

Decision Support & Operations Research Lab  
Fachgebiet Wirtschaftsinformatik  
Fakultät für Wirtschaftswissenschaften  
**UNIVERSITÄT PADERBORN**

# Optimierung des Ausbaus von Nah- und Fernwärmenetzen

*unter Berücksichtigung  
eines bestehenden Gasnetzes*

Dissertation  
zur Erlangung des akademischen Grades eines  
Doktors der Wirtschaftswissenschaften  
(Dr. rer. pol.)  
der Universität Paderborn

vorgelegt von:  
Piet Hensel

Erstprüferin: Prof. Dr. Leena Suhl  
Zweitprüfer: Prof. Dr. Achim Koberstein

Paderborn, im Juni 2013



# Danksagung

Mein besonderer Dank gilt:

Meinen wissenschaftlichen Betreuern Prof. Dr. Leena Suhl und Prof. Dr. Uwe Suhl für die Unterstützung, zahlreiche Anregungen und die konstruktive Kritik.

Dr. Dirk König, Thomas Rücken und den weiteren Kollegen vom RZVN. Ohne die Unterstützung, die Flexibilität und die Freiräume wäre diese Arbeit nicht möglich gewesen.

Günter Schilbock, der eine praktische Anwendung des Verfahrens ermöglicht hat.

Den Lehrstuhlmitarbeitern am DSOR für die Anregungen und die Unterstützung bei formalen Fragen.





## Inhalt

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>1</b>
1.1	Ausgangssituation	1
1.2	Ziele der Arbeit	2
1.3	Aufbau der Arbeit	3
<b>2</b>	<b>Der Wärmemarkt</b>	<b>5</b>
2.1	Struktur des Wärmemarktes	5
2.2	Entwicklung des Wärmebedarfs	7
2.3	Zeitlicher Verlauf des Wärmebedarfs	9
2.4	Energiepreise	11
<b>3</b>	<b>Gas- und Wärmeversorgung</b>	<b>13</b>
3.1	Zentrale Wärmeerzeugung	13
3.1.1	Konventionell	13
3.1.2	Kraft-Wärme-Kopplung	15
3.1.2.1	Motor-BHKW	16
3.1.2.2	Gasturbinen-HKW	18
3.1.2.3	Dampfturbinen-HKW	19
3.1.2.4	Gas- und Dampfturbinen-HKW	21
3.1.2.5	Biomasse-HKW	23
3.1.2.6	Sonstige KWK-Anlagen	24
3.1.3	Betriebsweise von KWK-Anlagen	24
3.2	Energietransport	25
3.2.1	Wärmenetze	25
3.2.1.1	Rohrwerkstoffe und Nennweiten	27
3.2.1.2	Verlegekosten	27
3.2.1.3	Betrieb und Auslegung von Wärmenetzen	28
3.2.2	Gasversorgungsnetze	31
3.2.2.1	Rohrwerkstoffe und Nennweiten	32
3.2.2.2	Verlegekosten	32
3.2.3	Erneuerung von Rohrnetzen	33
3.2.3.1	Notwendigkeit der Erneuerung	33
3.2.3.2	Instandhaltungsstrategie	34
3.3	Dezentrale Wärmeerzeugung und Haustechnik	36
3.3.1	Erdgaskessel	38
3.3.2	Ölkessel	38
3.3.3	Holzpellet-Heizungen	39
3.3.4	Wärmepumpen	39
3.3.5	Mikro- und Mini-KWK	40
3.3.6	Fernwärme	42
3.4	Berechnung der CO <sub>2</sub> -Emissionen	43
<b>4</b>	<b>Planungs- und Optimierungsaufgabe</b>	<b>47</b>
4.1	Planungsebenen	47

4.2	Planungsaufgabe	51
4.2.1	Ermittlung des Absatzpotentials	51
4.2.1.1	Bestimmung des Wärmebedarfs	51
4.2.1.2	Bestimmung des erwarteten Absatzpotentials	52
4.2.1.3	Ermittlung der Wärmebedarfsdichte	53
4.2.2	Trassierung	54
4.2.3	Technische Auslegung von Fernwärmenetzen	55
4.2.3.1	Dimensionierung von Leitungen	55
4.2.3.2	Dimensionierung von KWK-Anlagen	56
4.2.4	Wirtschaftlichkeitsbewertung	58
4.2.4.1	Erlösdaten	59
4.2.4.2	Kostendaten	60
4.2.4.3	Methodik der Wirtschaftlichkeitsberechnung	64
4.2.4.4	Berücksichtigung der Gasverdrängung	66
4.3	Optimierungsaufgabe	67
4.3.1	Optimierungsziel	69
4.3.2	Nebenbedingungen	69
4.3.3	Konkurrenz zwischen Gas- und Fernwärme	71
<b>5</b>	<b>Theoretische Grundlagen</b>	<b>75</b>
5.1	Notation und Symbolik	75
5.2	Formale Beschreibung der Optimierungsaufgabe	77
5.3	Steiner-Graph-Probleme	78
5.3.1	Das Steiner-Baum-Problem	78
5.3.2	Das Steiner-Baum-Problem in gerichteten Graphen	79
5.3.3	Das Knoten-Gewichtete Steiner-Baum Problem	80
5.3.3.1	Das Single-Point Node-Weighted Steiner-Tree Problem	82
5.3.3.2	Das Prize-Collecting Steiner-Tree Problem	82
5.3.4	Das allgemeine Steiner-Problem in Graphen	83
5.3.5	Das Mehrperiodige Steiner-Graph Problem	85
5.4	Das Kapazitätsbeschränkte Netzwerkentwurfsproblem	86
5.5	Lösungsverfahren	88
5.5.1	Mathematische Optimierung	89
5.5.1.1	Lineare Optimierung	89
5.5.1.2	Gemischt-ganzzahlige lineare Optimierung	90
5.5.2	Approximationsalgorithmen	93
5.5.3	Heuristiken	94
<b>6</b>	<b>Stand der Technik</b>	<b>97</b>
6.1	Steiner-Graph Probleme	97
6.1.1	Approximationsalgorithmen	98
6.1.2	Heuristiken	99
6.1.3	Mathematische Optimierung	100
6.1.3.1	Übersicht	101
6.1.3.2	Single-Commodity-Flow Formulierung	103
6.1.3.2.1	ST	103
6.1.3.2.2	PCST	104
6.1.3.3	Multi-Commodity-Flow Formulierung	105
6.1.3.3.1	ST	105
6.1.3.3.2	PCST	107

6.1.3.4	Connectivity-Cut Formulierung .....	108
6.1.3.4.1	ST .....	108
6.1.3.4.2	PCST .....	111
6.1.3.5	Subtour-Elimination Formulierung .....	112
6.1.3.5.1	ST .....	112
6.1.3.5.2	PCST .....	113
6.1.3.5.3	CSP und MSP .....	113
6.1.3.6	Weitere Modellierungsansätze .....	115
6.1.3.6.1	Restricted Minimum-Spanning-Tree Model .....	115
6.1.3.6.2	Set-Covering Formulierung .....	116
6.1.4	Preprocessing .....	116
6.2	Das Kapazitätsbeschränkte Netzwerkerweiterungsproblem .....	118
6.3	Praktische Optimierungsansätze im Fernwärmeausbau .....	120
6.4	Handlungsbedarf .....	122
<b>7</b>	<b>Optimierungsmodell .....</b>	<b>127</b>
7.1	Modellübersicht .....	129
7.2	Modellkomponenten .....	130
7.2.1	Fernwärmetrassen .....	130
7.2.2	Heizkraftwerke .....	131
7.2.3	Gasleitungen .....	132
7.2.4	Modellierung als Netzwerk .....	133
7.3	Symbole und Definitionen .....	135
7.3.1	Mengen und Indizes .....	135
7.3.2	Entscheidungsvariablen .....	135
7.3.3	Parameter .....	136
7.3.4	Definitionen .....	137
7.3.4.1	Diskontierungsfaktoren .....	137
7.3.4.2	Kantengewichte des vereinfachten Modells .....	137
7.4	Modellformulierungen .....	138
7.4.1	Vereinfachtes Modell .....	139
7.4.1.1	Zielfunktion .....	139
7.4.1.2	Allgemeine Nebenbedingungen .....	139
7.4.1.3	Nebenbedingungen Netzwerkfluss (Modell A1) .....	140
7.4.1.4	Nebenbedingungen B&C Subtour-Elimination (Modell A2) .....	142
7.4.1.5	Nebenbedingungen B&C Connectivity (Modell A3) .....	144
7.4.2	Vollständiges Modell .....	146
7.4.2.1	Zielfunktion .....	146
7.4.2.2	Allgemeine Nebenbedingungen .....	149
7.4.2.2.1	Heizkraftwerke .....	149
7.4.2.2.2	Leitungen .....	151
7.4.2.3	Nebenbedingungen Netzwerkfluss (Modell B1) .....	154
7.4.2.4	Nebenbedingungen B&C Subtour-Elimination (Modell B2) .....	158
7.4.2.5	Nebenbedingungen B&C Connectivity (Modell B3) .....	159
<b>8</b>	<b>Numerische Ergebnisse .....</b>	<b>161</b>
8.1	Implementierung .....	161
8.1.1	Flussformulierung .....	161
8.1.2	B&C Subtour-Elimination .....	161
8.1.3	B&C Connectivity .....	162

8.1.4	Preprocessing	165
8.2	Modellinstanzen	166
8.2.1	Benchmark Bibliotheken	166
8.2.2	Generierte Fernwärmenetze	167
8.2.3	Reale Netze	169
8.3	Strukturelle Eigenschaften der Modellinstanzen	170
8.4	Berechnungsergebnisse	172
8.4.1	Annahmen	172
8.4.2	Benchmark Bibliotheken	173
8.4.2.1	Flussformulierung	175
8.4.2.2	B&C Subtour-Elimination	176
8.4.2.3	B&C Connectivity	178
8.4.3	Generierte Fernwärmenetze	180
8.4.3.1	Performance in Abhängigkeit der Netzgröße	180
8.4.3.2	Performance in Abhängigkeit des Anteils von Kanten mit positivem Gewicht	181
8.4.3.3	Performance in Abhängigkeit der Anzahl der Heizkraftwerke	182
8.4.3.4	Performance in Abhängigkeit der Anzahl der Perioden	182
8.4.4	Reale Netze	185
8.4.4.1	Flussformulierung	185
8.4.4.2	B&C Subtour-Elimination	186
8.4.4.3	B&C Connectivity	186
8.4.4.4	Performance in Abhängigkeit der Anzahl der Perioden	187
8.4.4.5	Performance in Abhängigkeit des Budgets	188
8.5	Verbesserungsansätze	189
8.5.1	Mehrperiodigkeit	189
8.5.2	Zyklengenerierung B&C Subtour-Elimination	192
8.5.3	Cut-Generierung B&C Connectivity	193
8.6	Bewertung	195
<b>9</b>	<b>Fallstudie</b>	<b>197</b>
9.1	Ausgangssituation und Aufgabenstellung	197
9.2	Datengrundlagen	197
9.3	Untersuchungsgebiet	199
9.4	Rahmenbedingungen	200
9.4.1	Kosten- und Erlösdaten	200
9.4.2	Anschlussgrad	201
9.4.3	Budget und Ausbauperioden	201
9.5	Szenarien	202
9.6	Wirtschaftlichkeitsbewertung	202
9.7	Optimierung des Netzausbaus	204
9.7.1	Netzmodell	204
9.7.2	Erneuerungsbedarf Gas	204
9.7.3	Optimierungsergebnis	205
9.7.3.1	Szenario 1 (100 %)	205
9.7.3.2	Szenario 2 (35 %)	208
9.7.3.3	Szenario 3 (Neubau Heizkraftwerk)	210
9.7.3.3.1	Heizkraftwerkstypen	210
9.7.3.3.2	Kosten- und Erlösdaten	210
9.7.3.3.3	Budget und Ausbauperioden	212
9.7.3.3.4	Ergebnisse	212

9.8	CO <sub>2</sub> -Bewertung .....	216
9.9	Bewertung der Ergebnisse .....	218
<b>10</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick .....</b>	<b>219</b>
	<b>Literaturverzeichnis .....</b>	<b>221</b>



## Abkürzungen

AGFW	Der Energieeffizienzverband für Wärme, Kälte und KWK e.V.
AMPL	A Modeling Language for Mathematical Programming
AREGV	Anreizregulierungsverordnung
BHKW	Blockheizkraftwerk
B&B	Branch-and-Bound
B&C	Branch-and-Cut
CO <sub>2</sub>	Kohlendioxid
CSP	Connected Steiner-Problem in Graphs
DIN	Deutsches Institut für Normung e.V.
DN	Nennweite
DST	Directed Steiner-Tree Problem
DVGW	Deutsche Vereinigung des Gas- und Wasserfaches e.V.
EEG	Erneuerbare-Energien-Gesetz
EEWärmeG	Erneuerbare-Energien-Wärmegesetz
EEX	European Energy Exchange
ENEV	Energieeinsparverordnung
EnWG	Energiewirtschaftsgesetz
EU	Europäische Union
GDRM	Gas-Druckregel- und Messanlage
GIS	Geographisches Informationssystem
GuD	Gas- und Dampfturbinenkraftwerk
HD	Hochdruck
HKW	Heizkraftwerk
IEA	Internationale Energieagentur
IKT	Informations- und Kommunikationstechnologie
IP	Integer Programming
KMR	Kunststoffmantelrohr
KWK	Kraft-Wärme-Kopplung
KWKG	Kraft-Wärme-Kopplungs-Gesetz
LP	Linear Programming
MD	Mitteldruck
MIP	Mixed-Integer Programming
MSP	Mehrperiodiges Steiner-Graph Problem

ND	Niederdruck
NLP	Nonlinear-Programming
NPV	Net-Present-Value
NWST	Node-Weighted Steiner-Tree Problem
PCST	Prize-Collecting Steiner-Tree Problem
PVC	Polyvinylchlorid
PE	Polyethylen
PEE	Primärenergieeinsparung
PU	Polyurethan
SOS	Special Ordered Set
ST	Steiner-Tree Problem
VDI	Verein Deutscher Ingenieure e.V.
WACC	Weighted average cost of capital
WP	Wärmepumpe
WSVO	Wärmeschutzverordnung



## Einheiten und Symbole

### Hinweise

Der Zusatz *el* steht bei Einheiten oder Formelsymbolen für *elektrisch*, der Zusatz *th* für *thermisch*. Die meisten Formelsymbole werden hier nicht aufgeführt, sondern vor Gebrauch in den jeweiligen Kapiteln definiert und haben nicht zwingend in der gesamten Arbeit die gleiche Bedeutung.

a	Jahr
bar	Bar
$\eta$	Wirkungsgrad
g	Gramm
GW	Gigawatt
GWh	Gigawattstunde
h	Stunde
K	Kelvin
kg	Kilogramm
km	Kilometer
kW	Kilowatt
kWh	Kilowattstunde
m	Meter
mbar	Millibar
MW	Megawatt
MWh	Megawattstunde
t	Tonne
TWh	Terawattstunde



## Abbildungen

2.1	Struktur des Endenergie- und Wärmeverbrauchs in Deutschland	5
2.2	Beheizungsstruktur bei Bestands- und Neubauten	6
2.3	Entwicklung des Heizwärmeleistungsbedarfs für Neubauten und im Wohnungsbestand	7
2.4	Entwicklung des Primärenergiebedarfs zur Raumerwärmung und Warmwasserbereitstellung in Abhängigkeit von Effizienzstandards	8
2.5	Entwicklung des Wärmebedarfs privater Haushalte bis 2030	9
2.6	Jahreslastgang und sortierte Jahresdauerlinie des Wärmebedarfs einer Kleinstadt 2006	10
2.7	Gleichzeitigkeitsfaktor in Abhängigkeit von der Anzahl der Abnehmer in Nahwärmenetzen	11
2.8	Relative Preisentwicklung ausgewählter Energieträger	12
3.1	Systeme der leitungsgebundenen Wärmeversorgung	13
3.2	Brennstoffeinsatz in Heizwerken	14
3.3	Primärenergieeinsparung durch Kraft-Wärme-Kopplung	15
3.4	Prinzipschaltbild eines Motor-BHKW	17
3.5	Spezifische Richtpreise für Erdgas-BHKW	18
3.6	Prinzipschaltbild eines Gasturbinen-HKW	19
3.7	Spezifische Richtpreise für Gasturbinen und Abhitzeessel	19
3.8	Prinzipschaltbild eines Dampfturbinen-HKW	20
3.9	Prinzipschaltbild eines Gas- und Dampfturbinen-HKW	22
3.10	Elektrischer Wirkungsgrad und Gesamtwirkungsgrad (elektrisch + thermisch) verschiedener GuD-HKW in Abhängigkeit von der Wärmeauskopplung	23
3.11	Aufbau eines Fernwärmenetzes	26
3.12	Thermische Übertragungskapazität einer Leitung bei verschiedenen Temperaturspreizungen	30
3.13	Empirisch und analytisch abgeleitete Alterungsfunktionen für Stahlrohre	35
3.14	Erneuerungsplanung für ein Gasrohrnetz (Planausschnitt)	36
3.15	Vergleich verschiedener Verfahren zur Allokation der CO <sub>2</sub> -Emissionen von KWK-Anlagen	46
4.1	Erstellung eines Trassenmodells aus den Straßen- und Gebäudedaten	54
4.2	BHKW-Dimensionierung und -Fahrweise in Abhängigkeit der Jahresdauerlinie	58
4.3	Exemplarische Darstellung einer optimalen Wärmenetzausbauplanung	68
4.4	Verlegekosten in Abhängigkeit der thermischen Übertragungskapazität	71
4.5	Vergleich der Wirtschaftlichkeit mit bzw. ohne Berücksichtigung des Erlösrückgangs im Gasnetz	72
5.1	Transformation eines ungerichteten Steiner-Baum Problems (a) in ein äquivalentes gerichtetes Steiner-Baum Problem (b)	80
5.2	Transformation eines Knoten-Gewichteten Steiner-Baum Problems (mit nicht-negativen Knotengewichten) (a) in ein äquivalentes gerichtetes Steiner-Baum Problem (b)	81
5.3	Transformation eines Knoten-Gewichteten Steiner-Baum Problems NWST (a) in ein äquivalentes allgemeines Steiner-Graph Problem CSP (b)	84
5.4	Transformation eines allgemeinen Steiner-Graph Problems CSP (a) in ein Knoten-Gewichtetes Steiner-Baum Problem NWST (b)	85
6.1	Optimale Lösung eines CSP ohne und mit Zyklenrestriktion	114

6.2	Transformation eines ST (a) in ein <i>Restricted Minimum-Spanning-Tree Model</i> (b)	115
6.3	Anwendung des $V \setminus K$ Reduction Test mit Hervorhebung der Knotenpaare und Kanten, welche durch den Test verschmolzen werden können	118
7.1	Berücksichtigung der Heizkraftwerke in der vereinfachten Modellformulierung über zusätzliche Kanten	134
7.2	Übersicht der Modellformulierungen	138
7.3	Unterschied zwischen Zyklus (gerichtet) und Kreis (ungerichtet)	142
7.4	Zyklenbildung im Verlauf des B&C Subtour-Elimination	143
7.5	Ablauf des B&C Subtour-Elimination Algorithmus	144
7.6	Ablauf des B&C Connectivity Algorithmus	146
7.7	Sortierte Jahresdauerlinie des Wärmebedarfs mit Darstellung der Leistungsblöcke	150
7.8	Topologische Brücken (rot)	153
8.1	Bestimmung minimaler Schnitte mit <i>Nested-Cuts</i>	164
8.2	Bestimmung von <i>Back-Cuts</i>	165
8.3	Struktur der generierten Modellnetze	168
8.4	Struktur der realen Netzmodelle	170
8.5	Anteil der Benchmark-Instanzen, die innerhalb der maximalen Lösungsdauer optimal gelöst werden konnten	173
8.6	Lösungsdauer der einzelnen Benchmark-Instanzen in Abhängigkeit von der Modellgröße	174
8.7	Mittlere Lösungsdauer der Benchmark-Instanzen	176
8.8	Konvergenzverhalten des B&C Subtour-Elimination für die Instanz D12-A	177
8.9	Mittlere Lösungsdauer der generierten Netzmodelle in Abhängigkeit der Netzgröße	181
8.10	Mittlere Lösungsdauer der generierten Netzmodelle in Abhängigkeit der Netzgröße und des Anteils von Kanten mit positivem Gewicht	182
8.11	Mittlere Lösungsdauer in Abhängigkeit der Anzahl der Ausbauperioden für die generierten Netze	184
8.12	Anstieg der Lösungsdauer des LP in Abhängigkeit von der Anzahl der Cuts	194
9.1	Lage des Untersuchungsgebietes	199
9.2	Bestehende Beheizungsstruktur im Untersuchungsgebiet	200
9.3	Dimensionsabhängige Verlegekosten	200
9.4	Verteilung der Wärmebedarfsdichte im Untersuchungsgebiet	203
9.5	Erneuerungsplanung der bestehenden Gasleitungen	205
9.6	Optimierungsergebnis Szenario 1	206
9.7	Optimierungsergebnis Szenario 2	209
9.8	Leistungsabhängige Investitionskosten der Heizkraftwerkstypen	211
9.9	Trassen und Heizkraftwerksstandorte in Szenario 3a (hohe Stromvergütung)	213
9.10	Fahrweise der Heizkraftwerke in Szenario 3a (hohe Stromvergütung)	214
9.11	Fahrweise der Heizkraftwerke in Szenario 3b (geringe Stromvergütung)	215
9.12	CO <sub>2</sub> -Emissionen in den verschiedenen Ausbauszenarien	217

## Tabellen

3.1	Merkmale ausgewählter Heizwerkstypen	14
3.2	CO <sub>2</sub> -Faktoren fossiler Brennstoffe	15
3.3	Richtwerte für die spezifischen Investitionskosten von Dampfturbinen-HKW	21
3.4	Unterscheidungskriterien zwischen Nah- und Fernwärme	25
3.5	Richtwerte für dimensionsabhängige Verlegekosten für Fernwärmeleitungen	28
3.6	Richtwerte für dimensionsabhängige Verlegekosten für Gasleitungen	33
3.7	Annahmen für den Vollkostenvergleich von Heizsystemen	37
3.8	Vollkostenvergleich ausgewählter Heizungssysteme nach VDI-Richtlinie 2067	37
3.9	Spezifische CO <sub>2</sub> -Emissionen (inkl. Vorketten) ausgewählter Heizungssysteme in Deutschland 2010	44
4.1	Abgrenzung der Planungsebenen	47
4.2	Zuschlagzahlung nach §7 KWKG	60
4.3	Richtwerte für die Erzeugungskosten von Heizkraftwerken nach der Restwertmethode	62
4.4	Eingangsgrößen der Wirtschaftlichkeitsberechnung	65
5.1	Notation und Symbolübersicht	76
7.1	Übersicht der Modellformulierungen	129
8.1	Übersicht der Benchmark-Instanzen	167
8.2	Übersicht der generierten Modellinstanzen	169
8.3	Strukturelle Eigenschaften der unterschiedlichen Modellinstanzen	171
8.4	Relative Veränderung der mittleren Lösungsdauer der mehrperiodigen Instanzen mit 50 Kanten gegenüber dem einperiodigen Fall	184
8.5	Lösungsdauer der realen Netzmodelle (einperiodig)	185
8.6	Lösungsdauer in Abhängigkeit der Anzahl der Ausbauperioden für Netzmodell A	188
8.7	Lösungsdauer der Modellnetze A und B in Abhängigkeit des verfügbaren Budgets	188
8.8	Lösungsdauer bei der zweistufigen mehrperiodigen Optimierung (Mittelwert für die Netzmodelle A und B)	192
9.1	Eingangsgrößen der Wirtschaftlichkeitsberechnung	203
9.2	Heizkraftwerkstypen	211
9.3	Spezifische CO <sub>2</sub> -Emissionsfaktoren	216



# 1 Einführung

## 1.1 Ausgangssituation

Vor dem Hintergrund der Bemühungen die CO<sub>2</sub>-Emissionen bei langfristig steigenden Preisen fossiler Brennstoffe signifikant zu reduzieren, rückt eine Wärmeversorgung durch alternative Erzeugungsverfahren sowohl aus Sicht der Versorgungsunternehmen als auch der Politik verstärkt in den Fokus. Neben einer breiteren Nutzung regenerativer Energien zur Wärmebereitstellung wird die effizientere Umwandlung konventioneller Energieträger durch Nutzung der Abwärme bei der Stromerzeugung (Kraft-Wärme-Kopplung, KWK) angestrebt.

