\beta(1 + \tilde{\tau}_{k+1}^{F3} - \tilde{\tau}_k) + 2b\tilde{\tau}_{k+1}^{F3} \quad (4.183c)$$

und

$$\tilde{v}_{k+1}^{F4} = \tilde{v}_k + 2\beta + 2b\tilde{\tau}_{k+1}^{F4}. \quad (4.183d)$$

Durch die Normierungen ist es erforderlich, die Grenzen der Gebiete auch zu normieren. Es gilt

$$\begin{aligned} \tilde{LC}_0 : \quad & \tilde{\tau}_k = 0 \\ \tilde{LC}_1 : \quad & \tilde{\tau}_{k+1} = 0 \Rightarrow \begin{cases} (\tilde{v}_k + 1)(1 - \tilde{\tau}_k) - \beta(1 - \tilde{\tau}_k)^2 = 1 \quad \forall \tilde{\tau}_k \geq 0 \\ (\tilde{v}_k + 1)(1 - \tilde{\tau}_k) + a - \alpha - \beta + b\tilde{v}_k^2 = 1 \quad \forall \tilde{\tau}_k \leq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.184)$$



**Abbildung 4.34.:** Bereichsdefinition der Transformation  $\mathbf{T}$  im Zustandsraum mit den zugehörigen Sektoren  $\mathcal{R}_i$  mit  $i \in (1, 2, 3, 4)$

Mit der Einführung der Punktransformation  $\mathbf{T}_i(\tilde{\tau}_{k+1}, \tilde{v}_{k+1}) = [\tilde{\tau}_{k+1}^{\text{Fi}} \tilde{v}_{k+1}^{\text{Fi}}]^T$ , wobei  $i \in (1, 2, 3, 4)$  ist, kann

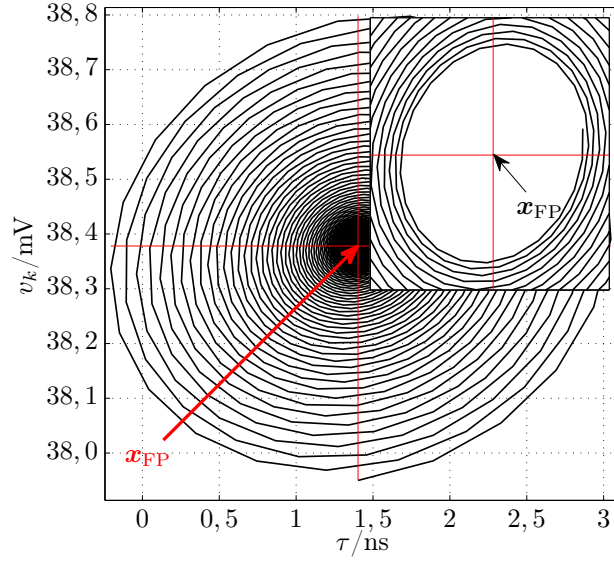
$$\mathbf{T}(\tilde{\tau}_{k+1}, \tilde{v}_{k+1}) = \begin{cases} \mathbf{T}_1(\tilde{\tau}_{k+1}, \tilde{v}_{k+1}) & \forall (\tilde{\tau}_k, \tilde{v}_k) \in \mathcal{R}_1 \\ \mathbf{T}_2(\tilde{\tau}_{k+1}, \tilde{v}_{k+1}) & \forall (\tilde{\tau}_k, \tilde{v}_k) \in \mathcal{R}_2 \\ \mathbf{T}_3(\tilde{\tau}_{k+1}, \tilde{v}_{k+1}) & \forall (\tilde{\tau}_k, \tilde{v}_k) \in \mathcal{R}_3 \\ \mathbf{T}_4(\tilde{\tau}_{k+1}, \tilde{v}_{k+1}) & \forall (\tilde{\tau}_k, \tilde{v}_k) \in \mathcal{R}_4 \end{cases} \quad (4.185)$$

definiert werden. Die Definition der Mengen  $\mathcal{R}_1$ ,  $\mathcal{R}_2$ ,  $\mathcal{R}_3$  und  $\mathcal{R}_4$  lässt sich der Abbildung 4.34 entnehmen. Offensichtlich ist  $\mathbf{x} = [\tilde{\tau}, \tilde{v}]^T = [0, 0]^T$  kein Fixpunkt des Systems. Dies ist darin begründet, dass der Zustand  $\mathcal{S}_0$  durch den Leckstrom  $I_L$  immer einen Beitrag zur Regelung liefert. In [16, 92] wurde ein formaler Zusammenhang bezüglich des Leckstromes und des statischen Phasenfehlers angegeben. Für die Pulsbreite bedeutet dies, dass sich diese periodisch wiederholt. D. h. der Strom  $I_p$  während eines Pulses gleicht gerade den Leckstrom  $I_L$  innerhalb einer Periode  $T = 1/f_{\text{ref}}$  aus. Durch eine einfache Rechnung kann das Äquivalent zum statischen Phasenfehler angegeben werden:

$$\tilde{\tau}_s = \frac{\tau_s}{T} = \frac{I_L}{I_p + I_L} = \frac{\beta}{b + \beta} \quad (4.186)$$

Hinzukommend zum statischen Phasenfehler  $\varphi_{e,s}$  oder der eingeführten statischen Pulsbreite  $\tilde{\tau}_s$  ergibt sich auch ein statischer Fehler in der Spannung und somit in der Frequenz. Dieser kann bestimmt werden, indem

$$\tilde{\tau}_{k+1}^{\text{F1}} \Big|_{\tilde{\tau}_k} = \frac{\beta}{b + \beta} \quad \text{oder} \quad \tau_{k+1}^{\text{F1}} \Big|_{\tau_k} = \frac{I_L T}{I_p + I_L} = \frac{I_L T}{I_p + I_L} \quad (4.187)$$



**Abbildung 4.35.:** Zum Fixpunkt des erweiterten Modells nach VAN PAEMEL mit Leckstrom

angesetzt wird und die Lösung für  $v_k$  angegeben wird. Für den normierten Fall kann

$$\tilde{v}_s = -\frac{\beta (-b^2 + ba + b\beta + \beta a)}{\beta^2 + 2b\beta + b^2} \quad (4.188)$$

berechnet werden, bzw. für den nichtnormierten

$$v_s = -\frac{(T^2 + 2R_1C_1T)I_pI_L^2 + (2R_1C_1T - T^2)I_p^2I_L}{2C_1T(I_p + I_L)^2} - \frac{1}{K_vT}. \quad (4.189)$$

Für das erweiterte Modell mit dem Leckstrom  $I_L$  ergibt sich der Fixpunkt zu  $\tilde{\mathbf{x}}_{\text{FP}} = [\tilde{\tau}_s, \tilde{v}_s]^T$  ( $\mathbf{x}_{\text{FP}} = [\tau_s, v_s]^T$ ). In Abbildung 4.35 ist dies anschaulich dargestellt.

### 4.4. Regelkreise hoher Ordnung: Modellierung durch Approximation

In diesem Abschnitt wird eine Möglichkeit dargelegt, einen digitalen Phasenregelkreis hoher Ordnung (d. h., dass die Ordnung größer zwei ist) so zu modellieren, dass sich ein analytisches, nichtlineares, schaltendes Differenzengleichungssystem ergibt. Dazu wird das Verfahren verwendet, welches in den Kapiteln 4.1.4 und 4.2.3 eingeführt wurde.

#### 4.4.1. Allgemeines Modell $n$ -ter Ordnung

Der grundlegende Gedanke basiert auf der Linearisierung der Lösung des Differenzialgleichungssystems des Schleifenfilters. Da sich das Filter innerhalb dieser Arbeit als lineares,

zeitinvariantes System darstellt und somit durch

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}i_p(t) \\ y(t) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (4.190)$$

beschrieben wird, ergibt sich die Lösung

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t - t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t - \tau)\mathbf{b}i_p(\tau) d\tau, \quad (4.191)$$

wobei  $\Phi(\cdot)$  die Transitionsmatrix darstellt. Wird die Phasengleichung des VCO-Ausgangssignals betrachtet und wenn dann der Zeitpunkt der nächsten fallenden Flanke bestimmt werden soll, so ist die Lösung des Differenzialgleichungssystems des Filters ausschlaggebend, ob es eine analytische Lösung gibt oder ob auf numerische Verfahren zurückgegriffen werden muss. Demnach ist es erforderlich, dass die Phasengleichung des VCO-Ausgangssignals bijektiv ist. Da die Transitionsmatrix des Zustandsraummodells nach Gleichung (4.190) für diese Betrachtung entscheidend ist, soll die Transitionsmatrix so linearisiert werden, dass sich eine bijektive Phasengleichung des Ausgangssignals des spannungsgesteuerten Oszillators ergibt. Die Transitionmatrix kann durch ihre Potenzreihe dargestellt werden. Es ergibt sich

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n t^n}{n!}. \quad (4.192)$$

Aufgrund der Tatsache, dass die Nullstellen bei Polynomen der Ordnungen größer Vier im Allgemeinen nicht geschlossen analytisch anzugeben sind, erfolgt die Festlegung der Ordnung der Phasengleichung des spannungsgesteuerten Oszillators auf die Ordnung Zwei. Zwar lässt sich mittels der Formeln von CARDANO für ein Polynom dritten Grades eine analytische Lösung angeben, jedoch soll an dieser Stelle darauf verzichtet werden. Auch können für das Polynom vierten Grades die Nullstellen analytisch bestimmt werden. Damit sich jedoch eine quadratische Phasengleichung des spannungsgesteuerten Oszillatorausgangssignals ergibt, ist es erforderlich, die Transitionsmatrix mittels Gleichung (4.192) abzuschätzen. Es können verschiedene Varianten der Linearisierung angesetzt werden. Zum einen kann die Lösung des Filters linearisiert werden, wodurch sich hinsichtlich der Zustände ausschließlich lineare Gleichungen ergeben würden und somit eine quadratische VCO-Phasengleichung angegeben werden kann. Eine anderer Ansatz könnte über die Linearisierung der Phasengleichung des spannungsgesteuerten Oszillators erfolgen. Dabei soll dann jedoch nur die entsprechende Phasengleichung linearisiert werden, nicht die Lösung des Differenzialgleichungssystems des Schleifenfilters. Im Folgenden sollen beide Ansätze angegeben werden.

Die Linearisierung der Lösung des Schleifenfilters lässt sich mittels der Potenzreihe leicht durchführen, da sie eine TAYLOR-Reihe darstellt. Entsprechend kann

$$\mathbf{x}(t) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n(t-t_0)^n}{n!} \mathbf{x}(t_0)}_{\approx \mathbf{I} + \mathbf{A}(t-t_0)} + \int_{t_0}^t \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n(t-\tau)^n}{n!} \mathbf{b}i_p(\tau)}_{\approx \mathbf{I}} d\tau \quad (4.193)$$

$$\approx [\mathbf{I} + \mathbf{A}(t-t_0)] \mathbf{x}(t_0) + \mathbf{b}i_p \int_{t_0}^t 1 d\tau \quad (4.194)$$

$$\approx \mathbf{x}(t_0) + (\mathbf{A}\mathbf{x}(t_0) + \mathbf{b}i_p)(t-t_0) = \hat{\mathbf{x}}(t) \quad (4.195)$$

angegeben werden, wobei der Strom  $i_p \in (+I_p, 0 \text{ A}, -I_p)$  im Intervall  $[t_0, t]$  konstant ist. Des Weiteren ist der Integrand aus Gleichung (4.193) durch die Einheitsmatrix abzuschätzen und die Transitionsmatrix des Summanden vor dem Integral der Gleichung (4.193) durch

$$\Phi(t-t_0) \approx \mathbf{I} + \mathbf{A}(t-t_0) \quad (4.196)$$

zu approximieren. Dies liefert eine quadratische Gleichung für das Phasensignal des spannungsgesteuerten Oszillators, da somit

$$\varphi_{\text{vco}}(t) = \varphi_{\text{vco}}(t_0) + 2\pi K_v \int_{t_0}^t u_{\text{ctl}}(\tau) d\tau \quad (4.197)$$

$$\approx \varphi_{\text{vco}}(t_0) + 2\pi K_v \int_{t_0}^t \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}(\tau) d\tau \quad (4.198)$$

$$\approx \varphi_{\text{vco}}(t_0) + 2\pi K_v \mathbf{c}^T \left( \hat{\mathbf{x}}(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{2} (\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t_0) + \mathbf{b}i_p)(t-t_0)^2 \right) \quad (4.199)$$

gilt. Demnach können die diskretisierten Gleichungen

$$\hat{\mathbf{x}}(t_{n+1}) = \hat{\mathbf{x}}(t_n) + \boldsymbol{\gamma}(\hat{\mathbf{x}}_n)(t_{n+1} - t_n) \quad (4.200)$$

$$\hat{\varphi}_{\text{vco}}(t_{n+1}) = \hat{\varphi}_{\text{vco}}(t_n) + 2\pi K_v \mathbf{c}^T \left( \hat{\mathbf{x}}(t_n)(t_{n+1} - t_n) + \frac{\boldsymbol{\gamma}(\hat{\mathbf{x}}_n)}{2} (t_{n+1} - t_n)^2 \right) \quad (4.201)$$

angegeben werden, wobei

$$\boldsymbol{\gamma}(\hat{\mathbf{x}}_n) = \boldsymbol{\gamma}(\hat{\mathbf{x}}(t_n)) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t_n) + \mathbf{b}i_p \quad (4.202)$$

ist. Nachdem die Lösung des Schleifenfilters linearisiert wurde und somit auch die des VCO-Phasensignals, entspricht Gleichung (4.201) gerade  $2\pi$  und ist nach  $t_{n+1}$  aufzulösen. Es ergibt sich

$$t_{n+1}^{\text{vco}} = t_n + \frac{-K_v \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}_n + \sqrt{(K_v \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}_n)^2 + 2K_v \mathbf{c}^T \boldsymbol{\gamma}(\hat{\mathbf{x}}_n) \left( 1 - \frac{\hat{\varphi}_{\text{vco}}(t_n)}{2\pi} \right)}}{K_v \mathbf{c}^T \boldsymbol{\gamma}(\hat{\mathbf{x}}_n)}. \quad (4.203)$$



Liegt der Fall  $\gamma(\hat{\mathbf{x}}_n) = \mathbf{0}$  vor, so gilt

$$t_{n+1}^{\text{vco}} = t_n + \frac{1 - \frac{\hat{\varphi}_{\text{vco}}(t_n)}{2\pi}}{K_v \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}_n}. \quad (4.204)$$

Für das Referenzsignal mit einer konstanten Frequenz  $f_{\text{ref}}$  kann

$$\varphi_{\text{ref}}(t_{n+1}) = \varphi_{\text{ref}}(t_n) + 2\pi f_{\text{ref}} (t_{n+1} - t_n) \quad (4.205)$$

und

$$t_{n+1}^{\text{ref}} = t_n + \frac{1 - \frac{\varphi_{\text{ref}}(t_n)}{2\pi}}{f_{\text{ref}}} \quad (4.206)$$

angegeben werden. An dieser Stelle sei erwähnt, dass mit den hergeleiteten Gleichungen für die Zustände des Filters, der VCO-Phase, der Berechnung der Zeitpunkte, an denen die Phasensignale des VCO und des Referenzsignals gleich  $2\pi$  sind, sich der Algorithmus zur Bestimmung der nächsten Zeitpunkte gemäß [24] ergibt. Demnach ist der nächste Ereigniszeitpunkt durch

$$t_{n+1} = \min \{t_{n+1}^{\text{ref}}, t_{n+1}^{\text{vco}}\} \quad (4.207)$$

gegeben. Nach Kapitel 4.1.4 ergibt sich für den ersten Fall  $\zeta_k = \zeta_n = -\hat{\varphi}_{\text{vco}}(t_n)$ ,  $\zeta_{n+1} = -\hat{\varphi}_{\text{vco}}(t_{n+1})$ ,  $\zeta_{k+1} = \zeta_{n+2} = \hat{\varphi}_{\text{ref}}(t_{n+2})$ ,  $t_{n+1} = t_{n+1}^{\text{ref}}$  und  $t_{n+2} = t_{n+2}^{\text{vco}}$ . Damit können

$$\begin{aligned} \zeta_{k+1}^{\text{F1}} = 2\pi f_{\text{ref}} \frac{-\mathbf{c}^T \mathbf{B}_1 \hat{\mathbf{x}}_k}{\mathbf{c}^T \mathbf{b}_2(\hat{\mathbf{x}}_k)} + \\ 2\pi f_{\text{ref}} \frac{\sqrt{(K_v \mathbf{c}^T \mathbf{B}_1 \hat{\mathbf{x}}_k)^2 + 2K_v \mathbf{c}^T \mathbf{b}_2(\hat{\mathbf{x}}_k) \left(1 + \frac{\zeta_k}{2\pi} - \frac{K_v \mathbf{c}^T}{2f_{\text{ref}}} (\mathbf{I} + \mathbf{B}_1) \mathbf{x}_k\right)}}{K_v \mathbf{c}^T \mathbf{b}_2(\hat{\mathbf{x}}_k)} \end{aligned} \quad (4.208a)$$

und

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^{\text{F1}} = \mathbf{B}_1 \hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{b}_2(\hat{\mathbf{x}}_k) \frac{\zeta_{k+1}^{\text{F1}}}{2\pi f_{\text{ref}}} \quad (4.208b)$$

mit

$$\mathbf{b}_2(\hat{\mathbf{x}}_k) = \mathbf{A} \mathbf{B}_1 \hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{b} I_p \quad (4.208c)$$

und

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{I} + \frac{1}{f_{\text{ref}}} \mathbf{A} \quad (4.208d)$$

#### 4. Modellierung und Analyse digitaler Phasenregelkreise

---

angegeben werden. Der zweite Fall ist gegeben durch  $\zeta_k = \zeta_n = \hat{\varphi}_{\text{ref}}(t_n)$ ,  $\zeta_{n+1} = -\hat{\varphi}_{\text{vco}}(t_{n+1})$ ,  $\zeta_{k+1} = \zeta_{n+2} = \hat{\varphi}_{\text{ref}}(t_{n+2})$ ,  $t_{n+1} = t_{n+1}^{\text{ref}}$  und  $t_{n+2} = t_{n+2}^{\text{vco}}$ . Es ergibt sich

$$\zeta_{k+1}^{\text{F2}} = \frac{-\mathbf{c}^T \mathbf{B}_3(\zeta_k) \hat{\mathbf{x}}_k}{\frac{\mathbf{c}^T \mathbf{b}_4(\zeta_k, \hat{\mathbf{x}}_k)}{2\pi f_{\text{ref}}}} + \frac{\sqrt{(K_v \mathbf{c}^T \mathbf{B}_3(\zeta_k) \hat{\mathbf{x}}_k)^2 + 2K_v \mathbf{c}^T \mathbf{b}_4(\zeta_k, \hat{\mathbf{x}}_k) h(\zeta_k, \hat{\mathbf{x}})}}{\frac{K_v \mathbf{c}^T \mathbf{b}_4(\zeta_k, \hat{\mathbf{x}}_k)}{2\pi f_{\text{ref}}}} \quad (4.209a)$$

mit

$$h(\zeta_k, \hat{\mathbf{x}}) = 1 - K_v \frac{1 - \frac{\zeta_k}{2\pi}}{f_{\text{ref}}} \mathbf{c}^T (\mathbf{I} + \mathbf{B}_3(\zeta_k)) \hat{\mathbf{x}}_k \quad (4.209b)$$

und

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^{\text{F2}} = \mathbf{B}_3(\zeta_k) \hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{b}_4(\zeta_k, \hat{\mathbf{x}}_k) \frac{\zeta_{k+1}^{\text{F2}}}{2\pi f_{\text{ref}}} \quad (4.209c)$$

mit

$$\mathbf{b}_4(\zeta_k, \hat{\mathbf{x}}_k) = \mathbf{A} \mathbf{B}_3(\zeta_k) \hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{b} I_p \quad (4.209d)$$

und

$$\mathbf{B}_3(\zeta_k) = \mathbf{I} + \frac{1 - \frac{\zeta_k}{2\pi}}{f_{\text{ref}}} \mathbf{A}. \quad (4.209e)$$

Der dritte Fall ist gegeben durch  $\zeta_k = \zeta_n = -\hat{\varphi}_{\text{vco}}(t_n)$ ,  $\zeta_{n+1} = \hat{\varphi}_{\text{ref}}(t_{n+1})$ ,  $\zeta_{k+1} = \zeta_{n+2} = -\hat{\varphi}_{\text{vco}}(t_{n+2})$ ,  $t_{n+1} = t_{n+1}^{\text{vco}}$  und  $t_{n+2} = t_{n+2}^{\text{ref}}$ . Damit können die folgenden Gleichungen angegeben werden:

$$\zeta_{k+1}^{\text{F3}} = -2\pi K_v \mathbf{c}^T \mathbf{B}_5(\zeta_k, \hat{\mathbf{x}}_k) \hat{\mathbf{x}}_k \left( \frac{1}{f_{\text{ref}}} - f(\zeta_k, \hat{\mathbf{x}}_k) \right) - 2\pi K_v \frac{1}{2} \mathbf{c}^T \mathbf{b}_6(\zeta_k, \hat{\mathbf{x}}_k) \left( \frac{1}{f_{\text{ref}}} - f(\zeta_k, \hat{\mathbf{x}}_k) \right)^2 \quad (4.210a)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^{\text{F3}} = \mathbf{B}_5(\zeta_k, \hat{\mathbf{x}}_k) \hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{b}_6(\zeta_k, \hat{\mathbf{x}}_k) \left( \frac{1}{f_{\text{ref}}} - f(\zeta_k, \hat{\mathbf{x}}_k) \right) \quad (4.210b)$$

mit

$$\mathbf{b}_6(\zeta_k, \hat{\mathbf{x}}_k) = \mathbf{A}\mathbf{B}_5(\zeta_k, \hat{\mathbf{x}}_k)\hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{b}I_p, \quad (4.210c)$$

$$\mathbf{B}_5(\zeta_k, \hat{\mathbf{x}}_k) = \mathbf{I} + f(\zeta_k, \hat{\mathbf{x}}_k)\mathbf{A} \quad (4.210d)$$

und

$$f(\zeta_k, \hat{\mathbf{x}}_k) = \frac{-K_v \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}_k + \sqrt{(K_v \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}_k)^2 + 2K_v \mathbf{c}^T \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}_k \left(1 + \frac{\zeta_k}{2\pi}\right)}}{K_v \mathbf{c}^T \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}_k}. \quad (4.210e)$$

Mit  $\zeta_k = \zeta_n = \hat{\varphi}_{\text{ref}}(t_n)$ ,  $\zeta_{n+1} = \hat{\varphi}_{\text{ref}}(t_{n+1})$ ,  $\zeta_{k+1} = \zeta_{n+2} = -\hat{\varphi}_{\text{vco}}(t_{n+2})$ ,  $t_{n+1} = t_{n+1}^{\text{vco}}$  und  $t_{n+2} = t_{n+2}^{\text{ref}}$  ergibt sich der vierte Fall und es können die Gleichungen

$$\begin{aligned} \zeta_{k+1}^{\text{F4}} = & -2\pi K_v \mathbf{c}^T \mathbf{B}_7(\hat{\mathbf{x}}_k) \hat{\mathbf{x}}_k \left( \frac{1 - \frac{\zeta_k}{2\pi}}{f_{\text{ref}}} - g(\hat{\mathbf{x}}_k) \right) \\ & - 2\pi K_v \frac{1}{2} \mathbf{c}^T \mathbf{b}_8(\hat{\mathbf{x}}_k) \left( \frac{1 - \frac{\zeta_k}{2\pi}}{f_{\text{ref}}} - g(\hat{\mathbf{x}}_k) \right)^2 \end{aligned} \quad (4.211a)$$

und

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^{\text{F4}} = \mathbf{B}_7(\hat{\mathbf{x}}_k) \hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{b}_8(\hat{\mathbf{x}}_k) \left( \frac{1 - \frac{\zeta_k}{2\pi}}{f_{\text{ref}}} - g(\hat{\mathbf{x}}_k) \right) \quad (4.211b)$$

angegeben werden, wobei

$$\mathbf{b}_8(\hat{\mathbf{x}}_k) = \mathbf{A}\mathbf{B}_7(\hat{\mathbf{x}}_k)\hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{b}I_p, \quad (4.211c)$$

$$\mathbf{B}_7(\hat{\mathbf{x}}_k) = \mathbf{I} + g(\hat{\mathbf{x}}_k)\mathbf{A} \quad (4.211d)$$

und

$$g(\hat{\mathbf{x}}_k) = \frac{-K_v \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}_k + \sqrt{(K_v \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}_k)^2 + 2K_v \mathbf{c}^T \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}_k}}{K_v \mathbf{c}^T \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}_k} \quad (4.211e)$$

gelten. Damit ist das schaltende Differenzengleichungssystem aufgestellt, wobei der Zustandsraum unterteilt werden muss, damit die Vorschrift des zustandsabhängigen Schaltens angegeben werden kann. Da die Dimension des Zustandsraumes eine Dimension größer ist

als die des Filters und es vier Mengen innerhalb des Zustandsraumes gibt, auf denen gerade die hergeleiteten Differenzgleichungssysteme agieren, ergeben sich Mengen, die die vier Mengen unterteilen. Die Vorschrift zur Bestimmung dieser Trennmengen ist prinzipiell schon in den Kapiteln 4.1.3, 4.1.4, 4.2.1, 4.2.2, 4.2.3 und 4.3 dargelegt worden. Entsprechend muss der Phasenfehler  $\zeta_k = 0$  sein. Des Weiteren sollte für die  $n$ -dimensionale Menge  $\zeta_{k+1} = 0$  gelten. Dies ist äquivalent zu dem Sachverhalt, dass die Zeitpunkte, an denen das Referenz- und das VCO-Signal schalten, identisch sind und es muss  $t_{n+1}^{\text{ref}} = t_{n+1}^{\text{vco}}$  gelten. Die Unterteilung des Zustandsraumes ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
 LC_0 : \quad & \zeta_k = 0 \\
 LC_1 : \quad & \zeta_{k+1} = 0 \Leftrightarrow t_{n+1}^{\text{ref}} = t_{n+1}^{\text{vco}} \\
 \Rightarrow \quad & \begin{cases} \frac{1}{f_{\text{ref}}} = f(\hat{\mathbf{x}}_k, \zeta_k) & \forall \zeta_k \leq 0 \\ \frac{1 - \frac{\zeta_k}{2\pi}}{f_{\text{ref}}} = g(\hat{\mathbf{x}}_k) & \forall \zeta_k \geq 0 \end{cases} .
 \end{aligned} \tag{4.212}$$

Ist  $\gamma = \mathbf{0}$ , so gilt

$$\begin{aligned}
 LC_0 : \quad & \zeta_k = 0 \\
 LC_1 : \quad & \zeta_{k+1} = 0 \Leftrightarrow t_{n+1}^{\text{ref}} = t_{n+1}^{\text{vco}} \\
 \Rightarrow \quad & \begin{cases} \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}_k = \frac{f_{\text{ref}}}{K_v} \left( 1 + \frac{\zeta_k}{2\pi} \right) & \forall \zeta_k \leq 0 \\ \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}_k = \frac{f_{\text{ref}}}{K_v} \left( 1 - \frac{\zeta_k}{2\pi} \right)^{-1} & \forall \zeta_k \geq 0 \end{cases} .
 \end{aligned} \tag{4.213}$$

Damit ist ein autonomes, diskretes, schaltendes, dynamisches System zur Beschreibung eines CP-PLL-Systems beliebiger Ordnung auf Basis der Approximation der Lösung des Differenzialgleichungssystems des Schleifenfilters dargelegt worden.

Es ist auch möglich, dass nicht die Lösung des Filters linearisiert wird, sondern ausschließlich die Phasengleichung des spannungsgesteuerten Oszillators auf eine Form gebracht wird, so dass die Phasengleichung bijektiv ist. Es ergibt sich das diskretisierte Differenzgleichungssystem für das Schleifenfilter zu

$$\mathbf{x}(t_{n+1}) = \Phi(t_{n+1} - t_n) \mathbf{x}(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Phi(t_{n+1} - \tau) d\tau \mathbf{b} i_p, \tag{4.214}$$

wobei  $i_p \in (+I_p, 0 \text{ A}, -I_p)$  zwischen den Zeitpunkten  $t_n$  und  $t_{n+1}$  konstant ist. Für die Phasengleichung des Ausgangssignals des spannungsgesteuerten Oszillators kann Gleichung

(4.201) angesetzt werden und somit ergibt sich Gleichung (4.203) für die Bestimmung des Zeitpunktes, an der das VCO-Signal eine fallende Flanke aufweist. Damit kann auch hier der Algorithmus nach [24] angewendet werden. Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass eine quadratische Phasengleichung zu Grunde gelegt wurde, wobei mittels der Formeln von CARDANO durchaus auch eine Lösung für eine Phasengleichung der Ordnung Drei bestimmbar ist. Des Weiteren existiert auch noch die Möglichkeit, eine Phasengleichung der Ordnung Vier zu lösen, was an dieser Stelle jedoch aufgrund des Umfanges nicht erfolgen soll. Wie bei den vorhergegangenen Betrachtungen soll auch hier ein Eingangssignal mit konstanter Frequenz verwendet werden, wodurch die Gleichungen (4.205) für das Phasensignal und Gleichung (4.206) für die Bestimmung der Schaltzeitpunkte gelten. Entsprechend den zuvor dargelegten Betrachtungen kann hier ein autonomes, nichtlineares, schaltendes, Differenzengleichungssystem angegeben werden.

#### 4.4.2. Stabilität des CP-PLL-Modells dritter Ordnung

Der zu betrachtende Phasenregelkreis besitze einen idealen Phasen- und Frequenz-Detektor mit idealer Ladungspumpe, einem Schleifenfilter der Ordnung Zwei (siehe Abbildung 4.36) mit den Zustandsraummatrizen

$$\mathbf{A}_{\text{LF}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} & \frac{1}{R_1 C_1} \\ \frac{1}{R_1 C_2} & -\frac{1}{R_1 C_2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_{\text{LF}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{C_2} \end{bmatrix}, \quad (4.215)$$

$$\mathbf{c}_{\text{LF}}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad d_{\text{LF}} = 0$$

und einen spannungsgesteuerten Oszillator mit

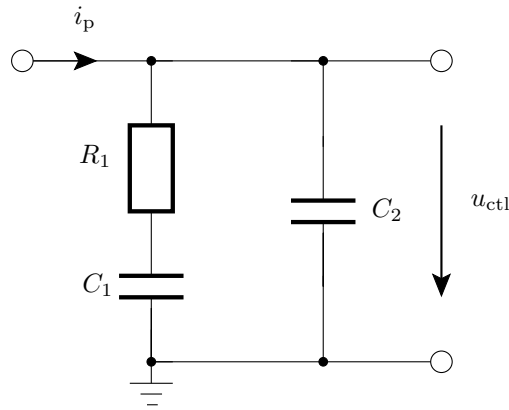
$$f_{\text{VCO}}(t) = K_{\text{V}} u_{\text{ctl}}(t). \quad (4.216)$$

Der Teiler werde nicht realisiert, wobei der Teilungsbeiwert auch in den Verstärkungsbeiwert  $K_{\text{V}}$  des spannungsgesteuerten Oszillators modelliert werden könnte und sich somit keinerlei Einschränkungen ergeben. Es ist offensichtlich, dass die Fälle Drei und Vier mit dem Filter 2. Ordnung sich nicht in eine TAYLOR-Reihe um die Ruhelage

$$\mathbf{x}_{\text{R}} = \begin{bmatrix} x_{1,\text{R}}, & x_{2,\text{R}}, & \tilde{\zeta}_{\text{R}} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{K_{\text{V}} T}, & \frac{1}{K_{\text{V}} T}, & 0 \end{bmatrix}^T \quad (4.217)$$

entwickeln lassen, wobei  $\tilde{\zeta} = \zeta/(2\pi)$  ist. Entsprechend sollen ausschließlich die Fälle Eins und Zwei dargelegt werden und hinsichtlich des Stabilitätsverhaltens untersucht werden. Des Weiteren lässt sich zeigen, dass die JACOBI-Matrizen der Fälle Eins und Zwei identisch sind. Es ergibt sich

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{a_1 - 1}{a_1} & \frac{1}{a_1} & 0 \\ \frac{1 - b_2}{a_2} & 1 - 2b_2 + \frac{b_2 - 1}{a_2} & \frac{2b_2}{K T} \\ -\frac{K T}{2a_2} & \frac{K T (1 - 2a_2)}{2a_2} & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.218)$$



**Abbildung 4.36.:** Schematische Darstellung des Filters 2. Ordnung

wobei

$$a_1 = \frac{R_1 C_1}{T}, \quad (4.219)$$

$$a_2 = \frac{R_1 C_2}{T} \quad (4.220)$$

und

$$b_2 = \frac{K_v I_p T^2}{2C_2} \quad (4.221)$$

gelten. Somit lässt sich das charakteristische Polynom

$$D(\lambda) = \lambda^3 + \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} - 3 + b_2 \left( 2 - \frac{1}{a_2} \right) \right) \lambda^2 + \left( 3 - \frac{2}{a_1} - \frac{2}{a_2} + b_2 \left( \frac{2}{a_1} + \frac{1}{a_2} - 2 \right) \right) \lambda + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} - 1 \quad (4.222)$$

der Matrix  $\mathbf{J}$  angeben.