In Deutschland dominiert die dezentrale Wärmeherzeugung durch Öl- und Erdgasheizungen, mit einem gemeinsamen Marktanteil von fast 80 % (s. Abschnitt 2.1). Die Bereitstellung der Wärme über Nah- und Fernwärmenetze erreicht hingegen nur einen Marktanteil von ca. 10 % an der Deckung des Heiz- und Warmwasserbedarfs der privaten Haushalte. Erklärtes Ziel der Politik ist es daher, den Anteil der aus Biomasse und KWK-Anlagen erzeugten Wärme in den nächsten Jahren signifikant zu steigern. Entsprechende Verordnungen und Fördermaßnahmen sind bereits in Kraft getreten, so wird durch das *Kraft-Wärme-Kopplungs-Gesetz* (KWKG) eine Erhöhung des Anteils der Stromerzeugung durch Kraft-Wärme-Kopplung von heute 15 % (vgl. [AGFW, 2012b] S. 42) auf 25 % bis zum Jahr 2020 angestrebt (vgl. KWKG §1).

Für die Energieversorgungsunternehmen ist ein Ausbau der Fernwärmeversorgung vor allem aus wirtschaftlichen Gründen interessant, da die Margen in der Gasversorgung aufgrund der Öffnung des Gasmarktes und der *Anreizregulierung*<sup>1</sup> weitgehend rückläufig sind. Zusätzlich wird die Kundenbindung im Gasbereich tendenziell weiter abnehmen, da durch die Liberalisierung ein Wechsel des Gasversorgers problemlos möglich ist. Fernwärmekunden hingegen steht die Möglichkeit eines Anbieterwechsels nicht offen.

Da der Neu- bzw. Ausbau von Wärmenetzen mit hohen Investitionen verbunden ist, muss das benötigte Kapital möglichst zielgenau eingesetzt werden, um einen wirtschaftlichen Betrieb der Netze zu ermöglichen. Die Wirtschaftlichkeit des Netzausbaus und -betriebs

---

<sup>1</sup> Die Anreizregulierung, welche in der *Anreizregulierungsverordnung* (AREGV) geregelt ist, legt für jeden Gasnetzbetreiber eine Erlösobergrenze für den Transport des Erdgases zu den Kunden fest. Hierdurch sollen Monopolgewinne der Gasverteilnetzbetreiber verhindert werden. Die Anreizregulierung ist so gestaltet, dass die Erlöse innerhalb einer Regulierungsperiode kontinuierlich sinken.

hängt von einer Vielzahl von Parametern ab. Wesentlichen Einfluss haben die Investitionskosten für die Leitungsverlegung und den Bau der Heizkraftwerke, die Bebauungsdichte sowie die Entwicklung des Erdgas- und Strompreises.

Insbesondere die Bebauungsstruktur entscheidet darüber, ob die Investitionen in ein Wärmenetz rentabel sind. Im Innenstadtbereich, wo aufgrund der dichten Bebauung jedem verlegten Leitungsmeter ein hoher Absatz gegenübersteht, können sich die Investitionen relativ schnell amortisieren. In dünner besiedelten Randgebieten hingegen werden die Investitionen nicht unbedingt durch die zukünftigen Erlöse gedeckt, weswegen der Bau eines Wärmenetzes in solchen Siedlungen genau geprüft werden muss. Je größer das potentielle Versorgungsgebiet und je differenzierter die Bebauungsstruktur ist, desto komplexer wird die Aufgabe, genau die Kunden und Straßenabschnitte zu bestimmen, welche den größtmöglichen Gewinn versprechen.

Darüber hinaus ist zu beachten, dass der Energieträger Fernwärme vielfach in Konkurrenz zur bestehenden Erdgasversorgung steht. Der Wärmenetzausbau geht daher teilweise mit einem Rückgang des Gasabsatzes einher. Zur Vermeidung einer weitgehenden Verdrängung der Erdgaskunden sollte die Erweiterung des Wärmenetzes also bevorzugt in Straßenzügen erfolgen, in denen noch keine Gasversorgung existiert. Ist dies nicht möglich, sollte alternativ versucht werden Straßen zu versorgen, in denen eine altersbedingte Erneuerung der Erdgasleitungen notwendig ist. Anstatt die Gasleitungen zu erneuern, werden solche Straßenzüge vollständig auf Fernwärme umgestellt. Damit können hohe Erneuerungskosten im Gasnetz eingespart werden, sofern die Straßen rechtzeitig an das Wärmenetz angeschlossen werden. Für die Planung bedeutet dies, dass auch der Zeitpunkt der einzelnen Ausbauschritte von essentieller Bedeutung ist.

## 1.2 Ziele der Arbeit

Aus den vorangegangenen Betrachtungen ergibt sich eine hohe Komplexität bei der Planung des Neu- bzw. Ausbaus von Wärmenetzen. Ziel der Arbeit ist daher die Entwicklung eines entscheidungsunterstützenden Systems, welches dem Planer den wirtschaftlich optimalen Ausbaupfad aufzeigt. Dabei sollen nicht nur die Kunden bzw. Straßenzüge ermittelt werden, welche langfristig den höchsten Gewinn versprechen, sondern auch der zeitliche Ablauf der Ausbaumaßnahmen. Zusätzlich muss die beschriebene Rückbaumöglichkeit des Gasnetzes berücksichtigt werden.

Die mathematische Modellierung des Optimierungsproblems und die Auswahl geeigneter Lösungsverfahren bilden die Grundlage des entscheidungsunterstützenden Systems.



Ein Vergleich der Modellierung und Ergebnisse mit bereits bestehenden Ansätzen zur Lösung verwandter Netzwerkoptimierungsprobleme soll die Eignung des gewählten Ansatzes sicherstellen. Die Tauglichkeit des Verfahrens für praxisrelevante Problemstellungen und -größen wird anhand realer Daten nachgewiesen.

Durch Betrachtung verschiedener Netzstrukturen und Absatz- sowie Preisszenarien soll die Wirtschaftlichkeit des Wärmenetzausbaus in Abhängigkeit dieser Faktoren untersucht werden. Durch die Gewährleistung der Optimalität für jedes Szenario kann der Einfluss veränderter Rahmenbedingungen unverzerrt quantifiziert werden.

## 1.3 Aufbau der Arbeit

Zur Einführung in die Thematik des Wärmenetzausbaus wird in Kapitel 2 der Wärmemarkt charakterisiert. Eine Beschreibung des grundlegenden Aufbaus von Gas- und Fernwärmenetzen sowie ein Vergleich der wichtigsten Wärmeerzeugungsverfahren hinsichtlich ihrer Kosten und CO<sub>2</sub>-Emissionen folgt in Kapitel 3.

Die praktische Vorgehensweise bei der Planung von Fernwärmenetzen und die hiermit verbundenen Herausforderungen werden in Kapitel 4 beschrieben. Hieraus werden die Anforderungen an das Optimierungssystem abgeleitet und die Optimierungsaufgabe konkretisiert.

Anschließend wird in Kapitel 5 dargestellt, wie das praktische Optimierungsproblem in ein graphentheoretisches Netzwerkentwurfsproblem überführt werden kann und welche Einschränkungen hierbei zu berücksichtigen sind. Der aktuelle Stand der Technik zur Lösung vergleichbarer Aufgaben sowie der Handlungsbedarf zur Lösung des speziellen Optimierungsproblems werden in Kapitel 6 erörtert.

Als Lösungsansatz für die Problemstellung wird in Kapitel 7 ein mathematisches Optimierungsmodell entwickelt. Ausgehend von einer reduzierten Modellformulierung, welche die Struktur des Problems verdeutlicht, wird das Modell auf die konkrete Frage des Fernwärmeausbaus angewandt und um grundlegende technische Restriktionen erweitert. Hierbei werden drei alternative Modellierungsansätze umgesetzt und hinsichtlich ihrer mathematischen Eigenschaften verglichen.

Die Validierung der entwickelten Modellformulierungen erfolgt durch einen systematischen Vergleich der Laufzeit und Lösbarkeit für eine Vielzahl verschiedener Modellinstanzen. Diese Berechnungen werden in Kapitel 8 anhand öffentlich verfügbarer Benchmark-Bibliotheken mit anderen in der Literatur beschriebenen Lösungsansätzen verglichen.

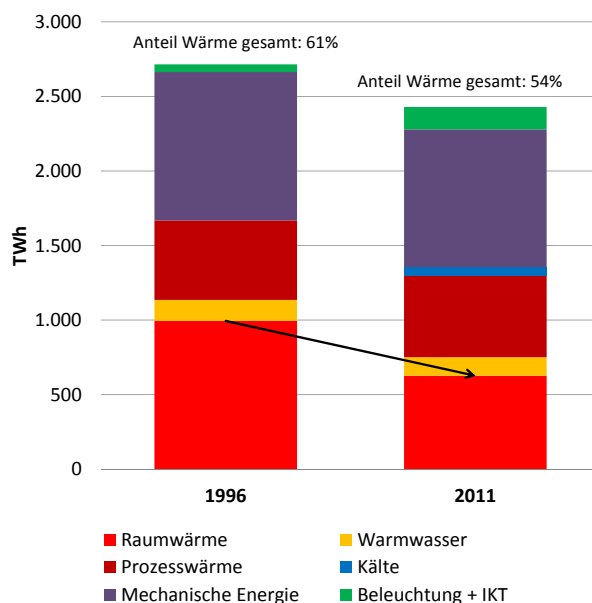
Die Praxistauglichkeit des Optimierungssystems wird in Kapitel 9 im Rahmen einer Fallstudie geprüft. Für verschiedene Szenarien wird die optimale Ausbaustrategie entworfen, woraus sich die Effekte unterschiedlicher Rahmenbedingungen und Annahmen auf den Entwurf von Fernwärmenetzen ableiten lassen.

Kapitel 10 fasst die zentralen Ergebnisse der Arbeit zusammen und gibt einen Ausblick auf mögliche Weiterentwicklungen des Systems.

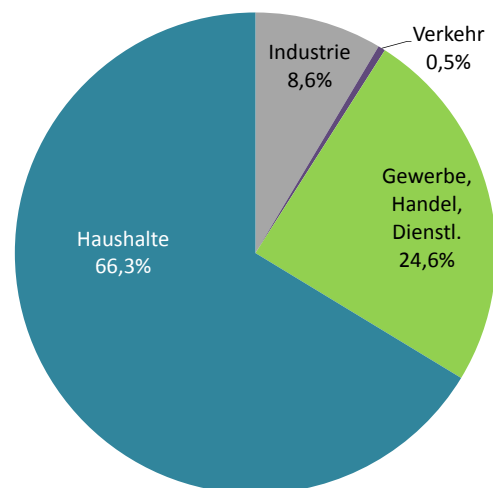
## 2 Der Wärmemarkt

### 2.1 Struktur des Wärmemarktes

Wärme wird zum überwiegenden Teil zur Raumerwärmung verwendet (Raumwärme), gefolgt von Wärme für prozesstechnische Anwendungen (Prozesswärme) sowie zur Warmwasserbereitung. Der Wärmebedarf für Raumwärme und Warmwasserbereitung geht zu etwa zwei Dritteln auf die privaten Haushalte und zu einem Viertel auf den Sektor Gewerbe, Handel, Dienstleistungen zurück (s. Abbildung 2.1 b). Der industrielle Wärmebedarf reduziert sich weitgehend auf die Nutzung von Prozesswärme und wird in dieser Arbeit nicht weiter betrachtet, da die Anforderungen an Verfügbarkeit und Temperaturniveau stark von dem konkreten Einsatzzweck (z.B. industrielle Trocknungsprozesse) abhängen.



(a) Endenergieverbrauch nach Anwendungsbereich 1996 und 2011

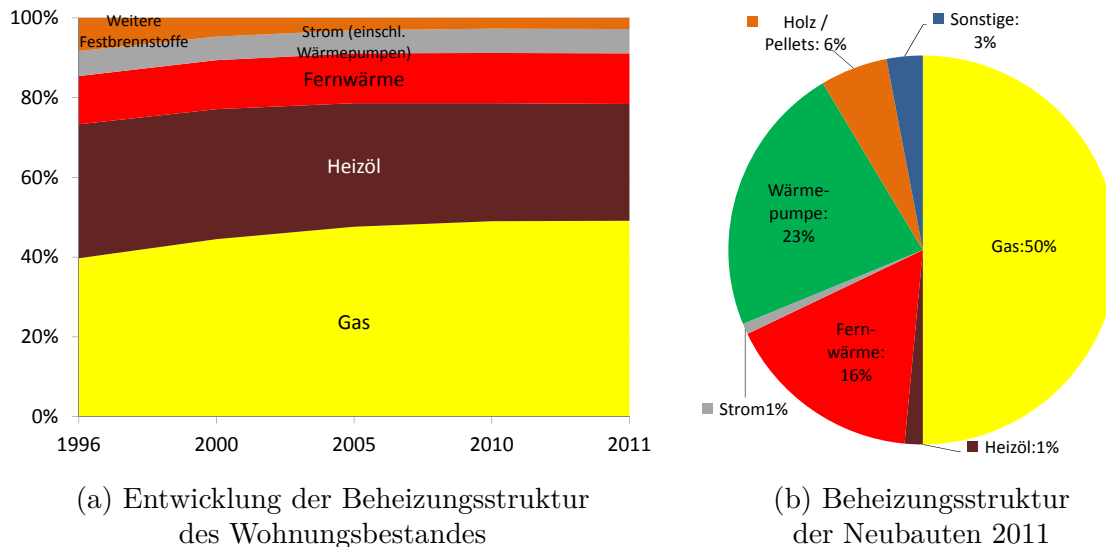


(b) Wärmebedarf für Raumwärme und Warmwasser 2011 nach Sektoren

**Abbildung 2.1** Struktur des Endenergie- und Wärmeverbrauchs in Deutschland (Quelle: [BMWi, 2012], eigene Berechnungen)

Obwohl der Wärmeabsatz in Deutschland seit Jahren rückläufig ist, zeichnet sich dieser noch immer für den Großteil der verbrauchten Endenergie verantwortlich. 2011 betrug der Anteil von Nutzwärme am gesamten Endenergieverbrauch 54 %, während dieser Anteil 1996 noch bei 61 % lag (s. Abbildung 2.1 a). Der Rückgang des Wärmebedarfs ist dabei fast vollständig auf einen rückläufigen Raumwärmebedarf zurückzuführen. So betrug der

Anteil der Raumwärme am gesamten Wärmebedarf 1996 noch 60 %, in 2011 hingegen weniger als 50 %. Auf die Entwicklung des Wärmebedarfs wird in Abschnitt 2.2 näher eingegangen.



**Abbildung 2.2** Beheizungsstruktur bei Bestands- und Neubauten  
(Quelle: [AGEB, 2012])

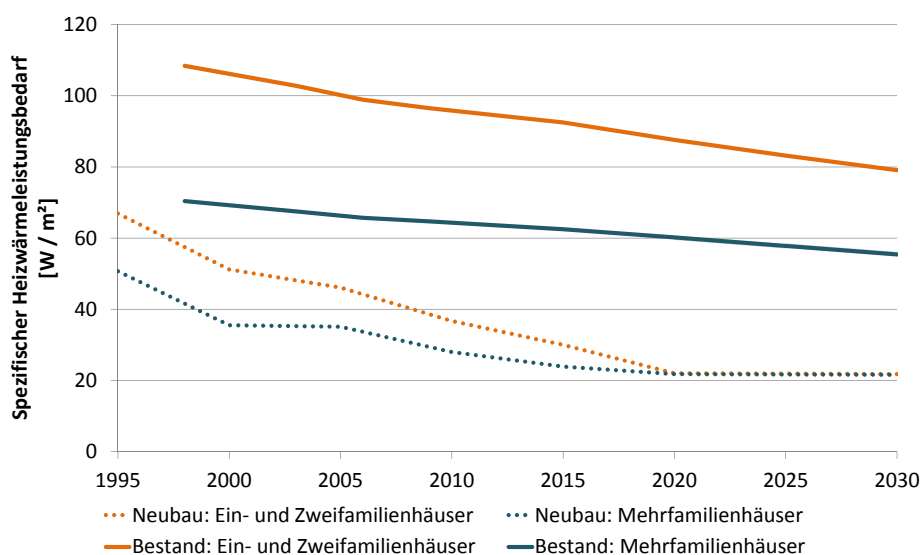
Bei der Beheizung privater Haushalte sind Erdgasheizungen mit fast 50 % Marktanteil der am weitesten verbreitete Heizungstyp. Etwa 30 % der Haushalte haben Ölheizungen, die damit immer noch einen wesentlichen Anteil zur Deckung des Raumwärmebedarfs beitragen. Fernwärme versorgt ca. 13 % des Wohnungsbestandes. Der übrige Anteil geht auf Stromheizungen (Nachtspeicheröfen, Stromdirektheizungen und Elektro-Wärmepumpen) sowie auf sonstige Festbrennstoffe (Kohle, Holz) zurück. Die Entwicklung der Beheizungsstruktur privater Haushalte wird in Abbildung 2.2 (a) dargestellt.

Bei Neubauten gestaltet sich die Verteilung der Heizungstypen grundsätzlich anders. Erdgas ist zwar mit 50 % zum gleichen Anteil vertreten wie in Bestandswohnungen, Ölheizungen werden bei Neubauten hingegen so gut wie gar nicht mehr verbaut. Dies ist neben wirtschaftlichen Aspekten auf baurechtliche Vorschriften zurückzuführen (s. Abschnitt 2.2). Fernwärme weist mit 16 % nur leichte Zuwächse gegenüber dem Wohnungsbestand auf. Einen hohen Marktanteil im Neubausegment können hingegen (in der Regel elektrisch betriebene) Wärmepumpen aufweisen, für die sich etwa jeder vierte Bauherr entscheidet. Mit 6 % Marktanteil spielen Holzpellet-Heizungen weiterhin nur eine untergeordnete Rolle. Der vergleichsweise geringe Marktanteil der Fernwärme sowohl im Wohnungsbestand als auch bei Neubauten ist auf mehrere Faktoren zurückzuführen. Aufgrund der hohen Investitionskosten und damit verbundenen langen Amortisationszeiträume haben viele Versorgungsunternehmen Abstand von einem forcierten Ausbau ihrer Wärmenetze genommen.

Insbesondere der rückläufige Wärmebedarf erhöht hierbei die Unsicherheit hinsichtlich der langfristigen wirtschaftlichen Perspektiven. Die Konkurrenz zur bestehenden Gasversorgung – und die vergleichsweise günstigen Erdgaspreise – bilden ein weiteres Hemmnis für deutliche Zuwächse im Bereich der Fernwärme. Darüber hinaus fehlt es vielfach an einem abgestimmten Vorgehen zwischen Versorger, Kommune und Bauträgern, um bei der Erschließung neuer Gebiete möglichst schnell einen hohen Anschlussgrad zu erreichen (vgl. [Nast et al., ] S. 10f).

## 2.2 Entwicklung des Wärmebedarfs

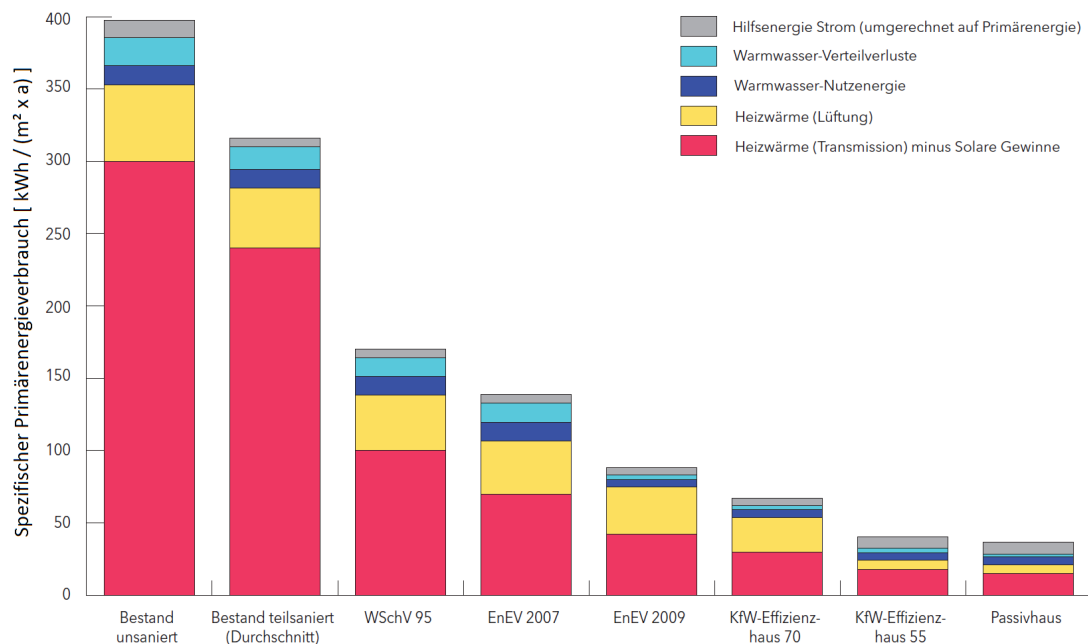
Wie bereits angesprochen ist der Wärmebedarf seit mehreren Jahren rückläufig. Diese Entwicklung ist im Wesentlichen auf eine verbesserte Dämmung der Gebäude zurückzuführen, welche durch die Sanierung von Bestandsgebäuden und den Neubau energetisch effizienter Gebäude erreicht wurde. So hat sich der Leistungsbedarf für Heizwärme bei Neubauten zwischen 1995 und 2010 fast halbiert. Aufgrund der relativ geringen Neubautätigkeiten wirkt sich die Verringerung des spezifischen Wärmebedarfs bei Neubauten nur langsam auf den Wohnungsbestand aus. Im Bestand hat sich der Leistungsbedarf für den gleichen Zeitraum lediglich um ca. 10 % reduziert (s. Abbildung 2.3).



**Abbildung 2.3** Entwicklung des Heizwärmeleistungsbedarfs für Neubauten und im Wohnungsbestand (Quelle: [Prognos, 2009])

Der Rückgang des spezifischen Wärmebedarfs ist zum einen auf technische Fortschritte in der Bauphysik (Dämmung, Luftdichtheit, Verglasung; vgl. [Pehnt, 2010] S. 259) zum

anderen auf die stetige Verschärfung der Vorschriften zur Energieeffizienz von Gebäuden zurückzuführen. Seit Einführung der ersten Wärmeschutzverordnung 1977 wurde der zulässige Grenzwert für den Heiz- bzw. Primärenergiebedarf von Neubauten schrittweise von ca. 260 kWh / (m<sup>2</sup> · a) (WSVO77) auf ca. 70 kWh / (m<sup>2</sup> · a) in der aktuellen *Energieeinsparverordnung* (ENEV) 2009 gesenkt<sup>2</sup>. Abbildung 2.4 zeigt exemplarisch die Entwicklung und Struktur des Wärmebedarfs für Raumwärme und Warmwasser nach verschiedenen Effizienzstandards. Zu beachten ist hierbei, dass der Anteil der Warmwasserbereitung und der Strombedarf für Hilfsenergie anteilig ansteigen, je effizienter ein Gebäude ist, da sich die gebäudetechnischen Verbesserungen hauptsächlich auf den Heizenergiebedarf auswirken. Der Endenergiebedarf für Warmwasser bleibt hingegen weitgehend konstant und führt durch die anteilige Zunahme an der gesamten Nutzwärme zu einer stärkeren Vergleichmäßigung des Wärmebedarfs innerhalb eines Jahres. Lediglich der Primärenergiebedarf der Warmwasserbereitung sinkt aufgrund effizienterer Wärmeerzeugung (oder Nutzung von Solarthermie). Die Zunahme an Hilfsstrom ist auf die aufwendige Lüftungs- und Regelungstechnik von Niedrigenergiehäusern zurückzuführen.

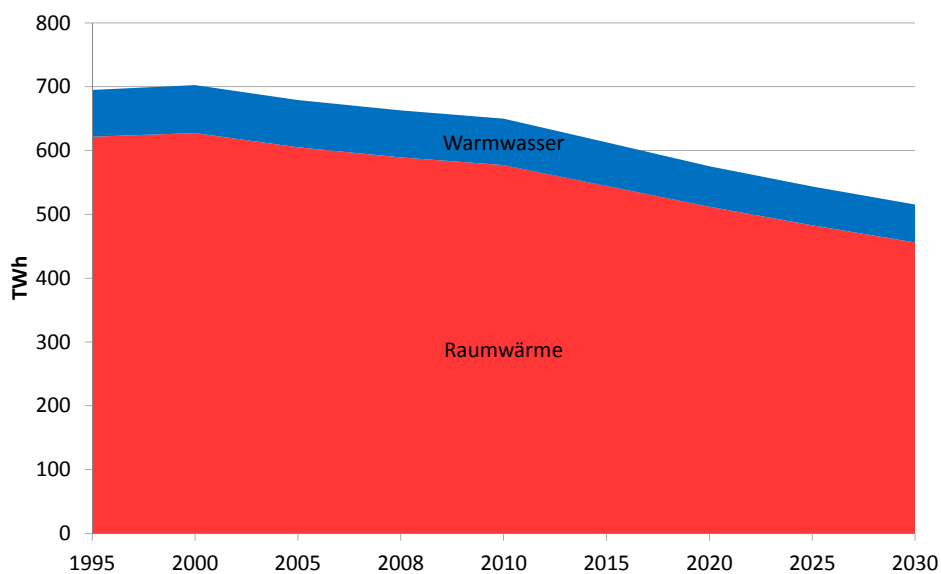


**Abbildung 2.4** Entwicklung des Primärenergiebedarfs zur Raumerwärmung und Warmwasserbereitstellung in Abhängigkeit von Effizienzstandards<sup>3</sup>  
(Quelle: [Hessisches Umweltministerium, 2012])

<sup>2</sup> Die angegebenen Werte sind nur als Richtwerte zu sehen, da die älteren Wärmeschutzverordnungen sich auf den Heizwärmebedarf, die neuere Energieeinsparverordnung auf den Primärenergiebedarf beziehen.

<sup>3</sup> KfW-Effizienzhäuser sind durch die Kreditanstalt für Wiederaufbau definierte Effizienzstandards, deren Einhaltung den Zugang zu geförderten zinsvergünstigten Krediten ermöglicht.

Die langfristige Entwicklung des gesamten Wärmebedarfs ergibt sich aus der Sanierungsrate bestehender Gebäude, der Neubautätigkeit, der demographischen Entwicklung sowie der Entwicklung des Wohnraums je Einwohner. Bei sinkender Bevölkerung, jedoch gleichzeitig steigendem Wohnraum je Einwohner, erwartet Prognos (vgl. [Prognos, 2009]) einen Rückgang des Wärmebedarfs privater Haushalte zwischen 2010 und 2030 um ca. 21 % (s. Abbildung 2.5). Die Neubautätigkeit und die Sanierungsrate bestehender Gebäude werden in der Studie mit ca. 1 % / a angenommen.



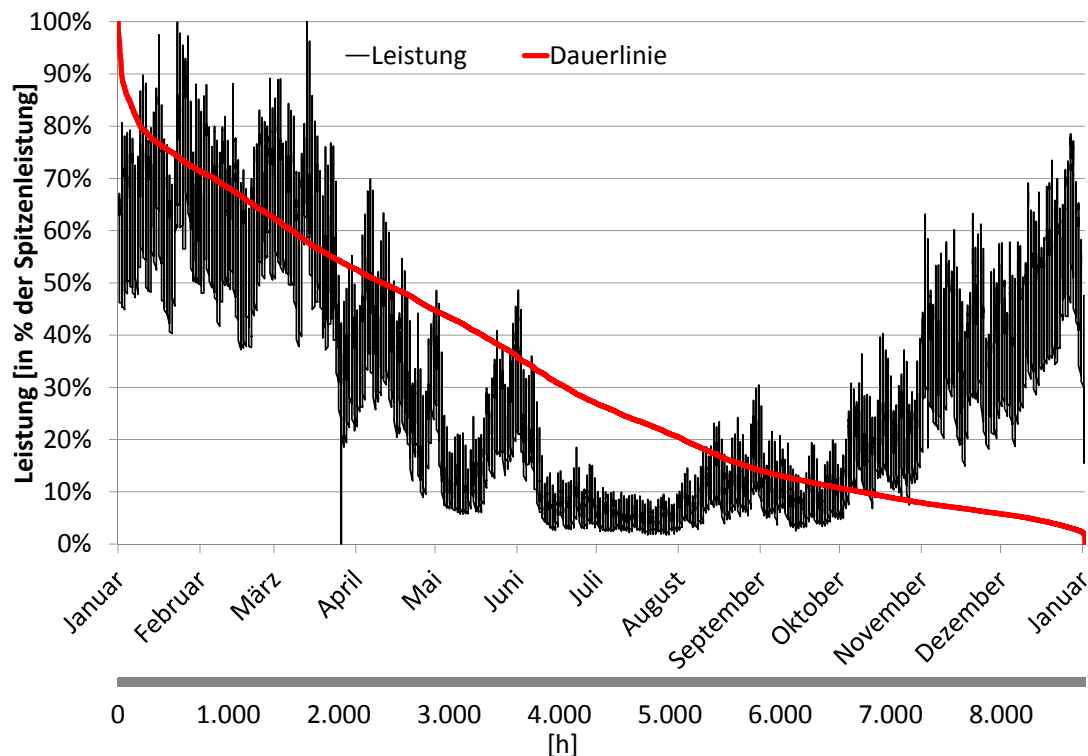
**Abbildung 2.5** Entwicklung des Wärmebedarfs privater Haushalte bis 2030  
(Quelle: [Prognos, 2009], S. 83)

Die Leitstudie 2010 des Bundesministeriums für Umwelt prognostiziert einen Rückgang des Wärmebedarfs zwischen 2010 und 2030 von 24 % und bis 2050 von 44 % (vgl. [Nitsch et al., 2010] S. 6).

## 2.3 Zeitlicher Verlauf des Wärmebedarfs

Die Nachfrage nach Wärme unterliegt ausgeprägten saisonalen Schwankungen. Während sich in den Sommermonaten die Wärmenachfrage auf den Warmwasserbedarf reduziert, dominiert in den anderen Jahreszeiten der Raumwärmebedarf die Nachfrage. Der höchste Bedarf tritt dabei erwartungsgemäß in den Wintermonaten Dezember, Januar und Februar auf. Neben den saisonalen Schwankungen weist der Wärmebedarf eine Abhängigkeit gegenüber dem Wochentag (Werktag / Wochenende) und der Uhrzeit auf. Die größten Leistungsspitzen treten dabei meist an Wochentagen zwischen 6 und 9 Uhr auf, da zu diesem

Zeitpunkt die Heizungssysteme hochgefahren werden und gleichzeitig ein hoher Warmwasserbedarf besteht.



**Abbildung 2.6** Jahreslastgang und sortierte Jahresdauerlinie des Wärmebedarfs einer Kleinstadt 2006 (Quelle: Unternehmensangaben, eigene Berechnungen)

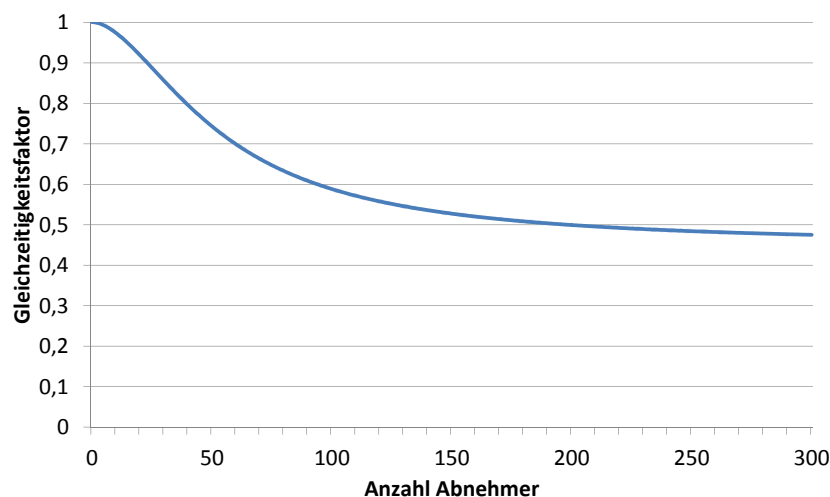
Abbildung 2.6 zeigt die *Lastganglinie* (schwarz) des Wärmebedarfs einer Kleinstadt für das Jahr 2006. Die Lastganglinie gibt den Leistungsbedarf für jede Stunde eines Jahres an. Aus der Grafik sind sowohl die saisonalen, als auch die Stundenschwankungen ersichtlich. Für die Dimensionierung von Heizkraftwerken (s. Abschnitt 4.2.3.2) ist die (sortierte) *Jahresdauerlinie* des Wärmebedarfs entscheidend, welche angibt wie viele Stunden im Jahr eine bestimmte Leistung benötigt wird. Im Gegensatz zu der Lastganglinie ist diese nicht nach dem Datum sondern nach der Leistung sortiert. Die Jahresdauerlinie ist in Abbildung 2.6 rot dargestellt.

Je größer ein Versorgungsgebiet ist, desto gleichmäßiger ist der Leistungsbedarf und desto flacher verläuft die Jahresdauerlinie. Dies ist auf die sogenannte Gleichzeitigkeit zurückzuführen, die mit zunehmender Anzahl von Abnehmern sinkt. Das bedeutet, die Wahrscheinlichkeit, dass alle Abnehmer gleichzeitig ihre (Einzel-) Lastspitze aufrufen wird immer geringer. Eine geringe Gleichzeitigkeit und eine damit einhergehende hohe Vergleichmäßigung des Verbrauchsverhaltens sind wünschenswert. Die Gleichmäßigkeit des



Verbrauchsverhaltens wird durch die *Jahresbenutzungsstunden*<sup>4</sup> angegeben, welche dem Verhältnis der jährlich bezogenen Energiemenge (Energiebedarf bzw. Wärmebedarf) zu der höchsten Lastspitze (Leistungsbedarf) entsprechen. Eine Jahresbenutzungsstundenzahl von 8760 würde bedeuten, dass zu jedem Zeitpunkt die gleiche Leistung abgerufen wird. In diesem Fall ist die Lastganglinie eine horizontale Gerade.

Für Großstädte liegen typische Jahresbenutzungsstundenzahlen für Raumwärme und Warmwasser bei etwa 2500 - 3000 Stunden, für kleinere Versorgungsgebiete bei etwa 2000 Stunden (vgl. [Konstantin, 2009] S. 434). Ein einzelnes Gebäude weist Benutzungsstunden von ca. 1500 - 1800 auf. Diese Abhängigkeit des Gleichzeitigkeitsfaktors, welcher definiert ist als das Verhältnis zwischen der (zeitgleichen) Spitzenlast des Netzes und der Summe der (nicht-zeitgleichen) Einzelspitzen aller Abnehmer eines Netzes, von der Anzahl der Abnehmer wird in Abbildung 2.7 dargestellt.



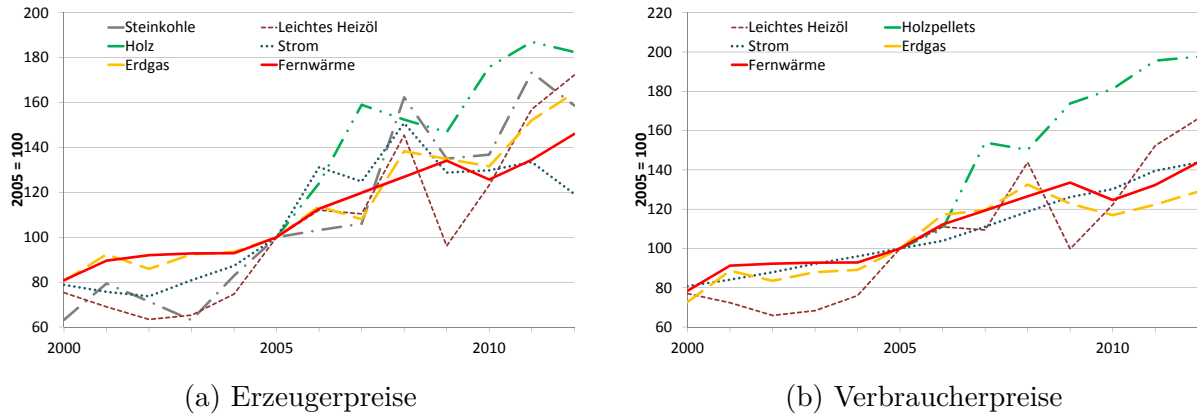
**Abbildung 2.7** Gleichzeitigkeitsfaktor in Abhängigkeit von der Anzahl der Abnehmer in Nahwärmenetzen (Quelle: [Winter et al., 2001])

## 2.4 Energiepreise

Entscheidend für die Wirtschaftlichkeit einer Fernwärmeversorgung ist zum einen das Verhältnis der Brennstoff- zu den Strompreisen und zum anderen die Entwicklung der Energiepreise konkurrierender Heiztechnologien. Aufgrund der hohen Investitionskosten für die Leitungsverlegung kann der Fernwärmebetrieb nur profitabel sein, wenn die Wärmeerzeugungskosten ausreichend niedrig sind. Konkurrenzfähige Wärmegestehungskosten können normalerweise nur bei der Produktion der Wärme durch KWK-Anlagen realisiert werden.

<sup>4</sup> Synonym werden auch die Begriffe Volllaststunden und Vollbenutzungsstunden verwendet.

Bei einem im Verhältnis zu den Brennstoffkosten (in der Regel Erdgas- oder Kohlepreis) hohen Strompreis ist ein profitabler Betrieb möglich, bei einer niedrigen Stromvergütung sind KWK-Anlagen hingegen in der Regel nicht wirtschaftlich zu betreiben.



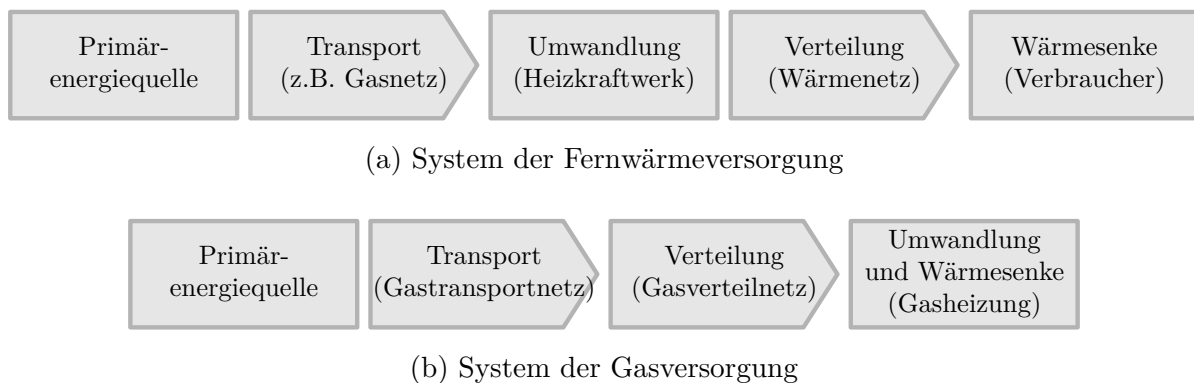
**Abbildung 2.8** Relative Preisentwicklung ausgewählter Energieträger (2005 = 100)  
(Quelle: [Statistisches Bundesamt, 2013], eigene Berechnungen)

Neben dem Verhältnis zwischen Stromvergütung und Brennstoffpreis bestimmt der erzielbare Fernwärmetarif die Wirtschaftlichkeit. Die Tarifgestaltung muss hierbei aus Sicht des Kunden konkurrenzfähig zu alternativen Heizungssystemen (Gaskessel, Pelletheizung, Wärmepumpen, etc.; s. Abschnitt 3.3) sein. Kalkulationsgrundlage für diesen konkurrenzfähigen Preis, dem sogenannten *anlegbaren Preis* (vgl. [Konstantin, 2009] S. 448), ist ein Vollkostenvergleich mit einem oder mehreren Referenzsystemen. Der anlegbare Preis entspricht dem Tarif, welcher zu vergleichbaren jährlichen Gesamtkosten wie das Referenzsystem führt. Neben den Großhandelspreisen für die Energiebeschaffung (zur Kalkulation der Erzeugungskosten) sind daher auch die Verbraucherpreise zu prognostizieren, um den langfristig erzielbaren Tarif zu ermitteln. Die langen Amortisationszeiträume und Nutzungsdauern von Fernwärmeleitungen bringen eine hohe Unsicherheit hinsichtlich der Wirtschaftlichkeit mit sich, da die Energiepreise für Zeiträume von 15 - 30 Jahren nur schwer zu prognostizieren sind. Abbildung 2.8 zeigt die relative Entwicklung der Erzeuger- und Verbraucherpreise ausgewählter Energieträger seit 2000.

## 3 Gas- und Wärmeversorgung

Nach Tietz (vgl. [Tietz, 2007] S. 119) kann die Wärmeversorgung als System des Transports, der Umwandlung und der Verteilung eines Primärenergieträgers von der Quelle zu einer Senke (Verbraucher) dargestellt werden. Bei einer zentralen Wärmeerzeugung wird die Primärenergie zentral in Wärme umgewandelt und anschließend an die Verbraucher verteilt. Bei einer dezentralen Wärmeversorgung wird die Energie am Ort des Verbrauchs in Wärme umgewandelt. Abbildung 3.1 stellt das System der leitungsgebundenen Wärmeversorgung durch Erdgas und Nah- bzw. Fernwärme dar, welche Gegenstand dieser Arbeit ist.

Im ersten Teil dieses Kapitels wird die zentrale Wärmeerzeugung in Heizwerken bzw. Heizkraftwerken erläutert, anschließend der Energietransport über Wärme- und Gasnetze und im letzten Abschnitt die dezentrale Wärmeübernahme bzw. -umwandlung in den Gebäuden.

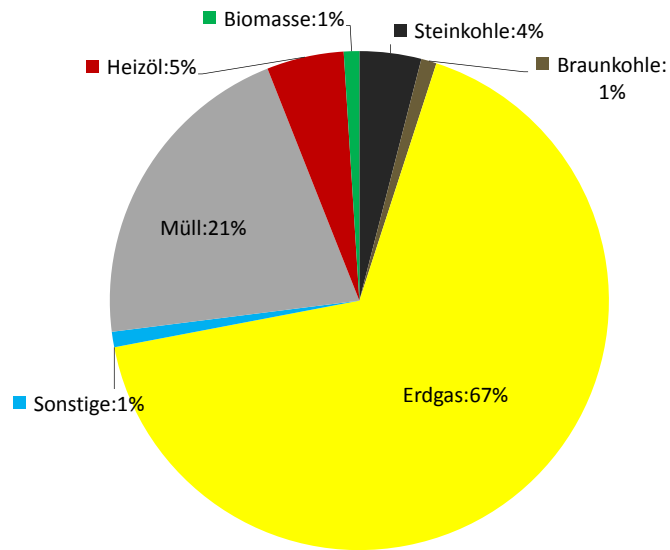


**Abbildung 3.1** Systeme der leitungsgebundenen Wärmeversorgung  
(in Anlehnung an [Tietz, 2007] S. 119)

### 3.1 Zentrale Wärmeerzeugung

#### 3.1.1 Konventionell

Unter konventioneller Wärmeerzeugung wird die alleinige Erzeugung von Wärme verstanden. Diese erfolgt in Heizwerken, in der Regel durch Verfeuerung eines fossilen Brennstoffs (Erdgas, Heizöl, Steinkohle) oder von Reststoffen (Abfälle, Biomasse). Etwa zwei Drittel der gesamten Wärmebereitstellung in Heizwerken (2011) von 14061 GWh erfolgt durch die Verfeuerung von Erdgas, ein Fünftel durch Müllverbrennung (s. Abbildung 3.2).



**Abbildung 3.2** Brennstoffeinsatz in Heizwerken 2011  
(Quelle: [AGFW, 2012b] S. 26)

Heizwerke weisen gegenüber KWK-Anlagen wesentlich geringere spezifische Investitionskosten auf, weswegen diese hauptsächlich zur Deckung der Spitzenlast genutzt werden. Der Wirkungsgrad der Energieumwandlung ist sehr hoch (ca. 90 %), da fast der gesamte Brennstoff in Wärme umgewandelt werden kann.

Die spezifischen Investitionskosten von Spitzenlastkesseln liegen bei ca. 90 - 120 € / kW<sub>th</sub>. Die gesamten Investitionskosten eines Heizwerks einschließlich Gebäude betragen je nach Anlagentyp und Größe ca. 100 - 400 € / kW<sub>th</sub> (vgl. [Blesl, 2002] S. 46, [Paar et al., 2013] S. 295, [Kail et al., 2010] S. 56). Tabelle 3.1 führt zentrale Merkmale ausgewählter Anlagentypen auf.

	Thermischer Wirkungsgrad [%]	Investitionskosten [€/kW <sub>th</sub> ]	CO <sub>2</sub> -Emissionen [gCO <sub>2</sub> /kW <sub>h</sub> <sub>th</sub> ]
Erdgas-Heizwerk	95	90	212
Holz-Heizwerk	86	410	0
Braunkohlenstaub-Heizwerk	88	360	385

**Tabelle 3.1** Merkmale ausgewählter Heizwerkstypen in der Leistungsklasse 10-20 MW<sub>th</sub>  
(Quelle: [Kail et al., 2010], eigene Berechnungen)

Die Wärmeerzeugungskosten und CO<sub>2</sub>-Emissionen eines Heizwerks hängen hauptsächlich von dem verwendeten Brennstoff ab. Spezifische CO<sub>2</sub>-Faktoren für fossile Brennstoffe können Tabelle 3.2 entnommen werden. Bei der Ermittlung der gesamten CO<sub>2</sub>-Emissionen aus Heizwerken sind neben dem Wirkungsgradverlust auch Wärmeverluste im Fernwärmenetz zu berücksichtigen. Diese betrugen 2011 im Mittel 11 % (vgl. [AGFW, 2012b] S. 31).

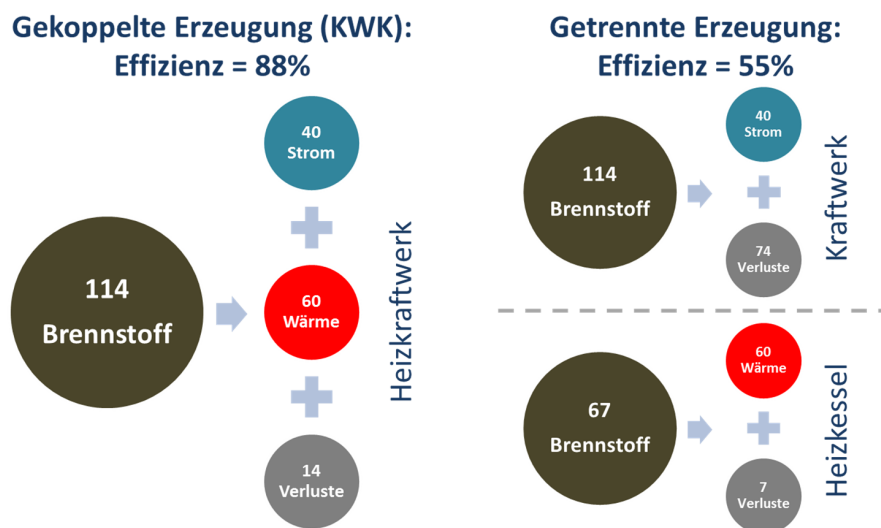
Brennstoff	gCO <sub>2</sub> /kWh <sub>input</sub>
Steinkohle	338,4
Braunkohle	352,8
Heizöl	266,4
Erdgas	201,6

**Tabelle 3.2** CO<sub>2</sub>-Faktoren fossiler Brennstoffe  
(Quelle: [Fritsche und Rausch, 2008] S. 12)

### 3.1.2 Kraft-Wärme-Kopplung

Nach Schaumann (vgl. [Schaumann und Schmitz, 2010] S. 6) bezeichnet *Kraft-Wärme-Kopplung* (KWK) die „gleichzeitige Gewinnung von mechanischer und thermischer Nutzenergie aus anderen Energieformen mittels eines thermodynamischen Prozesses in einer technischen Anlage“.