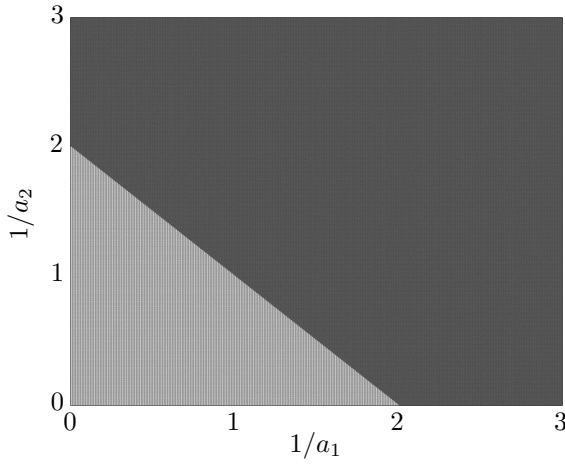
Damit die Gleichung (4.222) ein Einheitskreispolynom darstellt, ist es erforderlich, dass

$$0 < b_2 < 2, \quad (4.223)$$

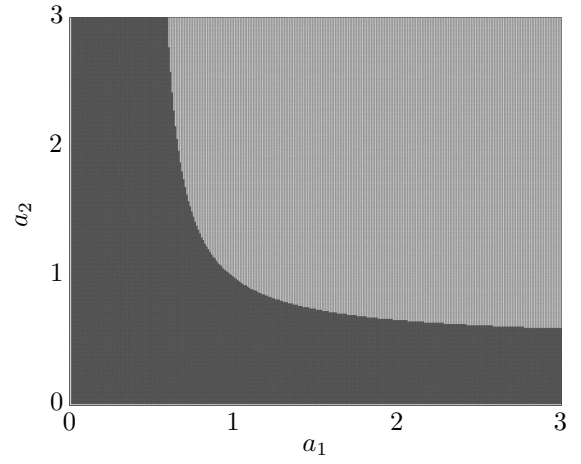
$$\left| 1 - \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right| < 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} < 2 \quad (4.224)$$

und

$$\frac{|b_2 (a_1 a_2 (2a_1 - 1) - a_1^2) + (a_1 + a_2)^2 - 2a_1 a_2 (a_1 + a_2)|}{(a_1 a_2)^2} < \frac{|2a_1 a_2 (a_1 + a_2) - (a_1 + a_2)^2|}{(a_1 a_2)^2} \quad (4.225)$$



(a) Vereinfachte Darstellung der Randbedingung (4.224)



(b) Randbedingung (4.224)

**Abbildung 4.37.:** Zur Randbedingung (4.224), wobei die hellgrauen Flächen andeuten, dass die Bedingung erfüllt ist und die dunkelgrauen zeigen den Bereich, bei dem die Bedingung nicht erfüllt ist.

eingehalten werden. Gleichung (4.225) stellt eine komplexe Bedingung an die Parameter dar, welche im Folgenden untersucht und vereinfacht werden soll. Abbildung 4.37 beschreibt den Zusammenhang (4.224). Es kann gezeigt werden, dass sich Gleichung (4.225) durch

$$\frac{|b_2 f_2(a_1, a_2) - f_1(a_1, a_2)|}{|f_1(a_1, a_2)|} < 1 \quad (4.226)$$

beschreiben lässt, wobei die Funktionen  $f_1(a_1, a_2)$  und  $f_2(a_1, a_2)$  durch

$$f_1(a_1, a_2) = -(a_1 + a_2)^2 + 2 a_1 a_2 (a_1 + a_2) \quad (4.227)$$

und

$$f_2(a_1, a_2) = a_1 a_2 (2 a_1 - 1) - a_1^2 \quad (4.228)$$

definiert wurden. Entsprechend muss

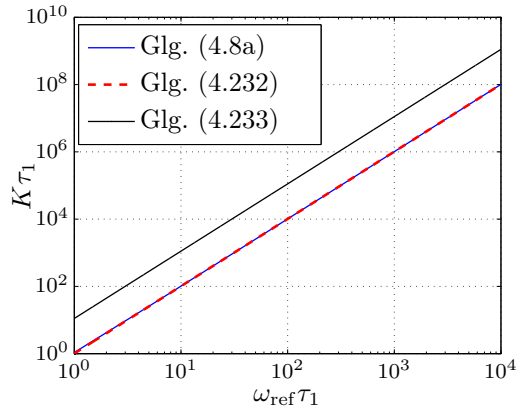
$$\left| b_2 \frac{f_2(a_1, a_2)}{f_1(a_1, a_2)} - 1 \right| < 1 \quad (4.229)$$

gelten. Es ist ersichtlich, dass der Parameter  $b_2$  der Ungleichung

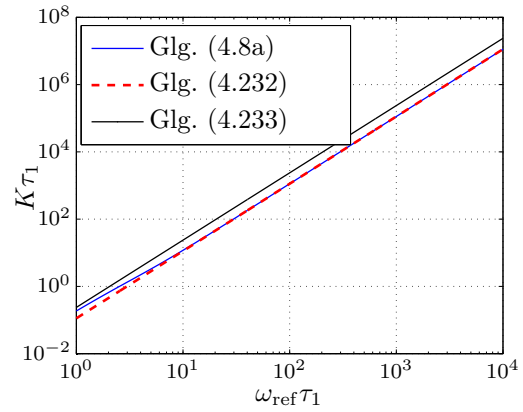
$$0 < b_2 \frac{f_2(a_1, a_2)}{f_1(a_1, a_2)} < 2 \quad (4.230)$$

genügen muss, damit die Ungleichung (4.229) eingehalten wird. Es ergibt sich

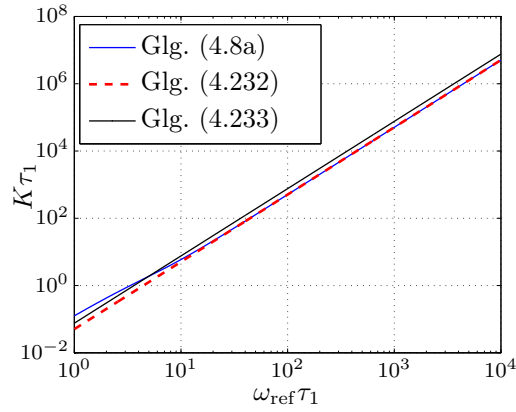
$$b_2 < 2 \left( 1 + \frac{a_2}{a_1} \right). \quad (4.231)$$



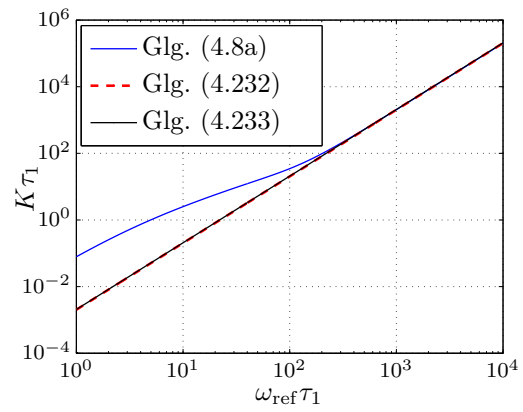
(a)  $\beta = 1, 1$



(b)  $\beta = 1, 9$



(c)  $\beta = 3$



(d)  $\beta = 51$

**Abbildung 4.38.:** Vergleich zwischen Gleichung (4.225), (4.231) und der Grenze von GARDNER (siehe Gleichung (4.8a) aus Kapitel 4.1.1 oder [16])

Die Bedingung (4.225) ist somit äquivalent zu Bedingung (4.231). Des Weiteren ist die Bedingung (4.223) strenger als (4.231). Geht der Parameter  $a_2$  gegen Null, so sind die Randbedingungen (4.223) und (4.231) identisch. Zur Validierung der Randbedingungen werde das von GARDNER hergeleitete Stabilitätskriterium für einen Regelkreis der Ordnung Drei betrachtet. Es gilt somit Gleichung (4.8a) aus Kapitel 4.1.1. Die Gleichungen (4.223) und (4.231) sollen zur besseren Vergleichbarkeit an die Notation von GARDNER angepasst werden. Gleichung (4.223) wird zu

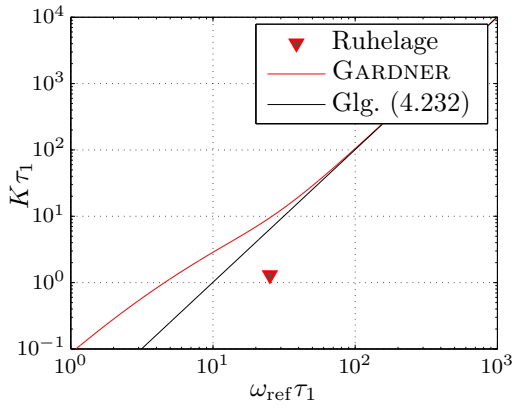
$$K\tau_1 < \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{(\beta - 1)} \omega_{\text{ref}}^2 \tau_1^2 \quad (4.232)$$

und die Bedingung (4.231) liefert

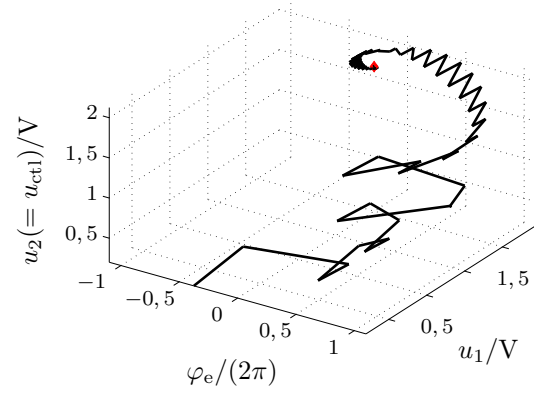
$$K\tau_1 < \frac{1}{\pi^2} \frac{\beta}{(\beta - 1)^2} \omega_{\text{ref}}^2 \tau_1^2 \quad (4.233)$$



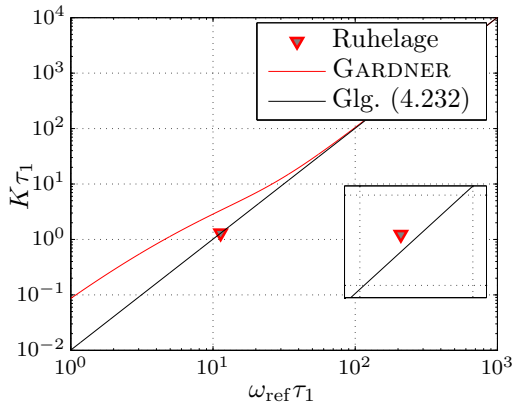
#### 4.4. Regelkreise hoher Ordnung: Modellierung durch Approximation



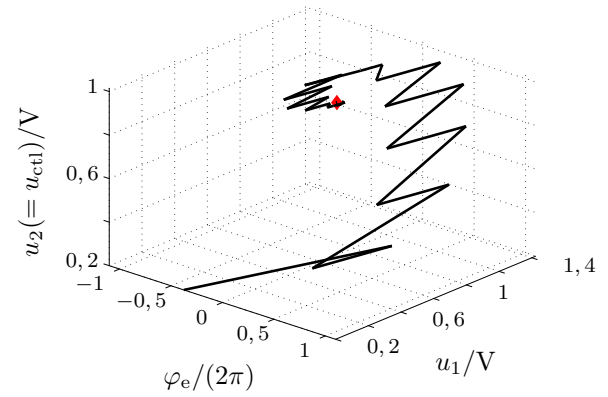
(a) Stabilitätsgrenze mit  $f_{\text{ref}} = 40$  MHz



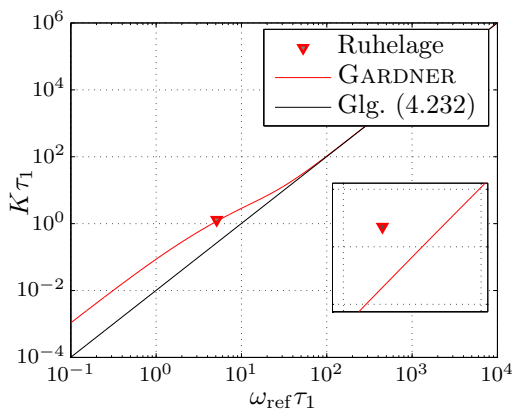
(b) Konvergierende Trajektorie im Zustandsraum ( $f_{\text{ref}} = 40$  MHz)



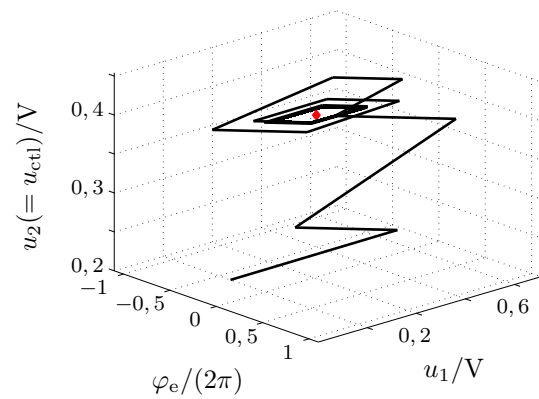
(c) Stabilitätsgrenze mit  $f_{\text{ref}} = 18$  MHz



(d) Konvergierende Trajektorie im Zustandsraum ( $f_{\text{ref}} = 18$  MHz)



(e) Stabilitätsgrenze mit  $f_{\text{ref}} = 8, 16$  MHz



(f) Trajektorie im Zustandsraum ( $f_{\text{ref}} = 8, 16$  MHz), wobei der Fixpunkt nicht erreicht wird.

**Abbildung 4.39.:** Zur Stabilität eines Phasenregelkreises der Ordnung Drei

mit  $\beta = 1 + C_1/C_2$ . Des Weiteren ergibt sich für Gleichung (4.224)

$$\beta < \frac{1}{\pi} \omega_{\text{ref}} \tau_1. \quad (4.234)$$

In Abbildung 4.38 sind die hergeleiteten Grenzen (4.232), (4.233) und GARDNERS Stabilitätsgrenze nach Gleichung (4.8a) gegenübergestellt. Es zeigt sich, dass sich die Bedingung (4.232) an die GARDNER-Grenze annähert. Des Weiteren ist ersichtlich, dass (4.232) strenger ist als (4.233). Sind die Bedingungen (4.223) und (4.224) bzw. (4.232) und (4.234) erfüllt, so ist der ideale Phasenregelkreis der Ordnung Drei ohne Nichtidealitäten stabil. Die Bedingung (4.223) bzw. (4.232) ist konservativer als die von GARDNER aufgestellte Stabilitätsgrenze nach Gleichung (4.8a).

Aus den Abbildung 4.39 (a) bis (f) lassen sich die Resultate hinsichtlich der Schleifenverstärkung sowie der Trajektorien im Zustandsraum ablesen. Die Trajektorien ergeben sich, wenn ein idealisiertes Modell ohne Linearisierungen und Nichtlinearitäten oder Nichtidealitäten angesetzt wird. Die Parameter wurden durch  $I_p = 65 \mu\text{A}$ ,  $K_v = 40 \text{ MHz/V}$ ,  $C_1 = 0,1 \text{ pF}$ ,  $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $C_2 = 1 \text{ pF}$  und  $N = 2$  angegeben. Dabei wird die Referenzfrequenz entsprechend den Abbildungen 4.39 (a) bis (f) variiert.

---

## Modellierung und Simulation digitaler Phasenregelkreise

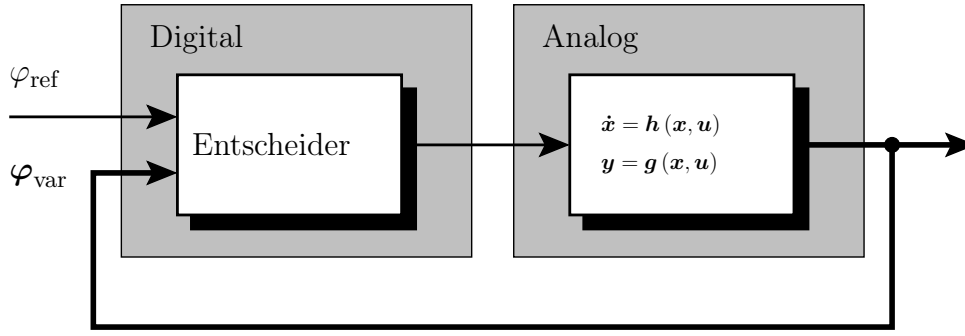
---

*Für den Entwurf digitaler Phasenregelkreise ist die Simulation ein entscheidender Bestandteil geworden. Aus diesem Grund sind effiziente Modelle erforderlich. Besonders durch die Aufteilung des Regelkreises in einen Niederfrequenz- und in einen Hochfrequenzteil ergeben sich hohe Simulationszeiten. In diesem Kapitel soll eine allgemeine Modellierungsmethodik für digitale Phasenregelkreise vorgestellt werden. Die Basis bilden dabei die Arbeiten von DEMIR [91] und HEDAYAT [24, 25].*

### 5.1. Grundlegendes Konzept

Abbildung 5.1 zeigt den schematischen Aufbau des Phasenregelkreises. Dabei sei angemerkt, dass der Analogteil im ersten Schritt als linear angenommen werden soll, obgleich der spannungsgesteuerte Oszillator oder auch die MOS-Kapazitäten nichtlineare Bauelemente darstellen. Das Modell des Phasenregelkreises, d. h. der Analogteil sowie der Digitalteil, wird jedoch im Laufe des Kapitels durch verschiedene Nichtlinearitäten ergänzt. Der Digitalteil wird im Allgemeinen mittels der BOOLSchen Logik und durch Zustandsautomaten beschrieben. In Kapitel 3.1.1 ist ein Zustandsautomat des Phasen- und Frequenz-Detektors angegeben. Dabei ist die Phaseninformation der Eingangssignale des Phasendetektors der Ausgangspunkt der Modellierung. Es lassen sich die Phasensignale

$$\varphi_{\text{ref}}(t + T) = \varphi_{\text{ref}}(t) + 2\pi \int_t^{t+T} f_{\text{ref}}(\tau) \, d\tau \quad (5.1a)$$



**Abbildung 5.1.:** Modellierung des Phasenregelkreises: Digitalteil mittels BOOLScher Logik, Analogteil als nichtlineares Differenzialgleichungssystem

und

$$\varphi_{\text{var}}(t + T) = \varphi_{\text{var}}(t) + 2\pi \int_t^{t+T} f_{\text{vco}}(u_{\text{ctl}}(\tau)) d\tau. \quad (5.1b)$$

angeben. Die Funktion  $f_{\text{vco}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lässt sich durch die nichtlineare Charakteristik des spannungsgesteuerten Oszillators und verschiedene Teilerstufen repräsentieren. Es sei angemerkt, dass die Gleichung (5.1b) in Form einer Matrixgleichung angegeben ist, da es für verschiedene Anwendungen (z. B. in der Frequenzsynthese mit Phaseninterpolation und in speziellen Architekturen der CDR) notwendig ist, mehr als ein Phasensignal des Regelkreises zu verwenden. Zur Bestimmung der nächsten Ereignisse ist es notwendig, die Zeitpunkte dieser zu berechnen. Dies erfordert die Betrachtung der Logik sowie das Lösen von im Allgemeinen transzendenten Gleichungen. Der Einfachheit halber wird im Folgenden eine Konstante  $\mathcal{E}$  eingeführt.

**Definition 5.1**  $\mathcal{E}$  ( $\mathcal{E}$ ) sei gerade der Wert (Vektor) unter Berücksichtigung der Phaseninformationen von  $\varphi_{\text{ref}}$  und  $\varphi_{\text{var}}$  ( $\varphi_{\text{var}}$ ), der eine Änderung (ein Ereignis) am Ausgang des Entscheiders hervorruft.

Im Folgenden werde davon ausgegangen, dass nur ein Phasensignal des VCO benötigt wird. Mit Hilfe der Phaseninformationen und der Konstanten  $\mathcal{E}$  ist somit die Gleichung

$$\varphi_{\text{var}}(t_n) + 2\pi \int_{t_n}^{t_{n+1}} f_{\text{vco}}(\tau) d\tau = \mathcal{E} \quad (5.2)$$

für die jeweiligen Phasensignale  $\varphi_{\text{ref}}$  und  $\varphi_{\text{var}}$  zu lösen, wobei  $t_{n+1}$  der zu bestimmende Zeitpunkt ist. Im Allgemeinen ist die Berechnung für das Referenzsignal unproblematisch, da es meist in Form von vorgegebenen Daten vorliegt oder im Falle der Frequenzsynthese sich durch eine bijektive Funktion darstellen lässt. Anders liegt der Fall zur Bestimmung der Phase für den Analogteil. Das Filter und der VCO lassen sich im einfachsten Fall durch das lineare Differenzialgleichungssystem der Form

$$\Sigma_{\varphi} : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u_{\text{p}}(t) \\ y(t) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) + du_{\text{p}}(t) \end{cases} \quad (5.3)$$

darstellen. Dabei ist dann die Phasengleichung des VCO gegeben durch

$$\varphi_{\text{var}}(t + T) = \varphi_{\text{var}}(t) + \frac{2\pi}{N} \int_t^{t+T} K_v u_{\text{ctl}}(\tau) + f_{0,\text{vco}} d\tau, \quad (5.4)$$

wobei  $\varphi_{\text{var}}$  einem Zustand aus dem Zustandsvektor  $\mathbf{x}$  entspricht. Diese Gleichung liefert den selben Sachverhalt, der in Kapitel 3.1.3 vorgestellt wurde. Bei dieser Betrachtung sollen vorerst alle Nichtlinearitäten (VCO-, PFD- und CP-Charakteristik) unberücksichtigt bleiben, wobei dies in den folgenden Unterkapiteln nachgeholt wird. Die Phasengleichung (5.1a) lässt sich mit der Lösung des Differenzialgleichungssystems (5.3) durch

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) &= \mathbf{c}^T \Phi_{\varphi}(t_{n+1} - t_n) \mathbf{x}(t_n) + \mathbf{c}^T \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Phi_{\varphi}(t_{n+1} - \tau) \mathbf{b} u_p(\tau) d\tau + du_p \\ &= \varphi_{\text{var}}(t_{n+1}) \end{aligned} \quad (5.5)$$

darstellen, wobei  $\Phi_{\varphi}(\cdot)$  die Transitionsmatrix ist. Somit ist die im Allgemeinen transzendente Matrixgleichung

$$\mathbf{c}^T \Phi_{\varphi}(t_{n+1} - t_n) \mathbf{x}(t_n) + \mathbf{c}^T \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Phi_{\varphi}(t_{n+1} - \tau) \mathbf{b} u(\tau) d\tau = \mathcal{E} \quad (5.6)$$

zur Bestimmung der nächsten Ereigniszeit zu lösen. Für das Lösen der Gleichung ist es erforderlich, nichtlineare Optimierungs- und numerische Integrationsmethoden zu verwenden. Da es sich bei komplexen Filterstrukturen schon als recht aufwendig erweist, das Integral über die Transitionsmatrix zu bestimmen, ist es zweckmäßig, auch im Sinne der Automatisierung, die Integration mit Hilfe numerischer Verfahren durchzuführen. Da  $\mathbf{u}_p(t)$  idealisiert als Konstante angenommen werden kann, wird das Lösen des Integrals etwas vereinfacht. Beinhaltet das CP-PLL-System eine Ladungspumpe mit Stromquellen, so entspricht  $\mathbf{u}_p(t)$  gerade dem *Charge-Pump*-Strom  $i_p(t)$ . Wird der VCO als nichtlinear angesetzt, so ist die Modellierung direkt über die Phasengleichung sinnvoller. Es ergibt sich das Differentialgleichungssystem des Schleifenfilters zu

$$\Sigma_{\text{LF}} : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_{\text{LF}} \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}_{\text{LF}} i_p(t) \\ u_{\text{ctl}}(t) &= \mathbf{c}_{\text{LF}}^T \mathbf{x}(t) + d_{\text{LF}} i_p(t) \end{cases}, \quad (5.7)$$

mit der Lösung

$$u_{\text{ctl}}(t) = \mathbf{c}_{\text{LF}}^T \Phi_{\text{LF}}(t - t_0) \mathbf{x}_0 + d_{\text{LF}} i_p(t) + \mathbf{c}_{\text{LF}}^T \int_{t_0}^t \Phi_{\text{LF}}(t - \tau) \mathbf{b}_{\text{LF}} i_p(\tau) d\tau, \quad (5.8)$$

wobei  $\Phi_{\text{LF}}(\cdot)$  die Transitionsmatrix des Differenzialgleichungssystems des Schleifenfilters ist. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass sich das modifizierte Knotenpotenzialverfahren als Möglichkeit ergibt, das Differenzialgleichungssystem nach Gleichung (5.7) aufzustellen, um einen höheren Grad der Automatisierung zu erreichen [93]. Wie zuvor ist dann  $\varphi_{\text{vco}}(t_{n+1}) = \mathcal{E}$  zu lösen. Insbesondere wenn die VCO-Charakteristik approximiert

wurde, bietet sich das Sekanten-Verfahren zur Bestimmung des nächsten Zeitpunktes an, da hier keine Ableitung berechnet werden muss. Es gilt:

$$t_{n+1} = t_n - \frac{t_n - t_{n-1}}{\varphi_{\text{var}}(t_n) - \varphi_{\text{var}}(t_{n-1})} \cdot (\varphi_{\text{var}}(t_n) - 2\pi) \quad (5.9)$$

Es lassen sich auch andere Abstiegsverfahren verwenden, die zum Teil eine bessere Konvergenz aufweisen. Bei den verschiedenen NEWTON-Verfahren ist die Berechnung der Ableitung erforderlich. Dieser Rechenschritt kann durch das Sekanten-Verfahren eingespart werden. Dabei hat sich gezeigt, dass, obgleich das NEWTON-Verfahren eine bessere Konvergenz aufweist, sich aber kein Geschwindigkeitsgewinn aufgrund der Berechnung der Ableitung ergibt. Für die Auswertung des Integrals können im Grunde beliebige numerische Integrationsverfahren verwendet werden. In dieser Arbeit wurde die Trapezregel

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left[ \frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{M-1} f(a + kh) \right] \quad (5.10)$$

implementiert, wobei  $n$  die Anzahl der Stützstellen ist,  $h = (b-a)/M$ ,  $a = t_k$  und  $b = t_{k+1}^{\text{var}}$ . Durch das Lösen der Gleichung (5.6) wird der Zeitpunkt  $t_{k+1}^{\text{var}}$  berechnet, bei dem ein Ereignis am Eingang des Phasendetektors erfolgt. Da für das Eingangssignal der Zeitpunkt  $t_{k+1}^{\text{ref}}$  in Datenform oder anhand einer einfachen bijektiven Gleichung bestimmt wird, ist es noch erforderlich, den kleineren Wert der Zeitpunkte  $t_{k+1}^{\text{var}}$  und  $t_{k+1}^{\text{ref}}$  zu bestimmen:

$$t_{k+1} = \min \{ t_{k+1}^{\text{ref}}, t_{k+1}^{\text{var}} \} \quad (5.11)$$

Dadurch kann der Phasendetektor entsprechend seiner Logik das Kontrollsignal für die Ladungspumpe generieren bzw. seinen internen Zustand ändern und mittels der Phasengleichungen des VCO und des Eingangssignals (bzw. der Daten) kann die Lösung des Differenzialgleichungssystem ausgewertet werden. An dieser Stelle lässt sich erkennen, dass der Phasenregelkreis mit digitalen Phasendetektoren ein System ist, in dem die Information der Regelung oder im Fall eines modulierten Eingangssignals in dem Pulsweitenverhältnis von  $u_p(t)$  bzw.  $i_p(t)$  kodiert ist. Anders ausgedrückt, sobald ein Ereignis erfolgt ist, ist der Regelkreis als offen anzusehen und letzten Endes wird der Regelkreis nur zu den Ereigniszeitpunkten wieder geschlossen.

### 5.2. Modellierung der Nichtlinearitäten

Ein Phasenregelkreis weist verschiedenste Nichtlinearitäten auf, wobei das Verhalten des Phasendetektors, die Charakteristik der *Charge-Pump* und die des VCO zu nennen sind. In Bezug auf den Phasendetektor wird hier der Phasen- und Frequenz-Detektor untersucht und eine inhärente Nichtlinearität, die *Dead-Zone*, mittels Zeitverzögerungen modelliert. Dabei wird sich zeigen, dass auch *Current-* und *Timing-Mismatches* der *Charge-Pump* durch dieses Modell der *Dead-Zone* in modifizierter Form berücksichtigt werden können. Neben *Current-* und *Timing-Mismatches* werden auch der Leckstrom und die endlichen

Flankensteilheiten des Stromes betrachtet. Die VCO-Charakteristik wird mit Hilfe einer statischen Kennlinie modelliert. Im Grunde stellt das Schalten des Teilers bei Fraktional- $N$  PLL-Systemen oder auch bei *Alias-Locked Loops* ebenfalls eine Nichtidealität (zeitlich variierende Parameter) dar und es ergibt sich dadurch ein lineares zeitvariantes Differenzialgleichungssystem. Diese Problemstellung wird jedoch separat im nachfolgenden Kapitel behandelt.

### 5.2.1. Phasen- und Frequenz-Detektor

Eine Flipflop-Schaltung sowie der zugehörige endliche Automat sind in Abbildung 3.2(b) und 3.2(a) dargestellt. Dabei werden die Flipflops durch die Signale  $u_{\text{ref}}(t)$  und  $u_{\text{var}}(t)$  jeweils bei einer fallenden (bzw. steigenden) Flanke zurückgesetzt. Theoretisch verläuft der Wechsel von einem Zustand in den nächsten zu einem Zeitpunkt. Praktisch ist dies jedoch nicht möglich, da die logischen Gatter immer eine gewisse Laufzeit aufweisen. Wenn also die Zeit von einem *Reset* zum nächsten in dem Bereich der Laufzeit liegt, so kann der PFD keine Phasendifferenz zwischen den Signalen  $u_{\text{ref}}(t)$  und  $u_{\text{var}}(t)$  bestimmen. Dabei bezeichne  $u_{\text{var}}(t)$  entweder das VCO-Ausgangssignal  $u_{\text{vco}}(t)$  (z. B. bei Synchronisationsanwendungen und bei Nachlauffilterung) oder das Teiler Ausgangssignal  $u_{\text{div}}(t)$  (Frequenzsynthese) des Phasenregelkreises. Neben der Problematik der Laufzeit weisen reale Signale eine endliche Steilheit auf, wodurch unterschiedlich viel Strom in das Filter injiziert wird und somit die Regelgröße (Kontrollspannung  $u_{\text{ctl}}(t)$  des VCO) und die Schleifenverstärkung beeinflusst werden. Abbildung 5.2 zeigt den Vergleich zwischen einem realen und idealen Strompuls der *Charge-Pump* und veranschaulicht die Laufzeit der logischen Gatter. In [25] wurde darauf hingewiesen, dass sich das reine Verhalten der *Dead-Zone* durch die inhärenten Verzögerungen im PFD ergibt.

Von ABRAMOVITCH [29,30] wurde die nichtlineare Charakteristik in Form einer statischen Kennlinie in das linearisierte kontinuierliche Modell eingefügt, um mit Hilfe der LYAPUNOV-Theorie das System hinsichtlich der Stabilität zu charakterisieren. Dabei wird die Kennlinie mit Hilfe der Pulsweiten bestimmt und liefert somit ausschließlich ein gemittelttes Verhalten innerhalb eines bestimmten Bereiches des Phasenfehlers. Es wird sich noch herausstellen, dass sich das mittlere Verhalten von dem schaltenden gravierend unterscheidet, da das Abtastverhalten des PFD, wie es GARDNER [16] beschrieben hat, eine entscheidende Rolle hinsichtlich der Stabilität darstellt (siehe auch Kapitel 4.1). D. h., dass sich neben den makroskopischen Parametern (*Charge-Pump*-Strom  $i_p(t)$ , VCO-Verstärkungsbeiwert  $K_v$  und den Filterparametern) hinzukommend die Referenzfrequenz auf die Stabilität des Systems auswirkt. Bevor die endliche Steilheit des Strompulses der *Charge-Pump* untersucht und modelliert wird und somit insbesondere die in den Filter injizierte Ladung betrachtet wird, soll vorerst ein Modell zur Berücksichtigung der Laufzeiten der Gatter vorgestellt werden. Da es sich bei dem PFD um einen Zustandsautomaten mit sequenzieller Logik handelt, können die Verzögerungen der logischen Baugruppen als parasitäre oder virtuelle Zustände angenommen werden, um die Änderung am Eingang und die damit verbundene nicht-instantane Änderung am Ausgang zu modellieren (siehe Abbildung 5.3). Es lassen

sich insgesamt vier virtuelle Zustände des PFD angeben:  $\mathcal{S}_{v, \text{set}}^{\text{up}}$ ,  $\mathcal{S}_{v, \text{rst}}^{\text{up}}$ ,  $\mathcal{S}_{v, \text{set}}^{\text{dn}}$  und  $\mathcal{S}_{v, \text{rst}}^{\text{dn}}$ . Der virtuelle Zustand von  $\mathcal{S}_0$  nach  $\mathcal{S}_0$  oder  $\mathcal{S}_{+1}$  mit der Verzögerung  $\tau_{\text{set}}^{\text{up}}$  wird mit  $\mathcal{S}_{v, \text{set}}^{\text{up}}$  bezeichnet. Offensichtlich werden die virtuellen Zustände entweder durch deren Laufzeit oder durch ein erfolgtes Ereignis in einen nicht-virtuellen Logikzustand überführt. Hinsichtlich der Dead-Zone sind insbesondere die virtuellen Zustände mit den Verzögerungen  $\tau_{\text{set}}^{\text{up}}$  und  $\tau_{\text{set}}^{\text{dn}}$  von Wichtigkeit. Es ergeben sich für das Eingabealphabet  $\mathcal{I} = (u_{\text{ref}}^{\downarrow}, u_{\text{var}}^{\downarrow})$ , das Ausgabealphabet  $\mathcal{O} = (\mathbf{o}_{-1}, \mathbf{o}_0, \mathbf{o}_{+1})$  mit  $\mathbf{o}_{-1} = [u_L, u_H]$ ,  $\mathbf{o}_0 = [u_L, u_L]$  und  $\mathbf{o}_{+1} = [u_H, u_L]$ , die Zustandsmenge  $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_{-1}, \mathcal{S}_0, \mathcal{S}_{+1}, \mathcal{S}_{v, \text{set}}^{\text{up}}, \mathcal{S}_{v, \text{rst}}^{\text{up}}, \mathcal{S}_{v, \text{set}}^{\text{dn}}, \mathcal{S}_{v, \text{rst}}^{\text{dn}})$  mit dem Anfangszustand  $\mathcal{S}_i \in (\mathcal{S}_{-1}, \mathcal{S}_0, \mathcal{S}_{+1})$  und der Funktion  $\gamma : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{S}$  zur Berechnung des nächsten Zustandes mit

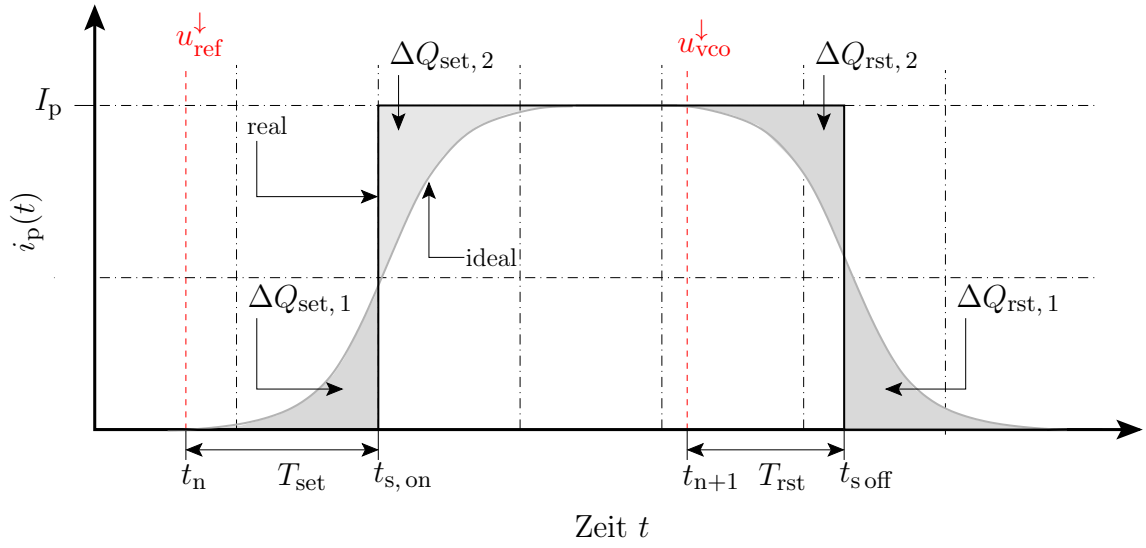
$$\gamma : \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{S}_{v, \text{set}}^{\text{up}} & , \text{ wenn } u_{\text{ref}}^{\downarrow}(t_{k+1}) \\ \mathcal{S}_{v, \text{set}}^{\text{up}} \rightarrow \mathcal{S}_0 & , \text{ wenn } u_{\text{var}}^{\downarrow}(t_{k+1}) \text{ mit } t_{k+1} \leq t_k + \tau_{\text{set}}^{\text{up}} \\ \mathcal{S}_{v, \text{set}}^{\text{up}} \rightarrow \mathcal{S}_{+1} & , \text{ wenn } t_{k+1} > t_k + \tau_{\text{set}}^{\text{up}} \\ \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{S}_{v, \text{set}}^{\text{dn}} & , \text{ wenn } u_{\text{var}}^{\downarrow}(t_{k+1}) \\ \mathcal{S}_{v, \text{set}}^{\text{dn}} \rightarrow \mathcal{S}_0 & , \text{ wenn } u_{\text{ref}}^{\downarrow}(t_{k+1}) \text{ mit } t_{k+1} \leq t_k + \tau_{\text{set}}^{\text{dn}} \\ \mathcal{S}_{v, \text{set}}^{\text{dn}} \rightarrow \mathcal{S}_{-1} & , \text{ wenn } t_{k+1} > t_k + \tau_{\text{set}}^{\text{dn}} \\ \mathcal{S}_{-1} \rightarrow \mathcal{S}_{-1} & , \text{ wenn } u_{\text{var}}^{\downarrow}(t_{k+1}) \\ \mathcal{S}_{-1} \rightarrow \mathcal{S}_{v, \text{rst}}^{\text{dn}} & , \text{ wenn } u_{\text{ref}}^{\downarrow}(t_{k+1}) \\ \mathcal{S}_{v, \text{rst}}^{\text{dn}} \rightarrow \mathcal{S}_0 & , \text{ wenn mit } t_{k+1} > t_k + \tau_{\text{rst}}^{\text{dn}} \\ \mathcal{S}_{v, \text{rst}}^{\text{dn}} \rightarrow \mathcal{S}_{-1} & , \text{ wenn } u_{\text{var}}^{\downarrow}(t_{k+1}) \text{ mit } t_{k+1} < t_k + \tau_{\text{rst}}^{\text{dn}} \\ \mathcal{S}_{+1} \rightarrow \mathcal{S}_{+1} & , \text{ wenn } u_{\text{ref}}^{\downarrow}(t_{k+1}) \\ \mathcal{S}_{+1} \rightarrow \mathcal{S}_{v, \text{rst}}^{\text{up}} & , \text{ wenn } u_{\text{var}}^{\downarrow}(t_{k+1}) \\ \mathcal{S}_{v, \text{rst}}^{\text{up}} \rightarrow \mathcal{S}_0 & , \text{ wenn } t_{k+1} > t_k + \tau_{\text{rst}}^{\text{up}} \\ \mathcal{S}_{v, \text{rst}}^{\text{up}} \rightarrow \mathcal{S}_{-1} & , \text{ wenn } u_{\text{ref}}^{\downarrow}(t_{k+1}) \text{ mit } t_{k+1} < t_k + \tau_{\text{rst}}^{\text{up}} \end{array} \right. . \quad (5.12)$$

Die Ausgabefunktion  $\eta : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{O}$  lässt sich wieder durch  $\eta : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{O}$  darstellen und kann somit durch

$$\eta = \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{o}_{-1} & , \text{ wenn } (\mathcal{S}_{-1} \rightarrow \mathcal{S}_{-1}) \vee (\mathcal{S}_{-1} \rightarrow \mathcal{S}_{v, \text{rst}}^{\text{dn}}) \vee \\ & (\mathcal{S}_{v, \text{rst}}^{\text{dn}} \rightarrow \mathcal{S}_{-1}) \vee (\mathcal{S}_{v, \text{set}}^{\text{dn}} \rightarrow \mathcal{S}_{-1}) \\ \mathbf{o}_0 & , \text{ wenn } (\mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{S}_{v, \text{set}}^{\text{dn}}) \vee (\mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{S}_{v, \text{set}}^{\text{up}}) \vee \\ & (\mathcal{S}_{v, \text{set}}^{\text{dn}} \rightarrow \mathcal{S}_0) \vee (\mathcal{S}_{v, \text{set}}^{\text{up}} \rightarrow \mathcal{S}_0) \\ \mathbf{o}_{+1} & , \text{ wenn } (\mathcal{S}_{+1} \rightarrow \mathcal{S}_{+1}) \vee (\mathcal{S}_{+1} \rightarrow \mathcal{S}_{v, \text{rst}}^{\text{up}}) \vee \\ & (\mathcal{S}_{v, \text{rst}}^{\text{up}} \rightarrow \mathcal{S}_{+1}) \vee (\mathcal{S}_{v, \text{set}}^{\text{up}} \rightarrow \mathcal{S}_{+1}) \end{array} \right. , \quad (5.13)$$

beschrieben werden. Hinzukommend wird dem endlichen Automaten eine Zeitmenge  $\mathcal{T} = (\tau_{\text{set}}^{\text{up}}, \tau_{\text{set}}^{\text{dn}}, \tau_{\text{rst}}^{\text{up}}, \tau_{\text{rst}}^{\text{dn}}, t_k, t_{k+1})$  beigelegt. Es ist ersichtlich, dass gerade die virtuellen Zu-





**Abbildung 5.2.:** Idealer und realer Strompuls der Charge-Pump sowie die Visualisierung der Gatter-Laufzeiten

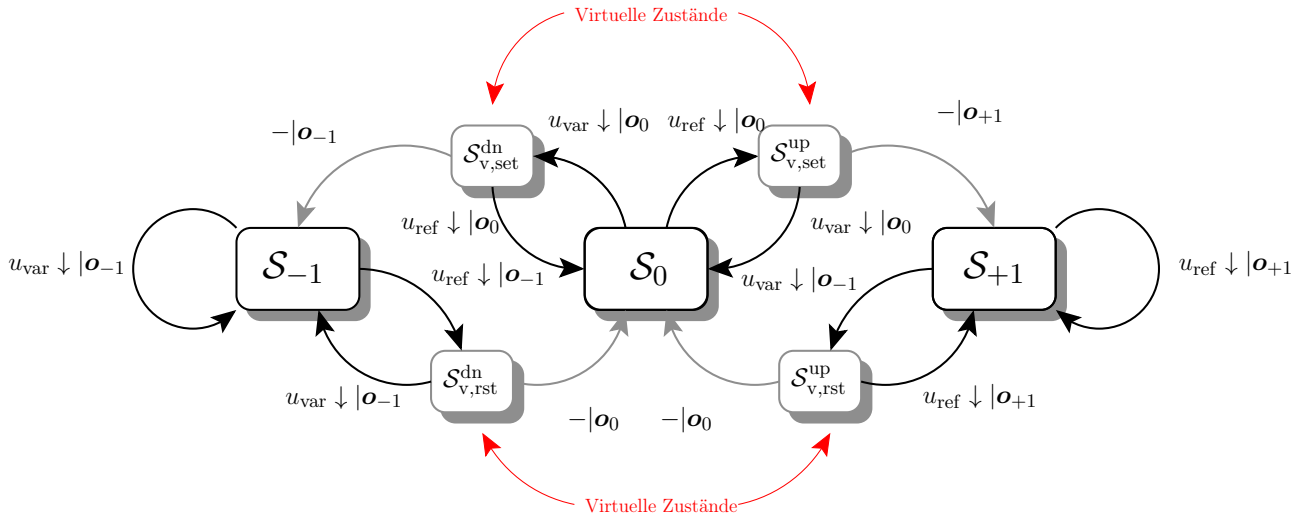
stände  $\mathcal{S}_{rst}^{up}$  und  $\mathcal{S}_{set}^{dn}$  dazu verwendet werden können, die Laufzeiten des Teilers mit zu berücksichtigen.

Unter Verwendung der Phasengleichung (5.1b) und unter der Annahme, dass der Strom der *Charge-Pump* konstant ist, ergibt sich die Lösung des Differenzialgleichungssystems  $\Sigma_{\mathcal{L}}$  (siehe Gleichung (5.3)) und der Phasengleichung des VCO inklusive Teilungsfaktor zu

$$\varphi_{var}(t_{n+1}) = \mathbf{c}^T \Phi(t_{n+1} - t_n) \mathbf{x}(t_n) + \begin{cases} \mathbf{c}^T \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Phi(t_{n+1} - \tau) \mathbf{b} d\tau I_p, & , \mathcal{S}_{+1} \\ 0 & , \mathcal{S}_0 \\ -\mathbf{c}^T \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Phi(t_{n+1} - \tau) \mathbf{b} d\tau I_p, & , \mathcal{S}_{-1} \end{cases} \quad (5.14)$$

Dabei wird, sobald der Zustand  $\mathcal{S}_{+1}$  erreicht wird, der Strom  $i_p(t) = +I_p$  eingeprägt. Wenn sich der PFD im Zustand Null ( $\mathcal{S}_0$ ) befindet, wird kein Strom eingeprägt ( $i_p(t) = 0$  A) und wenn der PFD in  $\mathcal{S}_{-1}$  ist, so ist  $i_p(t) = -I_p$ . Da jedoch von einem Zustand zum nächsten die Transition über einen virtuellen Zustand verläuft, muss  $\mathcal{E}$  geeignet gewählt werden. D. h. für jeden Zustandswechsel, wobei der *Reset* durch eine fallende Flanke erzielt wird, ergibt sich eine andere Konstante:

$$\mathcal{E}_{DZ} = 2\pi + \begin{cases} 2\pi\tau_{set}^{dn} f_{ref} & , \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{S}_{-1} \\ 2\pi\tau_{rst}^{up} f_{ref} & , \mathcal{S}_{+1} \rightarrow \mathcal{S}_0 \\ 2\pi\tau_{set}^{up} f_{ref} & , \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{S}_{+1} \\ 2\pi\tau_{rst}^{dn} f_{ref} & , \mathcal{S}_{-1} \rightarrow \mathcal{S}_0 \end{cases} \quad (5.15)$$



**Abbildung 5.3.:** Modifiziertes Modell eines (Tri-State) Phasen- und Frequenz-Detektors mit Dead-Zone

Wird die steigende Flanke als ereignisauslösendes Moment verwendet, so ändert sich der Wert  $2\pi$  in Gleichung (5.15) zu  $\pi$ . Nachdem die Lösungen der im Allgemeinen transzendenten Gleichungen  $\varphi_{\text{var}}(t_{n+1}) = \mathcal{E}_{\text{DZ}}$  und  $\varphi_{\text{ref}}(t_{n+1}) = \mathcal{E}_{\text{DZ}}$  berechnet wurden, ist es erforderlich, zu bestimmen, welcher Ereigniszeitpunkt als erstes erfolgt ist. Es ergibt sich

$$t_{n+1} = \min \{t_{n+1}^{\text{ref}}, t_{n+1}^{\text{vco}}\}. \quad (5.16)$$

Ist der Phasenreglkreis quasi ausgeglichen, so dass eine fallende (bzw. steigende) Flanke des Eingangs- oder des Ausgangssignal erfolgt und der Phasenfehler gerade so klein ist, dass dieser innerhalb der *Dead-Zone* liegt und dass sich der PFD im Zustand  $\mathcal{S}_0$  befindet, kann die nichtlineare Dynamik genutzt werden, um einen Geschwindigkeitsgewinn innerhalb des Simulationsmodells zu erzielen. Wenn der PFD sich im Zustand  $\mathcal{S}_0$  befindet, ergeben sich aufgrund der Tatsache, dass das Integral über die Transitionsmatrix nicht gelöst werden muss, relativ einfache Gleichungen bzgl. der zu berechnenden Ereigniszeitpunkte. Im Folgenden soll der einfachste Fall untersucht werden. Das Referenzsignal  $u_{\text{ref}}(t)$  habe die konstante Frequenz  $f_{\text{ref}}$ , die VCO-Charakteristik sei linear angenommen, d. h. mit einem konstanten Verstärkungsbeiwert  $K_v$  sowie einer Ruhefrequenz  $f_{0,\text{vco}}$  und als Filter sei das passive *RC*-Glieder angesetzt (siehe Abbildung 3.4).

Werden dann die Phasensignale  $\varphi_{\text{ref}}(t_{n+1})$  und  $\varphi_{\text{var}}(t_{n+1})$  dem Wert  $\mathcal{E}_{\text{DZ}}^{\text{opt}} = \mathcal{E}_{\text{DZ}} + 2\pi(M-1)$  gleichgesetzt, ergeben sich die Gleichungen

$$t_{n+1}^{\text{ref}} = t_n + \frac{M - \frac{\varphi_{\text{ref}}(t_n)}{2\pi}}{f_{\text{ref}}} = m_{\text{ref}} \cdot M + b_{\text{ref}}, \quad (5.17a)$$

$$t_{n+1}^{\text{ref,DZ}} = t_{n+1}^{\text{ref}} + \tau_{\text{DZ}} = m_{\text{ref}} \cdot M + b_{\text{ref,DZ}} \quad (5.17b)$$

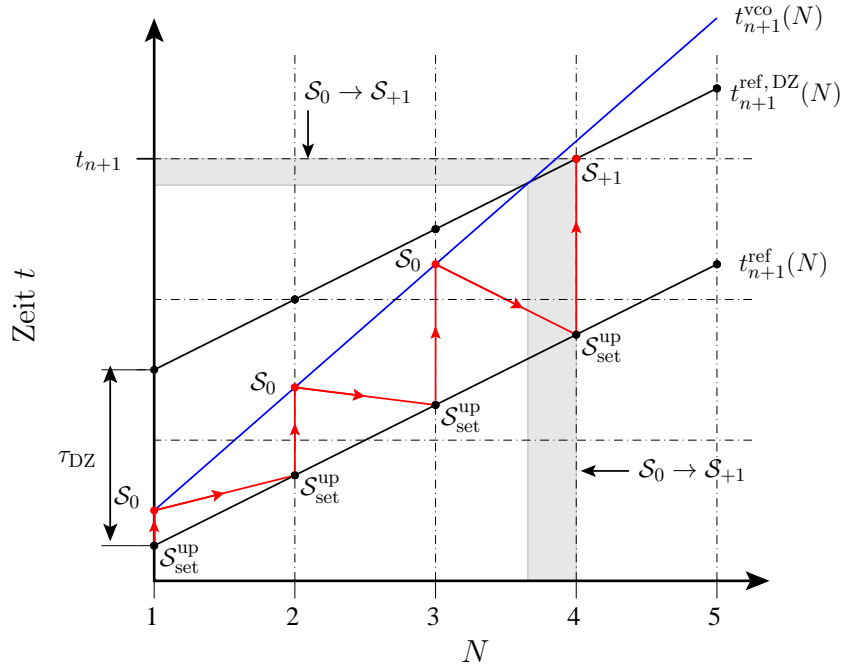


Abbildung 5.4.: Zur Optimierung bezüglich des Zustandswechsels von  $\mathcal{S}_0$  nach  $\mathcal{S}_{+1}$

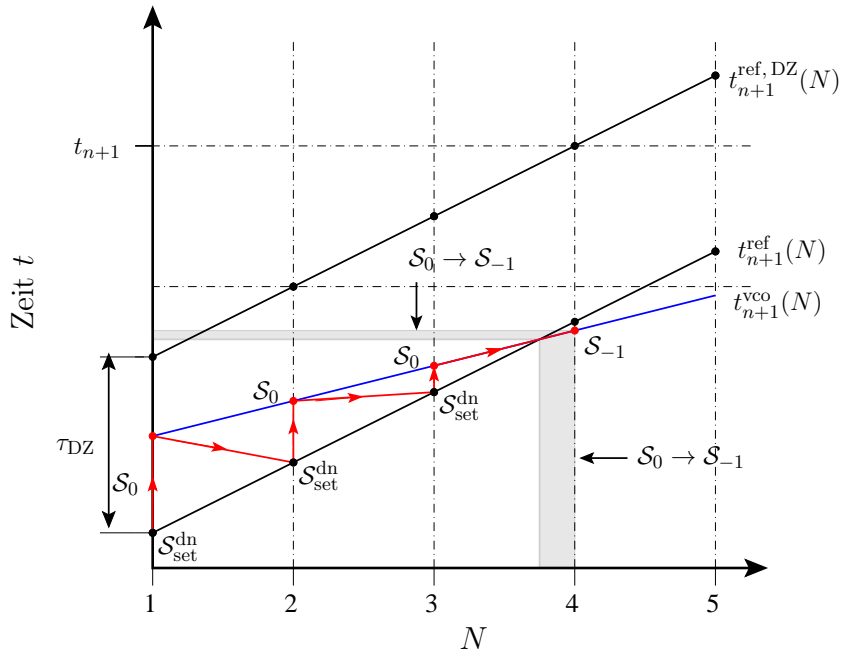
und

$$t_{n+1}^{\text{var}} = t_n + \frac{M - \frac{\varphi_{\text{var}}(t_n)}{2\pi}}{K_v u_{\text{ctl}}(t_n^+) + f_{0,\text{vco}}} = m_{\text{var}} \cdot M + b_{\text{var}}, \quad (5.18a)$$

$$t_{n+1}^{\text{var,DZ}} = t_n + t_{n+1}^{\text{var,DZ}} + \tau_{\text{DZ}} = m_{\text{var}} \cdot M + b_{\text{var,DZ}}, \quad (5.18b)$$

wobei  $\tau_{\text{DZ}} \in \mathcal{T} = (\tau_{\text{set}}^{\text{dn}}, \tau_{\text{rst}}^{\text{up}}, \tau_{\text{set}}^{\text{up}}, \tau_{\text{rst}}^{\text{dn}})$  ist und  $M \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Gilt  $t_{n+1}^{\text{ref}} < t_{n+1}^{\text{var}} < t_{n+1}^{\text{ref,DZ}}$  und  $m_{\text{var}} > m_{\text{ref}}$ , so wird der virtuelle Zustand mit der Verzögerung  $\tau_{\text{set}}^{\text{up}}$  erreicht und durch eine fallende Flanke des Signals  $u_{\text{var}}(t)$  zurückgesetzt. Dies tritt solange auf bis  $t_{n+1}^{\text{var}} > t_{n+1}^{\text{ref,DZ}}$  ist. Das ist gleichbedeutend mit der Tatsache, dass, obgleich Ereignisse erfolgt sind, keine Regelung stattgefunden hat. Dieser Sachverhalt wird in Abbildung 5.4 dargelegt. Unter Berücksichtigung aller Möglichkeiten ergeben sich fünf zu unterscheidende Fälle. Mit Abbildung 5.4 lassen sich zwei erklären: der Übergang von dem Zustand  $\mathcal{S}_0$  zu  $\mathcal{S}_{+1}$  und analog dazu die Transition von Zustand  $\mathcal{S}_0$  zu  $\mathcal{S}_{-1}$ . Abbildung 5.5 beschreibt die Möglichkeit, dass der virtuelle Zustand  $\mathcal{S}_{\text{v,set}}^{\text{dn}}$  vom Zustand  $\mathcal{S}_0$  zu  $\mathcal{S}_{\text{v,set}}^{\text{up}}$  über  $\mathcal{S}_0$  erreicht werden kann. Analog dazu existiert ein Transitionswechsel zum Zustand  $\mathcal{S}_{\text{set}}^{\text{up}}$ . Falls die Steigungen der Gerade (5.18a) und (5.17a) gleich sind ( $m_{\text{ref}} = m_{\text{var}}$ ), existieren keine Schnittpunkte, da dann der Regelkreis vollständig ausgeglichen wäre und somit der Zustand  $\mathcal{S}_0$  zu keinem zukünftigen Zeitpunkt mehr verlassen wird.

Es ergeben sich die folgenden Lösungen zur Berechnung der Schnittpunkte, wobei zu beachten ist, dass aufgrund der ereignisbasierten Regelung die Schnittpunkte zu dem nächsten



**Abbildung 5.5.:** Zur Optimierung bezüglich des Zustandswechsels von  $\mathcal{S}_0$  nach  $\mathcal{S}_{-1}$

ganzzahligen  $M$  gerundet werden müssen:

$$M_{\text{ref}}^{\text{var}} = \left[ \frac{\varphi_{\text{ref}}(t_n) (K_{\text{v}} u_{\text{ctl}}(t_n^+) + f_{0,\text{vco}}) - \varphi_{\text{var}}(t_n) f_{\text{ref}}}{2\pi (K_{\text{v}} u_{\text{ctl}}(t_n^+) + f_{0,\text{vco}} - f_{\text{ref}})} \right] \quad (5.19a)$$

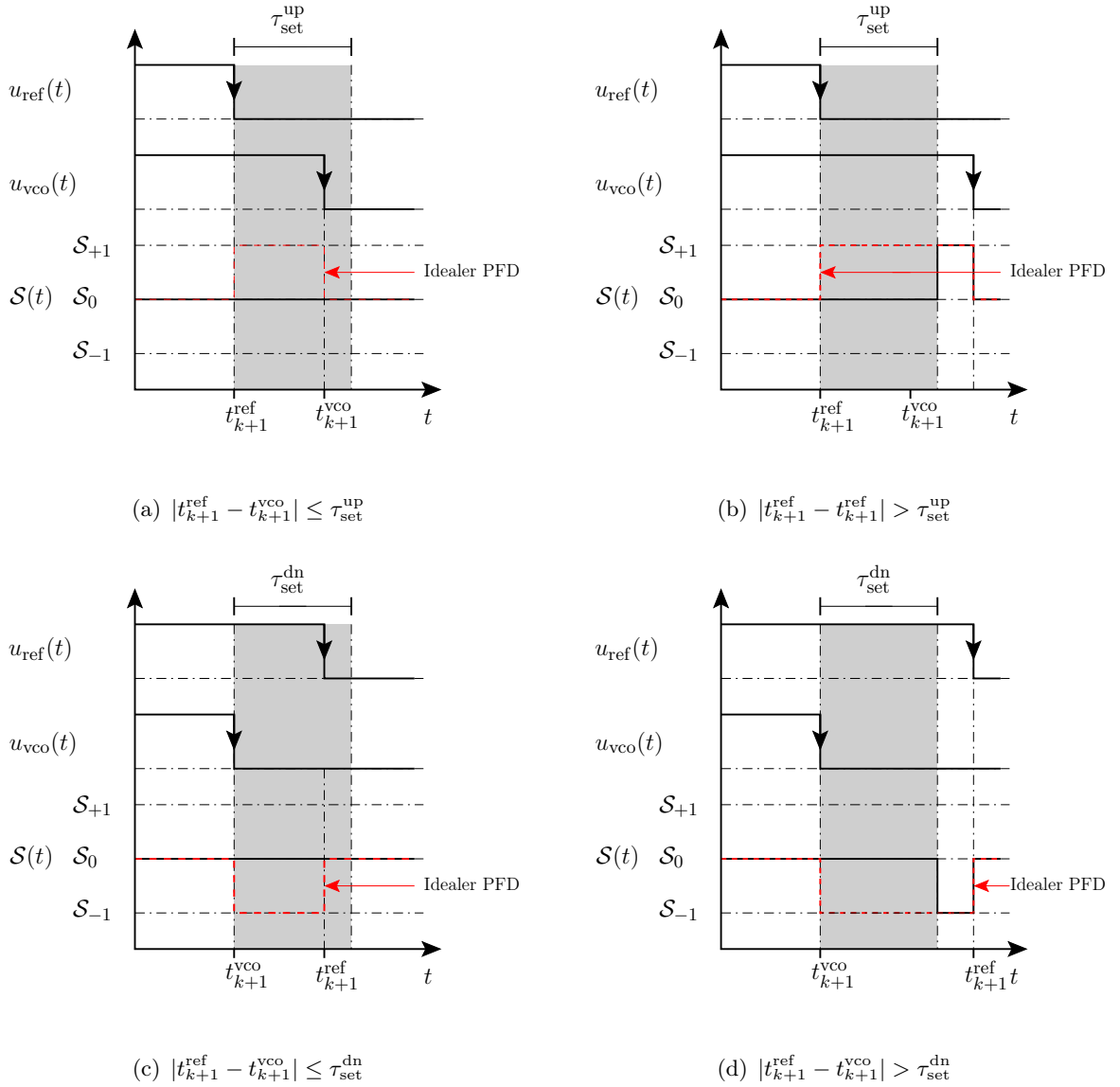
$$M_{\text{ref}}^{\text{var,DZ}} = \left[ \frac{(\varphi_{\text{ref}}(t_n) + 2\pi\tau_{\text{set}}^{\text{dn}}f_{\text{ref}}) (K_{\text{v}}u_{\text{ctl}}(t_n^+) + f_{0,\text{vco}}) - \varphi_{\text{var}}(t_n)f_{\text{ref}}}{2\pi (K_{\text{v}}u_{\text{ctl}}(t_n^+) + f_{0,\text{vco}} - f_{\text{ref}})} \right] \quad (5.19b)$$

$$M_{\text{ref,DZ}}^{\text{var}} = \left[ \frac{(\varphi_{\text{ref}}(t_n) + 2\pi\tau_{\text{set}}^{\text{up}}f_{\text{ref}}) (K_{\text{v}}u_{\text{ctl}}(t_n^+) + f_{0,\text{vco}}) - \varphi_{\text{var}}(t_n)f_{\text{ref}}}{2\pi (K_{\text{v}}u_{\text{ctl}}(t_n^+) + f_{0,\text{vco}} - f_{\text{ref}})} \right] \quad (5.19\text{c})$$

Demnach werden die Ereignisse, die keine Regelung zur Folge haben, also keinen Zustandswechsel im endlichen Automaten bewirken, über das Auswerten der Geradengleichungen (5.17a), (5.17b), (5.18a) und (5.18b) übersprungen und ausschließlich die Ereignisse bestimmt, wodurch sich der Zustand des PFD und somit des Systems verändert.

Wie in Abbildung 5.2 ersichtlich, ergeben sich neben den Laufzeiten der logischen Gatter auch endliche Steilheiten der Strompulse der *Charge-Pump*. Obgleich dies ein Teil der *Dead-Zone*-Problematik ist, wird dies in einem nachfolgenden Kapitel behandelt, da die *Charge-Pump* noch zusätzliche Nichtidealitäten aufweist, die im Hinblick auf die Charakterisierung sogenannter *Reference Spurs* eine entscheidende Rolle spielen.

Eine andere und etwas pragmatischere Modellierung lässt sich unter dem Sachverhalt angeben, dass der ideale PFD, wie er in Kapitel 3.1.1 vorgestellt wurde, weiter verwendet werden soll und dass die *Dead-Zone* ausschließlich für kleine Phasenfehler eine Auswirkung



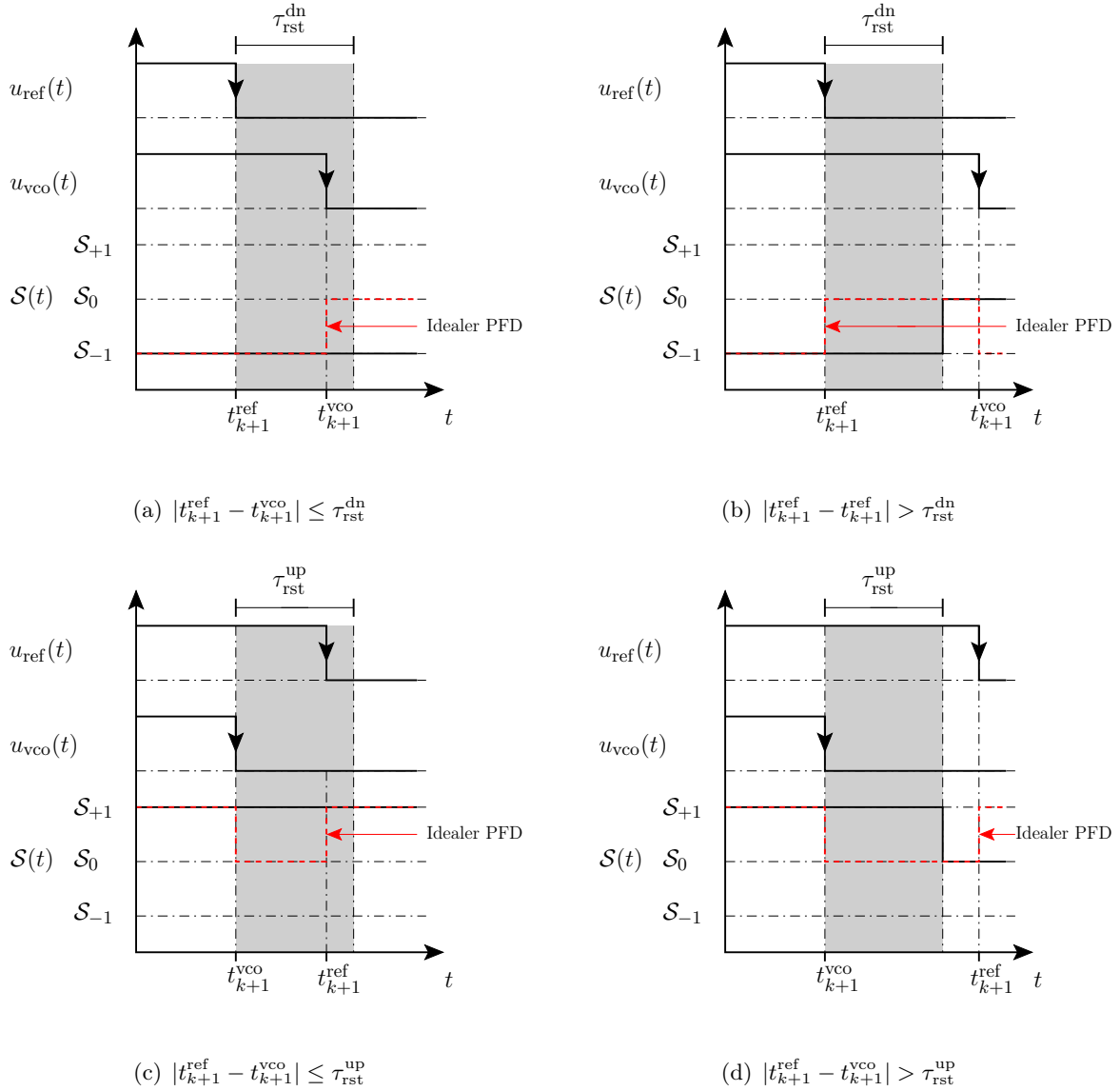
**Abbildung 5.6.:** Auswirkung der Verzögerungen  $\tau_{\text{set}}^{\text{up}}$  und  $\tau_{\text{set}}^{\text{dn}}$  auf den Zustand des PFD

auf die Dynamik hat, wobei im vorher erarbeiteten Modell die Verzögerungen bei jeder Berechnung berücksichtigt werden. D.h. der Algorithmus zur Simulation wird so, wie er im vorigen Kapitel erläutert wurde, ausschließlich bei der Berechnung des nächsten Ereignisses abgewandelt. Demnach ist es erforderlich, die Gleichung (5.11) durch eine andere Formulierung zu ersetzen, die im Folgenden erläutert wird. Sei  $\mathcal{T}_v = (\tau_{\text{set}}^{\text{up}}, \tau_{\text{set}}^{\text{dn}}, \tau_{\text{rst}}^{\text{up}}, \tau_{\text{rst}}^{\text{dn}})$ , so ergibt sich für die Zeitbestimmung

$$t_{k+1} = \begin{cases} \min \{t_{k+1}^{\text{ref}}, t_{k+1}^{\text{vco}}\} & , \quad \forall |t_{k+1}^{\text{ref}} - t_{k+1}^{\text{vco}}| > \tau \in \mathcal{T}_v \\ \max \{t_{k+1}^{\text{ref}}, t_{k+1}^{\text{vco}}\} & , \quad \forall |t_{k+1}^{\text{ref}} - t_{k+1}^{\text{vco}}| \leq \tau \in \mathcal{T}_v \end{cases} . \quad (5.20)$$

Neben dieser Änderung ist es erforderlich, dass der PFD, wenn  $|t_{k+1}^{\text{ref}} - t_{k+1}^{\text{vco}}| > \tau \in \mathcal{T}_v$  gilt, den Zustand nicht ändert, d.h.  $\mathcal{S}(t_k) = \mathcal{S}(t_{k+1})$ . Soll sich das Modell so verhalten

## 5. Modellierung und Simulation digitaler Phasenregelkreise



**Abbildung 5.7.:** Auswirkung der Verzögerungen  $\tau_{\text{rst}}^{\text{up}}$  und  $\tau_{\text{rst}}^{\text{dn}}$  auf den Zustand des PFD

wie das vorgestellte mit dem erweiterten endlichen Automaten (siehe Abbildung 5.2), so müssen die Zeitpunkte und Phasen angepasst werden. Dies kann auch wieder innerhalb der Zeitberechnung erfolgen. Es ergibt sich

$$t_{k+1} = \begin{cases} \min \{t_{k+1}^{\text{ref}}, t_{k+1}^{\text{vco}}\} + \tau & , \quad \forall |t_{k+1}^{\text{ref}} - t_{k+1}^{\text{vco}}| > \tau \in \mathcal{T}_v \\ \max \{t_{k+1}^{\text{ref}}, t_{k+1}^{\text{vco}}\} & , \quad \forall |t_{k+1}^{\text{ref}} - t_{k+1}^{\text{vco}}| \leq \tau \in \mathcal{T}_v \end{cases} . \quad (5.21)$$

Offensichtlich ist es nun von Nöten, die Phasengleichungen mit dem Modulo-Operator zu versehen, da Phasenwerte größer  $2\pi$  auftreten werden. Damit ergibt sich für die Phasen des VCO- und des Referenzsignals  $\tilde{\varphi}(t_{n+1}) = \text{mod} \{\varphi(t_{n+1}), 2\pi\}$ . Diese Operation ist sowohl nach der Zeitberechnung von Gleichung (5.20) als auch von (5.21) erforderlich.

### 5.2.2. Charge-Pump-Charakteristik

Im Falle der Frequenzsynthese oder spezieller CDR-Verfahren wird meist der PFD verwendet und es treten die folgenden Nichtidealitäten auf, wobei auch bei anderen Phasendetektoren (z. B. HOGGE- oder ALEXANDER-PD) innerhalb verschiedener CDR-Verfahren ähnliche Probleme auftreten:

**Current-Mismatch** ergibt sich dadurch, dass der Strom des UP-Zweiges  $I_{\text{up}}$  betragsmäßig ungleich dem des DN-Zweiges  $I_{\text{dn}}$  ist, wodurch sich unterschiedliche Schleifenverstärkungen für die beiden Zweige einstellen.

**Timing-Mismatch** ist eine Folge der Laufzeiten des PFD sowie des Unterschiedes der Schaltgeschwindigkeiten im UP- und DN-Zweig. Dies kann bewirken, dass die UP- und DN- Signale des PFD sich nicht aufheben können.

**Leckstrom** liefert im Zustand  $\mathcal{S}_0$ , bei dem im Idealfall keine Ladung in das Filter eingepreßt werden soll, einen Strom, der direkt auf die Regelgröße wirkt.

**Charge-Pump-Balance** beschreibt, wie konstant sich der *Charge-Pump*-Strom verhält, während die *Charge-Pump*-Spannung variiert. Dementsprechend ergibt sich eine Abhängigkeit des Stromes bezüglich der Ausgangsspannung oder der in den Filter injizierten Ladung.

**Endliche Flankensteilheit:** Zwar ließe sich diese Problematik im Mittel durch das vorgestellte Konzept im vorigen Abschnitt lösen, jedoch ergeben sich im ausgeglichenen Zustand zusätzliche Ladungsbeiträge, die auf die Regelgröße wirken, wodurch sich die PFD/CP-Charakteristik insbesondere für kleine Phasenfehler anders verhält als die *Dead-Zone* alleine. Damit ergibt sich nahe des ausgeglichenen Zustandes eine geringere Schleifenverstärkung.

Im Allgemeinen liegt das Bestreben darin, eine vollständig ausgeglichene *Charge-Pump* zu entwerfen. Jedoch stellen die beschriebenen Nichtidealitäten ausschließlich ein zu minimierendes Problem dar. Zudem treten meist alle Effekte simultan auf, wobei sie sich je nach Architektur unterschiedlich stark ausbilden. Im Folgenden sollen die unterschiedlichen Effekte modelliert und in die ereignisgesteuerte Simulationstechnik integriert werden.

#### *Current-Mismatch*

Der Stromversatz zwischen dem UP- und dem DN-Zweig wurde in Kapitel 3.1.3 erläutert. Demnach ist der Strom, der vom UP-Zweig in das Filter eingepreßt wird, ungleich dem des DN-Zweiges. Zusätzlich ergibt sich durch die Laufzeit  $\tau_{\text{rst}}$  der Gatter eine Verzögerung, die bei einem Zustandswechsel von  $\mathcal{S}_{+1}$  nach  $\mathcal{S}_0$  sowie von  $\mathcal{S}_{-1}$  nach  $\mathcal{S}_0$  erfolgt. Dazu wird der Zustandsautomat des idealen PFD (siehe Kapitel 3.1.1) so abgeändert, dass zum einen die Ladungspumpe mit in das Modell integriert wird und zum anderen kann dadurch sehr einfach der endliche Automat des PFD inklusive Ladungspumpe mit der Nichtidealität - *Current-Mismatch* - erweitert werden. Dabei ergibt sich die Eingabemenge  $\mathcal{I} = (u_{\text{ref}}^{\downarrow}, u_{\text{var}}^{\downarrow})$ ,

die Ausgabemenge  $\mathcal{O} = (-I_p, 0 \text{ A}, +I_p)$ , die Zustandsmenge  $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_{-1}, \mathcal{S}_0, \mathcal{S}_{+1})$  mit dem Anfangszustand  $\mathcal{S}_i \in \mathcal{S}$ , die Zustandsübergangsfunktion

$$\gamma : \begin{cases} \mathcal{S}_{-1} \rightarrow \mathcal{S}_{-1} & \text{wenn } u_{\text{var}}^\downarrow \\ \mathcal{S}_{-1} \rightarrow \mathcal{S}_0 & \text{wenn } u_{\text{ref}}^\downarrow \\ \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{S}_{-1} & \text{wenn } u_{\text{var}}^\downarrow \\ \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{S}_{+1} & \text{wenn } u_{\text{ref}}^\downarrow \\ \mathcal{S}_{+1} \rightarrow \mathcal{S}_0 & \text{wenn } u_{\text{var}}^\downarrow \\ \mathcal{S}_{+1} \rightarrow \mathcal{S}_{+1} & \text{wenn } u_{\text{ref}}^\downarrow \end{cases}, \quad (5.22)$$

und die Ausgabefunktion

$$\eta_{\text{id}} = \begin{cases} -I_p & \text{wenn } \mathcal{S}_{-1} \rightarrow \mathcal{S}_{-1} \vee \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{S}_{-1} \\ 0 \text{ A} & \text{wenn } \mathcal{S}_{-1} \rightarrow \mathcal{S}_0 \vee \mathcal{S}_{+1} \rightarrow \mathcal{S}_0 \\ +I_p & \text{wenn } \mathcal{S}_{+1} \rightarrow \mathcal{S}_{+1} \vee \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{S}_{+1} \end{cases}. \quad (5.23)$$

Durch den eingeführten Zustandsautomaten mit Ladungspumpe wird der *Current-Mismatch* durch eine Änderung der Ausgangsfunktion  $\eta_{\text{id}}$  adaptiert. Damit ist die Ausgabe-funktion für den Zustandsautomaten mit Ladungspumpe und *Current-Mismatch* gegeben durch

$$\eta_{\text{cm}} = \begin{cases} -I_p & \text{wenn } \mathcal{S}_{-1} \rightarrow \mathcal{S}_{-1} \vee \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{S}_{-1} \\ \Delta I_- (\epsilon(t - \tau_{\text{rst}}) - 1) & \text{wenn } \mathcal{S}_{-1} \rightarrow \mathcal{S}_0 \\ \Delta I_+ (\epsilon(t - \tau_{\text{rst}}) - 1) & \text{wenn } \mathcal{S}_{+1} \rightarrow \mathcal{S}_0 \\ +I_p & \text{wenn } \mathcal{S}_{+1} \rightarrow \mathcal{S}_{+1} \vee \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{S}_{+1} \end{cases}, \quad (5.24)$$

wobei  $\Delta I_-$  und  $\Delta I_+$  gerade den *Current-Mismatch* zwischen dem UP- und DN-Zweig darstellen. Des Weiteren ist  $\mathcal{T} = (t_k, t_{k+1}, \tau_{\text{rst}})$ . In der Regel gilt  $\Delta I_- = \Delta I_+$  und  $\epsilon(\cdot)$  wird als Einheitssprung bezeichnet. Diese Änderung des Stromes bei den Übergängen in den Zustand  $\mathcal{S}_0$  haben zur Folge, dass die Lösung für das Differenzialgleichungssystem des Schleifenfilters oder des gesamten analogen Teils des Systems mit einer zusätzlichen Integration verknüpft ist, da sich während des Zustandes  $\mathcal{S}_0$  ein Strom  $i_p(t)$  einstellt, wobei hinsichtlich Gleichung (5.25) der Strom  $i_p(t)$  stückweise konstant ist.

### Leckstrom

Der durch die Ladungspumpe oder den Varaktor injizierte Leckstrom lässt sich ebenfalls durch eine einfache Änderung des endlichen Automaten modellieren. Dabei fließt dann im



Zustand  $\mathcal{S}_0$  gerade der Leckstrom  $I_L$  und es ergibt sich die Ausgabefunktion

$$\eta_{lc} = \begin{cases} -I_p + I_L & \text{wenn } \mathcal{S}_{-1} \rightarrow \mathcal{S}_{-1} \vee \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{S}_{-1} \\ I_L & \text{wenn } \mathcal{S}_{-1} \rightarrow \mathcal{S}_0 \vee \mathcal{S}_{+1} \rightarrow \mathcal{S}_0 \\ +I_p + I_L & \text{wenn } \mathcal{S}_{+1} \rightarrow \mathcal{S}_{+1} \vee \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{S}_{+1} \end{cases} \quad (5.25)$$

Ähnlich wie bei der vorigen Betrachtung des *Current-Mismatches* wird ebenfalls eine zusätzliche Integration nötig, wobei hier der Strom für jeden Zustand konstant jedoch ungleich Null ist.