Bei der konventionellen Stromerzeugung in fossilen Kraftwerken wird ein großer Anteil der eingesetzten Primärenergie als Verlustwärme ungenutzt an die Umgebung abgegeben. Selbst konventionelle Kraftwerke neuester Bauart erreichen daher nur Gesamtwirkungsgrade von 46 % (Dampfkraftwerke) bis maximal 58 % (Gas- und Dampfturbinenkraftwerke, GuD) (vgl. [Schaumann und Schmitz, 2010] S. 19 f).



**Abbildung 3.3** Primärenergieeinsparung durch Kraft-Wärme-Kopplung

In KWK-Anlagen wird die anfallende Abwärme hingegen an Verbraucher weitergeleitet, die diese zum Heizen, zur Warmwasserbereitung oder als Prozesswärme nutzen können. Der Gesamtwirkungsgrad einer KWK-Anlage liegt dadurch deutlich über dem Wirkungsgrad konventioneller Kraftwerke. Abbildung 3.3 veranschaulicht die Primärenergieeinsparung durch KWK im Gegensatz zu der getrennten Strom- und Wärmeerzeugung.

KWK-Anlagen hatten 2011 einen Anteil an der Fernwärmeerzeugung aller im AGFW<sup>5</sup> organisierten Unternehmen von 82 % (vgl. [AGFW, 2012b] S. 10).

### Anlagentypen

KWK-Anlagen sind in verschiedenen Größenklassen anzutreffen, wobei große zentrale Anlagen als *Heizkraftwerk* (HKW) und kompaktere dezentrale Anlagen als *Blockheizkraftwerk* (BHKW) bezeichnet werden. Im Folgenden werden die verbreitetsten KWK-Anlagentypen hinsichtlich ihrer technischen und wirtschaftlichen Eigenschaften charakterisiert.

Diese umfassen:

- Motor-BHKW (Otto-Motor oder Dieselmotor)
- Gasturbinen-HKW
- Gas- und Dampfturbinen-HKW (GuD)
- Dampfturbinen-HKW
- Biomasse-BHKW

#### 3.1.2.1 Motor-BHKW

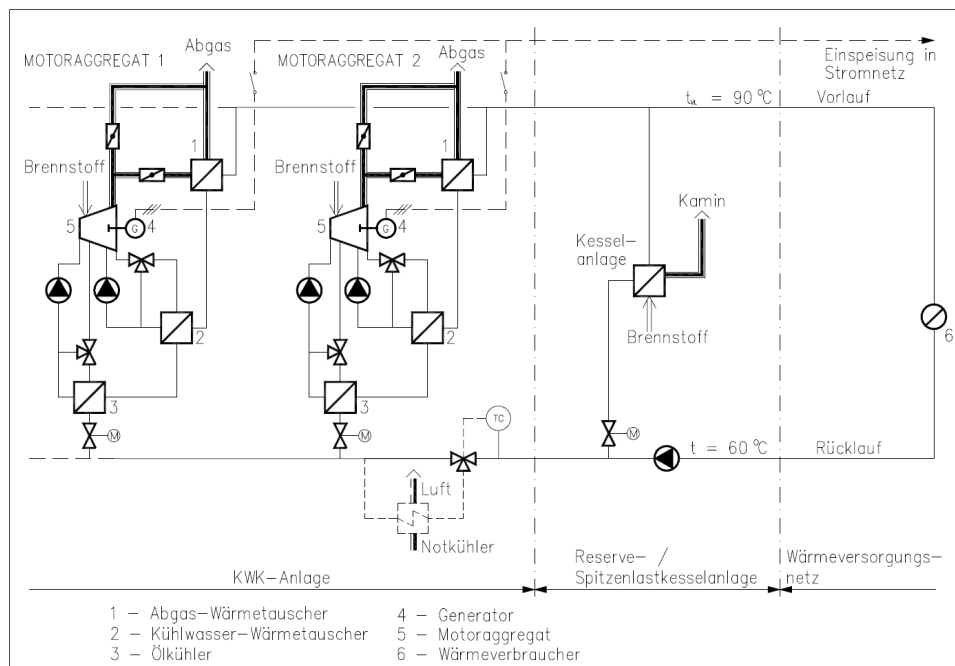
Auf Verbrennungsmotoren basierende KWK-Anlagen sind verbreitet im Einsatz. Der Einsatzbereich von Motor-BHKW erstreckt sich von dezentralen Erzeugungseinheiten mit wenigen kW elektrischer Leistung (Mikro- bzw. Mini-BHKW) bis zu größeren Anlagen mit einer elektrischen Leistung von 2 - 4 MW (in Einzelfällen bis 10 MW). Die Einsatzfelder von Motor-BHKW reichen daher von der Versorgung einzelner Gebäude (öffentliche Gebäude, Schwimmbäder, Krankenhäuser, Industriebetriebe) bis zur Speisung von Wärmenetzen. Im Bereich der öffentlichen Wärmeversorgung werden Motor-BHKW im Leistungsbereich von ca. 1 bis 2 MW<sub>el</sub> häufig zur Versorgung von Nahwärmenetzen oder als Zusatzeinspeisung in Fernwärmenetze genutzt.

Die prinzipielle Schaltung eines Motor-BHKW ist in Abbildung 3.4 dargestellt. Der Verbrennungsmotor treibt einen Generator an, welcher die mechanische in elektrische Energie umwandelt. Die hierbei entstandene, in den Abgasen enthaltene Wärme wird über einen Abgaswärmetauscher dem Vorlauf des Heizwasserkreislaufes zugeführt, der auf eine Temperatur von ca. 90 °C erhitzt wird. Der Rücklauf des Heizkreislaufes endet an dem Kühlwasserwärmetauscher, wodurch zusätzlich die im Kühlwasser enthaltene Wärmeenergie zur Erwärmung des Heizwassers genutzt wird.

---

<sup>5</sup> AGFW: Der Energieverband für Wärme, Kälte und KWK e.V.

Das Temperaturniveau der Nutzwärme von Motor-BHKW ist mit ca.  $90\text{ }^{\circ}\text{C}$  vergleichsweise gering, weshalb diese nicht ohne weiteres (z.B. nur durch Zuhilfenahme eines Erdgaskessels) in die Versorgung großer Fernwärmenetze mit Vorlauftemperaturen von  $110 - 130\text{ }^{\circ}\text{C}$  eingebunden werden können.

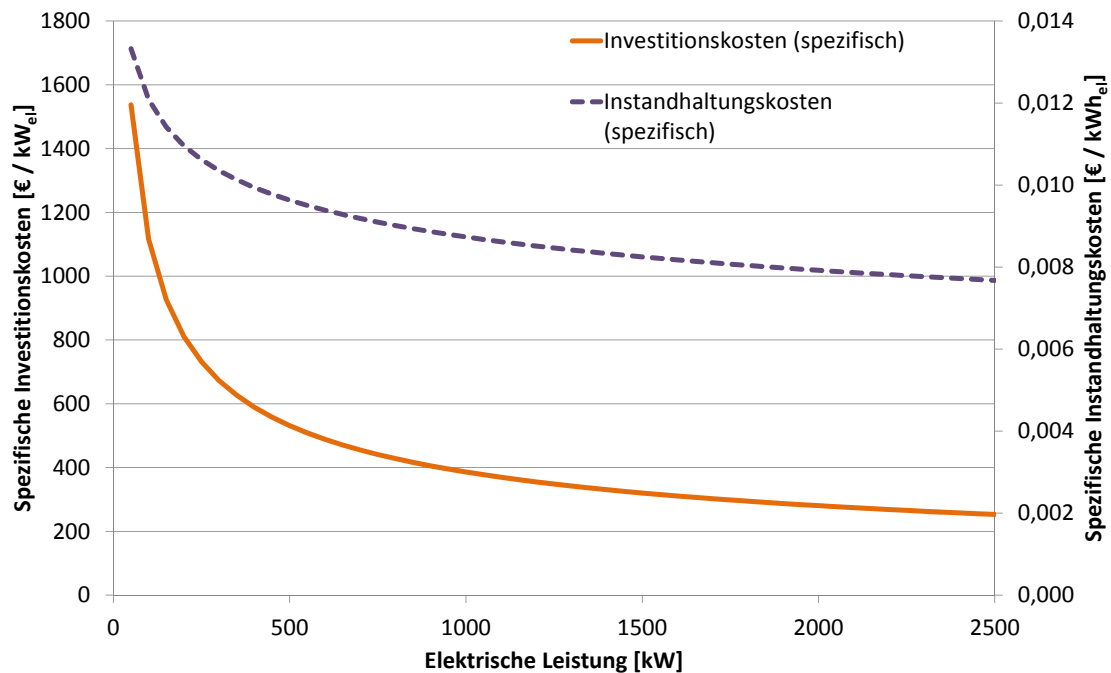


**Abbildung 3.4** Prinzipschaltbild eines Motor-BHKW  
(Quelle: [Schaumann und Schmitz, 2010] S. 55)

Der elektrische Wirkungsgrad von Erdgas-BHKW liegt bei kleineren Anlagen zwischen 25 und 35 %. Ab einer Anlagengröße von ca.  $0,5\text{ MW}_{el}$  beträgt der elektrische Wirkungsgrad ca. 40 - 45 %. Der thermische Wirkungsgrad liegt etwa zwischen 25 und 65 %, wodurch am Markt verfügbare Erdgas-BHKW im Mittel einen Gesamtwirkungsgrad von ca. 87 % erreichen (vgl. [ASUE, 2011b] S. 9 ff.)

Die Investitionskosten von Motor-BHKW liegen für kleinere Anlagen unterhalb  $500\text{ kW}_{el}$  bei ca.  $1000 - 1500\text{ €/kW}_{el}$ . Größere Anlagen weisen mit ca.  $500\text{ €/kW}_{el}$  deutlich geringere spezifische Investitionskosten auf. Die Kosten für Wartung- und Instandhaltung belaufen sich bei kleinen Anlagen auf ca.  $1 - 1,5\text{ ct/kWh}_{el}$  und bei Anlagen oberhalb von einem  $\text{MW}_{el}$  auf etwa  $0,5 - 1\text{ ct/kWh}_{el}$  (s. Abbildung 3.5).

Die Berechnung des  $\text{CO}_2$ -Ausstoßes von KWK-Anlagen hängt maßgeblich von der Zuordnung der Emissionen zu den beiden Koppelprodukten Strom und Wärme ab und wird daher in Abschnitt 3.4 gesondert betrachtet. Motor-BHKW können auch mit Biogas betrieben werden, wodurch eine klimaneutrale Strom- und Wärmeerzeugung möglich ist. Die Biogas-Varianten der BHKW-Module weisen leicht höhere Investitionskosten und



**Abbildung 3.5** Spezifische Richtpreise für Erdgas-BHKW in Abhängigkeit der elektrischen Leistung (Quelle: [ASUE, 2011b])

Betriebskosten sowie höhere Brennstoffkosten auf. Allerdings fallen diese unter das Erneuerbare-Energien-Gesetz (EEG), weshalb die Stromeinspeisung besonders vergütet wird (vgl. EEG 2009 Teil 3).

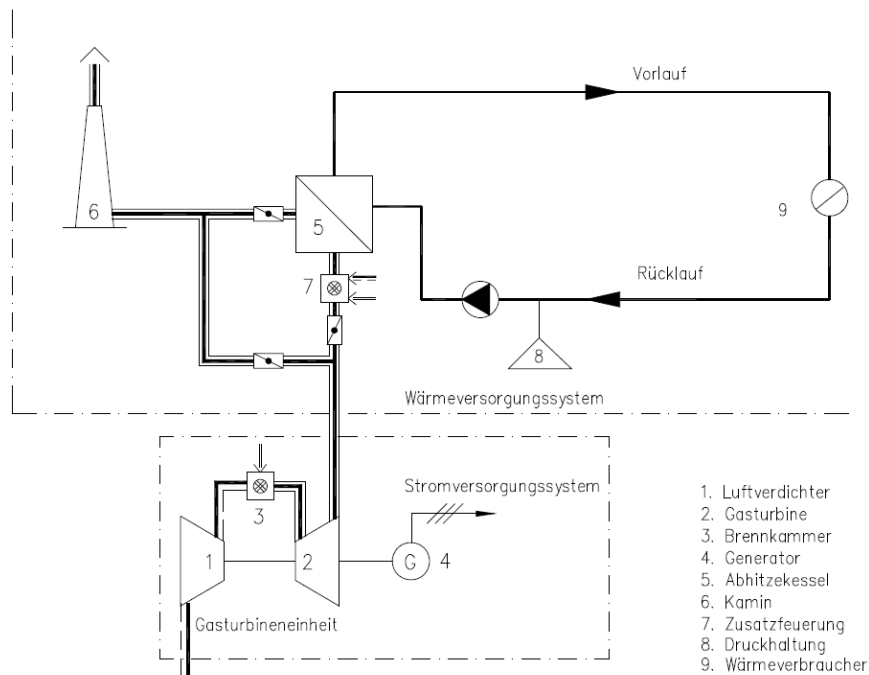
### 3.1.2.2 Gasturbinen-HKW

Gasturbinen-KWK-Anlagen kommen vor allem in der Größenklasse zwischen 1 und 25 MW<sub>el</sub> zum Einsatz. Im industriellen Bereich finden sich teilweise auch kleinere Anlagen (vgl. [Schaumann und Schmitz, 2010] S. 93).

Die Funktionsweise von Gasturbinen-HKW ist in Abbildung 3.6 dargestellt. Die Gasturbine treibt einen Generator an, welcher die mechanische Energie in Strom umwandelt. Die Abgase erreichen bei Austritt aus der Gasturbine Temperaturen von ca. 450-600 °C. Die heißen Gase werden in einem nachgeschalteten Abhitzekessel zur Erhitzung des Heizwassers genutzt. Im Gegensatz zu Motor-BHKW können mit Gasturbinen auch sehr hohe Vorlauftemperaturen und Prozessdampf erzeugt werden.

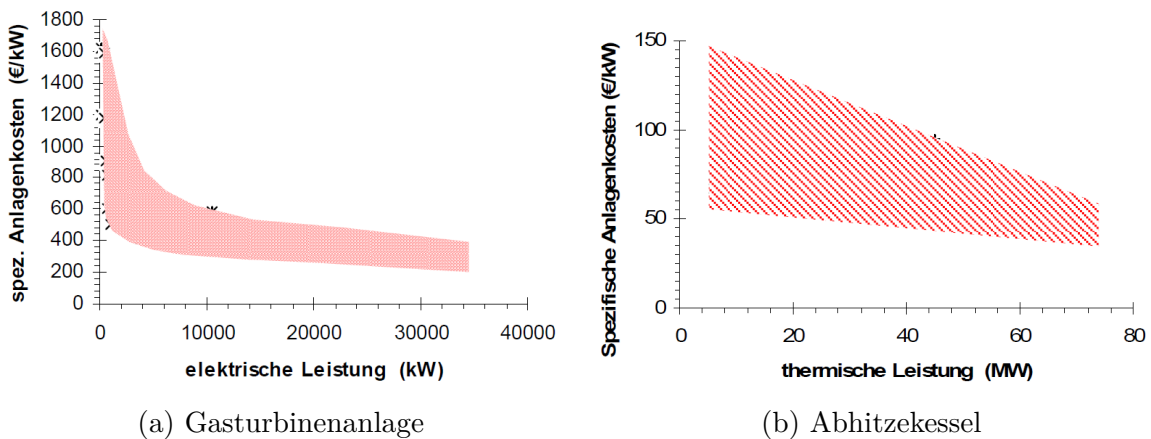
Der elektrische Wirkungsgrad von Gasturbinen liegt etwa zwischen 17 und 32 %, der thermische Wirkungsgrad bei 52 - 63 %, wodurch ein Gesamtwirkungsgrad von 80 - 84% erreicht wird ([Schaumann und Schmitz, 2010] S. 119). Die Investitionskosten für Gasturbinenanlagen und dem zugehörigen Abhitzekessel können Abbildung 3.7 entnommen werden.





**Abbildung 3.6** Prinzipschaltbild eines Gasturbinen-HKW  
(Quelle: [Schaumann und Schmitz, 2010] S. 96)

Der Wartungs- und Instandhaltungsaufwand hängt stark von der jeweiligen Anlage ab. Im Mittel kann etwa mit einem jährlichen Aufwand von ca. 2 % der Investitionen zuzüglich etwa 1,5 ct / kWh<sub>el</sub> gerechnet werden.

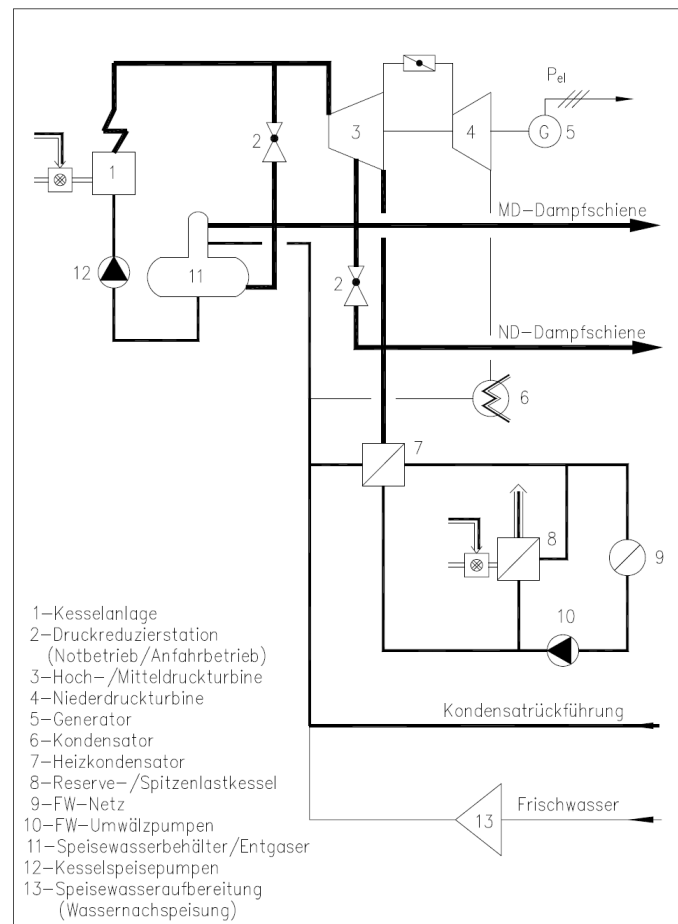


**Abbildung 3.7** Spezifische Richtpreise für Gasturbinen und Abhitze-Kessel in Abhängigkeit der elektrischen bzw. thermischen Leistung  
(Quelle: [Schaumann und Schmitz, 2010] S. 125)

### 3.1.2.3 Dampfturbinen-HKW

Dampfturbinen-Heizkraftwerke werden vor allem im Leistungsbereich großer Anlagen mit bis zu mehreren Hundert MW<sub>el</sub> eingesetzt. Im industriellen Bereich sind auch kleinere

Anlagen unterhalb von einem  $MW_{el}$  anzutreffen (vgl. [Schaumann und Schmitz, 2010] S. 131). Der große Vorteil von Dampfkraftwerken ist die Flexibilität hinsichtlich der Brennstoffe. Dampfturbinen-HKW können im Prinzip mit sämtlichen Brennstoffen befeuert werden, üblich sind Steinkohle, Braunkohle, schweres Heizöl und Erdgas. Müllverbrennungsanlagen mit Strom- und Wärmeerzeugung sind technisch ebenfalls den Dampfturbinen-HKW zuzuordnen. Letztere zeichnen sich durch besonders günstige Brennstoffkosten aus, die sogar negativ sein können, wenn für die Abnahme des Restmülls ein Entgelt erhoben wird.



**Abbildung 3.8** Prinzipschaltbild eines Dampfturbinen-HKW  
 (Quelle: [Schaumann und Schmitz, 2010] S. 132)

Die Schaltung eines typischen Dampfturbinen-HKW ist in Abbildung 3.8 dargestellt. Der Dampf wird durch Verfeuerung des Brennstoff in einer Kesselanlage erzeugt und erreicht (bei kohlebefeuerten Anlagen) Drücke bis zu 290 bar / 600 °C. Der Dampf wird zunächst (je nach Anlagentyp) auf einer Hoch- und Mitteldruckturbine entspannt, welche über eine Welle den Generator antreibt. Der Abdampf wird anschließend der Niederdruckturbine, welche ebenfalls einen Generator antreibt, zugeführt und dort weiter entspannt (ohne

Wärmeauskopplung bis auf den Kondensationsdruck). Sofern Wärme ausgekoppelt wird, kann der Dampf nicht bis auf den Kondensationsdruck entspannt werden wodurch der elektrische Wirkungsgrad sinkt (s. Abschnitt 3.1.2.4).

Die elektrischen Wirkungsgrade im reinen Kondensationsbetrieb (ohne Wärmeauskopplung) liegen für Steinkohlekraftwerke bei ca. 43 %, bei Gas- / Kohle-Kombikraftwerken bei bis zu 47 %. Durch die Wärmeauskopplung steigt der Gesamtwirkungsgrad auf bis zu 90 % (vgl. [Schaumann und Schmitz, 2010] S. 133).

Die spezifischen Investitionskosten für Dampfturbinen-Heizkraftwerke können nachfolgender Tabelle 3.3 entnommen werden. Die jährlichen Wartungs- und Instandhaltungskosten belaufen sich auf ca. 1,5 - 3,5 % der Investitionskosten (vgl. [Schaumann und Schmitz, 2010] S. 194).

Anlagentyp	Spezifische Investitionskosten [€ / kW <sub>el</sub> ]
Rostfeuerung	300 - 530
Staubfeuerung	350 - 570
Wirbelschichtanlage	360 - 600
Ölfeuerung	220 - 450
Erdgasfeuerung	210 - 430

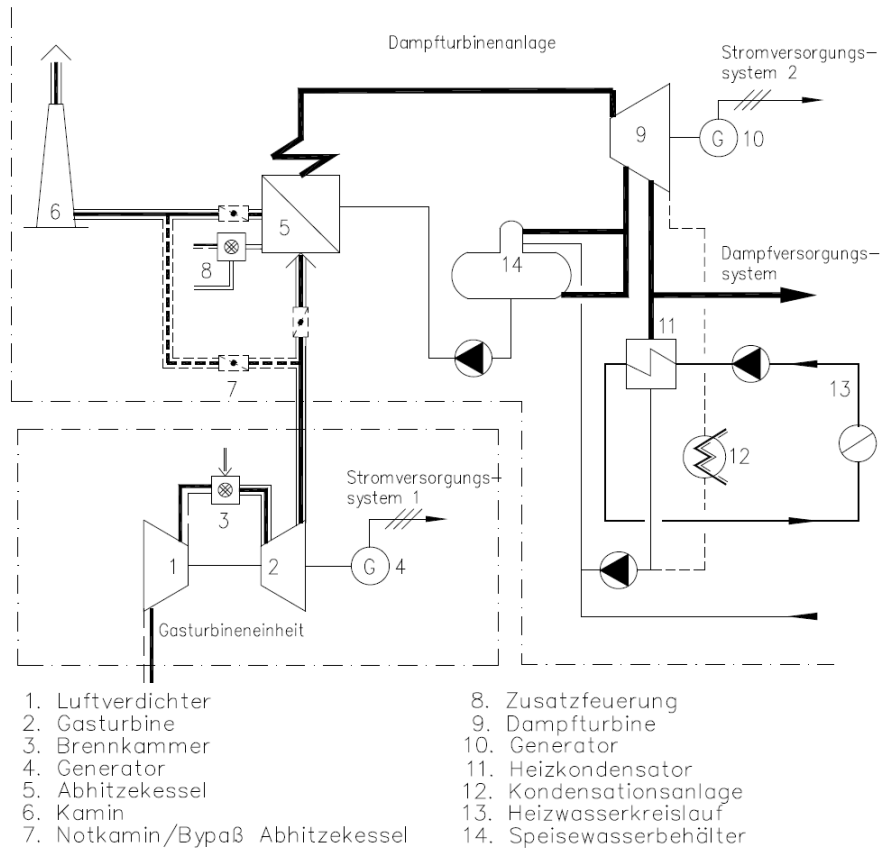
**Tabelle 3.3** Richtwerte für die spezifischen Investitionskosten von Dampfturbinen-HKW (Gesamtanlage ohne Gebäude und Grundstück)  
(Quelle: [Schaumann und Schmitz, 2010] S. 192)

Die CO<sub>2</sub>-Emissionen und Brennstoffkosten hängen hauptsächlich von dem verwendeten Brennstoff ab. Während Steinkohle vergleichsweise geringe Brennstoffkosten aufweist (ca. 15 € / MWh), sind die CO<sub>2</sub>-Emissionen mit ca. 338 gCO<sub>2</sub>/kWh umso höher. Erdgas wiederum hat mit 201 gCO<sub>2</sub>/ kWh einen geringen CO<sub>2</sub>-Gehalt, jedoch deutlich höhere Brennstoffkosten (ca. 27 € / MWh).

#### 3.1.2.4 Gas- und Dampfturbinen-HKW

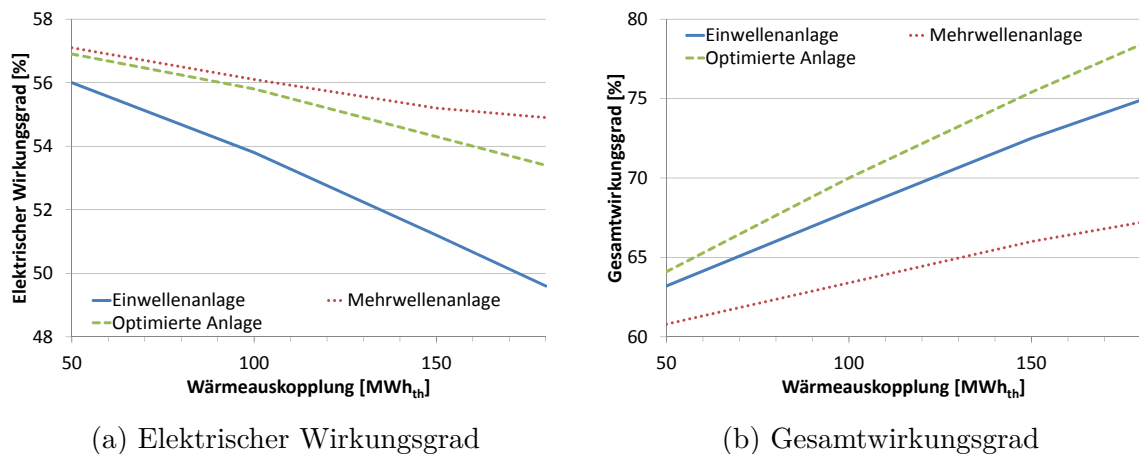
Gas- und Dampfturbinen-Heizkraftwerke (GuD-HKW) zählen zu den effizientesten Kraftwerkstypen. Der Unterschied zu herkömmlichen Gasturbinenanlagen besteht in der Nutzung der in den Abgasen enthaltenen Wärmeenergie zur zusätzlichen Stromerzeugung. Hierzu werden die Abgase der Gasturbine in einem Abhitzeessel zur Produktion von Dampf mit Drücken bis 80 bar (bei 520 °C) genutzt, welcher anschließend in einer Dampfturbine entspannt wird, die einen Generator antreibt. Der Abdampf der Dampfturbine

wird wiederum über einen Heizkondensator zur Erhitzung des Heizwassers genutzt. Die Schaltung einer GuD-KWK-Anlage ist in Abbildung 3.9 dargestellt.



**Abbildung 3.9** Prinzipschaltbild eines Gas- und Dampfturbinen-HKW  
(Quelle: [Schaumann und Schmitz, 2010] S. 99)

Die zusätzliche Stromerzeugung aus der Dampfturbine ermöglicht GuD-Kraftwerken sehr hohe elektrische Wirkungsgrade bis zu etwa 60 %. Im Gegensatz zu Motor-BHKW und reinen Gasturbinen-HKW führt die Wärmeauskopplung bei GuD-Anlagen zu einem Rückgang des elektrischen Wirkungsgrades, da die Wärmeauskopplung einen höheren Druck als den Kondensationsdruck benötigt und diese Druckdifferenz nicht mehr für den Antrieb der Dampfturbinen genutzt werden kann. Insbesondere ältere Anlagen, die ursprünglich nicht für die Wärmeauskopplung konzipiert wurden, können – je nach Höhe der Wärmeauskopplung – Wirkungsgradverluste im Bereich von bis zu ca. 10 % aufweisen (vgl. [Schaumann und Schmitz, 2010] S. 391). Dieser Rückgang der Stromproduktion durch die Wärmeauskopplung wird durch die *Stromverlustkennziffer* in  $\text{kWh}_{el} / \text{kWh}_{th}$  ausgedrückt. Trotz Rückgangs des elektrischen Wirkungsgrades steigt die Gesamteffizienz der Anlage durch die Wärmeauskopplung, da die Nutzung der Restwärme in dem Dampf die geringere Stromerzeugung überkompensiert. Abbildung 3.10 zeigt diesen Effekt für verschiedene Kraftwerkstypen.



**Abbildung 3.10** Elektrischer Wirkungsgrad und Gesamtwirkungsgrad (elektrisch + thermisch) verschiedener GuD-HKW in Abhängigkeit von der Wärmeauskopplung (Quelle: [Schaumann und Schmitz, 2010] S. 391)

Je nach Allokationsverfahren spielt die Stromverlustkennziffer eine wesentliche Rolle bei der Kosten- und Emissionsaufteilung zwischen den Koppelprodukten Strom und Wärme. Unter der Annahme, dass ein GuD-HKW primär zur Stromerzeugung genutzt wird, werden die Wärmeerzeugungskosten nach dem Stromäquivalenzverfahren über die Stromverlustkennzahl berechnet (s. Abschnitt 4.2.4.2).

GuD-Anlagen kommen vielfach in Großkraftwerken mit einer elektrischen Leistung bis zu mehreren Hundert MW zum Einsatz. Die Ermittlung der Investitionskosten eines GuD-HKW kann daher nur im Rahmen einer Einzelbewertung erfolgen. Als Anhaltswerte können die Investitionskosten für Gasturbinen-HKW und Dampfturbinen genutzt werden. Hinsichtlich der Kostenbewertung liegt der große Vorteil von GuD-Anlagen in dem hohen elektrischen Wirkungsgrad, wodurch der Großteil der eingesetzten Primärenergie zur Gewinnung des höherwertigen Koppelprodukts Strom genutzt wird.

### 3.1.2.5 Biomasse-HKW

Heizkraftwerke mit fester Biomasse als Brennstoff werden meist als Dampfturbinen-Anlagen mit Rostfeuerung ausgelegt. Als Brennstoff kommt überwiegend Holz in Form von Hackschnitzeln oder Restholz aus der Holzverarbeitenden Industrie zum Einsatz (vgl. [Zahoransky, 2013] S. 353).

Die Investitionskosten von Biomasse-Dampf-HKW können Abschnitt 3.1.2.3 entnommen werden. Aufgrund der biogenen Brennstoffe sind Biomasse-HKW weitgehend CO<sub>2</sub>-neutral und fallen unter das EEG wodurch der erzeugte Strom besonders vergütet wird (je nach Leistungsklasse zwischen 6 und 14,3 ct / kWh<sub>el</sub>, vgl. EEG §27). Da Biomasse-BHKW im

Leistungsbereich bis ca. 10 MW<sub>el</sub> nur relativ geringe elektrische Wirkungsgrade zwischen 9 und 18 % erreichen, ist die resultierende EEG Zulage dennoch vergleichsweise gering (vgl. [Schaumann und Schmitz, 2010] S. 227).

Holzvergasungsanlagen mit nachgeschaltetem Otto-Motor BHKW hingegen erreichen elektrische Wirkungsgrade bis ca. 33 % und sind daher aus Sicht der Stromvergütung zu bevorzugen (vgl. [Schaumann und Schmitz, 2010] S. 226 ff.). Diese weisen allerdings noch deutlich höhere spezifische Investitionskosten und teilweise technische Probleme auf, weshalb die Verbreitung bisher gering ist.

### 3.1.2.6 Sonstige KWK-Anlagen

Als weitere KWK-Anlagen kommen Dampfmotoren, Gasmotorwärmepumpen, Geothermianlagen sowie Stirling-Motor- und Brennstoffzellen-BHKW zum Einsatz. Die Funktionsweise dieser Anlagen wird in [Schaumann und Schmitz, 2010] (S. 197 ff.) ausführlich beschrieben.

Erwähnenswert aus Sicht der Fernwärme sind Absorptionskälteanlagen (vgl. [Schaumann und Schmitz, 2010] S. 203 ff.), die im Sommer überschüssige KWK-Wärme in Kälte umwandeln und damit zur Klimatisierung von Gebäuden genutzt werden. Diese Technologie kann dazu beitragen, den Strombedarf für herkömmliche Kompressionskältemaschinen zu reduzieren und den Grundlastbedarf für Fernwärme im Sommer zu erhöhen. Hierdurch wird eine Verwendung von KWK-Wärme ermöglicht, die sonst ungenutzt als Abwärme an die Umgebung abgegeben würde.

### 3.1.3 Betriebsweise von KWK-Anlagen

Die primäre Betriebsart einer KWK-Anlage entscheidet, ob die Anlage vorwiegend der Stromerzeugung (stromgeführte Betriebsweise) oder der Wärmeerzeugung dient (wärmegeführte Betriebsweise). Im ersten Fall richtet sich die Fahrweise nach dem elektrischen Leistungsbedarf. Diese Fahrweise ist vor allem bei großen Heizkraftwerken zu beobachten, wenn diese der Deckung des Strombedarfs des Erzeugers dienen und besonders zu Zeiten mit hohen Strompreisen (Spotmarktpreisen) eingesetzt werden. Bei kleineren Anlagen macht eine stromgeführte Fahrweise in der Regel keinen Sinn, da die Stromvergütung über das KWKG geregelt ist und unabhängig von den Spotmarktpreisen gezahlt wird. Eine Ausnahme bilden hierbei sogenannte *virtuelle Kraftwerke* (vgl. [Droste-Franke et al., 2009] S.

80 ff.), bei denen viele kleine dezentrale Anlagen über eine zentrale Steuerung zu einer virtuellen Erzeugungseinheit zusammengeschaltet werden. Der Strom kann dadurch ebenfalls zu Spotmarktpreisen an der Strombörse abgesetzt werden. Nachteilig an der stromgeführten Fahrweise wirkt sich insbesondere in Sommermonaten aus, dass ein erheblicher Teil der produzierten Wärme ungenutzt bleibt, wenn nicht ausreichend Wärmeabnehmer zur Verfügung stehen. Für eine bessere Nutzung der Wärmeenergie bei der stromgeführten Betriebsweise können Wärmespeicher genutzt werden, die eine Speicherung der nicht zum Erzeugungszeitpunkt nutzbaren Wärme für einige Stunden ermöglichen.

Die wärmegeführte Betriebsweise richtet sich nach dem thermischen Leistungsbedarf und ermöglicht dabei eine optimale Nutzung der produzierten Wärme. Bei Großanlagen wirkt sich an der wärmegeführten Fahrweise nachteilig aus, dass der erzielte Strompreis im Mittel geringer ist als bei der stromgeführten Fahrweise, da die Anlage nicht primär zu Zeiten hoher Spotmarktpreise produziert. Bei kleinen Anlagen, deren Vergütung sich ausschließlich nach dem KWKG richtet, besteht diese Problematik nicht.

## 3.2 Energietransport

### 3.2.1 Wärmenetze

Fernwärmenetze dienen der großflächigen leitungsgebundenen Verteilung thermischer Energie von einer zentralen Erzeugungsanlage (Heizkraftwerk) zu den Abnehmern. Als Wärmeträger kommt in der Regel Heizwasser zum Einsatz. Dampfnetze finden sich nur noch in Einzelfällen oder zur industriellen Versorgung mit Prozesswärme (vgl. [Konstantin, 2009] S. 432 ff.). Die Trassenlänge aller Fernwärmenetze in Deutschland betrug 2011 ca. 20000 km, davon ca. 3 % Dampfnetze (vgl. [AGFW, 2012b] S. 31f).

Kennwert	Nahwärme	Fernwärme
Anlagengröße	kleine, dezentrale Anlagen	große, zentrale Anlagen
Vorlauftemperatur	ca. 85 °C	bis zu 150 °C
Anschlussleistung	100 kW bis einige MW	> 10 MW

**Tabelle 3.4** Unterscheidungskriterien zwischen Nah- und Fernwärme  
(Quelle: [Böhmer und Gössl, 2009])

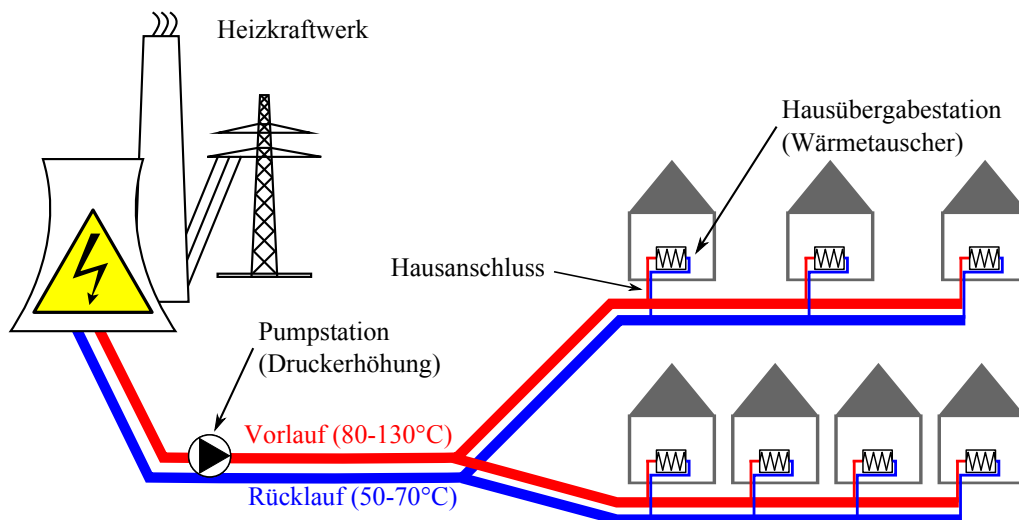
Von Nahwärmenetzen oder -inseln spricht man bei kleinen Wärmenetzen, die nur von einzelnen Blockheizkraftwerken (BHKW) gespeist werden und meist nur wenige Häuserblöcke oder einzelne Wohnsiedlungen versorgen. Es gibt keine klare Unterscheidung

zwischen Nah- und Fernwärmenetzen, in [Böhmer und Gössl, 2009] finden sich jedoch die in Tabelle 3.4 aufgeführten Kriterien, welche eine sinnvolle Abgrenzung ermöglichen.

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird der Begriff Fernwärme allgemein für die leitungsbundene Wärmeversorgung benutzt und schließt Nahwärmenetze ein, sofern nicht explizit zwischen Nah- und Fernwärmenetzen unterschieden wird.

Der Aufbau einer Fernwärmeversorgung ist in Abbildung 3.11 skizziert und enthält als wichtigste Komponenten:

- Wärmeerzeugung (Heizwerk bzw. Heizkraftwerk)
- Pumpstationen
- Leitungsnetz (Versorgungsleitungen)
- Hausanschlussleitungen
- Hausübergabestationen (Wärmetauscher)



**Abbildung 3.11** Aufbau eines Fernwärmenetzes (in Anlehnung an [Konstantin, 2009] S. 433)

Das Leitungsnetz einer Fernwärmeversorgung ist in einen Vor- und einen Rücklauf getrennt. Das erhitzte Wasser fließt hierbei von der Einspeisestelle (Heiz- bzw. Heizkraftwerk) durch den Vorlauf zu den Kunden. Dort wird die Energie (Wärme) über Wärmetauscher<sup>6</sup> entnommen und das kühlere Wasser dem Rücklauf zugeführt. Über die Rücklaufleitungen fließt das Wasser zurück zu der Einspeisung. Die Vorlauftemperatur beträgt in Fernwärmenetzen ca. 100 - 130 °C, in BHKW-gespeisten Nahwärmenetzen ca. 75 - 85 °C. Die Rücklauftemperatur beträgt ca. 50 - 70 °C.

<sup>6</sup> In bestehenden Fernwärmenetzen gibt es auch Direktversorgungen, bei denen das Heizwasser direkt in die Heizanlage der Kunden fließt (ohne Wärmetauscher und hydraulische Trennung).



Durch Pumpstationen (Druckerhöhungsanlagen) wird das Heizwasser umgewälzt und eine ausreichende Druckhaltung im Netz gewährleistet. Stand der Technik sind hierbei drehzahlgeregelte Pumpen, die den Druck flexibel an die aktuelle Verbrauchssituation anpassen können (vgl. [Konstantin, 2009] S. 437).

Die weiteren grundlegenden Eigenschaften und Komponenten eines Fernwärmenetzes werden nachfolgend vorgestellt.

### **3.2.1.1 Rohrwerkstoffe und Nennweiten**

Bei Fernwärmenetzen sind erdverlegte Kunststoffmantelrohre (KMR) Stand der Technik und der heute gängigste Rohrwerkstoff. Diese sind für eine Vorlauftemperatur von bis zu ca. 130 °C ausgelegt. KMR-Rohre bestehen aus einem Stahl-Mediumrohr, welches durch einen PU-Schaum isoliert wird, der wiederum durch ein PE-Schutzrohr umhüllt ist (vgl. [Zahoransky, 2013] S. 413).

Nahwärmenetze mit geringer Vorlauftemperatur werden teilweise auch in kostengünstigeren flexiblen Kunststoff-Medium-Rohren verlegt, die jedoch nur für Vorlauftemperaturen bis ca. 90 °C ausgelegt sind. Bestehende Fernwärmeleitungen sind teilweise noch als kanalverlegte Leitungen anzutreffen (Haubenkanäle), wobei diese Verlegetechnik aufgrund der hohen Kosten nicht mehr zur Anwendung kommt.

Typische Nennweiten (Rohrdurchmesser) für ein Verteilnetz liegen im Bereich von etwa 50 mm (DN 50) bis 300 mm (DN 300). Leitungen mit Transportcharakter (z.B. Ausgangsleitungen der Heizkraftwerke) können auch eine Nennweite bis DN 600 und größer aufweisen.

### **3.2.1.2 Verlegekosten**

Die Kosten der Verlegung von Fernwärmerohren setzen sich aus Material-, Montage- und Tiefbaukosten zusammen. Der Tiefbau weist hierbei in der Regel den höchsten Kostenanteil auf. Sowohl Material- als auch Tiefbaukosten hängen von dem verwendeten Rohrdurchmesser ab. Die Verlegekosten einer mittleren Versorgungsleitung in DN 100 liegen bei ca. 650 € / m. Typische dimensionsabhängige Verlegekosten für ein großstädtisches Netz sind in Tabelle 3.5 aufgeführt. Die Kosten sind nur als grobe Richtwerte zu sehen, da sich die tatsächlichen Kosten in Abhängigkeit von der Lage der Leitung, der Straßenoberfläche und unternehmensspezifisch erheblich unterscheiden können.

Rohrdurchmesser [mm]	Verlegekosten [€/m]
25	440
50	485
80	650
100	660
150	800
200	990
300	1320
400	1650
500	1980
600	2140

**Tabelle 3.5** Richtwerte für dimensionsabhängige Verlegekosten für Fernwärmeleitungen (Quelle: Unternehmensangaben)

### 3.2.1.3 Betrieb und Auslegung von Wärmenetzen

Die Betriebsweise und Auslegung von Fernwärmenetzen richtet sich nach dem Leistungsbedarf der Abnehmer und muss eine Versorgung aller Kunden zu dem Zeitpunkt der höchsten Abnahme (Spitzenlast) ermöglichen. Die Dimensionierung der Fernwärmeleitungen, welche die hydraulische Transportkapazität determiniert, muss in erster Linie die Temperaturverteilung, eine ausreichende Druckhaltung, die Einhaltung maximaler Fließgeschwindigkeiten sowie die Höhe der Pumpstrom- und Verlegekosten berücksichtigen. Die Betriebsweise des Netzes entscheidet bei gegebener Dimensionierung über die thermische Übertragungskapazität der Leitungen, die zusätzlich von der Temperaturdifferenz zwischen Vor- und Rücklauf abhängt.

#### Hydraulische Transportkapazität

Primär ist eine ausreichende Druckhaltung im Netz zu beachten, da der Druck in den Rohrleitungen durch Reibungsverluste kontinuierlich abnimmt, je weiter man sich von der Einspeisestelle entfernt. Auslegungskriterium ist hierbei der minimale Differenzdruck zwischen Vor- und Rücklauf an den Hausübergabestationen, der einen vorgegebenen Grenzwert (ca. 0,5 - 1 bar) nicht unterschreiten darf. Die Abnahmestelle mit dem geringsten Differenzdruck wird auch als *kritischer Verbraucher* bezeichnet. In der Regel ist dies der Abnehmer, der am weitesten von einer Netzeinspeisung entfernt liegt. Zusätzlich zu dem Differenzdruck sind untere und obere Druckgrenzen einzuhalten, um ein Ausdampfen

des Systems (bei Druckunterschreitung) bzw. unzulässige Materialbeanspruchungen (bei Drucküberschreitung) zu verhindern (vgl. [Glueck, 1984] S. 175).

Der Reibungsdruckverlust in einer Rohrleitung kann durch die nachfolgende allgemeine Druckverlustgleichung für inkompressible Fluide beschrieben werden (vgl. [Scholz, 2012] S. 7 sowie [DVGW, 2006a]):

$$\Delta p = c \cdot l \cdot \frac{v^2}{d^5} \quad (3.1)$$

Mit:

$$\begin{aligned} \Delta p &= \text{Druckverlust} && [\text{bar}] \\ c &= \text{Konstante}^7 \\ l &= \text{Leitungslänge} && [\text{m}] \\ d &= \text{Rohrdurchmesser} && [\text{m}] \\ v &= \text{Volumenstrom} && [\text{m}^3/\text{h}] \end{aligned}$$

Aus Gleichung (3.1) ist zum einen ersichtlich, dass der Reibungsdruckverlust quadratisch mit dem Volumenstrom des Heizwassers steigt, zum anderen, dass eine Vergrößerung des Rohrdurchmessers  $d$  einen überproportionalen Rückgang des Druckverlustes zur Folge hat. Zur Gewährleistung einer ausreichenden Druckhaltung müssen folglich Leitungen mit einem hohen Volumenstrom hinreichend große Rohrdurchmesser aufweisen, um die Reibungsdruckverluste zu minimieren. Darüber hinaus ermöglichen geringe Reibungsdruckverluste eine Reduktion des Pumpstromaufwands, welcher einen erheblichen Teil der Betriebskosten eines Fernwärmenetzes verursacht.

Gegen eine zu großzügige Dimensionierung des Netzes sprechen jedoch die weiteren Auslegungskriterien: Die Fließgeschwindigkeiten im Netz sollten nicht zu gering sein, um die Verweildauer des Heizwassers im Netz und damit die Wärmeverluste zu minimieren. Zusätzlich steigen die Verlegekosten mit dem Rohrdurchmesser (s. Tabelle 3.5), weshalb für einen wirtschaftlichen Betrieb eines Wärmenetzes die hydraulisch kleinstmögliche Dimensionierung gewählt werden sollte.