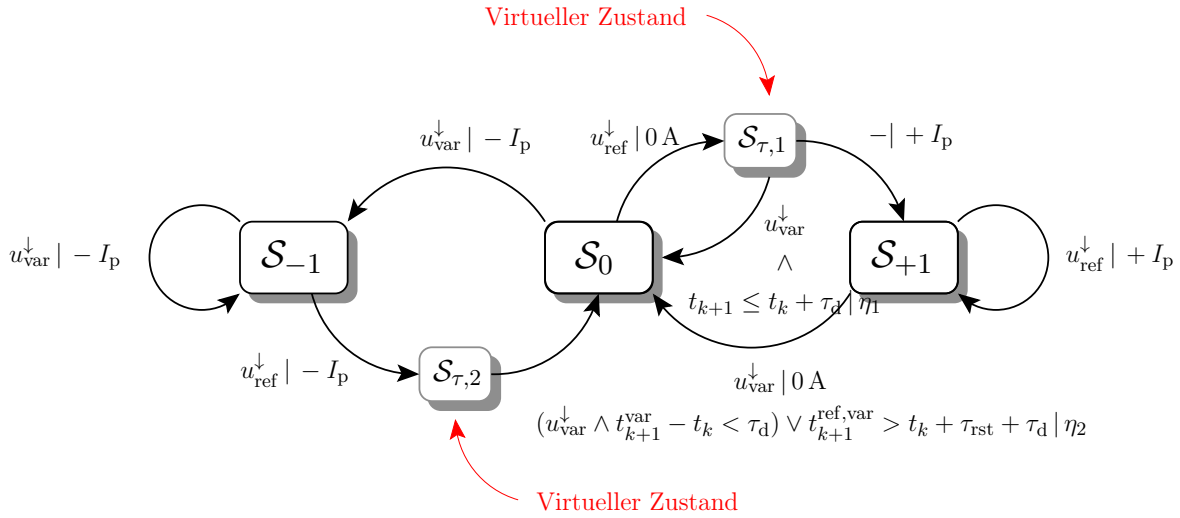
### Timing-Mismatch

Der zeitliche Versatz innerhalb der Ladungspumpe wird erzeugt durch eine Inverterstufe, somit durch eine Verzögerung im UP-Zweig und durch die Gatterlaufzeiten. Dies hat zur Folge, dass sich die Ströme nicht aufheben. Es entsteht eine zeitliche Diskrepanz zwischen dem UP-Strom und dem DN-Strom. Dies lässt sich durch eine Modifikation des Zustandsautomaten, der zur Modellierung der *Dead-Zone* angegeben wurde, durchführen. Dabei ergibt sich die Eingabemenge  $\mathcal{I} = (u_{\text{ref}}^\downarrow, u_{\text{var}}^\downarrow)$ , die Ausgabemenge  $\mathcal{O} = (-I_p, 0 \text{ A}, +I_p)$ , die Zustandsmenge  $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_{-1}, \mathcal{S}_0, \mathcal{S}_{+1}, \mathcal{S}_{\tau,1}, \mathcal{S}_{\tau,2})$  mit dem Anfangszustand  $\mathcal{S}_i \in \mathcal{S}$ , der Zeitmenge  $\mathcal{T} = (\tau_{\text{rst}}, \tau_d, t_k, t_{k+1}^{\text{ref}}, t_{k+1}^{\text{var}})$ , der Zustandsübergangsfunktion

$$\gamma_{\text{tm}} : \begin{cases} \mathcal{S}_{-1} \rightarrow \mathcal{S}_{-1} & \text{wenn } u_{\text{var}}^\downarrow \\ \mathcal{S}_{-1} \rightarrow \mathcal{S}_{\tau,2} & \text{wenn } u_{\text{ref}}^\downarrow \\ \mathcal{S}_{\tau,2} \rightarrow \mathcal{S}_0 & \text{wenn } (u_{\text{var}}^\downarrow \wedge t_{k+1}^{\text{var}} - t_k < \tau_d) \vee t_{k+1}^{\text{ref,var}} > t_k + \tau_{\text{rst}} + \tau_d \\ \mathcal{S}_{\tau,1} \rightarrow \mathcal{S}_{+1} & \text{wenn } \tau_{k+1} > t_k + t_d^{\text{var}} \\ \mathcal{S}_{\tau,1} \rightarrow \mathcal{S}_0 & \text{wenn } u_{\text{var}}^\downarrow \wedge t_{k+1} \leq t_k + \tau_d \\ \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{S}_{\tau,1} & \text{wenn } u_{\text{ref}}^\downarrow \\ \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{S}_{-1} & \text{wenn } u_{\text{var}}^\downarrow \\ \mathcal{S}_{+1} \rightarrow \mathcal{S}_0 & \text{wenn } u_{\text{var}}^\downarrow \\ \mathcal{S}_{+1} \rightarrow \mathcal{S}_{+1} & \text{wenn } u_{\text{ref}}^\downarrow \end{cases} \quad (5.26)$$

und der Ausgabefunktion

$$\eta_{\text{tm}} = \begin{cases} -I_p & \text{wenn } (\mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{S}_{-1}) \vee (\mathcal{S}_{-1} \rightarrow \mathcal{S}_{-1}) \vee (\mathcal{S}_{-1} \rightarrow \mathcal{S}_{\tau,2}) \\ 0 \text{ A} & \text{wenn } (\mathcal{S}_{+1} \rightarrow \mathcal{S}_0) \vee (\mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{S}_{\tau,1}) \\ \eta_1 & \text{wenn } \mathcal{S}_{\tau,1} \rightarrow \mathcal{S}_0 \\ \eta_2 & \text{wenn } \mathcal{S}_{\tau,2} \rightarrow \mathcal{S}_0 \\ +I_p & \text{wenn } (\mathcal{S}_{+1} \rightarrow \mathcal{S}_{+1}) \vee (\mathcal{S}_{\tau,1} \rightarrow \mathcal{S}_{+1}) \end{cases}, \quad (5.27)$$



**Abbildung 5.8.:** Modifizierter endlicher Automat des PFD mit modelliertem Timing-Mismatch

wobei die Funktionen  $\eta_1$  und  $\eta_2$  im Folgenden definiert werden. Die Ausgabe  $\eta_1$  erfolgt dann, wenn der Zustand von  $S_{\tau,2}$  nach  $S_0$  wechselt und es gilt

$$\eta_1 = i_p(t) = I_p (-\epsilon(t - [\tau_d - \tau_{p1}]) + \epsilon(t - \tau_d)) + I_p (\epsilon(t - [\tau_d + \tau_{\text{rst}} - \tau_{p1}]) \epsilon(t - [\tau_d + \tau_{\text{rst}}])), \quad (5.28)$$

wobei  $\tau_d$  die Laufzeit des Inverters für das Signal  $u_{\text{up}}$  ist,  $\tau_{\text{rst}}$  bezeichnet die Laufzeit, die benötigt wird, um die Flipflops des PFD zurückzusetzen, mit  $\tau_{p1} = \tau_d - (t_{k+1}^{\text{var}} - t_{k+1}^{\text{ref}})$  und  $\epsilon(\cdot)$  ist der Einheitssprung. Für die Ausgabe  $\eta_2$  ergibt sich

$$\eta_2 = i_p(t) = I_p (\epsilon(t - [\tau_d - \tau_d]) - \epsilon(t - \tau_d)). \quad (5.29)$$

Der entsprechende endliche Automat des PFD mit *Timing-Mismatch* ist in Abbildung 5.8 dargestellt.

### Endliche Flankensteilheit

Wie bereits erwähnt, ist in einem digitalen Phasenregelkreis auch die Flankensteilheit eine Nichtidealität. Da der *Charge-Pump*-Strom  $i_p$  ein pulswidenmoduliertes Signal ist und somit die Ladung im Schleifenfilter direkt beeinflusst, ergibt sich für ein Signal mit einer endlichen Flankensteilheit eine geringere Schleifenverstärkung des Regelkreises. Diese geringere Schleifenverstärkung bewirkt, dass insbesondere für kleine Phasenfehler weniger Strom in das Filter eingeprägt wird. Die endliche Flankensteilheit lässt sich durch das Betrachten der Gleichung (5.8) des ereignisgesteuerten Modells einfach hinzufügen. Diesbezüglich kann dem Strom  $i_p(t)$  eine Signalform zugewiesen werden, die im Grunde beliebig sein kann, wobei der Aufwand zum Lösen des Integrals der Gleichung (5.8) zu berücksichtigen ist. Eine einfache Variante ist es, eine Gerade  $g_1(t)$  für steigende Flanken und eine Gerade  $g_2(t)$  für fallende Flanken anzusetzen. Damit können die Parameter der Geraden

$g_1(t)$  und  $g_2(t)$  einfach über die Amplitude des Stromes  $I_p$ , den gegenwärtigen Zeitpunkt  $t_k$ , die Anstiegszeiten  $T_{\text{rise}}$  und  $T_{\text{fall}}$  bestimmt werden. Das Integral der Gleichung (5.8) ist dann entsprechend einfach mittels der Trapezregel zu lösen, wobei auch hier der nächste Zeitpunkt  $t_{k+1}$  durch das Sekanten-Verfahren bestimmt wird.

#### 5.2.3. Spannungsgesteuerter Oszillator

Bisher wurde der spannungsgesteuerte Oszillator als ein lineares, zeitinvariantes System angenommen, obgleich der VCO ein hochgradig nichtlineares Bauelement darstellt. In diesem Fall ergibt sich für die ereignisgesteuerte Modellierung die Problematik, dass der Analogteil des Regelkreises durch eine nichtlineare Differenzialgleichung beschrieben wird. Liegt die Funktion  $f(\cdot)$  in Form von Messpunkten oder Simulationen vor, so lässt sie sich durch ein Intervallpolynom gut approximieren. Es ist darauf zu achten, dass sich nicht zu viele Oszillationen um die Stützstellen bilden, da Polynomapproximationen dazu neigen, zu schwingen und somit die Schleifenverstärkung stärker variiert als es durch die Messwerte erwartet wird. Demnach ist es nicht erforderlich, eine große Anzahl an Stützstellen zu verwenden. Das Integral der Gleichung (5.6) muss entsprechend ausgewertet werden. Liegt dann ein Filter höherer Ordnung vor, so ist eine analytische Berechnung meist nur schwierig möglich. Aus diesem Grund kann auf numerische Integrationsverfahren, wie die Trapez-, Rechteck oder SIMPSON-Regel zurückgegriffen werden, um die Gleichung effizient auswerten zu können. Eine ausführliche Darstellung der Integrationsverfahren ist in [94] angegeben. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass in [25] als Modell eine stückweise lineare VCO-Charakteristik vorgeschlagen wurde, da sich dadurch die Gleichungen der ereignisorientierten Modellierung nicht verändern. Problematisch dabei ist jedoch, dass sich dadurch der Rechenaufwand erhöht. Der Grund dafür liegt darin, dass innerhalb einer bestimmten Zeit sich die Regelspannung des Systems ändert und somit der Verlauf der Regelspannung und damit die Abbildung durch die VCO-Charakteristik integriert werden muss. Da aber eine stückweise lineare Beschreibung vorliegt, ist diese zu berücksichtigen. Es ist erforderlich, je nach Diskretisierung der VCO-Kennlinie kleinere Schrittweiten zu verwenden, wodurch die Phasengleichung des rückgekoppelten Signals mehrfach ausgewertet werden muss. Werden hinzukommend keine idealen Ströme für die Ladungspumpe angesetzt, d. h. wenn endliche Flankensteilheiten oder auch beliebige Impulsformen angesetzt werden, so liefert die Approximation der Kennlinie einen wesentlich einfacheren und effizienteren Algorithmus. Aus diesen Gründen ist eine Approximation der VCO-Kennlinie sinnvoller.

### 5.3. Modellierung und Simulation ausgewählter CP-PLL-Architekturen

In diesem Kapitel sollen verschiedene Phasenregelkreis-Architekturen mittels des vorgestellten Verfahrens simulativ analysiert werden. Dabei sollen Vergleiche zwischen Spectre-Simulationen, Simulink-Simulationen und dem ereignisorientierten Verhaltensmodell an-

gegeben werden. Diesbezüglich wird sich zeigen, dass der systemtheoretische Ansatz das Verhalten, d. h. die Nichidealitäten und Nichtlinearitäten, sehr gut darstellt. Zudem wird sich zeigen, dass dieser Ansatz zur Modellierung hochgradig effizient ist. Dazu werden Fallbeispiele untersucht - eine *Alias-Locked Loop*-Architektur (ALL) [95, 96], *Integer-N* Frequenzsynthesizer sowie ein *Fraktional-N* Frequenzsynthesizer. Im Fall der ALL wird vorerst ein nichtlineares Modell vorgestellt und dann das ereignisgesteuerte Modell angegeben. Des Weiteren wird auf Basis der Stabilitätsgrenze von GARDNER für Regelkreise zweiter und dritter Ordnung ein simulativer Vergleich dargelegt, um zu zeigen, inwiefern die Stabilitätsgrenze des linearisierten Modells auf das nichtlineare Modell anzuwenden sind.

### 5.3.1. *Alias-Locked Loops*

*Alias-Locked Loops* (ALL) unterscheiden sich zu CP-PLL dadurch, dass der Teiler durch ein flankengesteuertes D-Flipflop ersetzt wird. Dabei ist der D-Eingang mit dem Ausgang des VCO verschaltet und an dem *Clock*-Eingang des Flipflops wird ein zusätzlicher Oszillator mit der Frequenz  $f_{\text{sam}}$  angeschlossen. Das Phasenausgangssignal des Flipflops werde im Folgenden mit  $\varphi_{\text{var}}$  bezeichnet. Das Blockschaltbild einer ALL ist in Abbildung 5.9 dargestellt. Der Begriff *Alias-Locked Loop* wird dahingehend angegeben, weil das flankengesteuerte D-Flipflop das VCO-Signal abtastet, wobei für die Frequenz  $f_{\text{sam}} \leq f_{\text{vco}}$  gilt. Die ALL wurde erstmals in [95] beschrieben und ein mathematisches Modell erstellt, welches im Folgenden kurz dargelegt werden soll. Dieses Modell stützt sich auf die Arbeiten in [97]. Diese Modellierung setzt voraus, dass der Regelkreis eingerastet ist, da angenommen wird, dass sich der PFD bezüglich der Signale  $\varphi_{\text{ref}}$  und  $\varphi_{\text{als}}$  linear verhält, d. h. der PFD wird durch

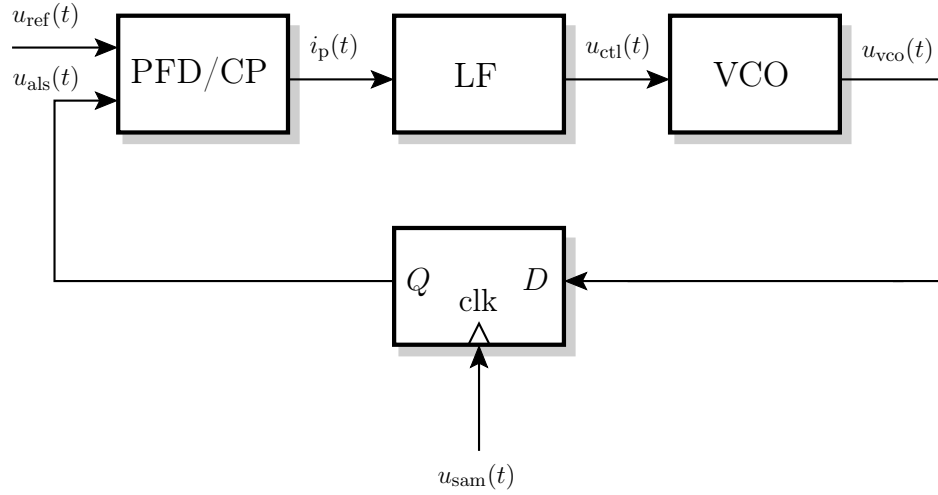
$$\varphi_e(t) = K_\varphi (\varphi_{\text{ref}}(t) - \varphi_{\text{als}}(t)) \quad (5.30)$$

näherungsweise (linearisiert) angenommen, wobei  $K_\varphi$  als Verstärkungsbeiwert bezeichnet wird. Des Weiteren wird das Modell durch vier Zustandsvariablen definiert:

- $\delta$  beschreibt die zeitliche Differenz zwischen einer fallenden Flanke des VCO-Signals  $u_{\text{vco}}(t)$  und der des Abtastsignals  $u_{\text{sam}}(t)$ .
- $\tau$  ist die Differenz zwischen einer fallenden Flanke des Referenzsignals  $u_{\text{ref}}$  und der des *Alias*-Signals  $u_{\text{als}}(t)$ , wobei somit in  $\tau$  der Phasenfehler kodiert ist.
- $u_{\text{ctl}}$  stellt gerade die Regelspannung am Ausgang des Schleifenfilters dar.
- $u_{\text{ave}}$  ist die durchschnittliche Regelspannung am Ausgang des Schleifenfilters, damit die mittlere Periode des VCO-Signals angegeben werden kann.

In Abbildung 5.10 ist das Verhalten der ALL anhand der wichtigsten Signale wiedergegeben. Es ergibt sich das Differenzengleichungssystem:

$$\delta_{k+1} = \delta_k + N_k \cdot \text{remainder} \{T_{\text{sam}}, T_{\text{vco},k}\} - T_{\text{vco},k} \quad (5.31)$$



**Abbildung 5.9.:** Schematischer Aufbau einer ALL-Architektur zur Frequenzsynthese

$$\tau_{k+1} = \tau_k - N_k \cdot T_{\text{sam}} - T_{\text{ref}} \quad (5.32)$$

$$u_{\text{ctl},k+1} = u_{\text{ctl},k} + \frac{I_p}{C_1} \tau_{k+1} \quad (5.33)$$

$$u_{\text{ave},k+1} = \frac{I_p}{T_{\text{ref}}} \tau_{k+1} + \left( R_1 + \frac{|\tau_{k+1}|}{2C_1} + \frac{T_{\text{ref}} - |\tau_{k+1}|}{C_1} \right) + u_{\text{ctl},k} \quad (5.34)$$

Dabei ist  $T_{\text{sam}}$  die Abtastperiodendauer und  $T_{\text{ref}}$  die Periodendauer des Referenzsignals  $u_{\text{ref}}$ .  $T_{\text{vco},k}$  ist die durchschnittliche Periodendauer des VCO-Signals  $u_{\text{vco}}$  und berechnet sich durch

$$T_{\text{vco},k} = \frac{1}{f_{0,\text{vco}} + K_v u_{\text{ave},k}}. \quad (5.35)$$

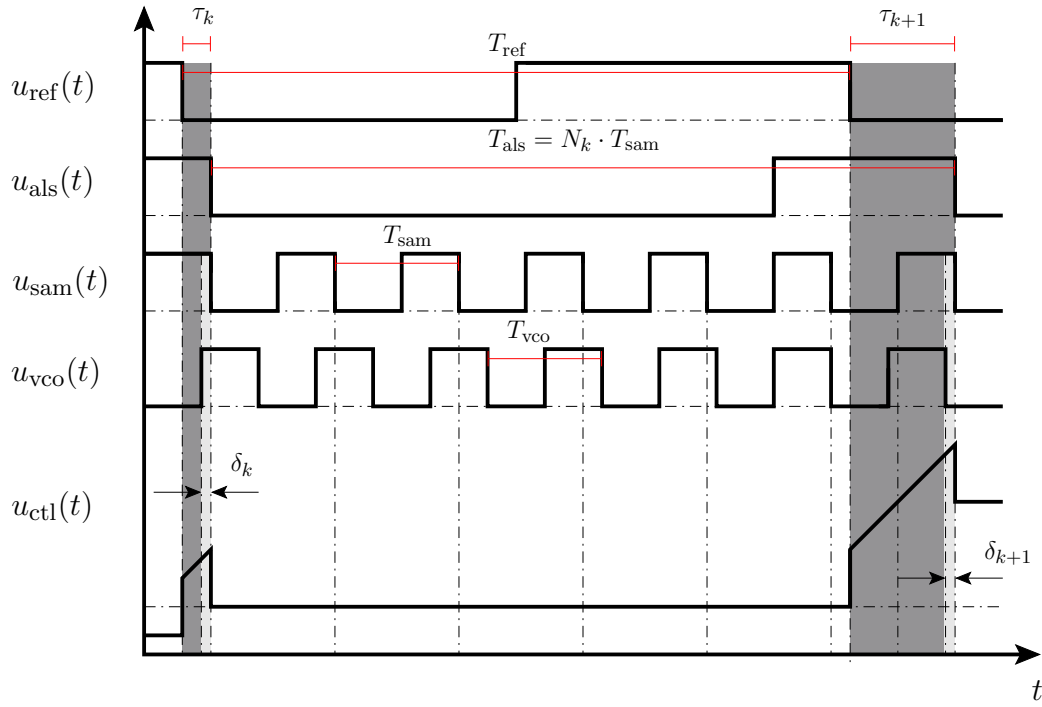
Die Anzahl der Abtastwerte  $N_k$  ergibt sich zu

$$N_k = \left\lceil \frac{T_{\text{vco},k} - \delta_k}{\text{remainder} \{ T_{\text{sam}}, T_{\text{vco},k} \}} \right\rceil, \quad (5.36)$$

wobei der Operator  $\text{remainder} \{ \cdot, \cdot \}$  definiert ist durch

$$\text{remainder} \{ x, y \} = x - \text{round} \left\{ \frac{x}{y} \right\} \cdot y. \quad (5.37)$$

Wie bereits angemerkt, ist das Modell in [95] auf den Bereich des eingerasteten Zustandes des Regelkreises beschränkt. Im Folgenden wird ein exaktes mathematisches Modell der ALL auf Basis der inhärenten Nichtlinearitäten eingeführt und abschließend mit dem eingeführten Modell verglichen und analysiert.



**Abbildung 5.10.:** Zeitverlaufsdiagramm der Signale in der ALL-Architektur

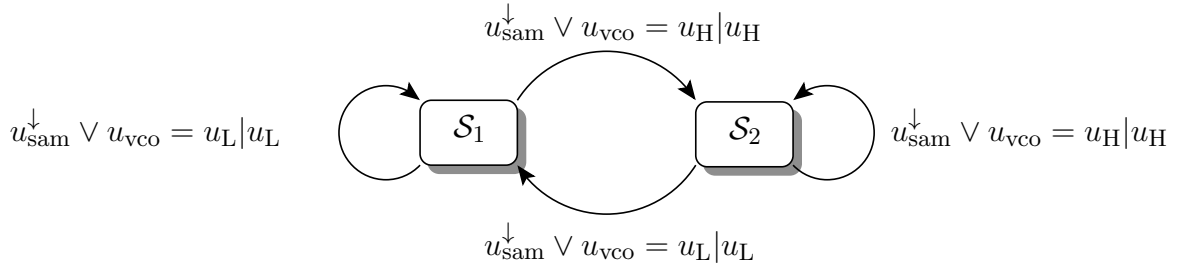
Da der Unterschied zwischen einer CP-PLL und der ALL in der Implementierung des Teilers liegt, soll einführend das D-Flipflop modelliert werden. Der Zustandsautomat des D-Flipflops ist in Abbildung 5.11 angegeben und ist definiert durch das Eingabealphabet  $\mathcal{I} = (u_{\text{sam}}^{\downarrow}, u_{\text{L}}, u_{\text{H}})$ , das Ausgabealphabet  $\mathcal{O} = (u_{\text{L}}, u_{\text{H}})$ , die Zustandsmenge  $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2)$  mit dem Anfangszustand  $\mathcal{S}_i \in \mathcal{S}$ , der Funktion  $\gamma : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{S}$  zur Berechnung des nächsten Zustandes mit

$$\gamma : \begin{cases} \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_1 & , \text{ wenn } u_{\text{sam}}^{\downarrow} \vee u_{\text{vco}} = u_{\text{L}} \\ \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2 & , \text{ wenn } u_{\text{sam}}^{\downarrow} \vee u_{\text{vco}} = u_{\text{H}} \\ \mathcal{S}_2 \rightarrow \mathcal{S}_2 & , \text{ wenn } u_{\text{sam}}^{\downarrow} \vee u_{\text{vco}} = u_{\text{L}} \\ \mathcal{S}_2 \rightarrow \mathcal{S}_1 & , \text{ wenn } u_{\text{sam}}^{\downarrow} \vee u_{\text{vco}} = u_{\text{H}} \end{cases} \quad (5.38)$$

sowie der Ausgabefunktion

$$\eta : \begin{cases} u_{\text{H}} & , \text{ wenn } \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2 \\ u_{\text{H}} & , \text{ wenn } \mathcal{S}_2 \rightarrow \mathcal{S}_2 \\ u_{\text{L}} & , \text{ wenn } \mathcal{S}_2 \rightarrow \mathcal{S}_1 \\ u_{\text{L}} & , \text{ wenn } \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_1 \end{cases} . \quad (5.39)$$

Wenn am Eingang des PFD eine fallende Flanke des Signals  $u_{\text{als}}(t)$  anliegt, entspricht dies genau dem Zeitpunkt, bei dem der Zustandsautomat des D-Flipflops von Zustand  $\mathcal{S}_2$  in



**Abbildung 5.11.:** Endlicher Automat des D-Flipflops, wobei  $u_{vco}$  am D-Eingang und  $u_{sam}$  am clk-Eingang liegt.

den Zustand  $\mathcal{S}_1$  wechselt. Es ist erforderlich, in Abhängigkeit des Phasensignals  $\varphi_{sam}(t)$  den Zeitpunkt zu bestimmen, bei dem  $\varphi_{sam} = 2\pi$  ist. Dies zeigt, dass für die Berechnung der Zeitpunkte, an denen der PFD durch das rückgekoppelte Signal schaltet, keinerlei numerische Verfahren benötigt werden, da die Phasengleichung des spannungsgesteuerten Oszillators nicht nach  $t_{k+1}$  umgestellt werden muss. Dies gilt auch, wenn Filter höherer Ordnungen verwendet werden. Ausschließlich die Phasengleichung von  $u_{sam}(t)$  sollte bijektiv sein. Für eine konstante Eingangsfrequenz kann die folgende Gleichung angesetzt werden:

$$\varphi_{sam}(t_{k+1}^{sam}) = \varphi_{als}(t_k) + 2\pi f_{sam} (t_{k+1}^{sam} - t_k) = 2\pi M \quad (5.40)$$

$$\Leftrightarrow t_{k+1}^{sam} = t_k + \frac{M - \frac{\varphi_{sam}(t_k)}{2\pi}}{f_{sam}}, \quad (5.41)$$

wobei  $M \in \mathbb{N}$  ist. Die allgemeine Phasengleichung des VCO ist gegeben durch Gleichung (5.6). Damit die nächste fallende Flanke von  $u_{als}$  bestimmt werden kann, wird das  $M$  solange um Eins erhöht und Gleichung (5.41) in Gleichung (5.40) eingesetzt, bis eine fallende Flanke des Signals  $u_{als}$  erfolgt. Demnach muss genau das  $M_i$  mit  $i \in \mathbb{N}$  gefunden werden, das die Bedingung

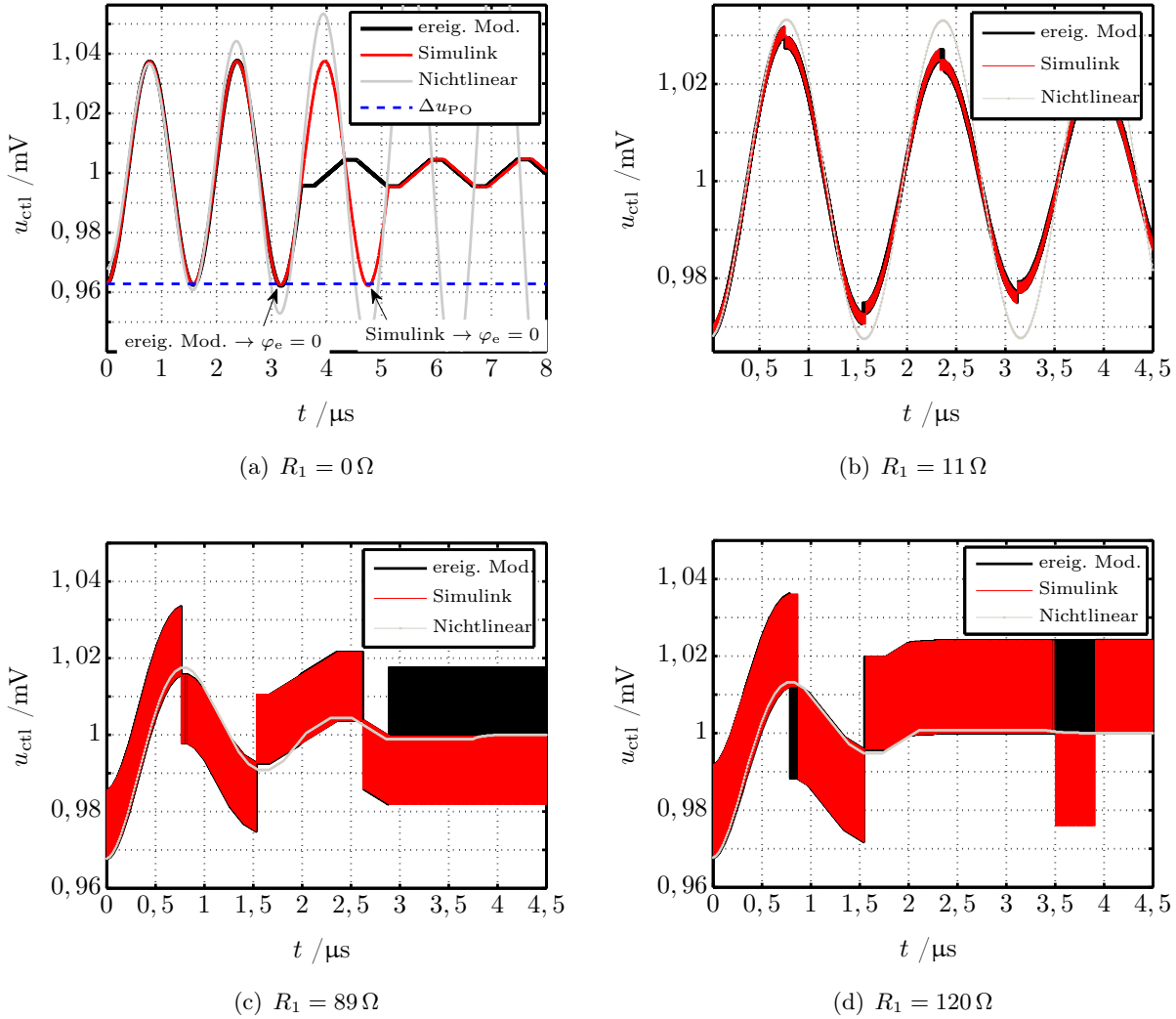
$$\pi \leq \text{mod} \left\{ \varphi_{sam} (t_{k+1}^{sam}(M_i)), 2\pi \right\} < 2\pi, \quad \text{bei } \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2 \quad (5.42)$$

oder

$$0 \leq \text{mod} \left\{ \varphi_{sam} (t_{k+1}^{sam}(M_i)), 2\pi \right\} < \pi, \quad \text{bei } \mathcal{S}_2 \rightarrow \mathcal{S}_1 \quad (5.43)$$

erfüllt. Wenn der Zeitpunkt der fallenden Flanke von  $u_{als}(t)$  bestimmt wurde und  $t_{k+1}^{sam}$  kleiner  $t_{k+1}^{ref}$  ist, so müssen nur noch die neuen Anfangszustände ( $\varphi_{ref}(t_{k+1}^{sam})$ ,  $u_{ctl}(t_{k+1}^{sam})$  und  $\mathcal{S}_{PFD}(t_{k+1}^{sam})$ ) berechnet werden. Somit unterscheidet sich diese Architektur zur Standard-CP-PLL durch die Bestimmung der Ereigniszeit des rückgekoppelten Signals  $u_{als}(t)$ .

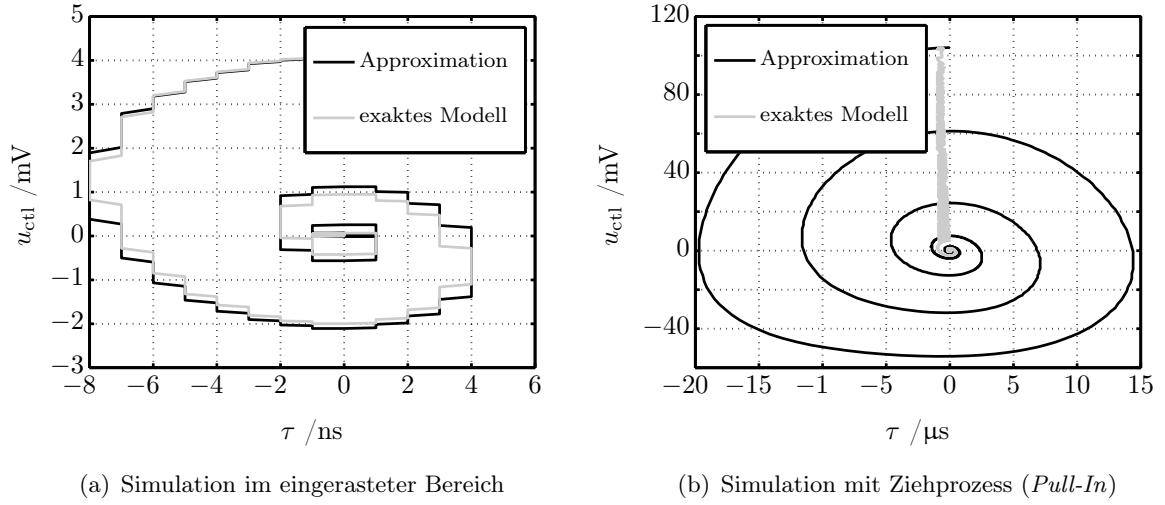
Die Abbildungen 5.12 zeigen das ereignisgesteuerte Modell, ein äquivalentes Simulink-Modell und das in [95] vorgeschlagene nichtlineare Modell mit Approximation der Spannungsgleichung. Diese Simulationen wurden mit den Parametern aus [95, 96] durchgeführt.



**Abbildung 5.12.:** Vergleich zwischen dem eingeführten ereignisorientierten Modell, einem Simulink-Modell und dem nichtlinearen approximierten Modell nach [95]

Dabei ist die Eingangsfrequenz  $f_{\text{ref}} = 100 \text{ MHz}$ , die Abtastfrequenz  $f_{\text{sam}} = 1 \text{ GHz}$ , die VCO-Ruhefrequenz  $f_{0,\text{vco}} = 10 \text{ GHz}$ , der Verstärkungsbeiwert des VCO  $K_v = 1 \text{ GHz/V}$ , der *Charge-Pump*-Strom  $I_p = 20 \mu\text{A}$  und die Kapazität  $C_1 = 1,27 \text{ nF}$ . Der Widerstand  $R_1$  wurde für diese Simulationen variiert. Werden die Abbildungen 5.12(c) mit  $R_1 = 89 \Omega$  und 5.12(d) mit  $R_1 = 120 \Omega$  betrachtet, so ergibt sich eine sehr ähnliche Dynamik für alle drei Modelle. Werden jedoch kleine Werte für den Widerstand gewählt, so wird das dynamische Verhalten des approximierten Modells immer schlechter. Insbesondere zeigt sich in Abbildung 5.12(b) mit  $R_1 = 11 \Omega$  ein instabiles Verhalten, obgleich das Simulink- als auch das ereignisorientierte Modell stabiles abklingendes Verhalten aufweisen. In Abbildung 5.12(a) mit  $R_1 = 0 \Omega$  wird die Grenze der nichtlinearen Approximation sehr deutlich, denn das ereignisorientierte und das Simulink-Modell überschreiten für einen kurzen Zeitraum den *Pull-Out*-Bereich (hier in einen Spannungswert umgerechnet), wodurch der Regelkreis, so-

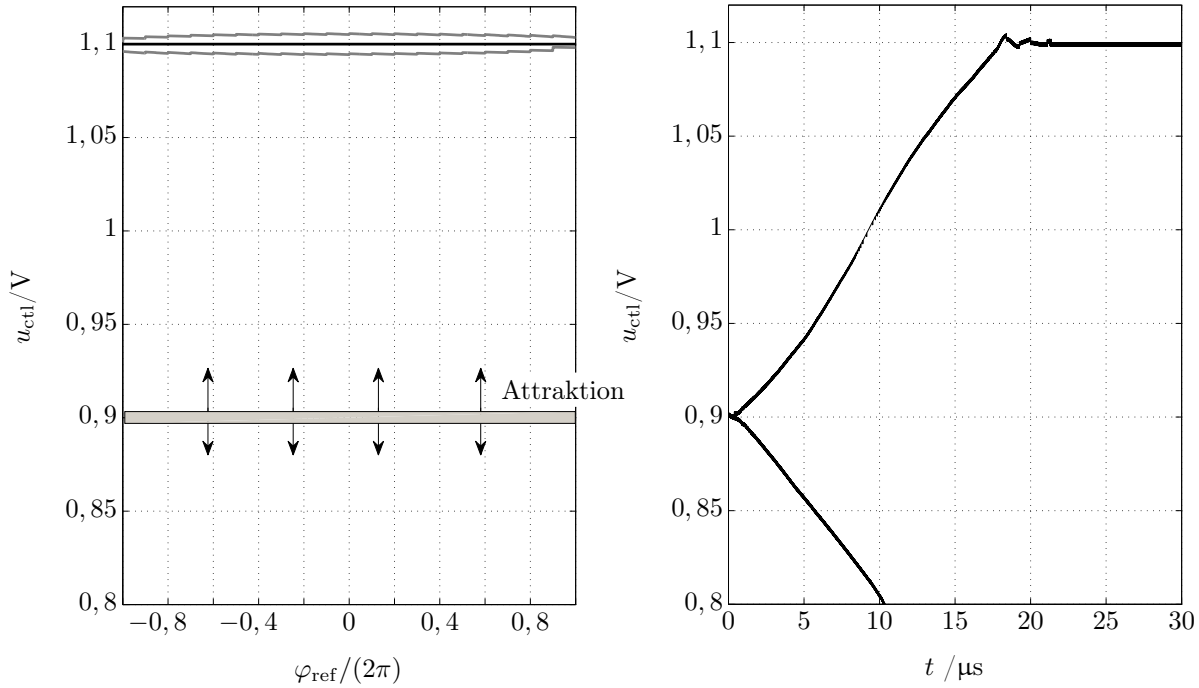




**Abbildung 5.13.:** Vergleich zwischen dem ereignisgesteuerten exakten mathematischen Modell und der nichtlinearen Approximation auf der Zustandsebene. Dabei ist auf der x-Achse die Pulsbreite der Strompulse von  $i_p(t)$  und auf der y-Achse die Regelspannung  $u_{ctl}(t)$  aufgetragen.

bald der Frequenzfehler minimal und somit der Phasenfehler maximal wird, ausrastet, jedoch gleich wieder einrastet. Das nichtlineare approximative Modell weist ausschließlich instabiles Verhalten auf.

In [96] wurde für ein gegebenes Parametersetup das Einzugsgebiet für das nichtlineare approximative Modell einer ALL zweiter Ordnung numerisch bestimmt. Zwar liefert diese Betrachtung eine Idee über das Verhalten des Modells, jedoch ist der Einzugsbereich dieses Modells größer als die Gültigkeit bezüglich des Systems. In [95] wurde darauf hingewiesen, dass das nichtlineare approximative Modell nur innerhalb des eingerasteten Bereiches gültig ist. Insbesondere stellt dann der *Pull-Out*-Bereich eine wichtige Eigenschaft des Systems dar. Zudem konnte in [96] auch gezeigt werden, dass es für diese Architektur mehr als einen Fixpunkt gibt, was in der Standardarchitektur einer CP-PLL nicht der Fall ist. Damit ergeben sich die Fragen, für welche Anfangswerte welcher Fixpunkt attraktiv ist und wie groß der *Pull-Out*-Bereich ist. In Abbildung 5.13(b) ist der Zustandsraum sowie Simulationen der beiden Modelle dargestellt. Es zeigt sich, dass das Modell von [95] mit dem erwähnten Parametersetup sich durch einen recht großen Bereich auszeichnet, indem das Modell stabil ist. Hinzukommend ist ersichtlich, dass der Ziehprozess nicht im Modell enthalten ist. Des Weiteren kann in Abbildung 5.12 erkannt werden, dass das Modell von [95] a priori nicht global stabil ist. Zwar liefert das Modell in diesem Fall auch außerhalb des eingerasteten Bereiches ein stabiles Verhalten, jedoch ist die Gültigkeit eigentlich durch die *Pull-Out*-Grenzen definiert, da außerhalb der Grenze keinerlei Erkenntnisse hinsichtlich des dynamischen Verhaltens der ALL angestellt werden können. In Abbildung 5.14 sind die *Pull-Out*-Grenzen des Systems dargestellt. Abbildung 5.14 zeigt die Grenze auf, bei der entweder die Ruhelage  $\mathbf{x}_1$  oder die Ruhelage  $\mathbf{x}_2$  attraktiv für das nichtlineare System ist.



(a) *Pull-Out*-Bereich auf der Spannungsebene und Darstellung des Bereiches, an dem entweder die obere Ruhelage oder die untere Ruhelage anziehend ist.

(b) Zur Attraktion zweier Ruhelagen

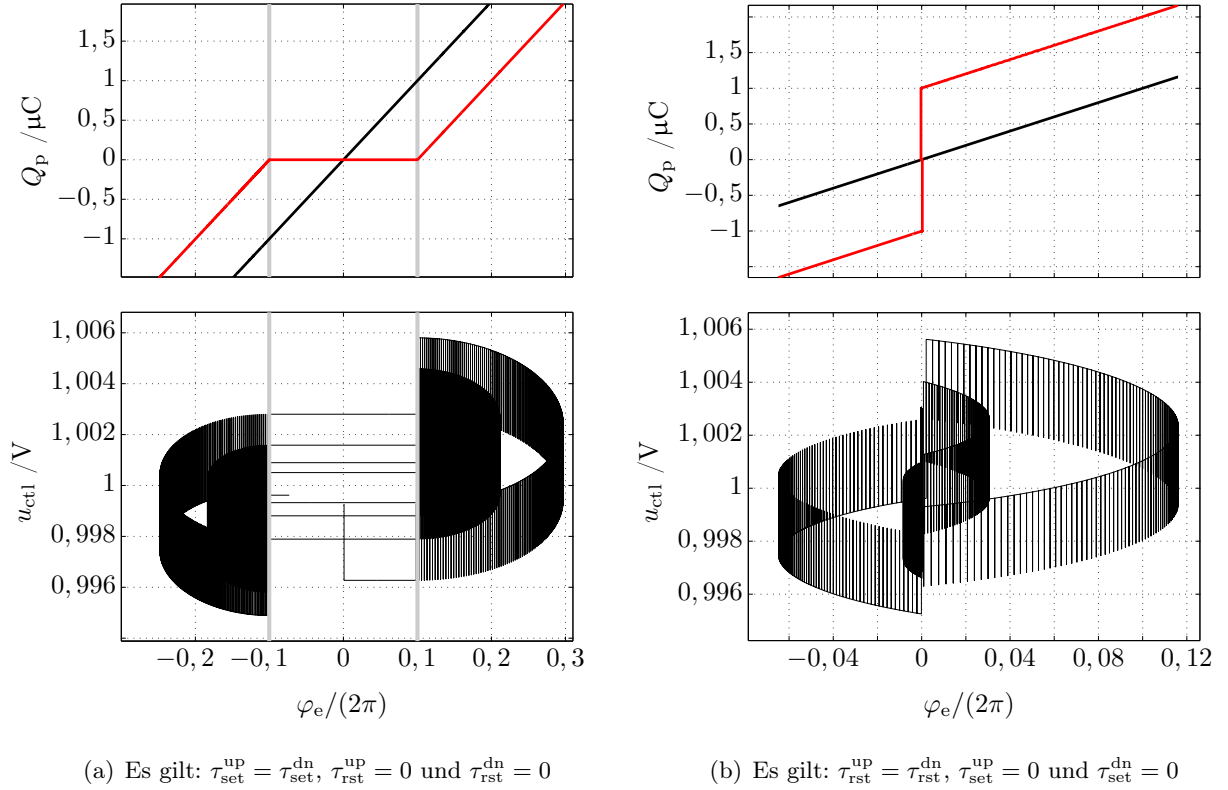
**Abbildung 5.14.:** *Pull-Out-Grenze in Abhängigkeit der Anfangsphase des Referenzoszillators und Bereich der Attraktion zweier Fixpunkte*

### 5.3.2. Integer- $N$ Frequenzsynthesizer

In diesem Kapitel werden die verschiedenen modellierten Nichtidealitäten des PFD und der *Charge-Pump* anhand von *Integer- $N$*  Frequenzsynthesizern untersucht. Dabei sollen die einzelnen modellierten Charakteristika, wie mittleres Verhalten und der Einfluss auf die spektrale Reinheit des Signals, dargelegt werden.

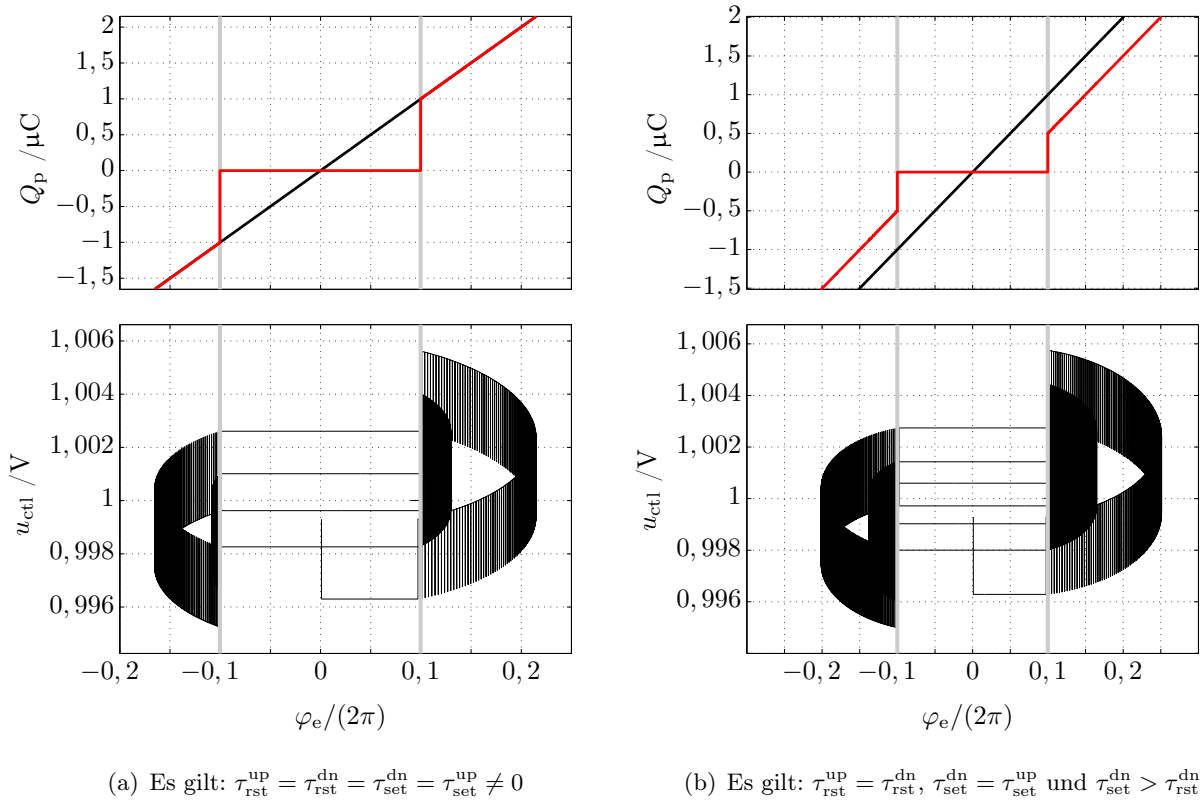
#### CP-PLL 2. Ordnung: PFD Charakteristik

Im Folgenden sollen die Modelle, die in Kapitel 5.2.1 für die PFD-Charakteristik modelliert wurden, etwas genauer simulativ untersucht werden. Zur Modellierung der PFD-Charakteristik wurden virtuelle Zustände in den endlichen Automaten eingefügt. Dabei stellen diese virtuellen Zustände mit den Verzögerungszeiten  $\tau_{\text{set}}^{\text{up}}$  und  $\tau_{\text{set}}^{\text{dn}}$  bezogen auf die *Dead-Zone* eine Rolle. Die virtuellen Zustände  $\mathcal{S}_{\text{v,rst}}^{\text{up}}$  und  $\mathcal{S}_{\text{v,rst}}^{\text{dn}}$  ergeben ausschließlich eine höhere mittlere Schleifenverstärkung, da sich entsprechend breitere Strompulse bei den Zustandswechseln von  $\mathcal{S}_{-1}$  nach  $\mathcal{S}_0$  bzw. von  $\mathcal{S}_{+1}$  nach  $\mathcal{S}_0$  ergeben. Dieser Sachverhalt wird offensichtlich, wenn im ersten Schritt ausschließlich die virtuellen Zustände  $\mathcal{S}_{\text{v,rst}}^{\text{up}}$  und  $\mathcal{S}_{\text{v,rst}}^{\text{dn}}$  ausgelassen werden oder für die Laufzeiten entsprechend  $\tau_{\text{rst}}^{\text{up}} = 0$  und  $\tau_{\text{rst}}^{\text{dn}} = 0$  an-



**Abbildung 5.15.:** Zum Einfluss der Verzögerungszeiten des erweiterten Zustandsautomaten nach Abbildung 5.3: (a) zeigt eine Trajektorie einer CP-PLL zweiter Ordnung (Bild unten) mit  $\tau_{\text{set}}^{\text{up}} = \tau_{\text{set}}^{\text{dn}}, \tau_{\text{rst}}^{\text{up}} = 0$  und  $\tau_{\text{rst}}^{\text{dn}} = 0$  sowie im oberen Bild ein Vergleich der idealen  $(\varphi_e - Q_p)$ -Kennlinie (schwarz) des PFD nach Abbildung 3.2 und der des erweiterten Zustandsautomaten (rot). (b) zeigt ebenfalls eine Trajektorie einer CP-PLL zweiter Ordnung (Bild unten) mit  $\tau_{\text{rst}}^{\text{up}} = \tau_{\text{rst}}^{\text{dn}}, \tau_{\text{set}}^{\text{up}} = 0$  und  $\tau_{\text{set}}^{\text{dn}} = 0$  und im oberen Bild die Kennlinie des idealen PFD (schwarz) und die des erweiterten PFD (rot) gegenübergestellt.

gesetzt werden. Es lässt sich feststellen, dass sich für die Pulsbreiten des Stromes  $i_p$  ein Bereich ergibt, in dem keinerlei Regelung stattfindet. Des Weiteren ergibt sich für die Ladung  $Q_p$  ein entsprechender Versatz in der Kennlinie, der betragsmäßig kleiner dem der idealen Kennlinie ist. Abbildung 5.15(a) beschreibt diesen Sachverhalt. Dabei wurden jedoch nicht die Pulsbreiten betrachtet, sondern der Phasenfehler  $\varphi_e$  und die Ladung  $Q_p$ . Abbildung 5.15(b) beschreibt den Sachverhalt für  $\tau_{\text{rst}}^{\text{up}} = \tau_{\text{rst}}^{\text{dn}}, \tau_{\text{set}}^{\text{up}} = 0$  und  $\tau_{\text{set}}^{\text{dn}} = 0$ . Offensichtlich ergibt sich keine *Dead-Zone*. Es lässt sich sowohl an der Trajektorie als auch am Vergleich der gemittelten Kennlinien erkennen, dass mehr Ladung pro Zeit in das Filter injiziert wird, wodurch sich entsprechend eine höhere Schleifenverstärkung ergibt. Gilt  $\tau_{\text{rst}}^{\text{up}} = \tau_{\text{rst}}^{\text{dn}} = \tau_{\text{set}}^{\text{up}} = \tau_{\text{set}}^{\text{dn}} \neq 0$ , so kann die Charakteristik nach Abbildung 5.16(a) identifiziert werden. Dabei weist die  $(\varphi_e - Q_p)$ -Kennlinie eine *Dead-Zone* auf und außerhalb dieser Zone eine Charakteristik, die wieder der des idealen PFD entspricht. Abbildung 5.16(a) beschreibt den Sachverhalt, wenn  $\tau_{\text{rst}}^{\text{up}} = \tau_{\text{rst}}^{\text{dn}}, \tau_{\text{set}}^{\text{up}} = 0$  und  $\tau_{\text{set}}^{\text{dn}} = 0$  gelten. Werden die Abbildungen 5.16(a) und 5.16(b) miteinander verglichen, ist es offensichtlich, dass die

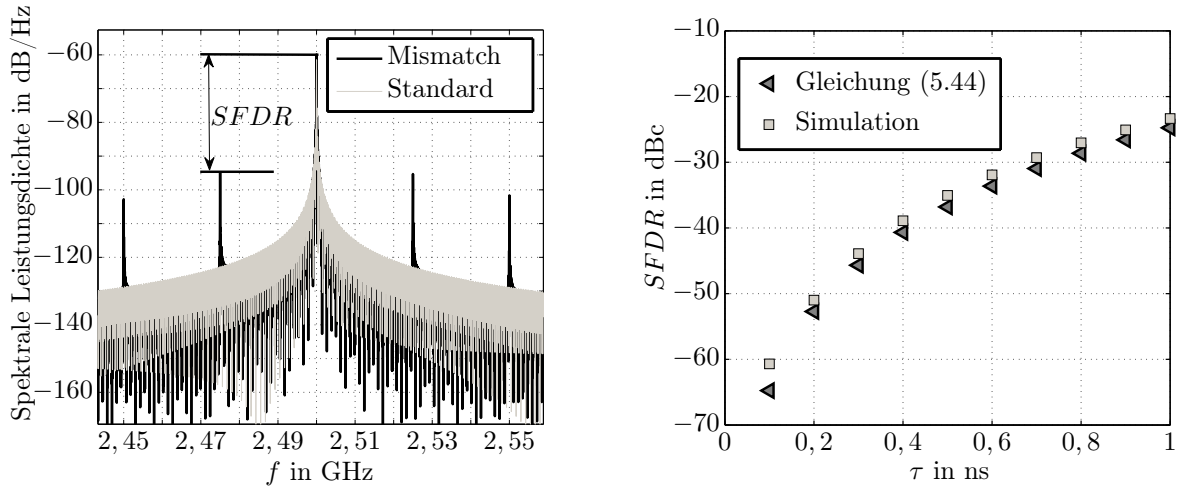


**Abbildung 5.16.:** Zum Einfluss der Verzögerungszeiten des erweiterten Zustandsautomaten nach Abbildung 5.3: (a) zeigt eine Trajektorie einer CP-PLL zweiter Ordnung mit  $\tau_{rst}^{up} = \tau_{rst}^{dn} = \tau_{set}^{dn} = \tau_{set}^{up} \neq 0$  sowie im oberen Bild einen Vergleich der idealen  $(\varphi_e - Q_p)$ -Kennlinie (schwarz) des PFD nach Abbildung 3.2 und der des erweiterten Zustandsautomaten (rot). (b) zeigt ebenfalls eine Trajektorie einer CP-PLL zweiter Ordnung (Bild unten) mit  $\tau_{rst}^{up} = \tau_{rst}^{dn}$ ,  $\tau_{rst}^{up} = 0$  und  $\tau_{rst}^{dn} = 0$  und im oberen Bild die Kennlinie des idealen PFD (schwarz) und die des erweiterten PFD (rot) gegenübergestellt.

Trajektorie aus Abbildung 5.16(a) eine kleinere Schleifenverstärkung aufweist als die in Abbildung 5.16(b).

### CP-PLL 3. Ordnung: *Current-Mismatch*

Für die Betrachtung des *Current-Mismatches* wird der endliche Automat des PFD nach Kapitel 5.2.2 (siehe auch Gleichungen (5.26), (5.25) und (5.27)) verwendet und die Schleifenordnung sei mit Drei angegeben. Wird der Regelkreis mit dem modifizierten PFD mit dem PFD nach Abbildung 5.17(a) verglichen, so ist ersichtlich, dass sich aufgrund des *Current-Mismatches* und der Laufzeit für das Zurücksetzen des PFD gerade Nebentöne im Spektrum des Ausgangssignals bilden. Die Nebentöne treten im Abstand von  $f_{ref}$  zum Träger auf. Ein wichtiges Maß zur Charakterisierung dieser Nebentöne ist der sogenannte *spurious free dynamic range* (SFDR) oder auch störungsfreier dynamischer Raum, der den Abstand der größten Störung zum Träger angibt. Innerhalb dieser Betrachtungen kann



(a) Leistungsdichtespektren eines idealen nichtlinearen CP-PLL-Modells dritter Ordnung und ein äquivalentes Modell mit *Current-Mismatch*

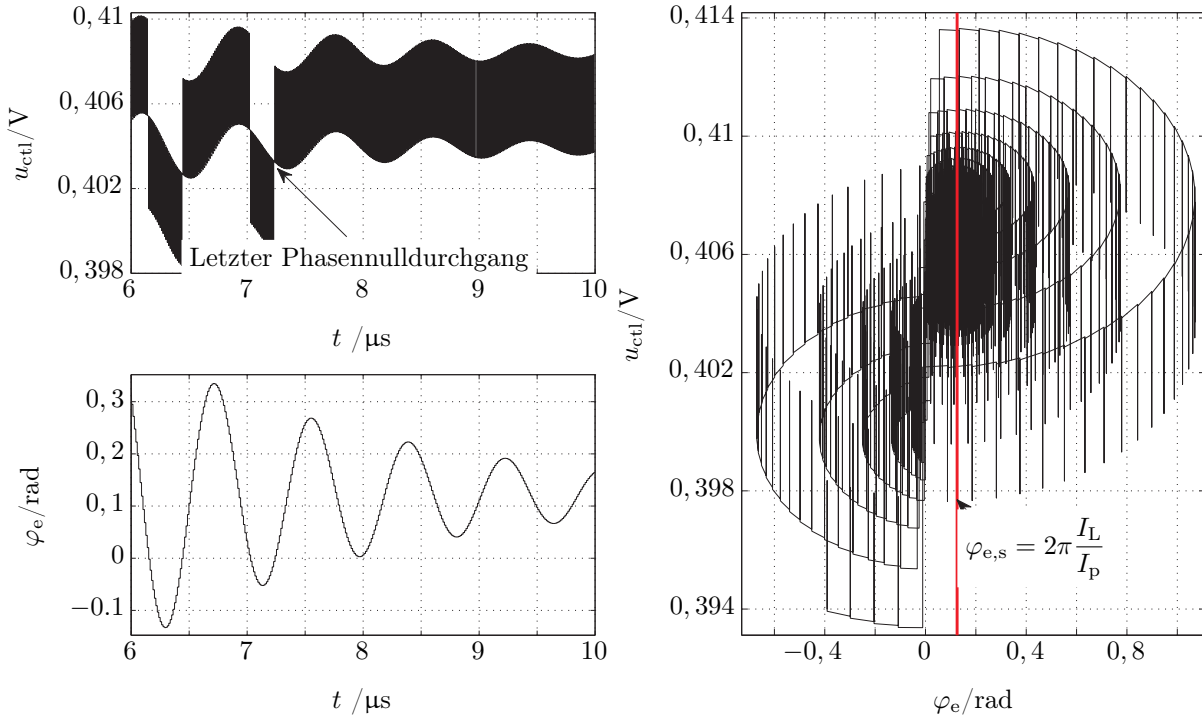
(b) Simulierte und theoretische Werte für den störungsfreien dynamischen Raum

**Abbildung 5.17.:** Simulationen und Vergleich zwischen dem idealen Modell ohne *Current-Mismatch* und dem Modell mit *Current-Mismatch*.

mittels der FOURIER-Reihenentwicklung des Signals  $i_p(t)$  im ausgeregelten Bereich und der Übertragungsfunktion des Schleifenfilters mit linearem VCO der Wert bestimmt werden. Diesbezüglich wird im Allgemeinen die Grundschiwingung des Signals  $i_p(t)$  verwendet. Zumeist werden dann noch geeignete Vereinfachungen eingeführt. Nach [37] ergibt sich der störungsfreie dynamische Raum zu

$$SFDR = 20 \log_{10} \left( \frac{K_v \Delta I_- \tau^2}{2C_2} \right). \quad (5.44)$$

In Abbildung 5.17(b) sind simulierte Werte für den störungsfreien, dynamischen Raum gegen die Laufzeit  $\tau$  für das Zurücksetzen des PFD aufgetragen, verglichen mit den Werten, die durch Gleichung 5.44 bestimmt werden. Simulativ kann das SFDR aus der Phase des VCO-Signals im ausgeregelten Zustand der Schleife bestimmt werden. Da Gleichung (5.44) unter verschiedenen Vereinfachungen hergeleitet wurde, unter anderem unter der Annahme, dass nur die erste Harmonische von Interesse ist, kann ein sinusoidales Ausgangssignal des VCO angesetzt werden. Damit kann dann das Spektrum mittels der FOURIER-Transformation bestimmt werden. Der marginale Unterschied der simulierten und theoretischen Werte ist dahingehend zu begründen, dass Gleichung (5.44) eine Approximation darstellt. Es zeigt sich jedoch, dass die Modellierung des *Current-Mismatches* durch die Erweiterung des endlichen Automaten valide ist und somit zuverlässige Ergebnisse liefert.



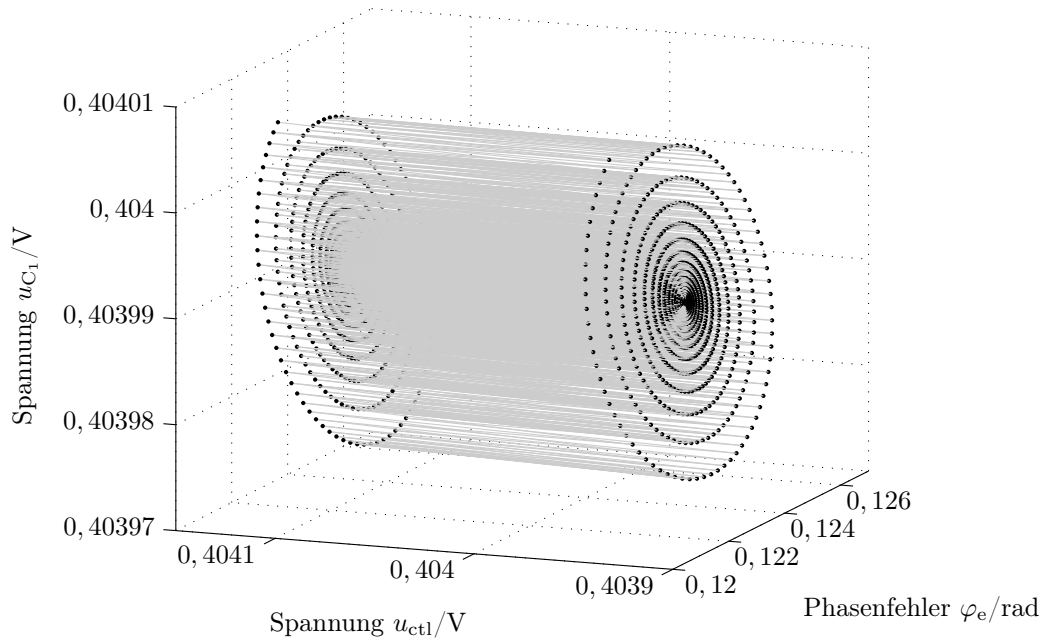
**Abbildung 5.18.:** Zur Charakterisierung einer CP-PLL zweiter Ordnung mit Leckstrom

### CP-PLL 2. und 3. Ordnung: *Leckstrom*

In einer realen *Charge-Pump* ergibt sich der Sachverhalt, dass, auch wenn der PFD im Zustand  $\mathcal{S}_0$  ist, ein Strom fließt. Dadurch ist es offensichtlich, dass die angestrebte Frequenz mit einem Phasenfehler  $\varphi_e = 0$  nie erreicht werden kann. D.h., selbst wenn für den Phasenfehler  $\varphi_e = 0$  und  $f_t = f_{vco}$  gelten, so liefert der zusätzliche Beitrag  $I_L$  eine zusätzliche Regelung, die dafür sorgt, dass sich der Phasenfehler sowie die Regelspannung ändert. Dementsprechend ergibt sich im ausgeregelten Fall kein konstantes Verhalten. Des Weiteren bewirkt der Strom  $I_L$ , dass im ausgeregelten Fall kein DN-Signal bzw. UP-Signal mehr erzeugt wird, da der nötige Beitrag gerade durch  $I_L$  abgedeckt wird. Nach GARDNER [16,92] ergibt sich für einen Regelkreis der Ordnung Zwei ein statischer Phasenfehler mit

$$\varphi_{e,s} = 2\pi \frac{I_L}{I_p}. \quad (5.45)$$

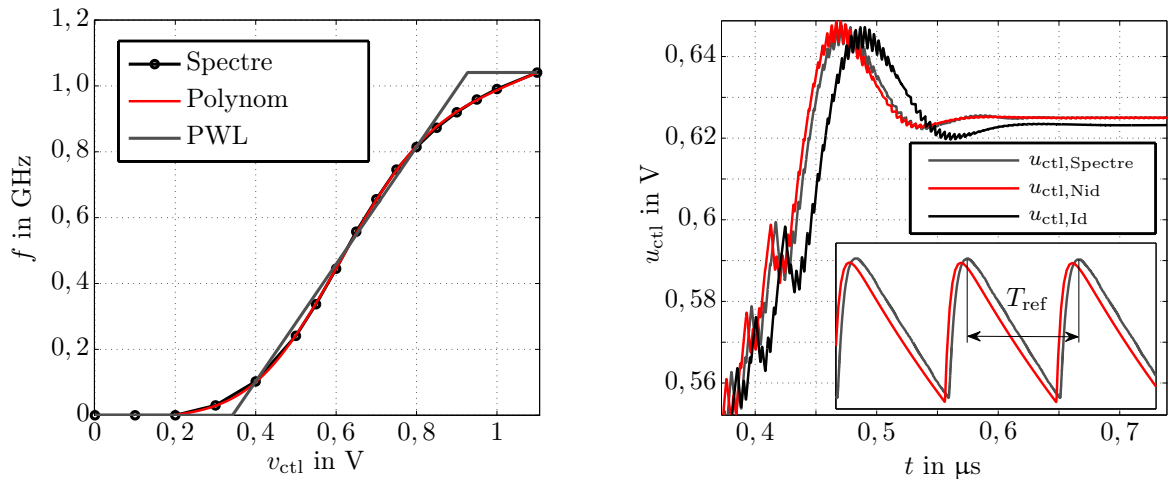
In Abbildung 5.18 ist das Zustandsraumdiagramm einer CP-PLL 2. Ordnung dargestellt. Es zeigt das Ausbleiben der Regelung durch das DN-Signal im ausgeregelmten Zustand sowie den statischen Phasenfehler nach Gleichung (5.45). Abbildung 5.19 zeigt den ausgeregelmten Fall einer CP-PLL 3. Ordnung mit Leckstrom im Phasenraum, wobei die Gleichung (5.45) an dieser Stelle nicht mehr gültig ist, sich jedoch auch hier ein statischer Phasenfehler ergibt.



**Abbildung 5.19.:** Zustandsraum einer CP-PLL der Ordnung Drei mit Leckstrom

#### CP-PLL 4. Ordnung: *Current-Mismatch*, Leckstrom und Nichtlinearer VCO

In diesem Kapitel wird der VCO durch eine nichtlineare Kennlinie beschrieben. In Abbildung 5.20(a) ist die Charakteristik des VCO dargestellt. Die Charakteristik wurde durch ein Intervallpolynom zehnten Grades approximiert. Die Nichtidealitäten des PFD und der *Charge-Pump* prägen sich im Allgemeinen unterschiedlich stark aus, wobei bei Betrachtung der einzelnen Komponenten sich die Werte für das ereignisorientierte Modell einfach ablesen lassen. In Abbildung 5.20(b) ist das ereignisorientierte Modell mit und ohne Nichtidealitäten modelliert und der Spectre-Simulation gegenübergestellt. Das ideale ereignisgesteuerte Modell beinhaltet einen stückweise linear modellierten VCO. Es zeigt sich, dass die Regelspannung sich im ausgeregelten Fall unterscheidet. Dies ist eine Folge der nichtlinearen Charakteristik des VCO. Die Unterschiede zwischen dem nichtidealen ereignisorientierten und dem Spectre-Modell sind ähnlich begründet, da zwar die VCO-Charakteristik durch ein Polynom approximiert wurde, jedoch auch nur 17 Stützstellen verwendet wurden. Die Problematik an dieser Stelle ergibt sich durch die Genauigkeit der Approximation, bzw. durch den Sachverhalt, dass zwischen zwei Stützstellen sich entsprechende Oszillationen ausbilden können. Es ist offensichtlich, dass die Oszillation und dementsprechend die Nebentöne im Spektrum des Ausgangssignals durch das erweiterte nichtlineare ereignisorientierte Modell gut modelliert sind (siehe Abbildung 5.20(b)). Insbesondere stellt bei dieser Architektur der Leckstrom die dominante Nichtidealität hinsichtlich der Nebentöne dar. Des Weiteren zeigt sich, dass das dynamische Verhalten des Systems durch diese Verhaltensmodellierung nicht nur eine gute Charakterisierung liefert, sondern auch bezüglich des Entwurfs die Möglichkeit gibt, sehr einfach vorherzusagen, welche Komponenten optimiert



(a) VCO-Charakteristik: Spectre-Simulation, Approximation durch Intervallpolynom und stückweise lineare Näherung

(b) Vergleich der Regelspannungen  $u_{\text{ctl}}$ :  $u_{\text{ctl,Spectre}}$  (Spectre-Simulation),  $u_{\text{ctl,NI}}$  (nichtideales ereignisorientiertes Modell) und  $u_{\text{ctl,I}}$  (ideales ereignisorientiertes Modell)

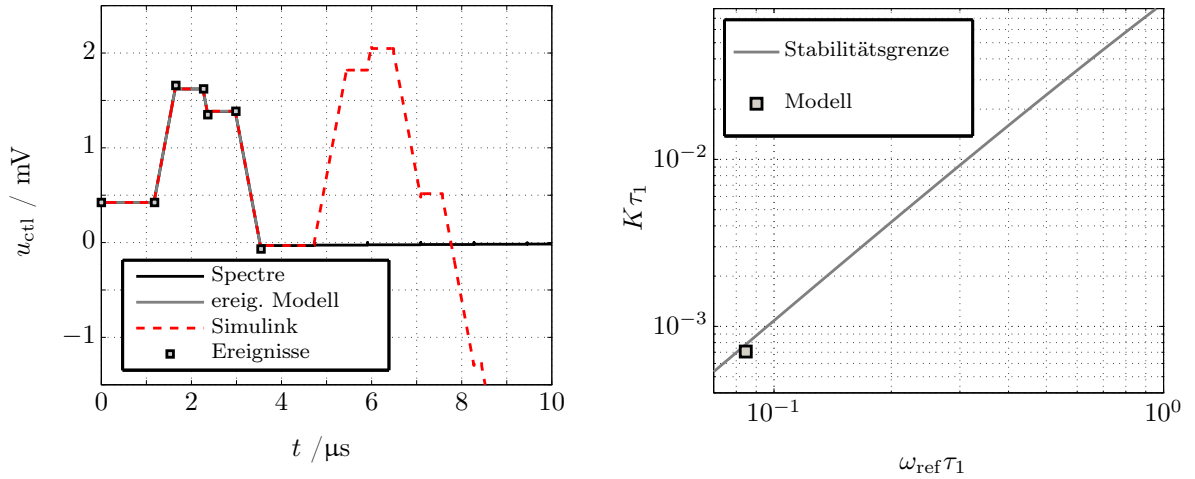
**Abbildung 5.20.:** Zur Auswirkung der VCO-Charakteristik und der Nichtidealitäten der Charge-Pump und des PFD

werden müssen oder, ob eine Änderung des Schleifenfilters ausreicht, um die Nebentöne zu minimieren.

### 5.3.3. Integer- $N$ Frequenzsynthesizer: Nichtlineare Dynamik

In diesem Kapitel soll untersucht werden, wie sich die Dynamik nahe der von GARDNER vorgeschlagenen Stabilitätsgrenze verhält. Das Stabilitätskriterium basiert auf einem linearisierten, zeitdiskreten Modell und berücksichtigt die Eingangsfrequenz des Referenzsignals. Dieses Kriterium zeigt eine Grenze, die eingehalten werden muss, damit das linearisierte, zeitdiskrete System nur Pole im Einheitskreis besitzt. Die Problemstellung, die dieses Verfahren nicht berücksichtigt, zeigt sich, wenn die PLL-Parameter gerade so gewählt sind, dass sich das System in der unmittelbaren Umgebung der Stabilitätsgrenze nach Gleichung (4.8a) befindet. Soll das nichtlineare Modell – das Simulink-, das Spectre-, oder das ereignisgesteuerte Modell – in dieser Umgebung das Kriterium überprüfen, so ist die Simulation an sich problematisch, da bei Betrachtung der Phasengleichung des spannungsgesteuerten Oszillators häufig die Phase in die falsche Richtung dreht. Dies ist dahingehend zu begründen, dass negative Spannungswerte für  $u_{\text{ctl}}(t)$  auftreten (wobei  $f_{\text{vco}}(t) = K_{\text{v}} u_{\text{ctl}}(t)$  gilt). Hinzukommend ergeben sich bei der Beurteilung der Stabilität hinsichtlich des dynamischen Verhaltens gewisse Probleme, die im Folgenden diskutiert werden sollen. Werden die Entwurfsparameter so gewählt, dass sich das System in der Nähe der Stabilitätsgrenze befindet, so kann das System zwar stabil sein, jedoch ist es meist nicht möglich, dies simulativ zu zeigen. Die Abbildungen 5.21 beschreiben diesen Sachverhalt. Dadurch, dass die Eingangsfrequenz  $f_{\text{ref}}$  verringert wird, wird auch die äquivalente Zielspannung der



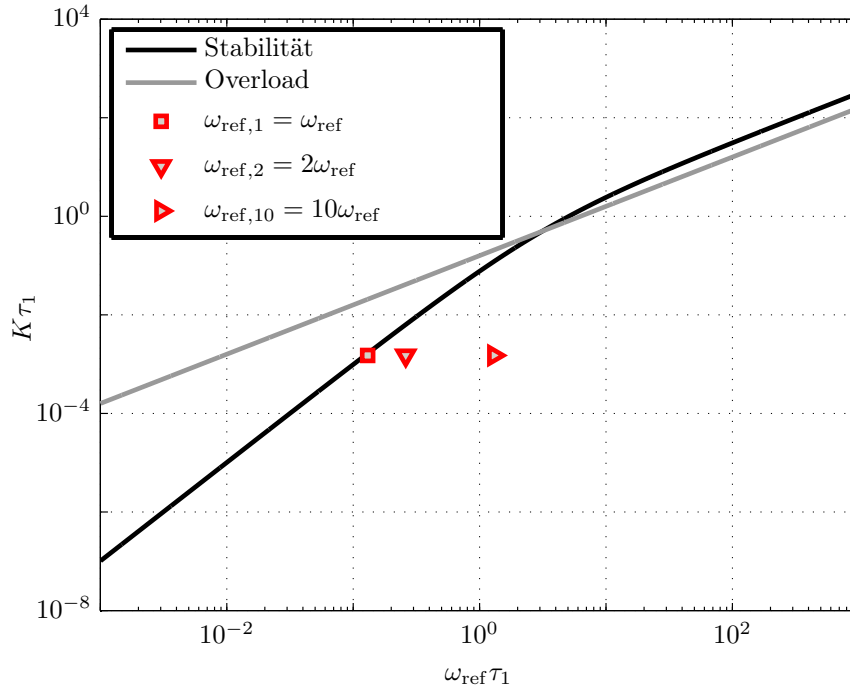


(a) Vergleich der Regelspannungen zwischen dem Simulink-, Spectre- und dem ereignisgesteuerten Modell (b) Stabilitätsgrenze und Parametersetup für das System

**Abbildung 5.21.:** Vergleich einer Simulation in der Nähe der Stabilitätsgrenze mit Simulink-, Spectre- und dem ereignisgesteuerten Modell

Regelspannung kleiner. Ist dann die Differenz des *Pull-Out*-Bereichs ( $\Delta u_{\text{PO}}$ ) und der Zielspannung ( $u_t = f_{\text{ref}}/K_v$  mit  $f_{\text{vco}} = K_v u_{\text{ctl}}$ ) kleiner Null, so ergibt sich für alle Werte  $u_{\text{ctl}} < 0$  eine rechtsdrehende Phase  $\varphi_{\text{vco}}$ , die nicht sinnvoll ist. Es zeigt sich (siehe Abbildung 5.21(a)), dass das ereignisgesteuerte, das Simulink- als auch das Spectre-Modell solange übereinstimmen, bis die Regelspannung kleiner Null ist und somit ein physikalisch sinnloser Zusammenhang entsteht, wobei dann das Simulink- und das Spectre-Modell die Differenzialgleichungen lösen und im Falle von Simulink das Ergebnis divergiert. Das ereignisgesteuerte Modell bricht an dieser Stelle ab. Es ist somit wichtig, bei der Beurteilung der Stabilität mittels Gleichung (4.8a) die Gültigkeit und somit die Phasendrehrichtung mit zu berücksichtigen. Das Stabilitätskriterium von GARDNER nach Gleichung (4.8a) basiert auf der Linearisierung in einer Umgebung nahe der Ruhelage. Bei der Linearisierung werden keinerlei Randbedingungen an den Zustandsraum geknüpft, wodurch diese Problematik auch verständlich wird. Das nächste Problem, welches diskutiert werden soll, ist der Sachverhalt der Konvergenz oder der Stabilität des nichtlinearen Modells.

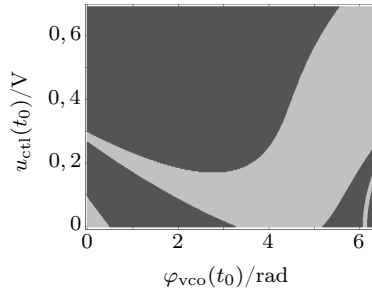
Da eine Analyse hinsichtlich aller Zustände im Zustandsraum angegeben werden müsste und schon bei der Ordnung Drei der CP-PLL fünf Anfangsbedingungen (Referenzphase, VCO-Phase, Ladung auf den Kapazitäten und PFD-Zustand) untersucht werden müssten, soll an dieser Stelle vorerst ein Regelkreis der Ordnung Zwei betrachtet werden, wodurch dann die Grenze nach Gleichung (4.6) angesetzt werden muss. Des Weiteren sei auf sämtliche Nichtlinearitäten und Nichtidealitäten verzichtet. Aus der Kenntnis der Phasendrehung lässt sich der Zustandsraum in Gebiete unterteilen, in denen das Modell simuliert werden kann. Obgleich das betrachtete System die Ordnung Zwei aufweist, ist es erforderlich, die verschiedenen Anfangsphasen des Referenz- und des VCO-Signals zu berücksichtigen.