### Thermische Übertragungskapazität

Die thermische Übertragungskapazität einer Leitung hängt neben der hydraulischen Transportkapazität von der Temperaturspreizung zwischen Vor- und Rücklauf ab. Je größer

<sup>7</sup> Die Konstante  $c$  in (3.1) enthält die Dichte des Mediums, die Rohrrauigkeit und weitere Faktoren. Da hier nicht näher auf die Druckverlustberechnung eingegangen werden soll, wird für eine detaillierte Berechnung auf [Scholz, 2012] S. 1 ff. sowie [AGFW, 2007] verwiesen.

diese ist, desto höher ist – bei gleichem Massestrom – die thermische Übertragungskapazität. Massestrom und thermische Leistung stehen in folgendem linearen Zusammenhang (vgl. [Scholz, 2012] S. 1):

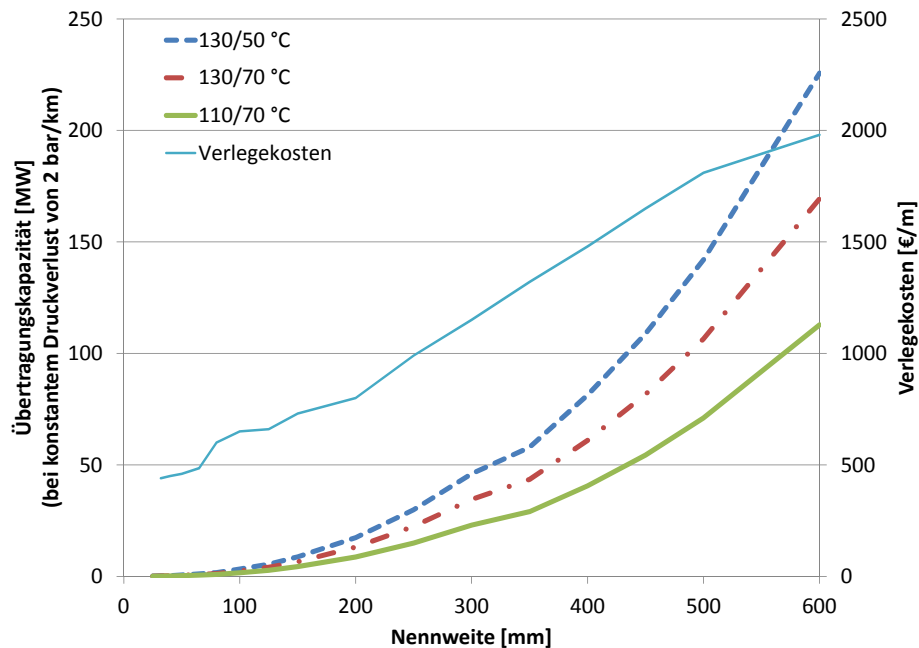
$$q = m \cdot z \cdot \Delta t \quad (3.2)$$

Mit:

$q$	= Wärmeleistung	[kW]
$m$	= Massestrom	[kg/h]
$z$	= Spezifische Wärmekapazität	[kWh/(kg · K)]
$\Delta t$	= Temperaturspreizung	[K]

Die Netzbetreiber sind daher bestrebt, die Rücklauftemperaturen abzusenken, um hierdurch eine höhere Übertragungskapazität bei gleichem Massestrom zu erreichen. Dies erlaubt bei bestehenden Netzen die Reduzierung des Massestroms und damit des Pumpstromaufwandes, bei Netzerweiterungen eine geringere Dimensionierung der Leitungen.

Abbildung 3.12 zeigt die thermische Übertragungskapazität einer Leitung bei verschiedenen Temperaturspreizungen in Abhängigkeit von der Nennweite, wobei ein konstanter Druckverlust von 2 bar je km angenommen wurde. Zur Bewertung der Kosten für die Erhöhung der Transportkapazität durch eine Dimensionsvergrößerung sind die Verlegekosten gemäß Tabelle 3.5 ebenfalls in der Grafik dargestellt.



**Abbildung 3.12** Thermische Übertragungskapazität einer Leitung bei verschiedenen Temperaturspreizungen in Abhängigkeit von der Nennweite (Daten aus [Konstantin, 2009] Tab. 9.10)

### Wärmeverluste

Trotz Isolierung der Rohre wird bei dem Transport des Heizwassers durch das Leitungsnetz Wärme an die Umgebung abgegeben. Je höher die Vorlauftemperatur ist, desto höher ist die Temperaturdifferenz zu dem umgebenden Erdreich und umso größer sind die Wärmeverluste. Eine Absenkung der Vor- und Rücklauftemperaturen ist daher auch im Hinblick auf die Wärmeverluste sinnvoll.

Ein weiterer Faktor, der die Wärmeverluste im Netz beeinflusst, ist die Verweildauer des Wassers. Bei sehr geringen Fließgeschwindigkeiten und entsprechend langen Verweildauern des Heizwassers kühlt das System stärker aus, wodurch die Netzverluste steigen. Dieses Problem besteht insbesondere in den Sommermonaten, wenn die für den Spitzenlastbetrieb (Winterbetrieb) dimensionierten Leitungen nur gering durchflossen werden und nicht ausreichend Wärmeabnehmer zur Verfügung stehen.

Die Wärmeverluste in Fernwärmenetzen betrugen 2011 bei den überwiegend anzutreffenden Heizwassernetzen im Mittel 11 % und bei Dampfnetzen 17 % (vgl. [AGFW, 2012b] S. 31f).

### 3.2.2 Gasversorgungsnetze

Gasversorgungsnetze werden für die Versorgung von Haushalten, Gewerbe- und Industriekunden sowie Kraftwerksbetreibern mit Erdgas genutzt. Bei Gasnetzen ist zwischen überregionalen Transportnetzen und lokalen Gasverteilnetzen zu unterscheiden. Transportnetze mit einem Betriebsdruck von ca. 80 bar dienen dem überregionalen Gastransport von den nationalen *Entry-Points*, welche aus den Förderländern versorgt werden, zu den lokalen Gasversorgern (Stadtwerke; vgl. [Cerbe, 1992] S. 158). Lokale Gasverteilnetze versorgen die Endverbraucher mit Erdgas. In dieser Arbeit werden ausschließlich lokale Verteilnetze betrachtet, überregionale Hochdruck-Gastransportnetze sind nicht Bestandteil der Untersuchungen.

Ein Gasversorgungsnetz ist in der Regel in die Druckstufen Niederdruck (ND), Mitteldruck (MD) und Hochdruck (HD) unterteilt (vgl. [Cerbe, 1992] S. 43). Topologisch getrennte bzw. nur über Netzdruckregler verbundene Teilnetze eines Gasversorgungsnetzes werden als Druckzonen bezeichnet, wobei der Gasfluss immer von einer Netzebene mit höherem Druckniveau zu einer Druckzone mit geringerem Druckniveau gerichtet ist.

Niederdrucknetze mit einem Betriebsdruck zwischen 25 und 100 mbar dienen der Versorgung von Haushalts- und Gewerbekunden mit geringem Leistungsbedarf und haben häufig

den größten Anteil an der Netzlänge eines Gasverteilnetzes. ND-Netze werden über Netzdruckregler (Druckreduzierstationen) aus den überlagerten Mittel- und Hochdrucknetzen gespeist. Ein Betriebsdruck oberhalb von 35 mbar wird als erhöhter Niederdruck (eND) bezeichnet.

Mitteldrucknetze, die einen Betriebsdruck zwischen 100 und 1000 mbar aufweisen, versorgen vorwiegend größere Gewerbe- und Industriekunden sowie die ND-Netzdruckregler. Modernere Gasversorgungsnetze werden teilweise auch flächendeckend mit Mitteldruck betrieben, da diese bei gleicher Dimensionierung eine höhere Transportkapazität als ND-Netze aufweisen. Eine Versorgung mit Mitteldruck setzt allerdings Hausdruckregler bei allen Kunden voraus.

Ab einem Betriebsdruck von 1 bar spricht man von Hochdrucknetzen. Diese ermöglichen die Verteilung des Erdgases von den Übernahmestationen zu großen Industriekunden, Kraftwerken und den MD- und ND-Netzdruckreglern. HD-Netze bieten die höchste Transportkapazität und ermöglichen es, große Gasmengen mit relativ geringem Druckverlust innerhalb des Netzes zu verteilen. In lokalen Gasversorgungsnetzen werden HD-Netze typischerweise mit einem Druckniveau zwischen 1 und 4 bar betrieben.

#### **3.2.2.1 Rohrwerkstoffe und Nennweiten**

Gasleitungen werden entweder als PE- oder Stahlrohre verlegt, wobei Stahlrohre heute überwiegend in HD-Netzen eingesetzt werden. ND- und MD-Netze werden mit wenigen Ausnahmen nur noch in PE ausgelegt. Ältere Werkstoffe, die bei bestehenden Leitungen verbaut sind, umfassen Graugussrohre, Duktillgussrohre sowie PVC-Rohre.

Die Nennweiten in Gasversorgungsnetzen liegen wie bei Fernwärmeleitungen meist im Bereich DN 50 - DN 300, wobei Transportleitungen auch hier größere Dimensionen bis zu etwa DN 600 aufweisen können (vgl. [Cerbe, 1992] S. 159).

#### **3.2.2.2 Verlegekosten**

Die Kosten der Leitungsverlegung hängen hauptsächlich von dem verwendeten Material, der Nennweite (Rohrdurchmesser), der Druckstufe und der Beschaffenheit der Oberfläche ab. Die Kosten je laufendem Meter liegen zwischen ca. 160 € für eine kleine Versorgungsleitung und bis zu 800 € für große Transportleitungen. Typische Kostensätze für eine Verlegung im Gehweg (entspricht etwa den durchschnittlichen Oberflächenkosten) können Tabelle 3.6 entnommen werden.

Nennweite [mm]	Verlegekosten [€/m]
50	160
80	175
100	190
150	240
200	280
300	340
400	480
500	650
600	800

**Tabelle 3.6** Richtwerte für dimensionsabhängige Verlegekosten für Gasleitungen (Quelle: Unternehmensangaben)

### 3.2.3 Erneuerung von Rohrnetzen

#### 3.2.3.1 Notwendigkeit der Erneuerung

Wie alle technischen Anlagen unterliegen auch Rohrleitungsnetze einem Alterungsprozess, welcher Korrosionsschäden (metallische Leitungen) und Risse bzw. Brüche durch Versprödung (Kunststoffleitungen) nach sich ziehen kann. Zur Gewährleistung einer sicheren Versorgung müssen Rohrleitungen zum Ende ihrer technischen Nutzungsdauer ersetzt werden. Die Notwendigkeit der rechtzeitigen Erneuerung ergibt sich auch aus dem Energiewirtschaftsgesetz (EnWG), welches den Betreibern von Energieversorgungsnetzen vorschreibt ein „[...] sicheres, zuverlässiges und leistungsfähiges Energieversorgungsnetz diskriminierungsfrei zu betreiben, zu warten und bedarfsgerecht auszubauen soweit es wirtschaftlich zumutbar ist.“ (EnWG §11 Abs. 1).

In Abgrenzung zur akuten Reparatur von bereits aufgetretenen Schäden spricht man hierbei von *(vorbeugender) Instandhaltung*. Diese umfasst nach DIN 31051 (vgl. [DIN, 2012]) die „Kombination aller technischen und administrativen Maßnahmen sowie Maßnahmen des Managements während des Lebenszyklus eines Betriebsmittels zur Erhaltung des funktionsfähigen Zustandes oder der Rückführung in diesen, so dass es die geforderte Funktion erfüllen kann“.

### 3.2.3.2 Instandhaltungsstrategie

Aufgrund der hohen Kosten für die Leitungsverlegung, welche auch bei der Erneuerung einer bestehenden Leitung in voller Höhe anfallen (Ausnahme *Relining*<sup>8</sup>), sollten Leitungen erst dann erneuert werden, wenn dies technisch notwendig ist. Nach Balzer und Schorn (vgl. [Balzer und Schorn, 2011] S. 20 ff.) bieten sich die ereignisorientierte, die zeitorientierte, die zustandsorientierte, die zuverlässigkeitsorientierte sowie die risikoorientierte Instandhaltungsstrategie zur Erneuerungsplanung an. Die Ereignis- und zeitorientierte Instandhaltungsstrategien eignen sich jedoch nicht zur Erneuerungsplanung von Rohrnetzen. Im Gegensatz zu den meisten technischen Anlagen kann der Zustand einer Leitung nicht direkt beobachtet werden, da die Lage der Leitungen im Erdreich eine Zustandsbewertung verhindert. Die zustandsorientierte Instandhaltung bietet sich damit ebenfalls nicht für die Erneuerungsplanung von Rohrnetzen an. Die zuverlässigkeits- und risikoorientierte Instandhaltung haben sich daher als Stand der Technik zur Instandhaltungsplanung von Versorgungsnetzen durchgesetzt. Die zuverlässigkeitsorientierte Instandhaltung bewertet sowohl den Zustand als auch die Wichtigkeit einer Leitung innerhalb der Versorgungskette als Erneuerungskriterium. Die risikoorientierte Erneuerung erfasst neben dem Zustand generell die Auswirkungen einer Störung (sowohl auf die Versorgung als auch auf Dritte). Das Risiko ist hierbei definiert als Produkt aus Eintrittswahrscheinlichkeit und Ausmaß eines Schadens.

Die risikoorientierte Erneuerungsplanung von Rohrnetzen umfasst die nachfolgenden Schritte:

1. Bestimmung des Alterungsverhaltens
2. Bestimmung des Ausmaßes einer Störung
3. Bestimmung des Erneuerungszeitpunktes einer Leitung

#### **Bestimmung des Alterungsverhaltens**

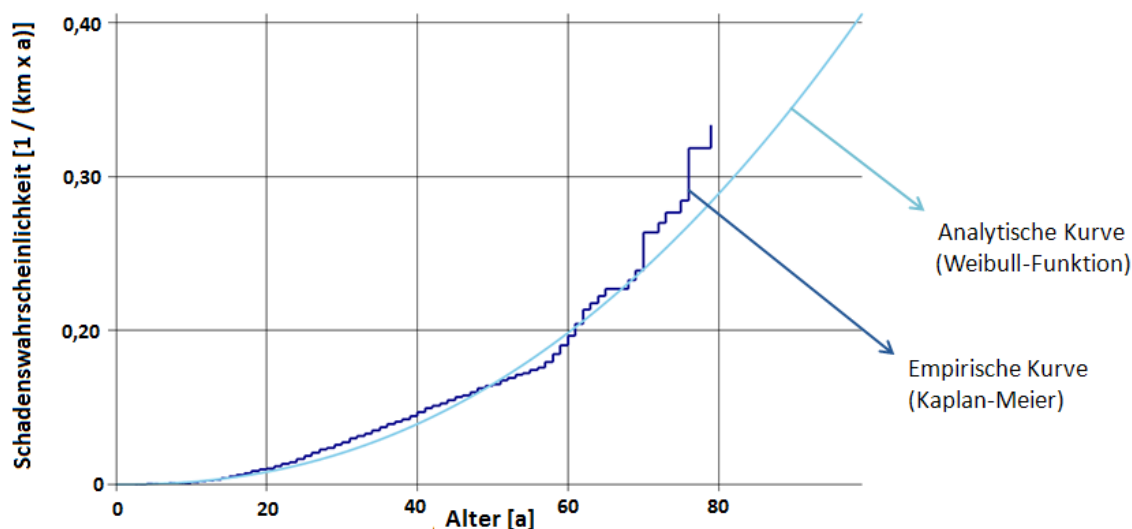
Da die Bestimmung des Zustandes einer Leitung nicht direkt möglich ist, wird der Zustand indirekt über das Alter, den Werkstoff und gegebenenfalls weitere Faktoren (Lage der Leitung, Bodenbeschaffenheit, etc.) abgeleitet. Die Bestimmung des Alterungsverhaltens erfolgt nach Möglichkeit durch die systematische Auswertung historischer Schadensdaten. Durch statistische Schätzverfahren (z.B. Kaplan-Meier Verfahren, vgl. [Greene, 2003] S. 798 ff.) kann die Wahrscheinlichkeit eines Schadenseintritts für jede Werkstoffgruppe

---

<sup>8</sup> Relining: Grabenlose Erneuerung von Leitungen durch Einziehen eines Rohres mit geringerem Durchmesser in die bestehende, zu erneuernde Leitung.



prognostiziert werden. Die Voraussetzung hierfür ist jedoch eine ausreichend vollständige Schadensdokumentation gemäß DVGW Arbeitsblatt G 402 (A) (vgl. [DVGW, 2011]). Abbildung 3.13 stellt exemplarisch Alterungsfunktionen für Stahlrohre eines Gasversorgungsnetzes dar.



**Abbildung 3.13** Empirisch und analytisch abgeleitete Alterungsfunktionen für Stahlrohre

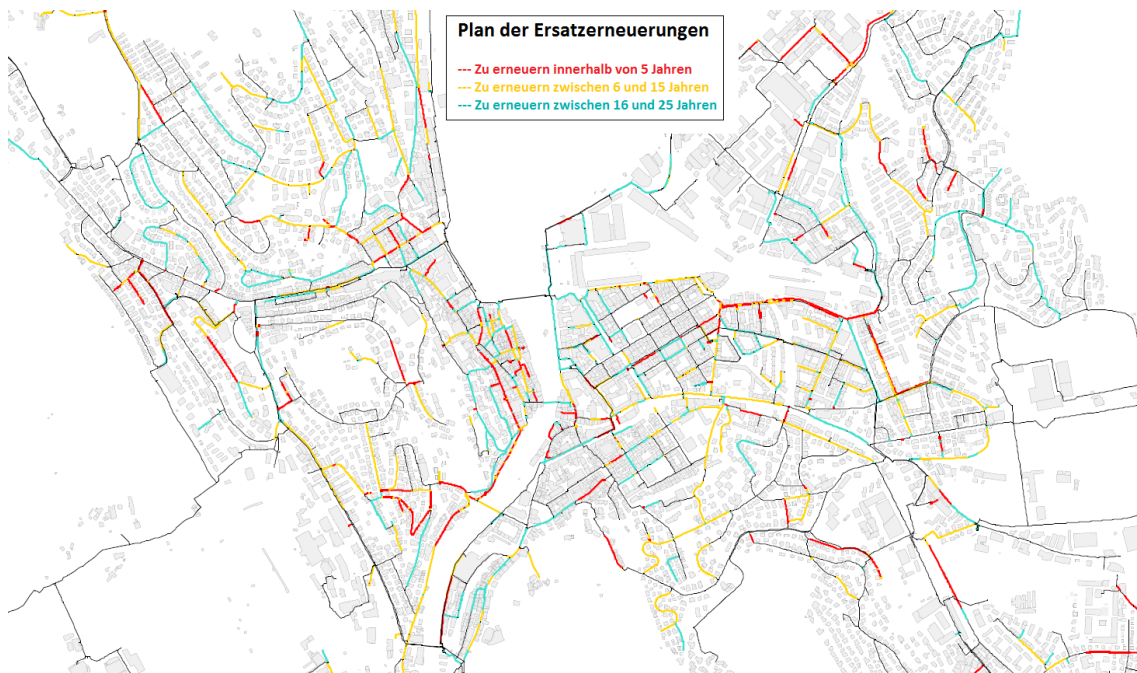
### Bestimmung des Ausmaßes eines Schadens

Das Ausmaß eines Leitungsschadens kann über verschiedene Faktoren (Material, Druckstufe, Lage der Leitung) abgeschätzt werden. Ein Schaden auf einer Gas-Hochdruckleitung vor einem Krankenhaus ist z.B. als gravierender einzuschätzen, als ein Schaden auf einer Niederdruckleitung in unbebautem Gebiet. In der Realität hat das Schadensausmaß verschiedene Dimensionen (z.B. Anzahl gefährdeter Personen, nicht gelieferte Energiemenge, etc.). In der Praxis hat sich für eine einheitliche Betrachtungsweise eine monetäre Bewertung des Schadensausmaßes durchgesetzt (vgl. [König und Wehr, 2007] sowie [Balzer und Schorn, 2011] S. 169).

### Bestimmung des Erneuerungszeitpunktes

Eine Leitung ist entweder zu erneuern, wenn ihr Einzelrisiko als kritisch – also nicht mehr tragbar – eingeschätzt wird oder wenn das Gesamtrisiko des Systems (Leitungsnetz) als kritisch eingestuft wird. Die Priorisierung der Erneuerung von Rohrleitungen erfolgt bei der risikoorientierten Erneuerungsplanung nach dem Risikowert der Leitung oder der Risikoeffizienz einer Erneuerungsmaßnahme, welche definiert ist als Verhältnis zwischen der Risikoreduktion und den Kosten der Maßnahme (vgl. [Balzer und Schorn, 2011] S. 173).

Stand der Technik zur Bestimmung des Erneuerungszeitpunktes ist die rechnergestützte Ersatzerneuerungsplanung. Auf Basis der Betriebsmitteldaten (Alter, Werkstoff, Länge, etc.) und der Alterungsfunktionen wird hierbei eine Alterung des Netzes simuliert. Anhand vorgegebener Grenzwerte und im Rahmen eines zulässigen Erneuerungsbudgets wird für jede Leitung der optimale Erneuerungszeitpunkt bestimmt (vgl. [König und Wehr, 2007] sowie [Balzer und Schorn, 2011] S. 205 ff.). Abbildung 3.14 zeigt das Ergebnis einer risikoorientierten Erneuerungsplanung eines Gasrohrnetzes.



**Abbildung 3.14** Erneuerungsplanung für ein Gasrohrnetz (Planausschnitt)

### 3.3 Dezentrale Wärmeerzeugung und Haustechnik

Die Nah- und Fernwärmeversorgung steht in Konkurrenz zur dezentralen Wärmeerzeugung durch die Gebäudeeigentümer. Zur Bewertung der Attraktivität eines Fernwärmeanschlusses aus Sicht der Gebäudeeigentümer ist daher ein Vollkostenvergleich mit alternativen Heizungssystemen durchzuführen. Der Vollkostenvergleich für typische Anwendungsfälle dient auch den Fernwärmeanbietern zur Ermittlung eines konkurrenzfähigen Tarifs (*anlegbarer Fernwärmepreis*). Der Systemvergleich dezentraler Heiz- und Warmwassersysteme wird anhand eines Altbau Ein- und Mehrfamilienhauses dargestellt. Sofern nicht anders angegeben, gelten die in Tabelle 3.7 aufgeführten Annahmen. Die Kostendaten sind aus [Oschatz und Mailach, 2010] entnommen, wobei eine Komplettsanierung

des Altbaus angenommen wird. D.h. die gesamte Heizungsanlage (einschließlich Heizkörpern, Verteilleitungen, etc.) sowie die Warmwasserbereitung und -speicherung sind neu zu installieren.

Kennwert	Einfamilienhaus (Altbau)	Mehrfamilienhaus (Altbau)
Wohnfläche [m <sup>2</sup> ]	150	500
Heizwärmebedarf [kWh / a]	25763	57410
Warmwasserbedarf [kWh / a]	2616	7563
Heizlast (Leistung) [kW]	14	32

**Tabelle 3.7** Annahmen für den Vollkostenvergleich von Heizsystemen

Die aktuell gebräuchlichsten Heizungstypen umfassen Erdgas-Brennwertkessel, Heizöl-Niedertemperatur und -Brennwertkessel, Strom-Wärmepumpen sowie Holzpelletkessel. Neben diesen reinen Heizungssystemen werden vereinzelt bereits dezentrale Mikro- und Mini-KWK-Anlagen eingesetzt, welche entweder auf einem Stirlingmotor, einem Otto-Motor oder auf Brennstoffzellen basieren.

	Gas- Brennwert	Gas-BW + Solarthermie	Mikro- KWK	Öl- Brennwert	Pellet- Kessel	Sole- Wasser- EWP	Fern- wärme
Investitionen [€]	16800	22100	27700	21200	27400	43500	16907
Verbrauch [€/a]	2268	2114	1600	2325	2241	1617	2313
Kapitalkosten [€/a]	1342	1794	2612	1756	2351	3649	1351
Betriebskosten [€/a]	72	93	173	191	424	315	67
<b>Jahresgesamtkosten [€/a]</b>	<b>3682</b>	<b>4001</b>	<b>4385</b>	<b>4272</b>	<b>5016</b>	<b>5581</b>	<b>3731</b>

(a) Einfamilienhaus<sup>9</sup>

	Gas- Brennwert	Gas-BW + Solarthermie	Mini- KWK + Gas BW	Öl- Brennwert	Pellet- Kessel	Sole- Wasser- EWP	Fern- wärme
Investitionen [€]	31400	41800	56400	40100	43800	93400	31600
Verbrauch [€/a]	4780	4473	2722	4965	4753	3389	6205
Kapitalkosten [€/a]	2477	3366	6357	3219	3644	7597	2493
Betriebskosten [€/a]	512	554	1037	668	904	1091	478
<b>Jahresgesamtkosten [€/a]</b>	<b>7769</b>	<b>8393</b>	<b>10116</b>	<b>8852</b>	<b>9301</b>	<b>12077</b>	<b>9176</b>

(b) 6-Parteien Mehrfamilienhaus

**Tabelle 3.8** Vollkostenvergleich ausgewählter Heizungssysteme nach VDI-Richtlinie 2067 (vgl. [VDI, 2012]; Quelle: [Oschatz und Mailach, 2010])

<sup>9</sup> Die Kosten für Fernwärme des Einfamilienhauses sind in der Originalquelle nicht angegeben und wurden auf Basis der Kostengrundlagen nachberechnet.

Die aufgeführten Heizungsanlagen werden nachfolgend beschrieben und anhand des Vollkostenvergleichs gegenübergestellt. Tabelle 3.8 fasst die Ergebnisse des Kostenvergleichs zusammen.