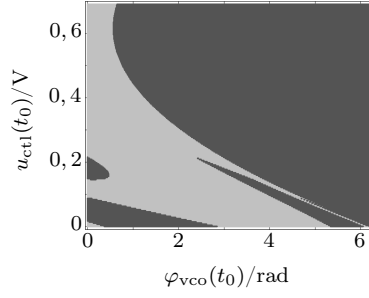
**Abbildung 5.22.:** Stabilitätsgrenze einer CP-PLL zweiter Ordnung mit  $K_v = 120 \text{ MHz/V}$ ,  $I_p = 50 \mu\text{A}$ ,  $R_1 = 500 \Omega$ ,  $C_1 = 1 \text{ pF}$  und  $f_{\text{ref}} \approx 41.43 \text{ MHz}$  ( $\omega_{\text{ref}} = 2\pi f_{\text{ref}}$ )

Beispielsweise existieren für einen Phasenfehler  $\varphi_e(t)$  von  $\pi$  unendlich viele Möglichkeiten, diesen hinsichtlich der Signale  $\varphi_{\text{ref}}(t)$  und  $\varphi_{\text{var}}(t)$  zu berechnen, die den Verlauf auf unterschiedliche Weise beeinflussen. Durch die verschiedenen Folgerechnungen des Differenzgleichungssystems ergeben sich andere dynamische Verläufe, die entweder in Gebieten bleiben, in denen eine Simulation hinsichtlich der erwähnten Plausibilitätsbetrachtung (rechtsdrehende oder linksdrehende Phase) erfolgen kann oder die Simulation als nicht sinnvoll gewertet wird.

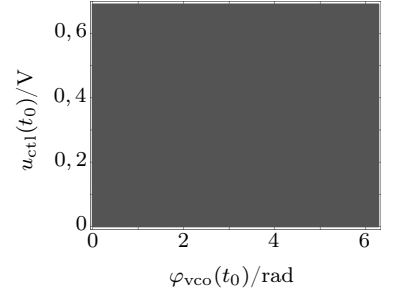
In Abbildung 5.22 ist die Stabilitätsgrenze nach GARDNER für einen Regelkreis der Ordnung Zwei dargestellt. Die Parameter für einen Entwurf wurden mit  $K_v = 120 \text{ MHz/V}$ ,  $I_p = 50 \mu\text{A}$ ,  $R_1 = 500 \Omega$ ,  $C_1 = 1 \text{ pF}$  und  $f_{\text{ref}} \approx 41.43 \text{ MHz}$  gewählt. Wird als Referenzkreisfrequenz  $\omega_{\text{ref}} = 2\pi f_{\text{ref}}$  angegeben, so ist der Entwurf auf der Stabilitätsgrenze und es ergeben sich die in den Abbildungen 5.23 dargestellten Verläufe hinsichtlich der Plausibilitätsprüfung. Für  $\omega_{\text{ref},2} = 2\omega_{\text{ref}}$  können die Abbildungen 5.24 angegeben werden. Wird dann  $\omega_{\text{ref},10} = 10\omega_{\text{ref}}$  angesetzt, so ergeben sich keine nichtplausiblen Simulationen als vereinzelte Gebiete, sondern ausschließlich, wenn Phasenwerte und/oder der PFD-Zustand ungünstig in der Umgebung der Null-Volt-Grenze liegen. Dies ist jedoch an dieser Stelle hinsichtlich der Stabilitätsbetrachtung nicht von so großer Bedeutung, da die Stabilitätsgrenze nach GARDNER ohnehin nur den Bereich der nahen Umgebung der Ruhelage betrachtet und die nichtplausiblen Gebiete hinreichend klein sind.



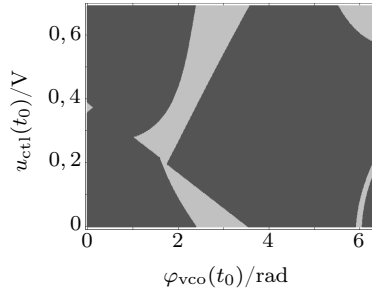
(a) Referenzphase  $\varphi_{\text{ref}} = 0$   
und PFD Anfangszustand  
 $\mathcal{S}_i = \mathcal{S}_{+1}$



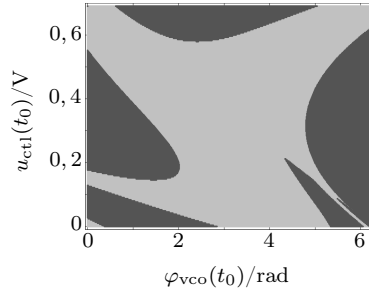
(b) Referenzphase  $\varphi_{\text{ref}} = 0$   
und PFD Anfangszustand  
 $\mathcal{S}_i = \mathcal{S}_0$



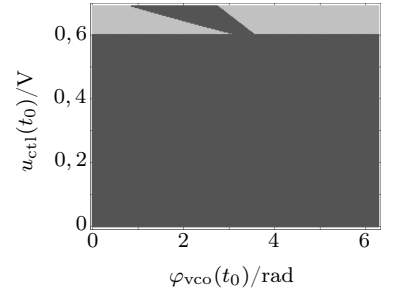
(c) Referenzphase  $\varphi_{\text{ref}} = 0$   
und PFD Anfangszustand  
 $\mathcal{S}_i = \mathcal{S}_{-1}$



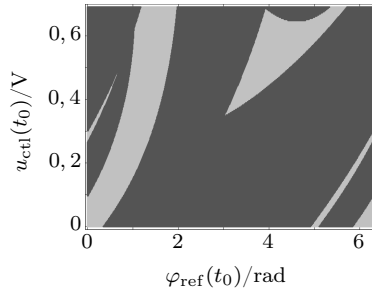
(d) Referenzphase  $\varphi_{\text{ref}} = \pi$   
und PFD Anfangszustand  
 $\mathcal{S}_i = \mathcal{S}_{+1}$



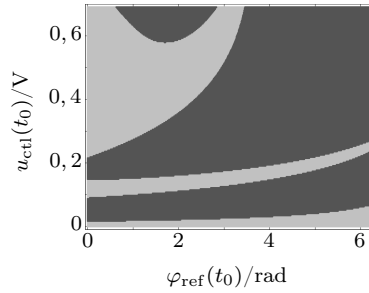
(e) Referenzphase  $\varphi_{\text{ref}} = \pi$   
und PFD Anfangszustand  
 $\mathcal{S}_i = \mathcal{S}_0$



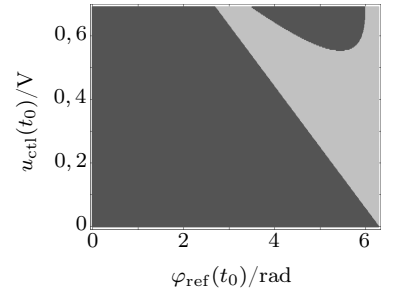
(f) Referenzphase  $\varphi_{\text{ref}} = \pi$   
und PFD Anfangszustand  
 $\mathcal{S}_i = \mathcal{S}_{-1}$



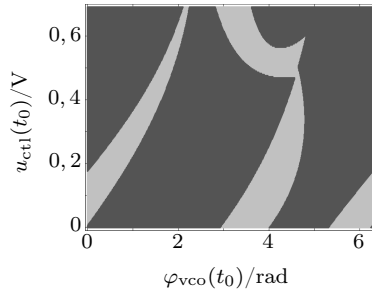
(g) Referenzphase  $\varphi_{\text{vco}} = 0$   
und PFD Anfangszustand  
 $\mathcal{S}_i = \mathcal{S}_{+1}$



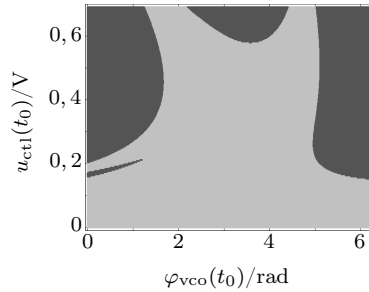
(h) Referenzphase  $\varphi_{\text{vco}} = 0$   
und PFD Anfangszustand  
 $\mathcal{S}_i = \mathcal{S}_0$



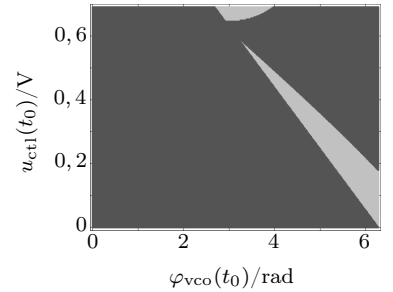
(i) Referenzphase  $\varphi_{\text{vco}} = 0$   
und PFD Anfangszustand  
 $\mathcal{S}_i = \mathcal{S}_{-1}$



(j) Referenzphase  $\varphi_{\text{vco}} = \pi$   
und PFD Anfangszustand  
 $\mathcal{S}_i = \mathcal{S}_{+1}$



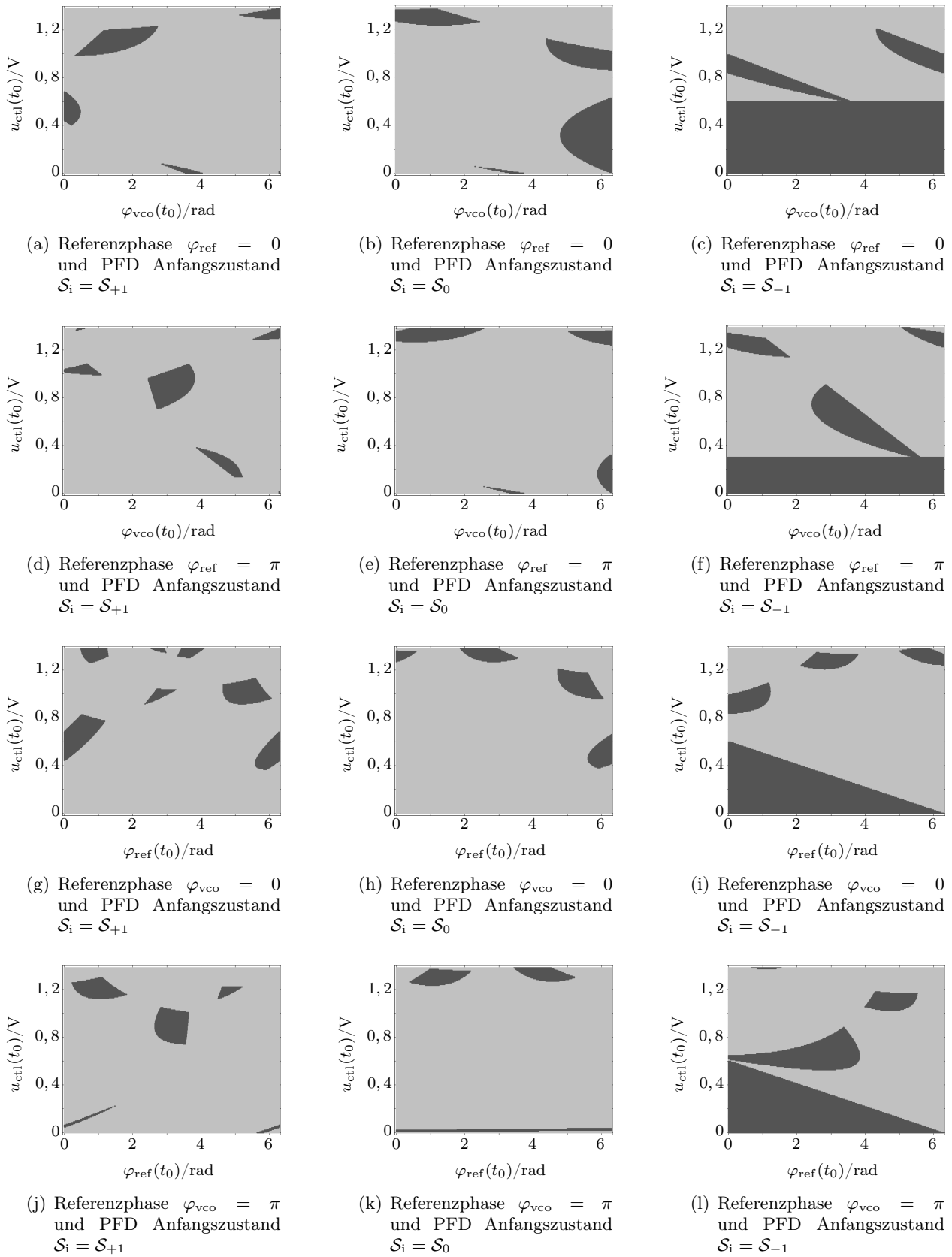
(k) Referenzphase  $\varphi_{\text{vco}} = \pi$   
und PFD Anfangszustand  
 $\mathcal{S}_i = \mathcal{S}_0$



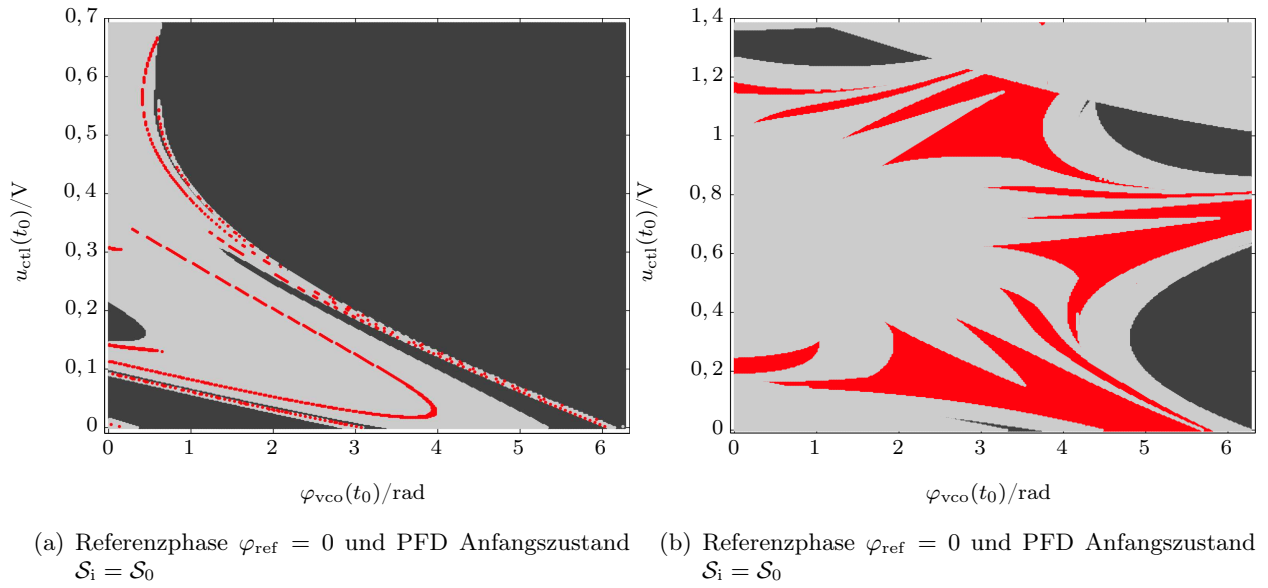
(l) Referenzphase  $\varphi_{\text{vco}} = \pi$   
und PFD Anfangszustand  
 $\mathcal{S}_i = \mathcal{S}_{-1}$

**Abbildung 5.23.:** Darstellung der Bereiche mit linksdrehenden Phasen (hellgrau) und mit rechtsdrehender Phase (dunkelgrau). Bei diesen Simulationen wurde  $\omega_{\text{ref}} = \omega_{\text{ref},2}$  gerade so gewählt, dass der Entwurf direkt auf der von GARDNER beschriebenen Grenze für einen Regelkreis der Ordnung Zwei liegt.

## 5. Modellierung und Simulation digitaler Phasenregelkreise



**Abbildung 5.24.:** Darstellung der Bereiche mit linksdrehenden Phasen (hellgrau) und mit rechtsdrehender Phase (dunkelgrau). Bei diesen Simulationen wurde  $\omega_{\text{ref}} = \omega_{\text{ref},2}$  gewählt.

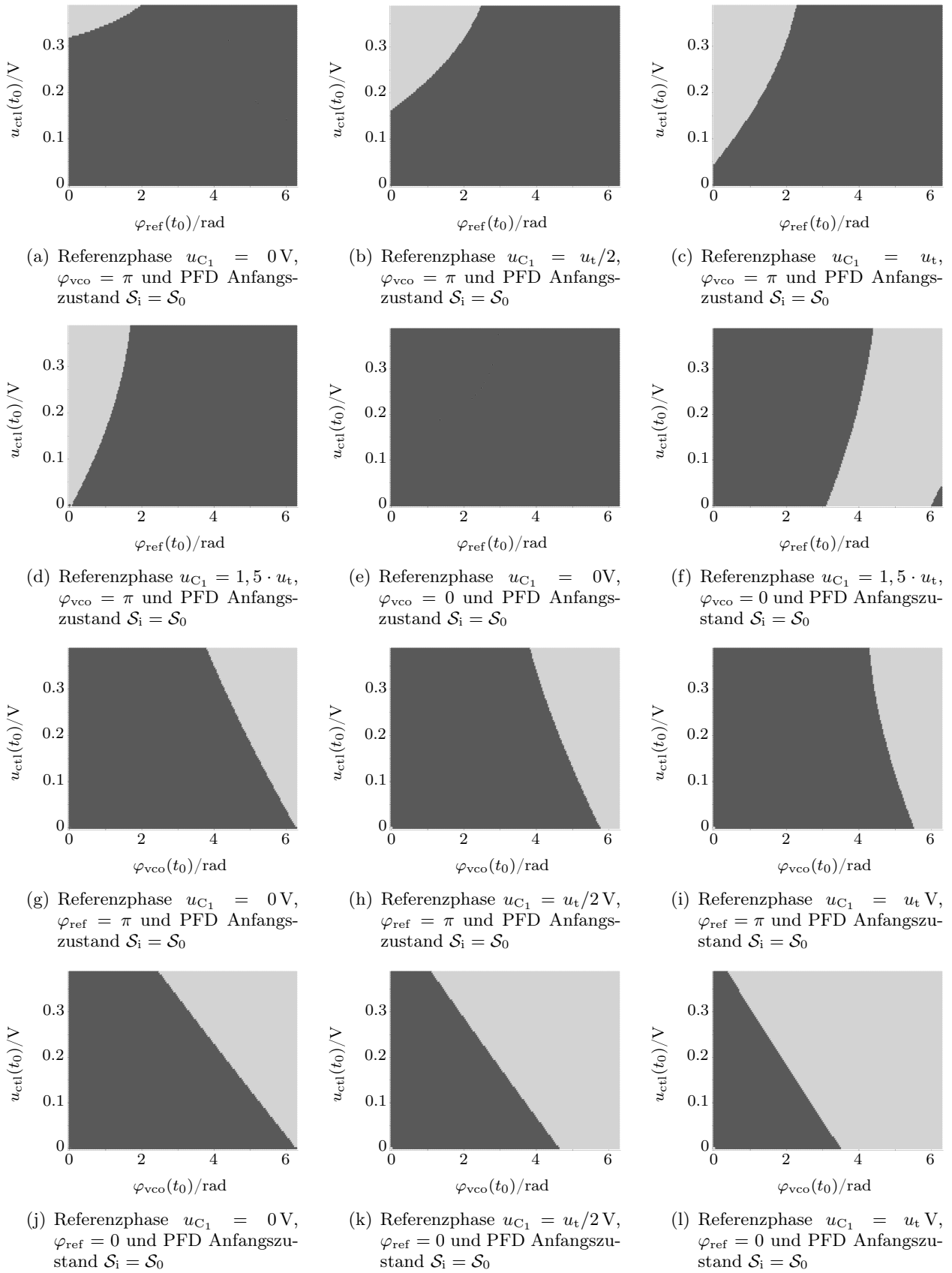


**Abbildung 5.25.:** Dargestellt sind die Bereiche des Zustandsraums, in denen eine rechtsdrehende Phase (dunkelgrau) auftritt, eine linksdrehende Phase mit streng monoton fallender Spannung zu den Zeitpunkten der Phasennulldurchgänge vorliegt (hellgrau) und sich eine linksdrehende Phase mit einer Oszillation auf der Spannung zu den Zeitpunkten der Phasennulldurchgänge ergibt (rot).

Im Folgenden soll gezeigt werden, wie sich der Zustandsraum hinsichtlich simulativer Betrachtungen zur GARDNER-Stabilitätsgrenze verhält. Demnach soll untersucht werden, inwiefern sich neben den nichtplausiblen Startwerten im Zustandsraum plausible befinden, bei denen die Simulation in den Fixpunkt konvergiert, d. h., dass das System ein stabiles Verhalten aufweist. Dazu ist es erforderlich, eine geeignete Bedingung zu finden, die den Algorithmus terminiert. Ein sinnvolles Kriterium zur Beurteilung der Stabilität des Regelkreises liefert Folgerung 3.1. Können die Spannungswerte für  $u_{\text{ctl}}(t_{\text{zc},k})$  zu den Zeitpunkten  $t_{\text{zc},k}$  mit  $k \in \mathbb{N}$ , an denen ein Nulldurchgang des Phasenfehlers identifiziert wurde, durch eine (streng) monoton fallende Funktion beschrieben werden, die in den Fixpunkt konvergiert, so ist der Regelkreis asymptotisch stabil. Da das System hinsichtlich der Phasennulldurchgänge auch eine Oszillation auf der Regelspannung beinhalten kann, ist es sogar erforderlich, dass über eine gewisse Anzahl von Phasennulldurchgängen gemittelt werden muss, um zu überprüfen, ob das System konvergiert. Mit zunehmender Eingangsfrequenz  $f_{\text{ref}}$  werden auch die Bereiche größer, in denen das Modell bezüglich der Phasennulldurchgänge streng monoton fallend in die Ruhelage konvergiert.

Unter Berücksichtigung, dass im Allgemeinen für den Entwurf ohnehin eine der verschiedenen Faustformeln angesetzt werden, ist die Grenze von GARDNER jedoch als erster Ansatzpunkt eine gute Näherung.

## 5. Modellierung und Simulation digitaler Phasenregelkreise



**Abbildung 5.26.:** Darstellung der Bereiche mit linksdrehenden Phasen (dunkelgrau) und mit rechtsdrehender Phase (hellgrau). Bei diesen Simulationen wurde  $f_{\text{ref}} = 20,1 \text{ MHz}$  gewählt.

Im Folgenden werde ein Regelkreis der Ordnung Drei angesetzt, wobei dann die Gleichung (4.8a) zur Stabilitätsanalyse verwendet werden muss. Die Entwurfsparameter wurden nach [25] mit  $I_p = 30 \mu\text{A}$ ,  $N = 3$ ,  $K_v = 233,45 \text{ MHz/V}$ ,  $C_1 = 10 \text{ pF}$ ,  $R_1 = 20,98 \text{ k}\Omega$  und  $C_2 = C_1/10$  gewählt. Für eine Referenzfrequenz  $f_{\text{ref}} = 20 \text{ MHz}$  liegt der Entwurf auf der Stabilitätsgrenze. Da hier ein Teilungswert  $N > 1$  angesetzt wurde und somit in diesem Fall die Eingangsspannungen für kleinere Eingangsfrequenzen auch noch recht groß sind, ergeben sich auch weniger Bereiche, in denen die Phase des VCO-Signals in die falsche Richtung dreht. Es ergibt sich jedoch ein ähnlicher Sachverhalt wie bei dem Regelkreis der Ordnung Zwei. Demnach kann die Stabilitätsgrenze nach GARDNER zwar als valide bezeichnet werden, jedoch ergibt sich durch die physikalische Randbedingung der linksdrehenden Phasen eine gewisse Einschränkung. In der näheren Umgebung dieser Grenze liefert nicht jeder Anfangszustand eine plausible Lösung des Differenzialgleichungssystems.





---

## Zusammenfassung

---

In dieser Arbeit wurde das dynamische Verhalten digitaler Phasenregelkreise untersucht. Dabei wurde die digitale und analoge Dynamik des Systems hinsichtlich der Schaltsequenzen des Phasen- und Frequenz-Detektors in Zusammenhang mit den Nulldurchgängen des Phasenfehlers sowie des Ausrastens des Regelkreises gebracht. Durch diese Analyse konnte eine Charakterisierung des Einrast- und Ausrastverhaltens dargelegt und entsprechende Zustandsautomaten entwickelt werden, die für *Fast-Locking*-Anwendungen verwendet werden können. Insbesondere können diese endlichen Automaten dazu gebraucht werden, Charakteristika, wie Stabilität und den *Pull-Out*-Bereich des Regelkreises simulativ zu identifizieren und somit auch für aufwendige Parameteroptimierungen oder Variationen benutzt werden. Dabei dienen die Zustandssequenzen und somit die Zustandsautomaten als Abbruchkriterium innerhalb der Simulation.

Bei der Untersuchung von Phasenregelkreisen zweiter Ordnung wurden die Modelle und Stabilitätsuntersuchungen von GARDNER, VAN PAEMEL und ACCO vorgestellt. Hinsichtlich der von GARDNER und VAN PAEMEL hergeleiteten Grenzen konnte schon von ACCO dargelegt werden, dass es sich bei beiden Linearisierungen um eine Linearisierung im Sektor Zwei handelt. Die Erweiterungen von ACCO, d. h. die Linearisierung der Einzelgebiete, ergaben genauere Erkenntnisse über die Stabilität und den Parameterraum. Dabei konnte hier gezeigt werden, dass der durch die Linearisierung entstehende Fehler bis auf den Sektor Drei parameterabhängig ist, wodurch sich gerade für das lineare, kontinuierliche Modell der Unterschied zum idealen jedoch nichtlinearen Modell hinsichtlich des Dämpfungsbeiwertes erklären lässt. Des Weiteren konnte das ereignisgesteuerte Modell nach HEDAYAT für einen Regelkreis der Ordnung Zwei so erweitert werden, dass sich ein schaltendes, nichtlineares, autonomes Differenzengleichungssystem ergibt. Dieses wurde mittels der TAYLOR-Reihenentwicklung linearisiert und es konnten exakt die Ungleichungen für die Parameter  $a$  und  $b$  gefunden werden, die von ACCO für das Modell nach VAN PAEMEL bestimmt wurden. Ferner wurden für die Parameter  $a$  und  $b$  Bedingungen gefunden, für die eine gemeinsame LYAPUNOV-Funktion existiert. Somit konnte gezeigt werden, dass das

schaltende linearisierte Modell für bestimmte Parameterwerte  $a$  und  $b$  quadratisch stabil ist.

Für den Regelkreis der Ordnung Zwei wurde ein analytisches Modell mit *Dead-Zone* auf Basis des Modells nach VAN PAEMEL (bzw. des normierten Modells nach ACCO) eingeführt. Dieses Modell stellt sich als schaltendes, nichtlineares, autonomes Differenzengleichungssystem dar. Das Differenzengleichungssystem wurde hinsichtlich der Topologie untersucht. Somit konnte das Verhalten des *Dead-Zone*-Modells genau dargelegt werden. Des Weiteren hat sich herausgestellt, dass dieses Modell nicht mehr einen Fixpunkt besitzt, vielmehr beinhaltet dieses Modell eine Fixpunkt-Linie, d. h. eine Linie um den Ursprung, wobei jeder Punkt dieser Linie gerade einem Fixpunkt entspricht. Das linearisierte Modell ergab sich als ein stückweise affines System. Unter Betrachtung der charakteristischen Polynome konnten zwei Bedingungen für die Stabilität des Systems angegeben werden. Die Betrachtung des neu eingeführten Modells mit *Dead-Zone* basierend auf der ereignisgesteuerten Modellierung lieferte die gleiche Schlussfolgerung hinsichtlich der Stabilität wie das neu dargelegte Modell mit *Dead-Zone* nach VAN PAEMEL. Hinzukommend wurde das Modell nach VAN PAEMEL durch das nichtideale Auftreten eines Leckstromes erweitert. Dabei konnte gezeigt werden, dass das System nicht mehr im Ursprung den kritischen Punkt beinhaltet, sondern dieser ausschließlich in Sektor Eins liegt. Auf Basis der Erweiterung des ereignisorientierten Konzeptes und der Approximation der Lösung des Differenzialgleichungssystems des Filters, bzw. der Phasengleichung des spannungsgesteuerten Oszillators konnte ein ereignisgesteuertes analytisches Modell für einen Filter der Ordnung  $n$  angegeben werden. Zudem konnte dies in ein nichtlineares, autonomes, schaltendes Differenzengleichungssystem umgeschrieben werden. Basierend auf diesem Modell wurde eine Stabilitätsgrenze für einen Regelkreis der Ordnung Drei ermittelt und mit der von GARDNER verglichen. Die neu eingeführte Grenze stellt sich als wesentlich einfachere Randbedingung dar, wobei sie aber als etwas konservativer zu werten ist.

Hinsichtlich der Simulation digitaler *Phase-locked Loop*-Architekturen wurde die ereignisgesteuerte Modellierung nach HEDAYAT oder DEMIR verallgemeinert. Diesbezüglich wurden insbesondere Nichtlinearitäten und Nichtidealitäten, wie *Dead-Zone*, endliche Flankensteilheiten der Strompulse, *Timing-Mismatch*, *Current-Mismatch* und Leckstrom in diese Modellierungsmethodik integriert. Dabei konnte durch die Einführung einer detaillierten Notation des digitalen Phasendetektors eine einfachere und effizientere Modellierung erfolgen. Durch das Einfügen neuer Zustände im sequenziellen Automaten können verschiedene Formen der Nichtidealitäten des Regelkreises als effizientes Verhaltensmodell abgebildet werden. Es wurde eine zusätzliche Menge für die verschiedenen Nichtidealitäten definiert, damit auch die Zeit für den endlichen Automaten identifiziert werden kann. Durch diese Modellierung können Parameteroptimierungen sowie Studien effizient durchgeführt werden.

Als Sonderbeispiel wurde das nichtlineare approximative *Alias-Locked Loop*-Modell dem ereignisgesteuerten Modell gegenübergestellt. Bezüglich der ereignisgesteuerten Modellierung ergab sich der Sachverhalt, dass keine transzendente Gleichung mit Hilfe numerischer Verfahren gelöst werden muss. Vielmehr konnte die Modellierung der Digitalkomponenten

ausgenutzt werden. Somit ergibt sich hier gerade bei Verwendung Filter hoher Ordnung ein sehr einfaches Modell, bei dem auch die eingeführten Modelle der Nichtidealitäten den Algorithmus nicht erschweren oder verkomplizieren. Hinzukommend kann die Berechnung aller Zeitpunkte vollständig analytisch erfolgen, da ausschließlich die beiden Referenzsignale die Zeitpunkte der Berechnung vorgeben. Zudem konnte gezeigt werden, dass der Einzugsbereich der nichtlinearen Approximation kleiner des *Pull-Out*-Bereiches des nichtlinearen Modells ist und somit für praktische Betrachtungen nicht relevant ist. Des Weiteren wurde durch das ereignisgesteuerte Modell simulativ eine Grenze für den Einzugsbereich zweier Ruhelagen bestimmt.

Bei der Simulation digitaler Phasenregelkreise mit Filtern zweiter und dritter Ordnung wurde das dynamische Verhalten in der Nähe der Stabilitätsgrenzen von GARDNER untersucht. Es konnte gezeigt werden, dass die Stabilitätsgrenzen von GARDNER hinsichtlich der simulativen Untersuchungen nur schwierig zu bestätigen sind, sofern sich die Regelspannung in der Nähe der Nullgrenze befindet, da sich der Zustandsraum dann in Bereiche aufteilt, in denen zum Teil keine plausible Simulation durchgeführt werden kann. Als Plausibilitätskriterium wurde dabei die linksdrehende Phase angesetzt. Die Anfangsbedingungen definieren gerade die Bereiche, bei denen eine physikalisch plausible Simulation möglich ist. Dabei konnte gezeigt werden, dass die sogenannten Faustformeln oder Daumenregeln hinsichtlich dieser Grenze insofern zu interpretieren sind, dass, wenn diese eingehalten werden, die Bereiche, in denen die Plausibilitätsprüfung nicht standhält, nur an Randgebieten (wenn die Spannung mit Null initialisiert ist und die Phasen ungünstig zueinander liegen und/oder der Phasen- und Frequenz-Detektor im Zustand  $\mathcal{S}_{-1}$  beginnt) zu finden und nicht verstreut im Zustandsraum sind. Des Weiteren sind diese Gebiete dann im Allgemeinen auch sehr klein gegenüber dem Zustandsraum.



---

## Ausblick

---

Hinsichtlich der gemeinsamen LYAPUNOV-Funktionen für Regelkreise zweiter Ordnung kann untersucht werden, ob es weitere LYAPUNOV-Funktionen gibt, die einen größeren Parameterraum abdecken oder weitere bestimmen, um tiefergehende Aussagen über die globale Stabilität zu erhalten.

Innerhalb der analytischen Modellierung der Regelkreise zweiter Ordnung können auch die Nichtidealitäten, *Current-Mismatch* und *Timing-Mismatch* auf ähnliche Weise modelliert werden, wie es bei dem *Dead-Zone*-Modell oder dem Modell mit Leckstrom erfolgt ist. Dadurch könnten die Auswirkungen der Nichtidealitäten auf die Stabilität mittels analytischer Ausdrücke beschrieben werden, wodurch sich auch der Entwurf erheblich vereinfachen ließe. Außerdem kann die nichtlineare Charakteristik des spannungsgesteuerten Oszillators durch eine stückweise lineare Darstellung in das Modell nach VAN PAEMEL oder auch in das erweiterte Modell nach HEDAYAT integriert werden, um diesbezüglich Stabilitätsaussagen zu erhalten. Damit wird jeder Sektor entsprechend der Aufteilung der Kennlinie unterteilt und es werden sich somit mehr Mengen ergeben, auf denen Punkttransformationen definiert sind, die sich entsprechend des Verstärkungsbeiwertes des spannungsgesteuerten Oszillators unterscheiden. Hinzukommend sollte überprüft werden, ob inverse Modelle zu den verschiedenen Modellen existieren.

Hinsichtlich der Stabilität und der Modellierung von Phasenregelkreisen höherer Ordnung kann durch Linearisierung der Phasengleichung des spannungsgesteuerten Oszillators durch die TAYLOR-Reihenentwicklung ein autonomes, nichtlineares Modell bestimmt werden, um eine bijektive Abbildung angeben zu können. Diesbezüglich müsste untersucht werden, inwieweit sich die Linearisierung als konservativer herausstellt als die, die von GARDNER beschrieben wurde. Die Phasengleichung des Oszillators ließe sich auch linearisieren, indem die Differenziale durch Differenzen ersetzt werden. Des Weiteren müssten diese Gleichungen ebenfalls mittels der TAYLOR-Reihenentwicklung vereinfacht werden, damit die analytische Bestimmung des nächsten Zustandes ermöglicht wird. Insbesondere können diese beiden

Verfahren dazu verwendet werden, digitale Phasenregelkreise mit einer *Charge-Pump* mit Spannungsausgang zu modellieren und so auch für verschiedene Phasendetektoren analytische Modelle und Stabilitätsgrenzen zu berechnen. Dazu ist es erforderlich, die Topologie der verschiedenen Zustandsräume zu untersuchen. Eine andere Variante der Modellierung digitaler Phasenregelkreise höherer Ordnung könnte die Betrachtung des Modells nach VAN PAEMEL liefern. Dazu könnte das Integral der Regelspannung mittels einer Form der NEWTON-COTES-Formel oder der TAYLOR-Reihenentwicklung approximiert werden, so dass mittels der Formeln von CARDANO oder den Lösungen für ein Polynom 4. Grades sich eine bijektive Abbildung bestimmen lässt. Durch diese geeignet zu wählende Approximation ließen sich die zu betrachtenden Gleichungen hinsichtlich der Zustände umformen, wodurch sich ein analytischer Ausdruck ergeben würde. Dieser muss dann hinsichtlich Topologie und Stabilität untersucht werden. Neben der Erhöhung der Ordnung des Filters, ließe sich das approximierte, autonome, schaltende Differenzengleichungssystem durch einen schaltenden Teiler erweitern. Dementsprechend würden sich die Gleichungen abändern und es ergeben sich zusätzliche Differenzengleichungen, die das Schalten des Teilungswertes bestimmen.

Zwar hat sich gezeigt, dass die ereignisorientierte Modellierung ein effektiver und recht intuitiver Ansatz zur Modellierung der inhärenten Nichtlinearitäten und verschiedener Schleifenordnungen ist, jedoch ist eine vollständige Umsetzung der vorgestellten Modellierungen derzeit nur in Matlab erfolgt. Gerade durch die Einführung der Notation des Digitalteils bietet sich ein objektorientierter Ansatz unter C++ an, was gerade in Bezug auf die Modularität ein großer Vorteil wäre. Dadurch ließe sich der allgemeine Ansatz der ereignisorientierten Modellierung zur Lösung des Differenzialgleichungssystems verwenden und nur die Modelle der einzelnen Funktionsgruppen würden sich ändern.

---

## Theoretische Grundlagen

---

### A.1. Definitheit von Matrizen

Tiefergehende Darstellung bezüglich der Definitheit von Funktionen und Matrizen sind in [39, 40, 42, 43, 98] dargelegt.

#### **Definitheit: Eigenwerte**

Eine symmetrische Matrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  wird als

- positiv definit bezeichnet, wenn alle Eigenwerte  $\lambda_i$  mit  $i \in \mathbb{N}$  größer Null sind.
- positiv semidefinit bezeichnet, wenn alle Eigenwerte  $\lambda_i$  mit  $i \in \mathbb{N}$  größer oder gleich Null sind.
- negativ definit bezeichnet, wenn alle Eigenwerte  $\lambda_i$  mit  $i \in \mathbb{N}$  kleiner Null sind.
- negativ semidefinit bezeichnet, wenn alle Eigenwerte  $\lambda_i$  mit  $i \in \mathbb{N}$  kleiner gleich Null sind.
- indefinit bezeichnet, wenn mindestens ein Eigenwert größer Null ist und mindestens ein Eigenwert kleiner Null ist.