### 3.3.1 Erdgaskessel

Dezentrale Erdgaskessel (Gasthermen) haben mit etwa 50 % den größten Marktanteil an der Deckung des Raumwärmebedarfs. Der aktuelle Stand der Technik bei Gasthermen sind Brennwertkessel in Kombination mit Solarthermie-Kollektoren.

Ein Erdgaskessel erzeugt Wärme durch Verfeuerung des Primärenergieträgers Erdgas. Die Brennwerttechnologie erlaubt die Nutzung der in den Abgasen enthaltenen Kondensationswärme wodurch Brennwertkessel fast die gesamte Brennstoffenergie in Wärme umwandeln.

Die Investitionskosten für die Heizanlage mit Erdgasbrennwertkessel (einschl. Hausanschluss, Heizkörper, etc.) und Trinkwassererwärmung liegen für das Einfamilienhaus bei 16800 € (22100 € mit Solarthermie). Für das Mehrfamilienhaus mit 32 kW Leistungsbedarf ergeben sich Investitionskosten von 31400 € (41800 € mit Solarthermie). Das Heizungssystem mit Erdgas-Brennwertkessel (ohne Solarthermie) weist sowohl für das Ein- als auch das Mehrfamilienhaus die geringsten jährlichen Gesamtkosten aller verglichenen Heizsysteme auf.

Für einen fossilen Brennstoff weist Erdgas relativ geringe spezifische Treibhausgasemissionen von 201 gCO<sub>2</sub>/kWh auf. Einschließlich der Emissionen für Exploration und Transport des Erdgases werden 227 g CO<sub>2</sub>/ kWh<sub>th</sub> ausgestoßen (s. Tabelle 3.9).

### 3.3.2 Ölkessel

Heizöl deckt bei Haushaltskunden noch immer über ein Viertel des Raumwärmebedarfs. Wie bei Erdgas ist es auch bei Ölkesseln möglich, durch die Brennwerttechnologie einen höheren Wirkungsgrad zu erreichen. Aufgrund des niedrigeren Wasserstoffanteils im Erdöl ist der Brennwerteffekt allerdings weniger ausgeprägt als bei Erdgas-Brennwertkesseln.

Analog zu Erdgaskesseln, wird die Wärme durch Verfeuerung des Heizöls erzeugt und durch das Wärmemedium Wasser in dem Gebäude verteilt. Bei Brennwertkesseln wird zusätzlich die in den Abgasen enthaltene Kondensationswärme über Wärmetauscher entnommen und dem Heizungsvorlauf zugeführt.

Die Investitionskosten für eine Heizungsanlage mit einem modernen Niedertemperatur-Öl-Brennwertkessel liegen in der Beispielausführung bei ca. 21200 € für das Einfamilienhaus und bei 40100 € für das Mehrfamilienhaus. Die höheren Investitionen gegenüber einem Erdgas-Kessel ergeben sich aus höheren Kosten für den Kessel und Zusatzkosten für die Öltanks, welche teurer als ein Gas-Hausanschluss sind. Hinsichtlich der jährlichen Gesamtkosten liegen Öl-Brennwertkessel im Mittelfeld der untersuchten Varianten.

Ölheizungen weisen die höchsten spezifischen CO<sub>2</sub>-Emissionen der untersuchten Heizungsvarianten auf. Für Brennwertkessel liegen diese (inkl. Vorketten) bei 321 gCO<sub>2</sub>/ kWh, für normale Niedertemperaturkessel ohne Brennwertnutzung sogar bei 369 gCO<sub>2</sub>/ kWh.

### 3.3.3 Holzpellet-Heizungen

Mit ca. 1,5 % Marktanteil (vgl. [Prognos, 2009] S. 85, Tab. 4.3-9) bei Heizanlagen spielen Holzpellet-Heizungen bislang nur eine untergeordnete Rolle. Die Wärme wird durch Verfeuerung von Holzpellets erzeugt, welche aus gepresstem Sägemehl bzw. Sägespänen bestehen.

Die Investitionskosten für eine Pelletheizung liegen mit 27400 € für das Einfamilienhaus und 43800 € für das Mehrfamilienhaus deutlich über den Investitionen für eine vergleichbare Öl- oder Gasheizung. Die jährlichen Betriebskosten bewegen sich mit 424 bzw. 904 € ebenfalls auf einem höheren Niveau. Da die Pelletpreise mittlerweile nur noch geringfügig unter dem Erdgaspreis liegen, können Holzpelletheizungen aktuell ökonomisch weder mit einem Gas- noch einem Öl-Brennwertkessel konkurrieren.

Die CO<sub>2</sub>-Emissionen von Holzpellet-Heizungen sind allerdings sehr gering und hauptsächlich auf die Her- und Bereitstellung der Pellets zurückzuführen. Der CO<sub>2</sub>-Ausstoß (inkl. Vorketten) beträgt mit 28 gCO<sub>2</sub>/ kWh nur etwa ein Zehntel der Emissionen eines herkömmlichen Erdgaskessels.

### 3.3.4 Wärmepumpen

Elektrisch betriebene Wärmepumpen decken ca. 1 % des privaten Raumwärmebedarfs (vgl. [Prognos, 2009] S. 85, Tab. 4.3-9). Hier werden nur die effizienteren Sole-Wasser-Wärmepumpen betrachtet, die dem Erdreich über eine Sonde die Wärme entziehen. Im Gegensatz dazu entziehen Luft-Wasser-Wärmepumpen die Wärme der Umgebungsluft.

Wärmepumpen ermöglichen es durch Zufuhr mechanischer Arbeit, Niedertemperaturwärme auf ein höheres nutzbares Temperaturniveau zu bringen. Die Funktionsweise entspricht im Prinzip der eines Kühlturmes mit dem Unterschied, dass der Umgebung

Wärme entnommen, anstatt zugeführt wird. Hierzu wird ein gasförmiges Fluid (Arbeitsmedium) durch einen (in der Regel elektrisch betriebenen) Kompressor auf hohen Druck verdichtet und anschließend in einem Kondensator verflüssigt. Die im Kondensator (Wärmetauscher) abgegebene thermische Energie entspricht der Nutzwärme. Das verflüssigte Arbeitsmedium wird über ein Expansionsventil (Drossel) auf ein geringeres Druckniveau gebracht und verdampft bei niedriger Temperatur. Die Verdampfungswärme entspricht der Niedertemperaturwärme, die der Umgebung (bei Sole-Wasser-Wärmepumpen das Erdreich, bei Luft-Wasser-Wärmepumpen die Umgebungsluft) entzogen wird. Durch Verdichtung wird das gasförmige Fluid wieder auf ein nutzbares Temperaturniveau gebracht und der Kreislauf beginnt erneut (vgl. [Pehnt, 2010] S. 234 ff).

Die Effizienz einer Wärmepumpe wird durch die Jahresarbeitszahl ausgedrückt, welche das Verhältnis zwischen der abgegebenen Wärmeenergie zur aufgenommenen elektrischen Energie für den Kompressorantrieb angibt. Die Jahresarbeitszahl von Wärmepumpen liegt in der Praxis bei ca. 3 - 4, wobei Erdwärme- und Grundwasserwärmepumpen höhere Jahresarbeitszahlen aufweisen, als die ineffizienteren Luft-Wasser-Wärmepumpen (vgl. [Pehnt, 2010] S. 239).

Die Investitionskosten für eine Heizungsanlage mit Sole-Wasser-Wärmepumpe sind mit 43500 € für das Einfamilienhaus und 93400 € für das Mehrfamilienhaus sehr hoch. Dies liegt vor allem an den hohen Kosten für die Erdsonde, welche in etwa genauso teuer ist, wie die eigentliche Wärmepumpe. Die verbrauchsabhängigen Kosten sind aufgrund der hohen Energieeffizienz der Wärmepumpen zwar geringer als bei den anderen Heizungssystemen (Ausnahme KWK), aufgrund der hohen Wartungs- und Kapitalkosten sind die Gesamtkosten der Wärmepumpe jedoch in beiden Varianten am höchsten.

Bei der Berechnung der CO<sub>2</sub>-Emissionen für die Wärmepumpe ist es entscheidend, welche spezifischen CO<sub>2</sub>-Emissionen der eingesetzte Strom aufweist. Unter Annahme des Strom-Mixes in Deutschland weisen Strom-Wärmepumpen mit 153 gCO<sub>2</sub>/ kWh niedrige CO<sub>2</sub>-Emissionen auf.

### 3.3.5 Mikro- und Mini-KWK

Dezentrale Kraft-Wärme-Kopplungsanlagen in Ein- und Mehrfamilienhäusern haben sich noch nicht in der Breite durchgesetzt und sind in der kleinsten Leistungsklasse erst seit kurzem in Serienproduktion gegangen. Mikro-KWK-Anlagen im Leistungsbereich bis 2 kW<sub>el</sub> sowie Mini-KWK-Anlagen bis 50 kW<sub>el</sub> sind als Stirling-Motoren, Otto-Motoren, Mikro-Gasturbinen und Brennstoffzellen verfügbar.

Die Funktionsweise von Otto-Motor-KWK-Anlagen wurde bereits in Abschnitt 3.1.2.1 beschrieben und ist für kleine Anlagen prinzipiell identisch. Mini-BHKW mit Otto-Motor im Leistungsbereich von 1 - 50 kW<sub>el</sub> weisen einen elektrischen Wirkungsgrad von ca. 25 - 30 % und einen Gesamtwirkungsgrad von ca. 85 - 90 % auf (vgl. [Droste-Franke et al., 2009] S. 62).

Als weitere Technologie im Bereich der Mini-KWK kommen Stirling-Motoren<sup>10</sup> zum Einsatz. Diese weisen im Bereich der Mini-BHKW vergleichsweise geringe elektrische Wirkungsgrade von ca. 10 - 15 % auf. Mit einem thermischen Wirkungsgrad von ca. 80 % erreichen sie dennoch einen hohen Gesamtwirkungsgrad und eignen sich für eine wärmegeführte Betriebsweise.

Mikro-Gasturbinen werden im Leistungsbereich von ca. 25 - 250 kW<sub>el</sub> angeboten und überwiegend im industriellen Bereich eingesetzt. Erste Modelle für den Einsatz in Einfamilienhäusern sind noch nicht serienreif. Der elektrische Wirkungsgrad liegt bei ca. 25 - 30 %, der Gesamtwirkungsgrad beträgt bis zu etwa 95 % (vgl. [Droste-Franke et al., 2009] S. 64, [ASUE, 2011a] S. 14).

Eine weitere Technologie im Bereich der Mini-KWK-Anlagen, die sich noch weitgehend in der Erprobungsphase befindet, stellt die Brennstoffzelle dar. Im Gegensatz zu den anderen Technologien basiert die Stromerzeugung nicht auf einem Wärme-Kraft-Prozess sondern auf einer direkten Umwandlung der im Brennstoff enthaltenen chemischen Energie in elektrische Energie. Da bei der chemischen Umwandlung neben elektrischer Energie auch Wärme frei gesetzt wird, werden Brennstoffzellen dennoch den KWK-Anlagen zugeordnet. Die Funktionsweise von Brennstoffzellen wird in [Zahoransky, 2013] (S. 213 ff.) erläutert. Brennstoffzellen erreichen Gesamtwirkungsgrade von ca. 80 - 90 % bei elektrischen Wirkungsgraden von 35 - 60 % (vgl. [Droste-Franke et al., 2009] S. 59 f). Aufgrund der theoretisch sehr hohen elektrischen Wirkungsgrade eignen sich Brennstoffzellen generell eher für Niedrigenergiehäuser mit einem vergleichsweise geringen Wärmebedarf bei gleichzeitig hohem Strombedarf.

In dem Kostenvergleich wurde für das Einfamilienhaus ein Mikro-BHKW mit Stirlingmotor ( $\eta_{el} = 12 \%$ ,  $\eta_{th} = 80 \%$ ) angesetzt, der zu Gesamtinvestitionen von 27700 € führt und damit etwa 10000 € teurer als ein System mit Gas-Brennwertkessel ist. Das Mehrfamilienhaus wurde mit einem Motor-BHKW (+ Spitzenlast Brennwertkessel) ausgerüstet, wodurch sich die Gesamtinvestition mit 56400 € gegenüber der Heizungsanlage mit Gas-Brennwertkessel etwa verdoppelt.

<sup>10</sup> Für eine Erläuterung der Funktionsweise von Stirling-Motoren wird auf [Zahoransky, 2013] (S. 187 ff.) verwiesen.

Unter Berücksichtigung der Stromvergütung und der KWK-Förderung (s. Abschnitt 4.2.4.1) weist die BHKW-Variante in beiden Fällen die geringsten verbrauchsabhängigen Kosten auf. Aufgrund der hohen Investitionen und dem höheren Wartungsaufwand können die KWK-Anlagen dennoch preislich nicht mit Erdgasheizungen konkurrieren.

Das Motor-BHKW weist mit  $156 \text{ gCO}_2 / \text{kWh}_{th}$  einen niedrigen  $\text{CO}_2$ -Ausstoß auf. Das Mikro-BHKW erreicht mit  $210 \text{ gCO}_2 / \text{kWh}_{th}$  aufgrund des niedrigen elektrischen Wirkungsgrades des Stirling-Motors nur geringe  $\text{CO}_2$ -Einsparungen gegenüber einem Gas-Brennwertkessel.

### 3.3.6 Fernwärme

Bei einem Fernwärmeanschluss fallen für den Gebäudeeigentümer die Kosten für den Hausanschluss sowie die Hausübergabestation an. Der Anschluss wird in der Regel durch den Fernwärmeversorger angeboten und installiert. Die Kosten für den Hauseigentümer können je nach Vertriebspolitik des Versorgers stark schwanken, da manche Versorger die Hausanschlüsse subventionieren, um einen höheren Anschlussgrad zu erreichen.

Stand der Technik bei Hausübergabestationen für Fernwärmenetze sind Kompaktstationen, welche meist eine indirekte Wärmeübergabe enthalten. D.h. der Heizwasserkreislauf des Gebäudes ist hydraulisch von dem Fernwärmenetz getrennt. Kompaktstationen umfassen neben dem Wärmetauscher auch einen Wärmemengenzähler und die Umwälzpumpe der Heizungsanlage. Die Regelung der Wärmemenge erfolgt ebenfalls in der Kompaktstation durch einen Volumenstrom- und Differenzdruckregler (vgl. [Konstantin, 2009] S. 442 ff.).

Einschließlich der gesamten Heizungsanlage belaufen sich die Investitionen für ein Heizsystem mit Fernwärmeanschluss für das Einfamilienhaus auf 16900 € und für das Mehrfamilienhaus auf 31600 €. Die Investitionskosten sind damit vergleichbar mit den Kosten für eine Heizungsanlage auf Basis eines Erdgas-Brennwertkessels. Die verbrauchsabhängigen Kosten hängen stark von der Tarifpolitik des jeweiligen Fernwärmeversorgers ab. Bei den hier gewählten Daten (Leistungspreis  $34 \text{ €} / (\text{kW} \cdot \text{a})$ , Arbeitspreis  $6,5 \text{ ct} / \text{kWh}$ ) liegen die Energiekosten leicht über den Kosten einer Erdgasheizung. Die jährlichen Gesamtkosten liegen im Mittelfeld der betrachteten Heizsysteme.

Der  $\text{CO}_2$ -Ausstoß bei der Fernwärme hängt von der Wärmeerzeugung ab. Trotz eines hohen KWK-Anteils bei der Fernwärmeerzeugung betragen die spezifischen  $\text{CO}_2$ -Emissionen in Fernwärmenetzen im Mittel nach Gemis (vgl. [IINAS, 2013])  $251 \text{ g} / \text{kWh}$ .



Dies ist zum einen auf die Allokation der CO<sub>2</sub>-Emissionen zwischen den Koppelprodukten Strom und Wärme zurückzuführen, die einen großen Teil der CO<sub>2</sub>-Einsparung der Stromerzeugung zurechnet (s. nächster Abschnitt). Zum anderen sind bei der Fernwärme Netzverluste von 10 - 15 % zu berücksichtigen, die einen Teil der Primärenergieeinsparung durch die KWK-Erzeugung kompensieren. Darüber hinaus wird Fernwärme teilweise in reinen Heizwerken mit vergleichsweise schlechter CO<sub>2</sub>-Bilanz erzeugt. Sofern die Fernwärme ausschließlich durch KWK-Anlagen bereitgestellt wird, liegen die CO<sub>2</sub>-Emissionen unterhalb von 200 g / kWh.

### 3.4 Berechnung der CO<sub>2</sub>-Emissionen

Für reine Heizsysteme gestaltet sich die Berechnung der CO<sub>2</sub>-Emissionen einfach, da im Prinzip nur der spezifische CO<sub>2</sub>-Gehalt des Brennstoffs durch den Wirkungsgrad (bzw. Jahresnutzungsgrad) der Heizung dividiert werden muss. Bei KWK-Anlagen hingegen müssen die Gesamtemissionen auf die beiden Koppelprodukte Strom und Wärme aufgeteilt werden. Die Aufteilung ist hierbei nicht eindeutig und kann anhand verschiedener Methoden erfolgen. Je nach Einsatzzweck, Betriebsweise (stromgeführt oder wärmegeführt) und Anlagentyp können unterschiedliche Allokationsverfahren sinnvoll sein (vgl. [Mauch et al., 2010] S. 14).

Für die Allokation der Emissionen bieten sich nachfolgende Verfahren an.

#### **Alles auf Strom**

Die einfachste Methode besteht in der Zuweisung der vollständigen CO<sub>2</sub>-Emissionen zu dem Produkt der primären Betriebsweise. Bei stromgeführten Anlagen wäre die Wärmeproduktion damit CO<sub>2</sub>-frei und würde vollständig als *Abfallprodukt* der Stromerzeugung betrachtet werden. Diese Berechnungsmethode ist in der Regel nicht zielführend, da KWK-Anlagen meist einen geringeren elektrischen Wirkungsgrad aufweisen, als für die alleinige Stromerzeugung ausgelegte Anlagen. Bei stromgeführten Motor-BHKW und Gasturbinen-HKW, die keinen Wirkungsgradverlust durch die Wärmeerzeugung aufweisen, ist diese Betrachtungsweise dennoch möglich.

Heizsystem	Spezifische CO <sub>2</sub> -Emissionen [gCO <sub>2</sub> / kWh <sub>th</sub> ]
Heizöl	366
Heizöl Brennwert	318
Erdgas	263
Erdgas-Brennwert	227
Elektro-mix	569
Elektro-WP-Luft (Strom-Mix)	173
Elektro-WP-Wasser (Strom-Mix)	146
Fernwärme-Mix-DE	234
Erdgas-Mini-BHKW	156
Holz-Pellet-Heizung	25
Nahwärme-Biogas-Mix-BHKW	68
Fernwärme-Holz-Wald-Hackschnitzel-HKW	64
Geothermie-HW	20

**Tabelle 3.9** Spezifische CO<sub>2</sub>-Emissionen (inkl. Vorketten) ausgewählter Heizungssysteme in Deutschland 2010 (Quelle: Gemis 4.8, vgl. [IINAS, 2013])

### Wirkungsgradmethode / IEA-Methode

Die Wirkungsgradmethode teilt die Gesamtemissionen auf die Produkte Strom und Wärme gemäß dem Verhältnis der Einzelwirkungsgrade zum Gesamtwirkungsgrad auf (vgl. [Fritsche und Rausch, 2008] S. 8, [Mauch et al., 2010] S. 12):

$$CO_{2,th} = \frac{CO_{2,input}}{\eta_{th}} \cdot \frac{\eta_{el}}{\eta_{th} + \eta_{el}} \quad (3.3)$$

Die IEA-Methode<sup>11</sup> funktioniert genau entgegengesetzt zur Wirkungsgradmethode und allokiert die Treibhausgasemissionen gemäß des Brennstoffanteils für das jeweilige Koppelprodukt:

$$CO_{2,th} = \frac{CO_{2,input}}{\eta_{th}} \cdot \frac{\eta_{th}}{\eta_{th} + \eta_{el}} \quad (3.4)$$

Die Wirkungsgradmethode und die IEA-Methode berücksichtigen nicht die höhere thermodynamische Wertigkeit des Produktes Strom (Exergiegehalt<sup>12</sup>) gegenüber der Wärme. Damit werden der Stromproduktion im Vergleich zu der Gutschriften- und der EU-Methode höhere (Wirkungsgradmethode) bzw. niedrigere (IEA-Methode) spezifische CO<sub>2</sub>-Emissionen zugewiesen.

<sup>11</sup> IEA: Internationale Energieagentur (International Energy Agency)

<sup>12</sup> Exergie bezeichnet den Teil der Energie, der theoretisch in jede andere Energieform (z.B. Arbeit) umgewandelt werden kann (vgl. [Konstantin, 2009] S. 199).

### Gutschriftenmethode

Die Gutschriftenmethode weist dem Hauptprodukt (je nach Betriebsweise) zunächst die gesamten Treibhausgasemissionen zu. Es wird angenommen, dass die bei der Produktion des Hauptproduktes anfallende Energiemenge des Nebenproduktes, die gleiche Energiemenge in einer bestehenden Anlage (bzw. Referenzanlage) verdrängt. Die CO<sub>2</sub>-Emissionen dieser verdrängten Energiemenge werden von den Gesamtemissionen als Gutschrift abgezogen.

Für das Hauptprodukt Wärme bedeutet dies:

$$CO_{2,th} = \frac{CO_{2,input}}{\eta_{th}} - CO_{2,el}^{REF} \cdot \frac{\eta_{el}}{\eta_{th}} \quad (3.5)$$

Eine problematische Eigenschaft der Gutschriftenmethode besteht darin, dass je nach Wahl des Referenzsystems negative CO<sub>2</sub>-Emissionen errechnet werden können. Ein weiterer Nachteil des Verfahrens ergibt sich bei Anlagen mit dem Primärprodukt Stromerzeugung, da eine hohe Wärme- und geringe Stromausbeute rechnerisch mit geringen Treibhausgasemissionen einhergeht (vgl. [Fritsche und Rausch, 2008] S. 7).

### EU-Methode

Die EU-Methode<sup>13</sup>, welche in der *Richtlinie 2004/8/EG über die Förderung einer am Nutzwärmebedarf orientierten Kraft-Wärme-Kopplung im Energiebinnenmarkt* definiert ist (vgl. [Europäische Union, 2004], Anhang III), basiert auf der Ermittlung der Primärenergieeinsparungen (PEE) durch Nutzung von KWK. Die Einsparung der Primärenergie wird durch den Vergleich mit einem Referenzsystem jeweils für die Strom- und die Wärmeerzeugung gemäß Gleichung (3.6) errechnet, wobei  $\eta^{KWK}$  die Wirkungsgrade der Anlage und  $\eta^{REF}$  die Wirkungsgrade der Referenzsysteme bezeichnen.

$$PEE = \left( 1 - \frac{1}{\frac{\eta_{th}^{KWK}}{\eta_{th}^{REF}} + \frac{\eta_{el}^{KWK}}{\eta_{el}^{REF}}} \right) \quad (3.6)$$

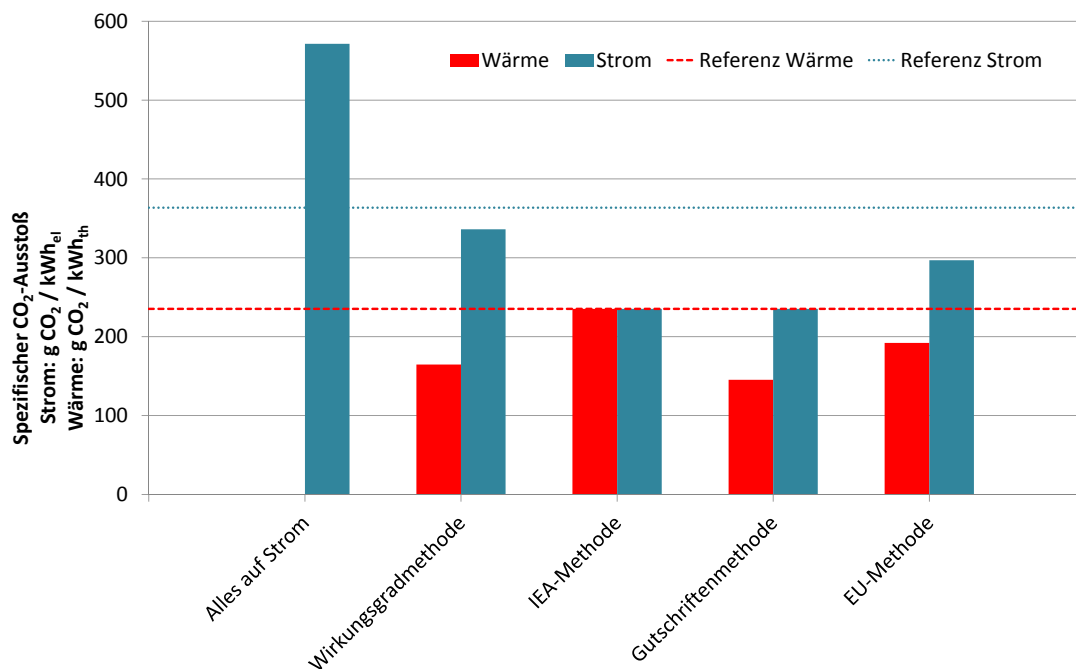
Bei gleichmäßiger Aufteilung der Primärenergieeinsparung auf Strom- und Wärme ergibt sich der spezifische CO<sub>2</sub>-Ausstoß für Wärme als CO<sub>2</sub>-Ausstoß des Referenzsystems abzüglich der Energieeinsparung:

$$CO_{2,th} = \frac{CO_{2,input}}{\eta_{th}^{REF}} \cdot (1 - PEE)$$

<sup>13</sup> Für die EU-Methode findet sich auch der Begriff *Finnische Methode*.