### SYLVESTER-Kriterium

Eine symmetrische Matrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  besitzt  $n$  Hauptminoren, die wie folgt definiert sind:

$$|\mathbf{A}_i| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix} \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad (\text{A.1})$$

Für eine symmetrische Matrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  lassen sich die folgenden Aussagen treffen:

- Sind alle Hauptminoren positiv, d. h. es gilt  $|\mathbf{A}_i| > 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}$ , so wird  $\mathbf{A}$  als positiv definit bezeichnet.
- Sind alle Hauptminoren alternierend negativ und positiv, so wird  $\mathbf{A}$  als negativ definit bezeichnet.

### A.2. Das JURY-Kriterium

Dieser Abschnitt ist [40] entnommen. Mit Hilfe des folgenden Verfahrens lässt sich untersuchen, ob ein Polynom der Form

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 \quad (\text{A.2})$$

ein Einheitskreispolynom darstellt, wobei  $a_n > 0$ . Des Weiteren werden die Koeffizienten nach Tabelle A.1 angeordnet. Das JURY-Kriterium wird auch als Determinantenverfahren nach SCHUR-COHN-JURY bezeichnet, denn die Koeffizienten der Tabelle A.1 werden durch

$$b_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_n & a_k \end{vmatrix}, \quad c_k = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-1-k} \\ b_{n-1} & b_k \end{vmatrix}, \quad d_k = \begin{vmatrix} c_0 & c_{n-2-k} \\ c_{n-2} & c_k \end{vmatrix}, \quad \dots$$

$$q_0 = \begin{vmatrix} p_0 & p_3 \\ p_3 & b_0 \end{vmatrix}, \quad q_1 = \begin{vmatrix} p_0 & p_2 \\ p_3 & b_1 \end{vmatrix}, \quad q_2 = \begin{vmatrix} p_0 & p_1 \\ p_3 & b_2 \end{vmatrix}$$

berechnet. Das charakteristische Polynom nach (A.2) mit  $a_n > 0$  besitzt genau dann nur



**Tabelle A.1.:** Stabilitätskriterium nach SCHUR-COHN-JURY

	$z^0$	$z^1$	$z^2$	$\dots z^{n-k} \dots$	$z^{n-2}$	$z^{n-1}$	$z^n$
1	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$\dots a_{n-k} \dots$	$a_{n-2}$	$a_{n-1}$	$a_n$
2	$a_n$	$a_{n-1}$	$a_{n-2}$	$\dots a_k \dots$	$a_2$	$a_1$	$a_0$
3	$b_0$	$b_1$	$b_3$	$\dots b_{n-1-k} \dots$	$b_{n-2}$	$b_{n-1}$	—
4	$b_{n-1}$	$b_{n-2}$	$b_{n-3}$	$\dots b_k \dots$	$b_1$	$b_0$	—
5	$c_0$	$c_1$	$c_2$	$\dots c_{n-2-k} \dots$	$c_{n-1}$	—	—
6	$c_{n-2}$	$c_{n-3}$	$c_{n-4}$	$\dots c^k \dots$	$c_0$	—	—
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	—	—	—	
$2n-5$	$p_0$	$p_1$	$p_2$	$p_3$	—	—	—
$2n-4$	$p_3$	$p_2$	$p_1$	$p_0$	—	—	—
$2n-3$	$p_0$	$p_1$	$p_2$	—	—	—	—

Nullstellen im Einheitskreis, wenn die folgenden  $n+1$  Bedingungen erfüllt sind:

$$P(z=1) > 0 \quad (1)$$

$$P(z=-1) > 0 \quad \forall n \text{ gerade} \quad (2a)$$

$$P(z=-1) < 0 \quad \forall n \text{ ungerade} \quad (2b)$$

$$|a_0| > a_n \quad \text{mit } a_n > 0 \quad (3)$$

$$|b_0| > |b_{n-1}| \quad (4)$$

$$|c_0| > |c_{n-2}| \quad (5)$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$|q_0| > |q_2| \quad (n+1)$$

Wird beispielsweise ein Polynom der Ordnung Zwei angesetzt mit

$$N(z) = a_2 z^2 + a_1 z + a_0, \quad (A.3)$$

so ist es hinreichend, wenn  $a_2 > 0$ ,  $a_2 > |a_0|$ ,  $N(1) > 0$  und  $N(-1) > 0$  gelten, damit  $N(z)$  ein Einheitskreispolynom ist.

## A.3. Endlicher Automat

Im Folgenden sollen die grundlegenden Definitionen eines Zustandsautomaten von MEALY und MOORE dargestellt werden.

**Definition A.1** (*Endlicher Zustandsautomat nach MEALY*) Ein endlicher Automat wird durch einen 6-Tupel

$$\mathcal{Z}_{\text{MEALY}} = (\mathcal{I}, \mathcal{O}, \mathcal{S}, \mathcal{S}_i, \omega, \delta) \quad (A.4)$$

## A. Theoretische Grundlagen

---

beschrieben, wobei  $\mathcal{I}$  die endliche Eingabemenge,  $\mathcal{O}$  die endliche Ausgabemenge,  $\mathcal{S}$  die endliche Zustandsmenge,  $\mathcal{S}_i$  den Anfangszustand mit  $\mathcal{S}_i \in \mathcal{S}$ ,  $\omega$  die Funktion zur Berechnung der aktuellen Ausgabe und  $\delta$  die Funktion zur Berechnung des Folgezustands beschreiben.

**Definition A.2** (Endlicher Zustandsautomat nach MOORE) Ein endlicher Automat wird durch einen 5-Tupel

$$\mathcal{Z}_{\text{MOORE}} = (\mathcal{I}, \mathcal{S}, \mathcal{S}_i, \mathcal{F}, \delta) \tag{A.5}$$

beschrieben, wobei  $\mathcal{I}$  die endliche Eingabemenge,  $\mathcal{S}$  die endliche Zustandsmenge,  $\mathcal{S}_i$  den Anfangszustand mit  $\mathcal{S}_i \in \mathcal{S}$ ,  $\mathcal{F}$  die Menge von Endzuständen mit  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{S}$  und  $\delta$  die Funktion zur Berechnung des Folgezustands beschreiben.

Es sei angemerkt, dass beide Definitionen äquivalent sind und sich ineinander überführen lassen. Der äquivalente MOORE-Automat besitzt soviele Zustände wie der entsprechende MEALY- Automat verschiedene Paare an Folgezuständen und Ausgaben aufweist.

---

## Ergänzungen zur Modellierung von Regelkreisen hoher Ordnung

---

Auf der Grundlage des in Kapitel 4.4 dargelegten Verfahrens sollen im Folgenden kurz die Ergebnisse für einen Regelkreis der Ordnung Vier und Fünf dargelegt werden.

### B.1. Stabilitätstest zum Modell vierter Ordnung

Das Filter werde durch die Matrix

$$\mathbf{A}_{\text{LF}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1 R_1} & \frac{1}{C_1 R_1} & 0 \\ \frac{1}{R_1 C_2} & -\frac{1}{R_3 C_2} - \frac{1}{R_1 C_2} & \frac{1}{R_3 C_2} \\ 0 & \frac{1}{C_3 R_3} & -\frac{1}{C_3 R_3} \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

und die Vektoren

$$\mathbf{b}_{\text{LF}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C_2} & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (\text{B.2})$$

$$\mathbf{c}_{\text{LF}}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

definiert, wobei  $d = 0$  gilt. Dies entspricht dem Filter 3. Ordnung nach Abbildung B.1. Entsprechend den Betrachtungen aus Kapitel 4.4.2 ergibt sich bei der TAYLOR-

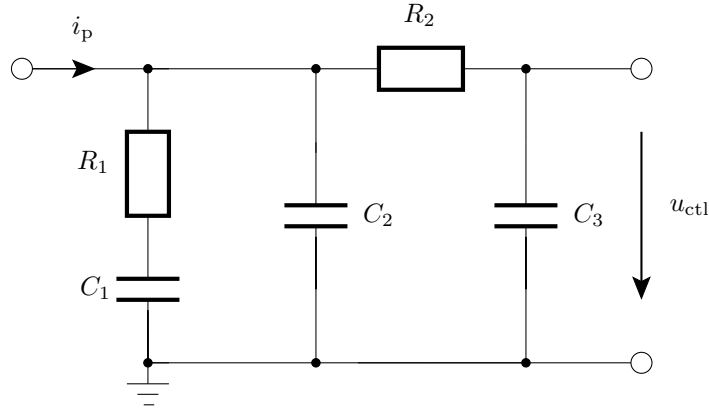


Abbildung B.1.: Schematische Darstellung eines Filters 3. Ordnung

Reihenentwicklung die JACOBI-Matrix

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{T}{R_1 C_1} & \frac{T}{R_1 C_1} & 0 & 0 \\ \frac{T}{C_2 R_1} & \frac{I_p K_v T^3}{2 C_2 C_3 R_3} - \frac{T}{C_2 R_1} + 1 - \frac{T}{R_3 C_2} & \frac{I_p K_v T^2}{2 C_2 C_3 R_3} - \frac{I_p K_v T^2}{C_2} + \frac{T}{R_3 C_2} & \frac{I_p T}{C_2} \\ 0 & \frac{T}{R_3 C_3} & 1 - \frac{T}{R_3 C_3} & 0 \\ 0 & -\frac{K_v T^2}{2 R_3 C_3} & -K_v T + \frac{K_v T^2}{R_3 C_3} & 1 \end{bmatrix}.$$

Des Weiteren kann das charakteristische Polynom

$$D(\lambda) = p_4 \lambda^4 + p_3 \lambda^3 + p_2 \lambda^2 + p_1 \lambda + p_0 \quad (\text{B.4})$$

mit den Koeffizienten

$$p_0 = 1 + \frac{(C_2 + C_3 + C_1) T^2}{R_1 C_1 R_3 C_3 C_2} + \frac{(-C_1 R_3 C_3 - R_1 C_1 C_2 - R_3 C_3 C_2 - R_1 C_1 C_3) T}{R_1 C_1 R_3 C_3 C_2}, \quad (\text{B.5})$$

$$p_1 = -4 + \frac{I_p K_v T^4}{2 R_1 C_1 R_3 C_3 C_2} - \frac{I_p K_v T^3}{2 R_3 C_3 C_2} + \frac{(-4 C_2 - 4 C_3 - 4 C_1) T^2}{2 R_1 C_1 R_3 C_3 C_2} + \frac{(6 C_1 R_3 C_3 + 6 R_1 C_1 C_2 + 6 R_1 C_1 C_3 + 6 R_3 C_3 C_2) T}{2 R_1 C_1 R_3 C_3 C_2}, \quad (\text{B.6})$$

$$p_2 = 6 + \frac{I_p K_v T^4}{2 R_1 C_1 R_3 C_3 C_2} + \frac{(2 C_1 + 2 C_3 + 2 C_2) T^2}{2 R_1 C_1 R_3 C_3 C_2} + \frac{(-6 R_1 C_1 C_2 - 6 R_3 C_3 C_2 - 6 R_1 C_1 C_3 - 6 C_1 R_3 C_3) T}{2 R_1 C_1 R_3 C_3 C_2}, \quad (\text{B.7})$$

$$p_3 = -4 + \frac{I_p K_v T^3}{2R_3 C_3 C_2} + \frac{(2R_1 C_1 C_3 + 2R_3 C_3 C_2 + 2C_1 R_3 C_3 + 2R_1 C_1 C_2) T}{2R_1 C_1 R_3 C_3 C_2} \quad (\text{B.8})$$

und

$$p_4 = 1 \quad (\text{B.9})$$

angegeben werden. Durch das JURI-Kriterium (siehe Anhang A.2) kann überprüft werden, ob das Polynom nach Gleichung B.4 ein Einheitskreispolynom ist. Da sich jedoch die Auswertung der Fünf Bedingungen als recht kompliziert und länglich darstellt, liefert diese Untersuchen keine leicht auszuwertende Stabilitätsgrenze, jedoch zumindest einen numerisch auszuwertenden Test. Damit kann recht einfach überprüft werden, ob der durchgeführte Entwurf eines Phasenregelkreises 4. Ordnung die Stabilitätsanforderung erfüllt, und inwieweit die einzelnen Parameter variiert werden können.

## B.2. Stabilitätstest zum Modell fünfter Ordnung

Das Filter werde durch die Matrix

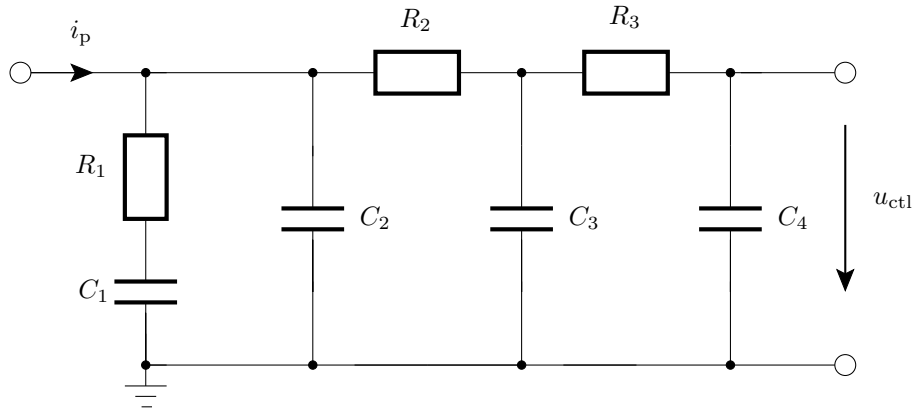
$$\mathbf{A}_{\text{LF}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1 R_1} & \frac{1}{C_1 R_1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{R_1 C_2} & -\frac{1}{R_1 C_2} - \frac{1}{R_3 C_2} & \frac{1}{R_3 C_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_3 C_3} & -\frac{1}{R_3 C_3} - \frac{1}{R_4 C_3} & \frac{1}{R_4 C_3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_4 R_4} & -\frac{1}{C_4 R_4} \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

und die Vektoren

$$\mathbf{b}_{\text{LF}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C_2} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (\text{B.11})$$

$$\mathbf{c}_{\text{LF}}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.12})$$

definiert. Es gilt  $d = 0$ , wobei dies dem Filter 4. Ordnung nach Abbildung B.2 entspricht. Nach den Betrachtungen aus Kapitel 4.4.2 ergibt sich bei der TAYLOR-Reihenentwicklung



**Abbildung B.2.:** Schematische Darstellung eines Filters 4. Ordnung

die JACOBI-Matrix

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{a_{11}} & \frac{1}{a_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{a_{12}} & 1 - \frac{1}{a_{12}} - \frac{1}{a_{32}} & \frac{1}{a_{32}} - \frac{b_2}{a_{44}} & -b_2 + \frac{2b_2}{a_{44}} & \frac{2b_2}{KT} \\ 0 & \frac{1}{a_{33}} & 1 - \frac{1}{a_{33}} - \frac{1}{a_{43}} & \frac{1}{a_{43}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_{44}} & 1 - \frac{1}{a_{44}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{K_v T}{2a_{44}} & -K_v T + \frac{K_v T}{2a_{44}} & 1 \end{bmatrix}$$

mit

$$b_2 = \frac{K_v I_p T^2}{2C_2} \quad (\text{B.13})$$

und

$$a_{ij} = \frac{R_i C_j}{T}, \quad (\text{B.14})$$

wobei  $i, j \in \mathbb{N}$ . Aufgrund der Übersichtlichkeit sei hier das charakteristische Polynom nicht angegeben. Genau wie im vorigen Kapitel lässt sich auch hier mittels des JURI-Kriteriums die Stabilität testen und hinsichtlich einzelner Parameter die Stabilitätsanforderungen überprüfen.

---

## Validität des Modells eines Phasenregelkreises 2. Ordnung

---

Im Folgenden wird das ereignisgesteuerte Modell nach HEDAYAT bezüglich seiner Validität, d. h. der Gültigkeit untersucht. Dabei ist die Validitätsgrenze insbesondere dann von Wichtigkeit, wenn die *Dead-Zone* mit modelliert wurde, da der Phasenregelkreis dort durch die Nichtlinearität ausrasten kann.

Auf Basis des Kapitels 5.1 oder unter Berücksichtigung von [24] kann die Phasengleichung

$$\varphi_{\text{var}}(t_{n+1}) = \varphi_{\text{var}}(t_n) + 2\pi \cdot \left[ \frac{\alpha \bar{K}_v}{2} (t_{n+1}^2 + t_n^2) + (f_{0,\text{vco}} - \bar{K}_v [\alpha t_n - u_{\text{ctl}}(t_n^+)]) (t_{n+1} - t_n) \right] \quad (\text{C.1})$$

des Signals  $u_{\text{var}}(t)$  mit  $\bar{K}_v = K_v/N$  und den zugehörigen Lösungen des nächsten Ereigniszeitpunktes

$$t_{n+1}^{\text{var}} = t_n + \begin{cases} \frac{-\xi(t_n^+) + \sqrt{\xi^2(t_n^+) + 2 \cdot \alpha \cdot \bar{K}_v \left(1 - \frac{\varphi_{\text{var}}(t_n)}{2\pi}\right)}}{\alpha \cdot \bar{K}_v}, & \forall \mathcal{S} \setminus \{\mathcal{S}_0\} \\ \frac{1 - \frac{\varphi_{\text{var}}(t_n)}{2\pi}}{\xi(t_n^+)}, & \forall \mathcal{S}_0 \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

angegeben werden, wobei  $\xi(t_n^+) = (\overline{K}_v \cdot u_{\text{ctl}}(t_n^+) + f_{0,\text{vco}})$  und

$$\alpha = \begin{cases} +\frac{I_p}{C_1} & , \mathcal{S}_{+1} \\ -\frac{I_p}{C_1} & , \mathcal{S}_{-1} \end{cases} \quad (\text{C.3})$$

sind, mit dem *Charge-Pump*-Strom  $I_p$ , der Kapazität  $C_1$  des Schleifenfilters und den Zuständen  $\mathcal{S}_{+1}$  und  $\mathcal{S}_{-1}$  des PFD.

### C.1. Herleitung der Validitätsgrenzen

Der Gültigkeitsbereich lässt sich durch die abschnittsweise definierte Gleichung (C.2) bestimmen. Offensichtlich darf das Argument der Wurzel nicht kleiner Null werden. Ausgehend, dass  $\overline{K}_v, f_{0,\text{vco}}, I_p, C_1 \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ ,  $\varphi_{\text{var}}(t_n) \in [0, 2\pi[$  und  $u_{\text{ctl}}(t_n^+) \in \mathbb{R}$  sind, kann die Ungleichung

$$(\overline{K}_v \cdot u_{\text{ctl}}(t_n^+) + f_{0,\text{vco}})^2 + 2\alpha\overline{K}_v \left(1 - \frac{\varphi_{\text{var}}(t_n)}{2\pi}\right) \geq 0 \quad (\text{C.4})$$

angegeben werden. Wegen  $\alpha$  ergeben sich zwei zu unterscheidende Fälle. Da jedoch der zweite Summand der Ungleichung, sofern sich der Regelkreis im Zustand  $\mathcal{S}_{+1}$  befindet, nicht kleiner Null werden kann, ist es ausreichend, wenn der Zustand  $\mathcal{S}_{-1}$  betrachtet wird. Des Weiteren kann dann die Abschätzung  $\varphi_{\text{var}}(t_n) = 0$  nach unten angesetzt werden und es ergibt sich

$$u_{\text{ctl}}(t_n^+) \geq \sqrt{\frac{2I_p}{C_1}\overline{K}_v} - \frac{f_{0,\text{vco}}}{\overline{K}_v} = \frac{2\sqrt{\pi}\omega_n - f_{0,\text{vco}}}{\overline{K}_v}. \quad (\text{C.5})$$

Für den Zustand  $\mathcal{S}_{-1}$  muss zusätzlich noch

$$\sqrt{\xi^2(t_n^+) + 2 \cdot \alpha \cdot \overline{K}_v \left(1 - \frac{\varphi_{\text{var}}(t_n)}{2\pi}\right)} > \frac{\xi(t_n^+)}{\alpha\overline{K}_v} \quad (\text{C.6})$$

gelten. Die linke Seite der Gleichung kann nach unten abgeschätzt werden und es lässt sich die folgende Beziehung für den Zustand  $\mathcal{S}_{-1}$  aufstellen:

$$u_{\text{ctl}}(t_n^+) > -\frac{f_{0,\text{vco}}}{\overline{K}_v} \quad (\text{C.7})$$

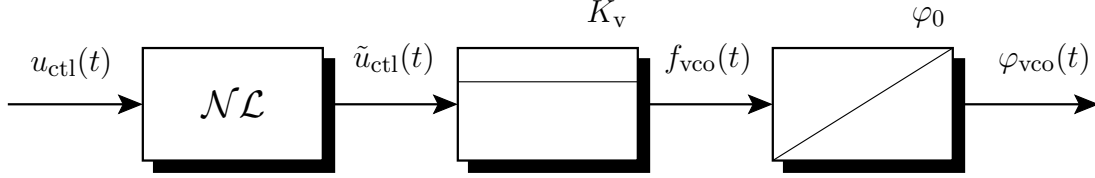
Offensichtlich ist Gleichung (C.5) strenger als (C.7). Wird der Zustand  $\mathcal{S}_0$  der Gleichung C.2 untersucht, ergibt sich gerade die Ungleichung (C.7). Auch für den Zustand  $\mathcal{S}_{+1}$  ergibt sich eine Restriktion:

$$u_{\text{ctl}}(t_n^+) > \sqrt{\frac{2I_p}{C_1}\overline{K}_v} \left(1 - \frac{\varphi_{\text{var}}(t_n)}{2\pi}\right) - \frac{f_{0,\text{vco}}}{\overline{K}_v} \quad (\text{C.8})$$

Wird der Grenzwert des Wurzelausdrucks für  $\varphi_{\text{var}}(t_n) \rightarrow 2\pi$  gebildet, ergibt sich auch für diesen Zustand die Einschränkung nach Ungleichung (C.7).



## C.2. Validität und nichtlinearer spannungsgesteuerter Oszillator

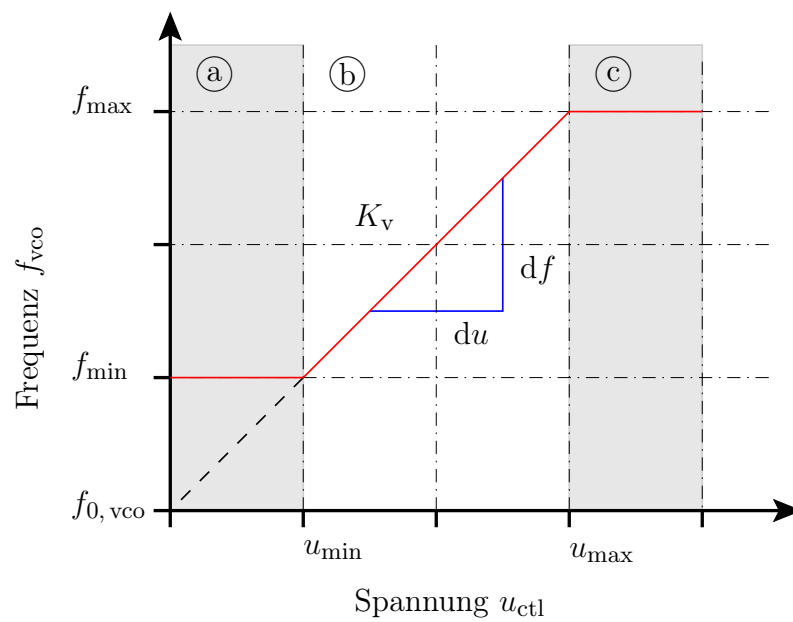


**Abbildung C.1.:** Nichtlineare Modellierung des spannungsgesteuerten Oszillators. Der spannungsgesteuerte Oszillator werde mittels einer statischen nichtlinearen Kennlinie, einem Proportionalglied und einem Integrator modelliert.

Es werde der spannungsgesteuerte Oszillator mittels einer statischen nichtlinearen Kennlinie, einem Proportionalglied und einem Integrator modelliert (siehe Abbildung C.1). Im Folgenden sei ein einfacher Fall einer nichtlinearen VCO-Kennlinie betrachtet. Damit analytisch gezeigt werden kann, dass sich der Validitätsbereich durch die Nichtlinearität  $\mathcal{NL}$  vergrößern wird, soll sich die Kennlinie in Form einer Sättigungskennlinie darstellen, wobei diese hier als stückweise linear angenommen wird. D. h., eine minimale (maximale) Eingangsspannung  $u_{\min}$  ( $u_{\max}$ ) liefert eine entsprechende minimale (maximale) Ausgangsfrequenz  $f_{\text{vco}, \min}$  ( $f_{\text{vco}, \max}$ ). Wird die minimale (maximale) Eingangsspannung  $u_{\min}$  ( $u_{\max}$ ) unterschritten (überschritten), so bleibt die Ausgangsspannung  $\tilde{u}_{\text{ctl}}$  konstant und somit ist das Frequenzsignal  $f_{\text{vco}}$  gegeben durch die minimale (maximale) Frequenz  $f_{\text{vco}, \min}$  ( $f_{\text{vco}, \max}$ ). Der Bereich zwischen  $u_{\min}$  und  $u_{\max}$  besitze die Steigung  $K_v$  (siehe Abbildung C.2). Damit ergibt sich die Phasengleichung des VCO zu

$$\varphi_{\text{vco}}(t_{n+1}) = \varphi_{\text{vco}}(t_n) + 2\pi K_v \begin{cases} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \tilde{u}_{\text{ctl}}(t) dt & , u_{\text{ctl}} \leq u_{\min} & \textcircled{a} \\ \int_{t_n}^{t_{n+1}} u_{\text{ctl}}(t) dt & , u_{\min} < u_{\text{ctl}}(t) < u_{\max} & \textcircled{b} \\ \int_{t_n}^{t_{n+1}} \tilde{u}_{\text{ctl}}(t) dt & , u_{\text{ctl}} \geq u_{\max} & \textcircled{c} \end{cases} \quad . \quad (\text{C.9})$$

Wird das passive Filter erster Ordnung verwendet (siehe Abbildung 3.4), so ergibt sich für den Bereich zwischen  $u_{\min}$  und  $u_{\max}$  die Phasengleichung (C.1). Ferner können dann für diesen Bereich die Gleichungen (C.5) und (C.7) eingesetzt werden.



**Abbildung C.2.:** Nichtlineare  $u - f$ -Charakteristik des spannungsgesteuerten Oszillators

Da für die Abschnitte (a) und (c) nach Abbildung C.2 keine Restriktionen gelten, ergibt sich für den mittleren Abschnitt (b) ein Gültigkeitsbereich nach Gleichung (C.5). Gilt

$$u_{\min} \geq \frac{2\pi\omega_n + f_{0, \text{vco}}}{K_v}, \quad (\text{C.10})$$

so ist das ereignisgesteuerte Modell immer valide.

---

# Abbildungsverzeichnis

---

2.1.	Betrachtung auf der Zustandsebene: Die gestrichelte Linie zeigt stabiles Verhalten nach Definition 2.3, da die $\epsilon$ -Umgebung nicht verlassen wird, jedoch der Ursprung auch nicht erreicht wird. Die rote Linie zeigt das dynamische Verhalten eines asymptotisch stabilen Systems. . . . .	8
2.2.	Zur LYAPUNOV-Funktion und Zustandsebene . . . . .	9
2.3.	Verlauf zweier LYAPUNOV-Funktionen, wobei die jeweilige Funktion immer dann aktiv ist, wenn auch das zugehörige Subsystem aktiv ist. Während das Subsystem 1 aktiv ist, ist die zugehörige LYAPUNOV-Funktion monoton fallend und zu den Zeitpunkten, bei denen ein Schalten auftritt, gilt dann $V_{\sigma(t_{i-1})}(x(t_i)) = V_{\sigma(t_i)}(x(t_i))$ . Wenn sich eine monoton fallende multiple LYAPUNOV-Funktion ergibt, so ist das schaltende System asymptotisch stabil. . . . .	15
2.4.	Verlauf zweier LYAPUNOV-Funktionen, wobei die jeweilige Funktion immer dann aktiv ist, wenn auch das zugehörige Subsystem aktiv ist. Während das Subsystem 1 aktiv ist, ist die zugehörige LYAPUNOV-Funktion monoton fallend, wobei für das inaktive System durchaus die zugehörige LYAPUNOV-Funktion steigen kann. Wenn die Anfangswerte für die jeweilige LYAPUNOV-Funktion immer kleiner werden, so ist das schaltende System asymptotisch stabil. . . . .	16
3.1.	Schematischer Aufbau eines Phasenregelkreises zur Frequenzsynthese bestehend aus einem Phasen- und Frequenz-Detektor mit Ladungspumpe (PFD/CP), einem Schleifenfilter (LF), einem spannungsgesteuerten Oszillator (VCO) und einem Teiler (N) . . . . .	20
3.2.	Schematischer Aufbau des Phasen- und Frequenz-Detektors mittels einer Flipflop-Schaltung und zugehörigem Zustandsautomaten . . . . .	21
3.3.	Schematischer Aufbau der Ladungspumpe mit Schleifenfilter . . . . .	22

3.4.	Schematische Darstellung eines passiven PLL-Schleifenfilters n-ter Ordnung, wobei der Widerstand $R_0$ weggelassen wird, sobald eine Charge-Pump mit Stromquellen verwendet wird. . . . .	23
3.5.	Schematischer Aufbau eines linearisierten Phasenregelkreises zur Frequenzsynthese: Der PFD mit Ladungspumpe ist durch eine Subtraktionsstelle mit Proportionalglied dargestellt. Das Filter wird durch eine Übertragungsfunktion $H_{LF}(s)$ definiert. Der spannungsgesteuerte Oszillator kann durch ein Proportionalglied, eine Additionsstelle für die Ruhfrequenz $f_{0,vco}$ und einem Integrator modelliert werden. Der Teiler stellt sich als Porportionalglied dar. . . . .	25
3.6.	Vergleich der linearen kontinuierlichen Approximation einer CP-PLL zweiter Ordnung mit einer nichtlinearen CP-PLL. Modell mit linearem VCO, idealem PFD und einer idealen Ladungspumpe. In den Abbildungen (a) bis (d) sind diese Modelle mit unterschiedlichen Dämpfungsbeiwerten $d$ gegenübergestellt. . . . .	26
3.7.	Rauschbandbreite für einen Regelkreis 2. Ordnung mit einem Minimum bei $d = 0,5$ . . . . .	28
3.8.	Schematischer Aufbau eines $\Sigma\Delta$ -Phasenregelkreises zur Frequenzsynthese .	29
3.9.	Schematische Darstellung der Schaltung zur Erzeugung der Teilersequenzen (a) sowie die zeitlichen Verläufe der Signale $X + Y$ und $N_i + c$ (b)	30
3.10.	Charakteristiken des spannungsgesteuerten Oszillators: Die schwarze gestrichelte Linie stellt eine lineare Funktion dar, die durch die Frequenz $f_{0,vco}$ und die Steigung $K_v$ (Verstärkungsbeiwert) definiert ist. Die rote Charakteristik ist eine stückweise lineare Darstellung, bestimmt durch den Verstärkungsbeiwert $K_v$ , die minimale und maximale Spannung $u_{min}$ bzw. $u_{max}$ sowie durch die minimale und maximale Ausgangsfrequenz $f_{min}$ und $f_{max}$ . Die schwarze Funktion ist eine typische nichtlineare Charakteristik eines VCO, gegeben durch die Funktion $f(\cdot)$ (siehe Gleichung (3.13)). . . . .	32
3.11.	Schematische Darstellung der Charakteristik des PFD bezüglich des Phasenfehlers $\varphi_e$ und des Tastverhältnisses $\delta$ . Für einen Phasenfehler $\varphi_- \leq \varphi_e \leq \varphi_+$ ist die Dead-Zone als Konsequenz der Laufzeiten aktiv und in den Bereichen $\varphi_{--} \leq \varphi_e \leq \varphi_-$ und $\varphi_+ \leq \varphi_e \leq \varphi_{++}$ ergibt sich eine Änderung der Steigung als Folge der endlichen Flankensteilheiten. . . . .	33
3.12.	Schematische Darstellung der Auswirkung des Stromungleichgewichts zwischen $u_{up}(t)$ und $u_{dn}(t)$ (a) sowie der zeitlichen Diskrepanz zwischen $\bar{u}_{up}(t)$ und $u_{dn}(t)$ durch die Invertierung des UP-Signals $u_{up}(t)$ (b) . . . . .	34
3.13.	Schematische Darstellung bezüglich der Auswirkung eines Leckstromes innerhalb der Charge-Pump auf die Regelspannung und somit auf die Ausgangsfrequenz . . . . .	35
3.14.	Zum Einrast- und Ausregelverhalten von digitalen Phasenregelkreisen . . .	36

3.15. Simulation einer CP-PLL zweiter Ordnung mit einer Frequenzrampe am Eingang. Im Bereich der Frequenzrampe ist ersichtlich, dass der Regelkreis der Steigung nicht folgen kann. Dieser Bereich ist durch eine graue Box kenntlich gemacht und es lässt sich an dieser Stelle das nichtlineare Verhalten erkennen. . . . .	37
3.16. Vergleich der Pull-In-Zeit $T_{PI}$ aus Gleichung (3.16) und dem nichtlinearen idealen Modell einer CP-PLL zweiter Ordnung . . . . .	38
3.17. Gegenüberstellung des Pull-Out-Bereiches $\Delta\omega_{PO}(d)$ des linearen kontinuierlichen Modells und der simulativ berechneten Kurven für $\Delta\omega_{PO}^+(d)$ und $\Delta\omega_{PO}^-(d)$ des nichtlinearen idealen Modells . . . . .	40
3.18. Trajektorie eines Phasenregelkreises zweiter Ordnung mit identifizierten Phasennulldurchgängen . . . . .	42
3.19. Zum logischen und dynamischen Verhalten von CP-PLL-Systemen mit PFD, wobei exemplarisch ein Regelkreis der Ordnung Zwei angesetzt wurde. . . .	43
3.20. Darstellung der endlichen Automaten zur Identifikation der Sequenzen nach den Folgerungen 3.1 und 3.2 . . . . .	44
3.21. Schematische Darstellung des Detektors zur Identifikation des Zustandes des Regelkreises (eingerastet, ausgerastet oder ausgegeregelt) . . . . .	46
3.22. Spectre-Simulation der Einrastidentifikation für einen digitalen Phasenregelkreis dritter Ordnung . . . . .	47
3.23. Spectre-Simulation der Einrastidentifikation und $\pi$ -Detektor für einen digitalen Phasenregelkreis dritter Ordnung . . . . .	48
3.24. Schematische Darstellung des $\pi$ -Detektors . . . . .	49
4.1. Wurzelortskurve und Stabilitätsgrenze des linearisierten, zeitdiskreten Modells für einen digitalen Phasenregelkreis zweiter Ordnung . . . . .	53
4.2. Behandlung der Fallunterscheidungen, die sich bei der Betrachtung der Gleichung (4.10) und der möglichen Zustände ergeben, wobei hier ausschließlich der eingerastete Bereich berücksichtigt wird. . . . .	56
4.3. Bereichsdefinition und Regionenübergangsdiagramm der Transformation $\mathbf{T}$ im Zustandsraum mit den zugehörigen Zonen $\mathcal{R}_1$ bis $\mathcal{R}_4$ mit $\mathcal{R}_i \in \mathbb{R}^2$ und $i \in (1, 2, 3, 4)$ . . . . .	59
4.4. Wertebereiche der Parameter $a$ und $b$ , bei denen die zugehörigen charakteristischen Polynome Einheitskreispolynome sind. Die hellgrauen Gebiete bezeichnen die Bereiche der Parameter $a$ und $b$ , indem das entsprechende charakteristische Polynom ein Einheitskreispolynom ist. Die dunkelgrau gekennzeichneten Flächen sind die Bereiche, bei denen das betrachtete charakteristische Polynom kein Einheitskreispolynom ist. . . . .	62

4.5. Behandlung der Fallunterscheidungen: (a) und (b) also Fall 1 und 2 unterscheiden sich nur zum Zeitpunkt $t_{n-1}$ bzgl. ihres Phasenfehlers. Bei Fall 1 sei zum Zeitpunkt $t_{n-1}$ eine fallende Flanke des Referenzsignals erfolgt, bei Fall 2 eine fallende Flanke des VCO-Signals. (c) und (d) also Fall 3 und 4 unterscheiden sich ebenfalls zum Zeitpunkt $t_{n-1}$ bzgl. ihres Phasenfehlers. Bei Fall 3 sei zum Zeitpunkt $t_{n-1}$ eine fallende Flanke des Referenzsignals erfolgt, bei Fall 4 eine fallende Flanke des VCO-Signals. . . . .	66
4.6. Einteilung des Zustandsraum in vier Sektoren $\mathcal{R}_i$ mit $i \in (1, 2, 3, 4)$ . . . .	70
4.7. Parameterraum zur gemeinsamen LYAPUNOV-Funktion $V_1 = \mathbf{x}^T \mathbf{P}_1 \mathbf{x}$ . . .	71
4.8. Behandlung der Fälle 1.1 und 1.2: Die roten Linien des Stromes $i_p(t)$ und der Spannung $u_{ctl}(t)$ beschreiben die durch $u_{ref}(t)$ und $u_{var}(t)$ mit Dead-Zone verursachten Verläufe. Die schwarzen Verläufe von $i_p(t)$ und $u_{ctl}(t)$ ergeben sich, wenn der PFD als ideal angenommen wird und somit keine Dead-Zone beinhaltet. Hervorgehoben ist die resultierende Fläche $F_{DZ}$ . . . . .	73
4.9. Behandlung der Fälle 2.1 und 2.2: Die roten Linien des Stromes $i_p(t)$ und der Spannung $u_{ctl}(t)$ beschreiben die durch $u_{ref}(t)$ und $u_{var}(t)$ mit Dead-Zone verursachten Verläufe. Die schwarzen Verläufe von $i_p(t)$ und $u_{ctl}(t)$ ergeben sich, wenn der PFD als ideal angenommen wird und somit keine Dead-Zone beinhaltet. Hervorgehoben ist die resultierende Fläche $F_{DZ}$ . . . . .	74
4.10. Behandlung der Fälle 3.1 und 3.2: Die roten Linien des Stromes $i_p(t)$ und der Spannung $u_{ctl}(t)$ beschreiben die durch $u_{ref}(t)$ und $u_{var}(t)$ mit Dead-Zone verursachten Verläufe. Die schwarzen Verläufe von $i_p(t)$ und $u_{ctl}(t)$ ergeben sich, wenn der PFD als ideal angenommen wird und somit keine Dead-Zone beinhaltet. Hervorgehoben ist die resultierende Fläche $F_{DZ}$ . . . . .	75
4.11. Behandlung der Fälle 4.1 und 4.2: Die roten Linien des Stromes $i_p(t)$ und der Spannung $u_{ctl}(t)$ beschreiben die durch $u_{ref}(t)$ und $u_{var}(t)$ mit Dead-Zone verursachten Verläufe. Die schwarzen Verläufe von $i_p(t)$ und $u_{ctl}(t)$ ergeben sich, wenn der PFD als ideal angenommen wird und somit keine Dead-Zone beinhaltet. Hervorgehoben ist die resultierende Fläche $F_{DZ}$ . . . . .	76
4.12. Behandlung der Fälle 5.1, 5.2, 5.3 und 5.4: Die roten Linien des Stromes $i_p(t)$ und der Spannung $u_{ctl}(t)$ beschreiben die durch $u_{ref}(t)$ und $u_{var}(t)$ mit Dead-Zone verursachten Verläufe. Die schwarzen Verläufe von $i_p(t)$ und $u_{ctl}(t)$ ergeben sich, wenn der PFD als ideal angenommen wird und somit keine Dead-Zone beinhaltet. Hervorgehoben ist die resultierende Fläche $F_{DZ}$ . . . . .	77
4.13. Behandlung der Fälle 6.1, 6.2, 6.3 und 6.4: Die roten Linien des Stromes $i_p(t)$ und der Spannung $u_{ctl}(t)$ beschreiben die durch $u_{ref}(t)$ und $u_{var}(t)$ mit Dead-Zone verursachten Verläufe. Die schwarzen Verläufe von $i_p(t)$ und $u_{ctl}(t)$ ergeben sich, wenn der PFD als ideal angenommen wird und somit keine Dead-Zone beinhaltet. Vorgehoben ist die resultierende Fläche $F_{DZ}$ . . . . .	78
4.14. Dreidimensionaler Zustandsraum mit der Strompulsbreite $\gamma_k$ , der Zeitspanne $\tau_k$ zwischen zwei Ereignissen und der Regelspannung $u_{ctl}$ . . . . .	81

4.15. Ablaufdiagramm des Algorithmus' zur Simulation des Phasenregelkreises mit Dead-Zone auf Basis der Arbeiten von VAN PAEMEL. In den Blöcken A bis D erfolgt die Bestimmung der Menge im Phasenraum. Eine detaillierte Beschreibung der Blöcke A bis D ist in den Abbildungen 4.16(a) bis 4.16(d) zu finden. . . . .	82
4.16. Die Algorithmen der Blöcke A bis D zur Fallunterscheidung basierend auf dem Zustand $\tau_{k+1}$ . . . . .	83
4.17. Bereichsdefinition der Transformation $\mathbf{T}$ im Zustandsraum mit den zugehörigen Mengen $\mathcal{M}$ . . . . .	86
4.18. Regionenübergangsdiagramm zur Beschreibung der Punkttransformation $T$ . Die schwarz gekennzeichneten Mengen und Transitionen sind die des ursprünglichen Modells nach VAN PAEMEL. Die rot gekennzeichneten Blöcke und Transitionen sind die, die sich durch das Hinzufügen der Verzögerungen $\tilde{\tau}_A$ und $\tilde{\tau}_B$ ergeben, wodurch sich der Einfluss der modellierten Dead-Zone charakterisieren lässt. . . . .	87
4.19. Projektion der Parameter $a$ und $b$ bei festem $\tilde{\tau}_B$ , damit das charakteristische Polynom $D_2(\lambda)$ ein Einheitskreispolynom ist. Die hellen Flächen bezeichnen die Werte für $a$ und $b$ , bei denen $D_2(\lambda)$ ein Einheitskreispolynom darstellt. Die dunklen Flächen entsprechen demnach den Parameterwerten $a$ und $b$ , bei denen $D_2(\lambda)$ kein Einheitskreispolynom darstellt. . . . .	91
4.20. Bereichsdefinition der Linearisierung der Transformation $\mathbf{T}$ im Zustandsraum	92
4.21. Projektion der Parameter $a$ und $b$ bei festem $\tilde{\tau}_B$ , damit das charakteristische Polynom $D_{23}(\lambda)$ ein Einheitskreispolynom ist. Die hellen Flächen bezeichnen die Werte für $a$ und $b$ , bei denen $D_{23}(\lambda)$ ein Einheitskreispolynom darstellt. Die dunklen Flächen entsprechen demnach den Parameterwerten $a$ und $b$ , bei denen $D_{23}(\lambda)$ kein Einheitskreispolynom darstellt. . . . .	94
4.22. Projektion der Parameter $a$ und $b$ bei festem $\tilde{\tau}_B$ , damit das charakteristische Polynom $D_{61}(\lambda)$ ein Einheitskreispolynom ist. Die hellen Flächen bezeichnen die Werte für $a$ und $b$ , bei denen $D_{61}(\lambda)$ ein Einheitskreispolynom darstellt. Die dunklen Flächen entsprechen demnach den Parameterwerten $a$ und $b$ , bei denen $D_{61}(\lambda)$ kein Einheitskreispolynom darstellt. . . . .	95
4.23. Projektion der Parameter $a$ und $b$ bei festem $\tilde{\tau}_B$ , damit das charakteristische Polynom $D_{62}(\lambda)$ ein Einheitskreispolynom ist. Die hellen Flächen bezeichnen die Werte für $a$ und $b$ , bei denen $D_{62}(\lambda)$ ein Einheitskreispolynom darstellt. Die dunklen Flächen entsprechen demnach den Parameterwerten $a$ und $b$ , bei denen $D_{62}(\lambda)$ kein Einheitskreispolynom darstellt. . . . .	96
4.24. Projektion der Parameter $a$ und $b$ bei festem $\tilde{\tau}_B$ , damit das charakteristische Polynom $D_{63}(\lambda)$ ein Einheitskreispolynom ist. Die hellen Flächen bezeichnen die Werte für $a$ und $b$ , bei denen $D_{63}(\lambda)$ ein Einheitskreispolynom darstellt. Die dunklen Flächen entsprechen demnach den Parameterwerten $a$ und $b$ , bei denen $D_{63}(\lambda)$ kein Einheitskreispolynom darstellt. . . . .	97

4.25. Projektion der Parameter $a$ und $b$ bei festem $\tilde{\tau}_B$ , damit das charakteristische Polynom $D_{52}(\lambda)$ ein Einheitskreispolynom ist. Die hellen Flächen bezeichnen die Werte für $a$ und $b$ , bei denen $D_{52}(\lambda)$ ein Einheitskreispolynom darstellt. Die dunklen Flächen entsprechen demnach den Parameterwerten $a$ und $b$ , bei denen $D_{52}(\lambda)$ kein Einheitskreispolynom darstellt. . . . .	97
4.26. Projektion der Parameter $a$ und $b$ bei festem $\tilde{\tau}_B$ , damit das charakteristische Polynom $D_{12}(\lambda)$ ein Einheitskreispolynom ist. Die hellen Flächen bezeichnen die Werte für $a$ und $b$ , bei denen $D_{12}(\lambda)$ ein Einheitskreispolynom darstellt. Die dunklen Flächen entsprechen demnach den Parameterwerten $a$ und $b$ , bei denen $D_{12}(\lambda)$ kein Einheitskreispolynom darstellt. . . . .	98
4.27. Zur Instabilität des Phasenregelkreises mit <i>Dead-Zone</i> . . . . .	99
4.28. Zur Stabilität, Grenzstabilität und Instabilität eines Phasenregelkreises mit <i>Dead-Zone</i> . . . . .	100
4.29. Behandlung der Fallunterscheidungen: Fall 1 und 2 unterscheiden sich nur zum Zeitpunkt $t_{n-1}$ bzgl. ihres Phasenfehlers. Bei Fall 1 sei zum Zeitpunkt $t_{n-1}$ eine fallende Flanke des Referenzsignals erfolgt, bei Fall 2 eine fallende Flanke des VCO-Signals. Fall 3 und 4 unterscheiden sich ebenfalls zum Zeitpunkt $t_{n-1}$ bzgl. ihres Phasenfehlers. Bei Fall 3 sei zum Zeitpunkt $t_{n-1}$ eine fallende Flanke des Referenzsignals erfolgt, bei Fall 4 eine fallende Flanke des VCO-Signals. . . . .	103
4.30. Behandlung der Fallunterscheidungen innerhalb der <i>Dead-Zone</i> : Fall 5 und 6 unterscheiden sich nur zum Zeitpunkt $t_{n-1}$ bzgl. ihres Phasenfehlers. Bei Fall 5 sei zum Zeitpunkt $t_{n-1}$ eine fallende Flanke des Referenzsignals erfolgt, bei Fall 6 eine fallende Flanke des VCO-Signals. Fall 7 und 8 unterscheiden sich ebenfalls zum Zeitpunkt $t_{n-1}$ bzgl. ihres Phasenfehlers. Bei Fall 7 sei zum Zeitpunkt $t_{n-1}$ eine fallende Flanke des Referenzsignals erfolgt, bei Fall 8 eine fallende Flanke des VCO-Signals. . . . .	104
4.31. Unterteilung des Zustandsraums durch sechs Funktionen $\tilde{v}_{Fi}$ mit $i \in (1, 2, 3, 4, 5, 6)$ des erweiterten und normierten Modells einer CP-PLL mit <i>Dead-Zone</i> -Charakteristik. Es ergeben sich acht Mengen $\mathcal{M}_j$ mit $j \in (1, 2, \dots, 8)$ , die den Zustandsraum definieren. . . . .	109
4.32. Unterteilung des Zustandsraums hinsichtlich der Linearisierung . . . . .	111
4.33. Behandlung der Fallunterscheidungen, die sich bei der Betrachtung der Gleichung (4.10), der möglichen Zustände und des Leckstromes ergeben, wobei hier ausschließlich der eingerastete Bereich berücksichtigt wird. . . . .	114
4.34. Bereichsdefinition der Transformation $\mathbf{T}$ im Zustandsraum mit den zugehörigen Sektoren $\mathcal{R}_i$ mit $i \in (1, 2, 3, 4)$ . . . . .	117
4.35. Zum Fixpunkt des erweiterten Modells nach VAN PAEMEL mit Leckstrom .	118
4.36. Schematische Darstellung des Filters 2. Ordnung . . . . .	126
4.37. Zur Randbedingung (4.224), wobei die hellgrauen Flächen andeuten, dass die Bedingung erfüllt ist und die dunkelgrauen zeigen den Bereich, bei dem die Bedingung nicht erfüllt ist. . . . .	127



4.38. Vergleich zwischen Gleichung (4.225), (4.231) und der Grenze von GARDNER (siehe Gleichung (4.8a) aus Kapitel 4.1.1 oder [16]) . . . . .	128
4.39. Zur Stabilität eines Phasenregelkreises der Ordnung Drei . . . . .	129
5.1. Modellierung des Phasenregelkreises: Digitalteil mittels BOOLScher Logik, Analogteil als nichtlineares Differenzialgleichungssystem . . . . .	132
5.2. Idealer und realer Strompuls der Charge-Pump sowie die Visualisierung der Gatter-Laufzeiten . . . . .	137
5.3. Modifiziertes Modell eines (Tri-State) Phasen- und Frequenz-Detektors mit Dead-Zone . . . . .	138
5.4. Zur Optimierung bezüglich des Zustandswechsels von $\mathcal{S}_0$ nach $\mathcal{S}_{+1}$ . . . . .	139
5.5. Zur Optimierung bezüglich des Zustandswechsels von $\mathcal{S}_0$ nach $\mathcal{S}_{-1}$ . . . . .	140
5.6. Auswirkung der Verzögerungen $\tau_{\text{set}}^{\text{up}}$ und $\tau_{\text{set}}^{\text{dn}}$ auf den Zustand des PFD . . . . .	141
5.7. Auswirkung der Verzögerungen $\tau_{\text{rst}}^{\text{up}}$ und $\tau_{\text{rst}}^{\text{dn}}$ auf den Zustand des PFD . . . . .	142
5.8. Modifizierter endlicher Automat des PFD mit modelliertem Timing-Mismatch	146
5.9. Schematischer Aufbau einer ALL-Architektur zur Frequenzsynthese . . . . .	149
5.10. Zeitverlaufsdiagramm der Signale in der ALL-Architektur . . . . .	150
5.11. Endlicher Automat des D-Flipflops, wobei $u_{\text{vco}}$ am $D$ -Eingang und $u_{\text{sam}}$ am clk-Eingang liegt. . . . .	151
5.12. Vergleich zwischen dem eingeführten ereignisorientierten Modell, einem Simulink-Modell und dem nichtlinearen approximierten Modell nach [95] . . . . .	152
5.13. Vergleich zwischen dem ereignisgesteuerten exakten mathematischen Mo- dell und der nichtlinearen Approximation auf der Zustandsebene. Dabei ist auf der $x$ -Achse die Pulsbreite der Strompulse von $i_p(t)$ und auf der $y$ -Achse die Regelspannung $u_{\text{ctl}}(t)$ aufgetragen. . . . .	153
5.14. Pull-Out-Grenze in Abhängigkeit der Anfangsphase des Referenzoszillators und Bereich der Attraktion zweier Fixpunkte . . . . .	154
5.15. Zum Einfluss der Verzögerungszeiten des erweiterten Zustandsautomaten nach Abbildung 5.3: (a) zeigt eine Trajektorie einer CP-PLL zweiter Ord- nung (Bild unten) mit $\tau_{\text{set}}^{\text{up}} = \tau_{\text{set}}^{\text{dn}}, \tau_{\text{rst}}^{\text{up}} = 0$ und $\tau_{\text{rst}}^{\text{dn}} = 0$ sowie im oberen Bild ein Vergleich der idealen $(\varphi_e - Q_p)$ -Kennlinie (schwarz) des PFD nach Abbildung 3.2 und der des erweiterten Zustandsautomaten (rot). (b) zeigt ebenfalls eine Trajektorie einer CP-PLL zweiter Ordnung (Bild unten) mit $\tau_{\text{rst}}^{\text{up}} = \tau_{\text{rst}}^{\text{dn}}, \tau_{\text{set}}^{\text{up}} = 0$ und $\tau_{\text{set}}^{\text{dn}} = 0$ und im oberen Bild die Kennlinie des idealen PFD (schwarz) und die des erweiterten PFD (rot) gegenübergestellt.	155
5.16. Zum Einfluss der Verzögerungszeiten des erweiterten Zustandsautomaten nach Abbildung 5.3: (a) zeigt eine Trajektorie einer CP-PLL zweiter Ord- nung mit $\tau_{\text{rst}}^{\text{up}} = \tau_{\text{rst}}^{\text{dn}} = \tau_{\text{set}}^{\text{up}} = \tau_{\text{set}}^{\text{dn}} \neq 0$ sowie im oberen Bild einen Vergleich der idealen $(\varphi_e - Q_p)$ -Kennlinie (schwarz) des PFD nach Abbildung 3.2 und der des erweiterten Zustandsautomaten (rot). (b) zeigt ebenfalls eine Tra- jektorie einer CP-PLL zweiter Ordnung (Bild unten) mit $\tau_{\text{rst}}^{\text{up}} = \tau_{\text{rst}}^{\text{dn}}, \tau_{\text{rst}}^{\text{up}} = 0$ und $\tau_{\text{rst}}^{\text{dn}} = 0$ und im oberen Bild die Kennlinie des idealen PFD (schwarz) und die des erweiterten PFD (rot) gegenübergestellt. . . . .	156

5.17. Simulationen und Vergleich zwischen dem idealen Modell ohne <i>Current-Mismatch</i> und dem Modell mit Current-Mismatch. . . . .	157
5.18. Zur Charakterisierung einer CP-PLL zweiter Ordnung mit Leckstrom . . .	158
5.19. Zustandsraum einer CP-PLL der Ordnung Drei mit Leckstrom . . . . .	159
5.20. Zur Auswirkung der VCO-Charakteristik und der Nichtidealitäten der Charge-Pump und des PFD . . . . .	160
5.21. Vergleich einer Simulation in der Nähe der Stabilitätsgrenze mit Simulink-, Spectre- und dem ereignisgesteuerten Modell . . . . .	161
5.22. Stabilitätsgrenze einer CP-PLL zweiter Ordnung mit $K_v = 120 \text{ MHz/V}$ , $I_p = 50 \text{ }\mu\text{A}$ , $R_1 = 500 \text{ }\Omega$ , $C_1 = 1 \text{ pF}$ und $f_{\text{ref}} \approx 41.43 \text{ MHz}$ ( $\omega_{\text{ref}} = 2\pi f_{\text{ref}}$ ) .	162
5.23. Darstellung der Bereiche mit linksdrehenden Phasen (hellgrau) und mit rechtsdrehender Phase (dunkelgrau). Bei diesen Simulationen wurde $\omega_{\text{ref}} = \omega_{\text{ref},2}$ gerade so gewählt, dass der Entwurf direkt auf der von GARDNER beschriebenen Grenze für einen Regelkreis der Ordnung Zwei liegt.	163
5.24. Darstellung der Bereiche mit linksdrehenden Phasen (hellgrau) und mit rechtsdrehender Phase (dunkelgrau). Bei diesen Simulationen wurde $\omega_{\text{ref}} = \omega_{\text{ref},2}$ gewählt. . . . .	164
5.25. Dargestellt sind die Bereiche des Zustandsraums, in denen eine rechtsdrehende Phase (dunkelgrau) auftritt, eine linksdrehende Phase mit streng monoton fallender Spannung zu den Zeitpunkten der Phasennulldurchgänge vorliegt (hellgrau) und sich eine linksdrehende Phase mit einer Oszillation auf der Spannung zu den Zeitpunkten der Phasennulldurchgänge ergibt (rot).	165
5.26. Darstellung der Bereiche mit linksdrehenden Phasen (dunkelgrau) und mit rechtsdrehender Phase (hellgrau). Bei diesen Simulationen wurde $f_{\text{ref}} = 20,1 \text{ MHz}$ gewählt. . . . .	166
B.1. Schematische Darstellung eines Filters 3. Ordnung . . . . .	180
B.2. Schematische Darstellung eines Filters 4. Ordnung . . . . .	182
C.1. Nichtlineare Modellierung des spannungsgesteuerten Oszillators. Der spannungsgesteuerte Oszillator werde mittels einer statischen nichtlinearen Kennlinie, einem Proportionalglied und einem Integrator modelliert. . . . .	185
C.2. Nichtlineare $u - f$ -Charakteristik des spannungsgesteuerten Oszillators . .	186

---

## Literaturverzeichnis

---

- [1] J. A. Crawford. *Frequency Synthesizer Design Handbook* (Artech House Publishers, 1994).
- [2] R. E. Best. *Phase-Locked Loops - Design, Simulation and Applications* (McGraw-Hill, 2003).
- [3] M. Brownlee. *Low Noise Clocking for High Speed Serial Links*. Ph.D. thesis, Oregon State University (2006).
- [4] V. Kratyuk. *Digital Phase-Locked Loops for multi-GHz Clock Generation*. Ph.D. thesis, Oregon State University (2006).
- [5] R. B. Staszewski and P. T. Balsara. *All-Digital Frequency Synthesizer in Deep-Submicron CMOS* (A John Wiley & Sons, Inc., Publication, 2006).
- [6] H. Arslan, Z. N. Chen, and M.-G. Di Benedetto. *Ultra Wideband Wireless Communication* (A John Wiley & Sons, Inc., Publication, 2006).
- [7] X. He. *Low Phase Noise CMOS PLL Frequency Synthesizer Design and Analysis*. Ph.D. thesis, Faculty of the Graduate School of the University of Maryland (2007).
- [8] J. A. Crawford. *Advanced Phase-Lock Techniques* (Artech House Publishers, 2007).
- [9] F. Gardner. A BPSK/QPSK Timing-Error Detector for Sampled Receivers. *IEEE Transactions on Communications* **34** (5), 423–429 (1986).
- [10] T. Lee and J. Bulzacchelli. A 155-MHz Clock Recovery Delay- and Phase-locked Loop. *IEEE Journal of Solid-State Circuits* **27** (12), 1736–1746 (1992).
- [11] V. Schwarz. *A Clock Recovery Circuit for 40 Gb/s using InP/InGaAs Heterojunction Bipolar Transistors*. Ph.D. thesis, Swiss Federal Institute Of Technology, Zurich (2002).

- [12] H. C. Lee. *An Estimation Approach to Clock and Data Recovery*. Ph.D. thesis, Department of Electrical Engineering and the Committee on Graduate Studies Of Stanford University (2006).
- [13] K. Shu and E. Sanchez-Sinencio. *CMOS PLL Synthesizers: Analysis and Design* (Springer Verlag, 2005).
- [14] M. Mansuri. *Low-Power Low-Jitter On-Chip Clock Generation*. Ph.D. thesis, University of California, Los Angeles (2003).
- [15] B. Daniels. *Analysis and Design of High Order Digital Phase Locked Loops*. Ph.D. thesis, The National University of Ireland (2008).
- [16] F. Gardner. Charge-Pump Phase-Lock Loops. *IEEE Transactions on Communications* **28** (11), 1849–1858 (1980).
- [17] S. Mirabbasi and K. Martin. Design of Loop Filter in Phase-Locked Loops. *Electronics Letters* **35** (21), 1801–1802 (1999).
- [18] B. Daniels and R. Farrell. Design of High Frequency Digital Phase Locked Loops. *IEE Irish Signals and Systems Conference, Dublin* (2006).
- [19] P. Hanumolu, M. Brownlee, K. Mayaram, and U. K. Moon. Analysis of Charge-Pump Phase-Locked Loops. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, **51** (9), 1665–1674 (2004).
- [20] I. Thompson and P. Brennan. Fourth-Order PLL Loop Filter Design Technique with Invariant Natural Frequency and Phase Margin. *IEE Proceedings - Circuits, Devices and Systems* **152** (2), 103–108 (2005).
- [21] S. Williams and T. Caviglia. Simulating PLL Reference Spurs. Technical report, [www.rfdesign.com](http://www.rfdesign.com) (2006).
- [22] S. Huang, H. Ma, and Z. Wang. Modeling and Simulation to the Design of  $\Sigma\Delta$  Fractional-N Frequency Synthesizer. In *Proceedings of the conference on Design, automation and test in Europe* (EDA Consortium, San Jose, CA, USA, 2007), 291–296.
- [23] B. K. Mishra, S. Save, and S. Patil. Design and Analysis of Second and Third Order PLL at 450 MHz. *International Journal of VLSI design & Communication Systems (VLSICS)* **2** (1), 97–104 (2011).
- [24] C. D. Hedayat, A. Hachem, Y. Leduc, and G. Benbassat. High-Level Modeling Applied to the Second-Order Charge-Pump PLL Circuit. *Texas Instruments Technical Journal* **14** (1997).
- [25] C. D. Hedayat, A. Hachem, Y. Leduc, and G. Benbassat. Modeling and Characterization of the 3rd Order Charge-Pump PLL: A Fully Event-Driven Approach. *Analog Integrated Circuits and Signal Processing* **19**, 24–45 (1999).

- [26] D. Armaroli, V. Liberali, and C. Vacchi. Behavioural Analysis of Charge-Pump PLL's. In *Proceedings of the 38th Midwest Symposium on Circuits and Systems*, volume 2 (1995), 893–896.
- [27] M. Education. PLLs, VCOs and Frequency Synthesizers (2009).
- [28] Y. Wang, C. Van-Meersbergen, H.-W. Groh, and S. Heinen. Event Driven Analog Modeling for the Verification of PLL Frequency Synthesizers. In *Behavioral Modeling and Simulation Workshop, 2009. BMAS 2009. IEEE* (2009), 25–30.
- [29] D. Abramovitch. Lyapunov Redesign of Analog Phase-lock Loops. *IEEE Transactions on Communications* **38**, 2197–2202 (1990).
- [30] D. Abramovitch. Lyapunov Redesign of Classical Digital Phase-lock Loops. *Proceedings of the 2003 American Control Conference* **3**, 2401–2406 (2003).
- [31] C. Wiegand, C. Hedayat, and U. Hilleringmann. Non-linear Behaviour of Charge-Pump Phase-Locked Loops. *Advances in Radio Science* **8**, 161–166 (2010).
- [32] M. Van Paemel. Analysis of a Charge-Pump PLL: A New Model. *IEEE Transactions on Communications* **42** (7), 2490–2498 (1994).
- [33] P. Acco. Why Do We Linearise Charge Pump PLL Equations So Early? (2001).
- [34] P. Acco, M. P. Kennedy, C. Mira, B. Morley, and B. Frigvik. Behavioral Modeling of Charge Pump Phase Locked Loops. *Proceedings of the 1999 IEEE International Symposium on Circuits and Systems, 1999. ISCAS '99* **1**, 375–378 (1999).
- [35] P. Acco. Inverse Nonlinear Model of the CP-PLL (2002).
- [36] X. Yi and Q. Hongbing. Modeling and Simulation of the Locking Process of a 4th Order Microwave Frequency-hopping PLL Synthesizer. In *Proceedings of the 2008 International Conference on Computer Science and Software Engineering* (IEEE Computer Society, Washington, DC, USA, 2008), 215–218.
- [37] A. Lacaita, S. Levantino, and C. Samori. *Integrated Frequency Synthesizers for Wireless Systems* (Cambridge University Press, 2007).
- [38] B. Leung. *VLSI for Wireless Communication*, volume 1 (Prentice Hall, 2002).
- [39] H. Unbehauen. *Regelungstechnik II: Zustandsregelungen, digitale und nichtlineare Regelsysteme* (Vieweg Verlag, 2007), 9. edition.
- [40] H. Lutz and W. Wendt. *Taschenbuch der Regelungstechnik* (Harri Deutsch Verlag, 2005), 6. edition.

- [41] N. V. Kuznetsov. *Stability and Oscillations of Dynamical Systems - Theory and Applications*. Ph.D. thesis, Department of Mathematical Information Technology, University of Jyväskylä (2008).
- [42] J. Adamy. *Nichtlineare Regelungen* (Springer Verlag, Berlin, 2009), 1 edition.
- [43] J. La Salle and S. Lefschetz. *Stability by Liapunov's Direct Method - With Applications* (Academic Press, 1961).
- [44] R. M. Murray, Z. Li, and S. S. Sastry. Lyapunov Stability Theory - Excerpted from „A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation“. *CRC Press* , 43–53 (1993).
- [45] M. Johansson. *Piecewise Linear Control Systems*. Lecture Notes in Control and Information Sciences (Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 2003).
- [46] D. Liberzon. *Switching in Systems and Control* (Birkhäuser, Boston, 2003).
- [47] K. Wulff. *Quadratic and Non-Quadratic Stability Criteria for Switched Linear Systems*. Ph.D. thesis, Hamilton Institute, NUI Maynooth, Ireland (2005).
- [48] P. Biswas, P. Grieder, J. Löfberg, and M. Morari. A Survey on Stability Analysis of Discrete-Time Piecewise Affine Systems. In *IFAC World Congress* (Prague, Czech Republic, 2005).
- [49] P. Mason, M. Sigalotti, and J. Daafouz. On Stability Analysis of Linear Discrete-Time Switched Systems using Quadratic Lyapunov Functions. In *Proc. 46th IEEE Conf. Decision and Control* (2007), 5629–5633.
- [50] A. A. Ahmadi and P. A. Parrilo. Non-Monotonic Lyapunov Functions for Stability of Discrete Time Nonlinear and Switched Systems. In *Proc. 47th IEEE Conf. Decision and Control CDC 2008* (2008), 614–621.
- [51] U. T. Jönsson. A Lecture on the S-procedure. *Division of Optimization and Systems Theory, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden* (2001.).
- [52] J. Theys. *Joint Spectral Radius: Theory and Approximations*. Ph.D. thesis, Université catholique de Louvain Faculté des sciences appliquées Département d'ingénierie mathématique - Center for Systems Engineering and Applied Mechanics (2005).
- [53] K. Derinkuyu and M. Pinar. On the S-procedure and Some Variants. *Mathematical Methods of Operations Research* **64** (1), 55–77 (2006).
- [54] J. Lee, K. Kundert, and B. Razavi. Analysis and Modeling of Bang-Bang Clock and Data Recovery Circuits. *IEEE Journal of Solid-State Circuits* **39** (9), 1571–1580 (2004).

- [55] T. Bourdi and I. Kale. *CMOS Single Chip Fast Frequency Hopping Synthesizers for Wireless Multi-Gigahertz Applications: Design Methodology, Analysis, and Implementation* (Springer Verlag, 2007), 1 edition.
- [56] C. Wiegand, C. Hangmann, C. Hedayat, and U. Hilleringmann. A Resonance PLL-based Tracking System for Capacitive Sensors - MEMS/NEMS. *Smart System Integration SSI 2010* (2010).
- [57] S. Tertinek, J. Gleeson, and O. Feely. Binary Phase Detector Gain in Bang-Bang Phase-Locked Loops With DCO Jitter. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs* **57** (12), 941–945 (2010).
- [58] D. H. Wolaver. *Phase-Locked Loop Circuit Design* (Prentice Hall Advanced Reference Series, 1991).
- [59] H. Yoshizawa, K. Taniguch, and K. Nakashi. Phase Detectors/Phase Frequency Detectors for High Performance PLLs. *Analog Integrated Circuits and Signal Processing* **30**, 217–226 (2002).
- [60] A. Hajimiri and T. H. Lee. *The Design of Low Noise Oscillators* (Springer Verlag, 1999), 1 edition.
- [61] M. Tiebout. *Low Power VCO Design in CMOS* (Springer Verlag, 2006).
- [62] J. A. McNeill and D. Ricketts. *The Designer's Guide to Jitter in Ring Oscillators* (Springer Verlag, 2009).
- [63] J. Hein and J. Scott.  $z$ -Domain Model for Discrete-Time PLL's. *IEEE Transactions on Circuits and Systems* **35** (11), 1393–1400 (1988).
- [64] W. Li and J. Meiners. Introduction to Phase-locked Loop System Modeling. Technical report, Texas Instruments Incorporated (2000).
- [65] J. Lu, B. Grung, S. Anderson, and S. Rokhsaz. Discrete  $z$ -Domain Analysis of High Order Phase Locked Loops. *IEEE International Symposium on Circuits and Systems* (2001).
- [66] W. O. Keese. An Analysis and Performance Evaluation of a Passive Filter Design Technique for Charge Pump PLL's. Technical report, National Semiconductor Application Note (1996).
- [67] F. You and S. He. Analysis of Third-Order Charge Pump PLL. In *2004. ICCAS 2004. 2004 International Conference on Communications, Circuits and Systems*, volume 2 (2004), 1372–1376.
- [68] A. Carlosena and A. Manuel-Lazaro. Design of High-Order Phase-Lock Loops. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs* **54** (1), 9–13 (2007).

- [69] W. Rhee. *Multi-bit Delta-Sigma Modulation Technique for Fractional-N Frequency Synthesizers*. Ph.D. thesis, University of Illinois at Urbana-Champaign (2001).
- [70] C. Barrett. Fractional / Integer-N PLL Basics. Technical report, Texas Instruments Technical (1999).
- [71] M. Perrott, M. Trott, and C. Sodini. A Modeling Approach for Sigma- Delta Fractional-N Frequency Synthesizers Allowing Straightforward Noise Analysis. *IEEE Journal of Solid-State Circuits* **37** (8), 1028 – 1038 (2002).
- [72] S. Meninger and M. Perrott. Bandwidth Extension of Low Noise Fractional-N Synthesizers. In *Radio Frequency integrated Circuits (RFIC) Symposium, 2005. Digest of Papers. 2005 IEEE* (2005), 211–214.
- [73] M. J. Burbidge. Detection and Evaluation of Deterministic Jitter Causes in CP-PLL's Due to Macro Level Faults and Pre-Detection using Simple Methods. *Journal Of Electronic Testing: Theory And Applications* **21**, 267–281 (2005).
- [74] W. Lindsey and C. Chie. Guest Editorial: Special Issue on Phase-Locked Loops. *IEEE Transactions on Communications* **30**, 2221 (1982).
- [75] B. Wang. *Techniques de modelisation et de simulation pour la verification precise de PLLs a facteur de division entier*. Ph.D. thesis, Universite de Limoges, Faculte des Sciences et Techniques (2009).
- [76] L. Liu and B. Li. Fast Locking Scheme for PLL Frequency Synthesiser. *Electronics Letters* **40** (15), 918–920 (2004).
- [77] K. Woo and D. Ham. Fast-locking Integer/Fractional-N Hybrid PLL Frequency Synthesizer. In *2006. MWSCAS '06. 49th IEEE International Midwest Symposium on Circuits and Systems*, volume 1 (2006), 674–678.
- [78] Y. Xiaozhou, K. Xiaofei, and W. Nanjiian. A Fast-Settling Frequency-Presetting PLL Frequency Synthesizer with Process Variation Compensation and Spur Reduction. *Journal of Semiconductors* **30** (4) (2009).
- [79] C. Wiegand, C. Hedayat, and U. Hilleringmann. Lock Detection for Charge-Pump Phase-Locked Loops. *Sophia Antipolis Microelectronics SAME 2009* (2009).
- [80] W. Y. Shin, M. Kim, G. M. Hong, and S. Kim. A Fast-Acquisition PLL's using Split Half-Duty Sampled Feedforward Loop Filter. *IEEE Transactions on Consumer Electronics* **56** (3), 1856–1859 (2010).
- [81] R. Den Dulk. Digital Fast Acquisition Method for Phase-Lock Loops. *Electronics Letters* **24** (17), 1079–1080 (1988).



- [82] V. Kroupa and L. Sojdr. Phase-Lock Loops of Higher Orders. *Second International Conference on Frequency Control and Synthesis* , 65–68 (1989).
- [83] P. Larsson. Reduced Pull-In Time Of Phase-locked Loops using a Simple Nonlinear Phase Detector. *IEE Proceedings- Communications* **142** (4), 221–226 (1995).
- [84] Y. Tang, Y. Zhou, S. Bibykl, and M. Ismail. A Low-Noise Fast-Settling PLL with Extended Loop Bandwidth Enhancement by New Adaptation Technique. In *ASIC/SOC Conference, 2001. Proceedings. 14th Annual IEEE International* (2001), 93–97.
- [85] P. Forbes and I. Collins. Lock Detect on the ADF4xxx Family of PLL Synthesizers. Technical report, Analog Devices (2006).
- [86] M. Green, N. M. Nguyen, Y. Frans, D. Kim, and T. Bystrom. PLL Lock Detection Circuit using Edge Detection and a State Machine (2006).
- [87] A. Dixit. PLL Lock Detector (2004).
- [88] Datasheet. *74HC/HCT7046A: Phase-Locked-Loop with Lock Detector*. Philips Semiconductors (1990).
- [89] R. Den Dulk. Digital PLL Lock-Detection Circuit. *Electronics Letters* **24** (14), 880–882 (1988).
- [90] Y. F. Kuo, R. M. Weng, and C. Y. Liu. A Fast Locking PLL with Phase Error Detector. *2005 IEEE Conference on Electron Devices and Solid-State Circuits* , 423–426 (2005).
- [91] A. Demir, E. Liu, A. Sangiovanni-Vincentelli, and I. Vassiliou. Behavioral Simulation Techniques for Phase/Delay-Locked Systems. *Custom Integrated Circuits Conference, 1994., Proceedings of the IEEE 1994* , 453–456 (1994).
- [92] F. Gardner. Phase Accuracy of Charge Pump PLL's. *IEEE Transactions on Communications* **30** (10), 2362–2363 (1982).
- [93] M. Celik, L. Pileggi, and A. Odabasioglu. *IC Interconnect Analysis* (Kluwer Academic Publishers, 2002).
- [94] N. Köckler and H. R. Schwarz. *Numerische Mathematik* (Teubner B.G. GmbH, 2004), 5 edition.
- [95] L. Van den Berg and D. G. Elliott. An Alias-Locked Loop Frequency Synthesis Architecture. In *Proc. IEEE Int. Symp. Circuits and Systems ISCAS 2008* (2008), 1536–1539.
- [96] C. Bi and O. Feely. Nonlinear Dynamics of Alias-Locked Loop. In *Proc. European Conf. Circuit Theory and Design ECCTD 2009* (2009), 343–346.

- [97] N. Da Dalt. A Design-Oriented Study of the Nonlinear Dynamics of Digital Bang-Bang PLLs. *I: Regular Papers, IEEE Transactions on Circuits and Systems* **52** (1), 21–31 (2005).
- [98] X. Liao and P. Yu. *Absolute Stability of Nonlinear Control Systems* (Springer Verlag, 2008).

---

## Danksagung

---

Zum Abschluss der vorliegenden Dissertation, die im Rahmen meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Angestellter im Fachgebiet Sensorik der Universität Paderborn und der Abteilung ASE innerhalb des Fraunhofer Instituts ENAS entstand, möchte ich mich bei den Personen bedanken, die mich während der Verwirklichung dieser Arbeit unterstützt haben. Daher gilt mein besonderer Dank:

Herrn Professor Ulrich Hilleringmann als Leiter des Fachgebiets Sensorik für die Möglichkeit zur Durchführung der Forschungsarbeiten.

Herrn Professor Klaus Meerkötter für die Übernahme des Korreferats und seine hilfreichen Kommentare.

Herrn Christian Hedayat für den gewährten Freiraum innerhalb der ASE, um die Arbeit nach eigenen Vorstellungen zu verwirklichen und den zahlreichen fruchtbaren Diskussionen. Des Weiteren danke ich ihm für den freundschaftlichen Umgang.

Meinen ehemaligen Arbeitskollegen im Fachgebiet Sensorik und in der Arbeitsgruppe ASE für die gute Zusammenarbeit sowie für das angenehme Arbeitsklima.

Christian Hangmann, Ingo Wüllner und Fabian Bertelsmeier für ihre Beiträge in Form von Diplom- und Projektarbeiten.

Karsten Wolff, Torsten Vössing und Marie-Christin Wiegand für die gewissenhafte Durchsicht des Manuskripts und ihre wertvollen Anmerkungen.

Insbesondere danke ich meiner Frau Marie für ihr unermessliches Verständnis und den definitiv nicht selbstverständlichen Rückhalt, den sie mir gerade in dieser Zeit gegeben hat. Ohne sie wäre diese Arbeit nie fertiggestellt worden.