### Beispielrechnung

Die Auswirkungen der verschiedenen Allokationsverfahren können Abbildung 3.15 entnommen werden. Hierbei bestätigt sich, dass die Wirkungsgradmethode für Strom vergleichsweise hohe und für Wärme niedrige spezifische CO<sub>2</sub>-Emissionen ausweist. Die Gutschriftenmethode errechnet für Strom und Wärme erwartungsgemäß die geringsten Emissionen. Die IEA-Methode weist prinzipbedingt beiden Energieträgern die gleichen spezifischen Emissionen zu. Bei den Ergebnissen ist zu beachten, dass die Summe aus den Emissionen für Strom und Wärme bei den verschiedenen Verfahren nicht identisch ist, da die Bezugsgröße abweicht (kWh<sub>el</sub> bzw. kWh<sub>th</sub>).



#### Annahmen:

Brennstoff: Erdgas (200 g CO<sub>2</sub> / kWh)  
 KWK-Anlage:  $\eta_{el}^{KWK} = 35\%$ ,  $\eta_{th}^{KWK} = 50\%$   
 Referenzsystem:  $\eta_{el}^{REF} = 55\%$ ,  $\eta_{th}^{REF} = 85\%$

**Abbildung 3.15** Vergleich verschiedener Verfahren zur Allokation der CO<sub>2</sub>-Emissionen von KWK-Anlagen

## 4 Planungs- und Optimierungsaufgabe

Im folgenden Kapitel wird die in der Einleitung skizzierte Planungs- und Optimierungsaufgabe konkretisiert. Zunächst wird gezeigt, in welche Planungsebene der Entwurf eines optimalen Netzausbaus einzuordnen ist. Im Anschluss werden die Planungsschritte und die Anforderungen an die Optimierung erläutert sowie die notwendigen Datengrundlagen angegeben. Es wird dargestellt, unter welchen Voraussetzungen ein Ausbau der Fernwärme profitabel ist und welche Einflussgrößen die Wirtschaftlichkeit bestimmen. In Abschnitt 4.3 wird hieraus die Optimierungsaufgabe hergeleitet.

### 4.1 Planungsebenen

Unternehmerische Planungsprozesse können nach Wöhe (vgl. [Wöhe und Döring, 2002] S. 105) in die Ebenen der strategischen, taktischen und operativen Planung unterteilt werden. Die Abgrenzungskriterien der jeweiligen Planungsebenen können Tabelle 4.1 entnommen werden, wobei im Rahmen dieser Arbeit hauptsächlich die Merkmale Fristigkeit, Unsicherheitsgrad sowie Kapazitätsveränderung von Bedeutung sind.

Merkmal	Planung		
	strategische	taktische	operative
Fristigkeit	5+ Jahre	2 - 5 Jahre	1 Jahr
Unsicherheitsgrad	extrem hoch	hoch	gering
Datenprognose	vorwiegend qualitativ, grob strukturiert	quantitativ, grob strukturiert	quantitativ, fein strukturiert
Kapazitätsveränderung	ja: Rahmenplanung	ja: Detailplanung	nein
Zuständigkeit	Unternehmensleitung	mittlere Führungsebene	untere Führungsebene

**Tabelle 4.1** Abgrenzung der Planungsebenen  
(Quelle: [Wöhe und Döring, 2002], S. 105)

Bezogen auf die Planung des Auf- bzw. Ausbaus einer Wärmeversorgung können die drei Planungsebenen anhand der Merkmale aus Tabelle 4.1 wie folgt charakterisiert werden.

### **Strategische Planung**

Die strategische Planung umfasst zunächst die generelle Entscheidung, ob ein Aufbau einer Wärmeversorgung geplant ist bzw. eine bestehende Wärmeversorgung erweitert werden soll. Die Frage der zukünftigen Struktur des Strombezugs und der notwendigen Eigenerzeugung ist hiermit eng verknüpft, da ein Großteil der Wärmeerzeugung in der Regel aus KWK-Anlagen bereit gestellt wird. Im Rahmen der strategischen Planung werden darüber hinaus die Größenordnung des angestrebten Wärmeabsatzes und der Erzeugungskapazitäten sowie der Umsetzungszeitraum festgelegt. Gegebenenfalls erfolgt bereits eine geographische Eingrenzung der Planungsaktivitäten, z.B. auf bestimmte Innenstadtbezirke. Der zeitliche Planungshorizont orientiert sich an den Amortisationsdauern und technischen Nutzungsdauern der Hauptkomponenten einer Wärmeversorgung und kann mit ca. 10 - 30 Jahren angenommen werden. Die hohe Unsicherheit der Entscheidungsfindung wird durch externe, nicht beeinflussbare Faktoren, wie die Entwicklung der Energiepreise und des Wärmebedarfs bestimmt. Die Datengrundlage für die strategische Planung umfasst unter anderem Studien zur langfristigen Entwicklung des Energiebedarfs, der Verfügbarkeit von Erzeugungstechnologien und -kapazitäten sowie der Energiepreise.

Die strategische Planung besteht im Wesentlichen aus nachfolgenden Arbeitspaketen:

#### **A. Geographisch**

- Grobe Eingrenzung des Versorgungsgebietes
- Überschlägige Abschätzung der Wärmebedarfsdichte aufgrund der Bebauungsstruktur
- Gegebenenfalls geographische Abgrenzung verfügbarer Wärmeerzeugungsverfahren (Geothermie, Biomasse)

#### **B. Technisch**

- Beurteilung der langfristigen Nutzbarkeit und Verfügbarkeit der jeweiligen Energieträger und Rohstoffe
- Evaluierung möglicher Technologien der Wärmeerzeugung (zentrale Heizkraftwerke, dezentrale BHKW, Nutzung von Biomasse, Geothermie)

#### **C. Wirtschaftlich**

- Abschätzung des Absatzpotentials und Festlegung von groben Vertriebszielen
- Prognose der Energiepreisentwicklung und der Wärmegestehungskosten
- Abschätzung des Kapitalbedarfs für den Netzausbau und Festlegung eines Budgetrahmens

**Taktische Planung**

Die taktische Planung konkretisiert die grundsätzlichen Rahmenvorgaben aus der strategischen Planung. Das Untersuchungsgebiet wird geographisch klar eingegrenzt, z.B. auf bestimmte Ortschaften oder Stadtteile. Auf Basis des angestrebten Wärmeabsatzes und der geographischen Ausdehnung des geplanten Versorgungsgebietes erfolgt die Auswahl der Technologie und der Größe (Leistung) der Erzeugungsanlagen. Sofern der Neubau zusätzlicher Heizkraftwerke in Frage kommt, werden mögliche Standorte evaluiert und festgelegt. Auf Netzebene wird die grundlegende Trassierung bestimmt. Die Leitungsdimensionierung wird zumindest für die Hauptleitungen (Transportleitungen) anhand des Absatzpotentials durchgeführt.

Der Planungshorizont der taktischen Planung umfasst für den Ausbau der Wärmeversorgung ca. 5 - 10 Jahre. Die Unsicherheit der taktischen Planung ergibt sich überwiegend aus der hohen Nachfrageunsicherheit. Sofern sich nur ein geringer Anteil der Kunden für einen Fernwärmeanschluss entscheidet, ist die Wirtschaftlichkeit des Netzausbaus selbst bei einer hohen Wärmebedarfsdichte gefährdet. Weitere Unsicherheitsfaktoren können genehmigungsrechtlicher, politischer (z.B. kurzfristige Änderungen der Förderung von KWK-Anlagen) und wirtschaftlicher (unerwartete Entwicklungen der Energiepreise) Natur sein. Die Datengrundlagen der taktischen Planung werden in den nachfolgenden Abschnitten dieses Kapitels detailliert erläutert.

Folgende Aufgaben fallen in den Bereich der taktischen Planung:

**A. Geographisch**

- Klare Eingrenzung des Versorgungsgebietes
- Detaillierte Ermittlung der Wärmebedarfsdichte
- Identifikation wichtiger Großkunden („Leuchtturmkunden“)
- Festlegung der Haupttrassen und der Standorte von Heizkraftwerken

**B. Technisch**

- Bestimmung der Leistung und Technologie der Erzeugungsanlagen
- Dimensionierung der Hauptleitungen
- Einteilung des Netzausbaus in Bauphasen bzw. Ausbaustufen

**C. Wirtschaftlich**

- Bestimmung des realistischen Absatzpotentials und Festlegung von Vertriebszielen
- Ermittlung der Wärmegestehungskosten und Festlegung des Wärmetarifs
- Budgetplanung (z.B. 5-Jahresplan)
- Berechnung der Wirtschaftlichkeit des Netzausbaus

**Operative Planung**

Die operative Planung besteht in der konkreten Umsetzung der Vorgaben aus den vorgelagerten Planungsebenen. Die in der taktischen Planung festgelegten Trassen und Bauphasen müssen in konkrete Baumaßnahmen für das jeweils nächste Jahr umgesetzt werden. Hierbei sind Baugenehmigungen einzuholen und es erfolgt ein Abgleich mit geplanten Baumaßnahmen der anderen Netzsparten (Gas und Wasser). Die Dimensionierung der zu verlegenden Leitungen ist zu überprüfen bzw. festzulegen. Zusätzlich sind die Hausanschlüsse der Kunden zu planen. Die Kosten für die einzelnen Baumaßnahmen sind detailliert zu ermitteln. Hinsichtlich der Erzeugungsanlagen besteht die operative Planung in der Umsetzung des Anlagenbaus und der Planung von Wartungsmaßnahmen.

Die Unsicherheit in der operativen Planung ist gering und bezieht sich hauptsächlich auf genehmigungsrechtliche Probleme. Die Datengrundlage für die operative Planung entspricht weitgehend der Datengrundlage der taktischen Planung. Zusätzlich werden Baumaßnahmenplanungen der übrigen Netzsparten (Gas, Wasser, gegebenenfalls Strom) und der Stadt hinzugezogen. Darüber hinaus sind die vertriebsseitig akquirierten Wärmelieferungsverträge zur Planung der Kundenanschlüsse zu berücksichtigen.

Im Rahmen der operativen Planung sind hauptsächlich folgende Arbeiten durchzuführen:

**A. Geographisch**

- Detaillierte Anpassung der Trassierung im Rahmen der Umsetzungsplanung
- Abgleich der Baumaßnahmenplanung mit anderen Netzsparten

**B. Technisch**

- Festlegung oder Anpassung der Leitungsdimensionierung
- Auswahl der Rohrwerkstoffe
- Planung der Hausanschlüsse

**C. Wirtschaftlich**

- Umsetzung der Ausbauphasen in einzelne Baumaßnahmen unter Berücksichtigung des Jahresbudgets
- Exakte Kalkulation der Kosten der jeweiligen Baumaßnahmen



## 4.2 Planungsaufgabe

Die im vorangegangenen Abschnitt beschriebenen Planungsebenen dienen der Abgrenzung der hier betrachteten Planungs- und Optimierungsaufgabe. Das in dieser Arbeit zu lösende Problem des optimalen Fernwärmeausbaus beschränkt sich weitgehend auf die Ebene der **taktischen Planung**. Es wird somit angenommen, dass bereits ein potentiell Ausbaugebiet bestimmt wurde und grundsätzliche Entscheidungen und Rahmenbedingungen für den Netzausbau festgelegt sind.

Damit grenzt sich diese Arbeit von anderen Untersuchungen im Bereich der Potentialermittlung für einen Fernwärmeausbau ab, die hauptsächlich der strategischen Planungsebene zuzuordnen sind (siehe hierzu auch Abschnitt 6.3). Die in diesen Arbeiten beschriebenen Methodiken können für vorgelagerte Untersuchungen genutzt werden. Die Umsetzung der so ermittelten Potentiale in konkrete Ausbaupläne kann anschließend mit den in dieser Arbeit beschriebenen Optimierungsverfahren erfolgen.

Die wichtigsten Arbeitsschritte der hier betrachteten taktischen Planung des Fernwärmeausbaus umfassen:

1. Ermittlung des Absatzpotentials und Festlegung des Untersuchungsgebietes
2. Trassierung der Leitungen und Bestimmung der Standorte für (Block-) Heizkraftwerke
3. Technische Auslegung der Heizkraftwerke und Grobdimensionierung der Leitungen
4. Wirtschaftlichkeitsbewertung

### 4.2.1 Ermittlung des Absatzpotentials

#### 4.2.1.1 Bestimmung des Wärmebedarfs

Der erste Schritt der Neu- oder Erweiterungsplanung eines Wärmenetzes besteht in der Ermittlung des Absatzpotentials. Voraussetzung für die realistische Abschätzung des Wärmebedarfs ist ein Wärmekataster<sup>14</sup>, welches für sämtliche Gebäude des Untersuchungsgebietes die Höhe des Wärmebedarfs enthält. Für Gebäude, die mit Erdgas oder Strom beheizt werden, liegen diese Daten bei dem Versorgungsunternehmen in Form der Jahresverbrauchsabrechnung vor. Für die verbleibenden, durch Öl beheizten Gebäude muss für eine Wärmebedarfsschätzung in der Regel auf Sekundärquellen zurückgegriffen werden. Eine mögliche Datenquelle hierfür ist die Schornsteinfegerdatei, welche zu jedem Gebäude

---

<sup>14</sup> Teilweise findet sich auch der Begriff *Wärmeatlas* für das Wärmekataster.

die Leistung des verbauten Kessels enthält, woraus sich ein Jahreswärmebedarf abschätzen lässt. Eine weitere Möglichkeit der Wärmebedarfsschätzung liefern gröbere Verfahren, die anstatt einer Einzelgebäudebetrachtung eine Typisierung der Gebäude vornehmen (z.B. Siedlungstypmethode, vgl. [Blesl, 2002] S. 9 ff.).

Das Wärmekataster sollte für jedes Gebäude den Anschlusswert (in kW) und den Jahresenergiebedarf (in kWh) enthalten. Sofern es nur möglich ist, einen der beiden Werte zu ermitteln, kann anhand typischer Jahresbenutzungstunden (z.B. 1600 h/a) der jeweils fehlende Wert bestimmt werden.

#### 4.2.1.2 Bestimmung des erwarteten Absatzpotentials

Die Wärmebedarfsschätzung liefert zunächst für jedes Gebäude ein theoretisches Absatzpotential aufgrund des ermittelten Wärmebedarfs. Für die Planung relevant ist jedoch das *erwartete Absatzpotential*, welches den Wärmebedarf jedes Gebäudes mit der Wahrscheinlichkeit eines Wechsels zur Fernwärme gewichtet. Je nach Datenlage kann dabei eine allgemeine Wechselwahrscheinlichkeit (z.B. 50 %) angenommen oder gebäudespezifisch anhand nachfolgend aufgeführter Faktoren ermittelt werden. Die Entscheidung der Gebäudeeigentümer für oder gegen einen Fernwärmeanschluss wird vor allem durch das Alter und den Typ der bestehenden Heizung, den Gebäudetyp, die Tarifgestaltung der Fernwärme sowie politische Rahmenbedingungen determiniert.

Das Alter und der Typ der bestehenden Heizanlage haben einen starken Einfluss auf die Wechselbereitschaft eines Verbrauchers. Haushalte mit einem neuen Gas-Brennwertkessel werden nur in Einzelfällen zu einem Umstieg zur Fernwärme bereit sein, während Besitzer eines älteren Ölkessels eine vergleichsweise hohe Wechselbereitschaft aufweisen. Gleichmaßen werden Besitzer denkmalgeschützter Altbauten mit einem hohen spezifischen Wärmebedarf und eingeschränkten Möglichkeiten für eine energetische Sanierung ebenfalls eine überdurchschnittliche Wechselbereitschaft aufweisen.

Neben den gebäudespezifischen Faktoren ist eine für die Gebäudeeigentümer attraktive Tarifgestaltung selbstverständlich Grundvoraussetzung für die Gewinnung neuer Fernwärmekunden. Darüber hinaus können normative Rahmenbedingungen ebenfalls eine Rolle bei der Bestimmung des Wechselpotentials spielen. So gilt z.B. gemäß §7 EEWärmeG durch Kraft-Wärme-Kopplung erzeugte Nah- oder Fernwärme als Ersatzmaßnahme zur Nutzung erneuerbarer Energien in der Wärmeerzeugung. Für Gebäudeeigentümer, die nach dem EEWärmeG verpflichtet sind, erneuerbare Energieträger in der Wärmeversorgung zu nutzen, kann ein Fernwärmeanschluss eine kostengünstige Alternative darstellen.

#### 4.2.1.3 Ermittlung der Wärmebedarfsdichte

Entscheidend für die Wirtschaftlichkeit des Wärmenetzausbaus ist die Wärmebedarfsdichte. Die Wärmebedarfsdichte gibt an, welcher Wärmebedarf je Flächeneinheit als Absatzpotential zur Verfügung steht. Die Wärmebedarfsdichte kann entweder auf den Anschlusswert [ $\text{kW} / \text{km}^2$ ] oder den Energiebedarf [ $\text{kWh} / \text{km}^2$ ] bezogen werden. Für eine erste Abschätzung der Eignung des Untersuchungsgebietes für die Erschließung durch ein Wärmenetz ist die flächenbezogene Wärmebedarfsdichte ausreichend. In der Regel wird hierzu eine Rasterung des Untersuchungsgebietes in einheitliche Zellen (Flächen) vorgenommen (z.B.  $100 \text{ m}^2$ ), wobei jeder Zelle des Rasters der Wärmebedarf aller innerhalb dieser Fläche liegenden Gebäude zugewiesen wird. Ergebnis dieser Flächeneinteilung ist eine digitale Rasterkarte, die durch Clusterung benachbarter Zellen mit ähnlicher Wärmebedarfsdichte eine Vorauswahl wirtschaftlich durch Wärmenetze zu erschließender Gebiete ermöglicht (vgl. [Eikmeier et al., 2011] S. 106 ff., [Erb und Gutzwiller, 2011] S. 11ff.).

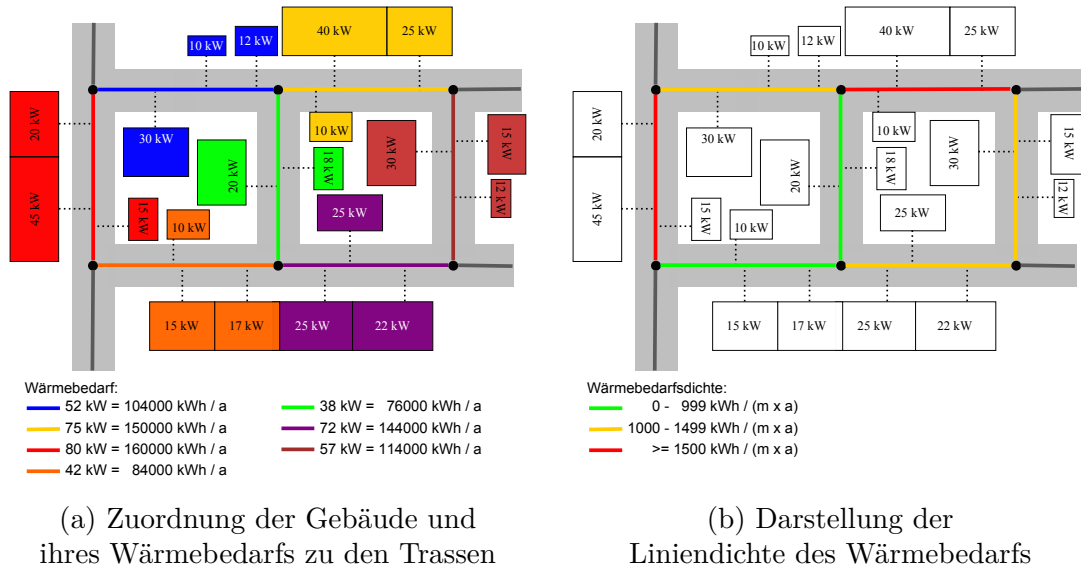
#### Trassenmodell

Die flächenbezogene Wärmebedarfsdichte kommt vor allem bei der Erstbeurteilung großer Untersuchungsgebiete zum Einsatz, da neben dem gebäudespezifischen Wärmebedarf keine weiteren Daten benötigt werden und die Datenaufbereitung sich daher vergleichsweise einfach gestaltet. Eine detailliertere Wirtschaftlichkeitsbewertung erfordert jedoch eine Berechnung der Liniendichte des Wärmebedarfs (vgl. [Eikmeier et al., 2011] S. 96 f, [Konstantin, 2009] S. 434). Diese gibt den Anschlusswert (oder Energiebedarf) je Meter Trassenlänge an und berücksichtigt damit auch den Verlauf der Straßen und die Aufteilung des Wärmebedarfs innerhalb einer Rasterzelle.

Für eine Berechnung der Liniendichte des Wärmebedarfs und um eine aussagekräftige Netzplanung zu ermöglichen, muss die Einzelgebäudebetrachtung in ein Trassenmodell überführt werden<sup>15</sup>. Ziel ist es, für jeden Straßenabschnitt (Trasse) den zugehörigen Wärmebedarf zu hinterlegen. Hierzu werden aus dem digitalen Straßenkataster die Straßenmittellinien extrahiert und in Form von Knoten und Kanten in einen Graphen umgewandelt. Die Kanten entsprechen den Trassen (Straßenabschnitte) und bilden die Grundlage für den Verlauf möglicher Fernwärmeleitungen.

Jedes Gebäude wird der nächstliegenden Trasse zugewiesen. Anschließend wird durch Summierung des Wärmebedarfs bzw. erwarteten Absatzpotentials der Gebäude entlang einer Trasse das Absatzpotential der Trasse ermittelt. Abbildung 4.1 (a) veranschaulicht

<sup>15</sup> Zur Erstellung eines GIS-basierten (Geographisches Informationssystem) Trassen- bzw. Netzmodells gibt das DVGW-Regelwerk Hinweise (vgl. [DVGW, 2006b], [DVGW, 2008]).



**Abbildung 4.1** Erstellung eines Trassenmodells aus den Straßen- und Gebäudedaten (Annahmen: 2000 Benutzungsstunden; Trassenlänge einheitlich 100 m)

diesen Arbeitsschritt. Wird der Wärmebedarf einer Trasse in Relation zu ihrer Länge gesetzt, ergibt sich die Liniendichte des Wärmebedarfs, welche in Abbildung 4.1 (b) dargestellt ist.

Für die Wirtschaftlichkeitsberechnung und die taktische Netzplanung ist die Trasse als kleinste Betrachtungseinheit ausreichend und dient als Basis aller weiterführenden Berechnungen. Ein höherer Detaillierungsgrad durch Einbeziehung der Hausanschlussleitungen von der Trasse (Versorgungsleitung) zu den jeweiligen Gebäude ist nicht notwendig. Eine Berücksichtigung einzelner Hausanschlüsse erfolgt erst im Rahmen der operativen Planung bei der hydraulischen Auslegung der Leitungen.

Da diese Arbeit den Bereich der taktischen Netzplanung abdeckt und daher auf einem Trassenmodell und dem Konzept der Liniendichte des Wärmebedarfs aufbaut, wird nachfolgend der Begriff Wärmebedarfsdichte einheitlich für die Liniendichte des Wärmebedarfs verwendet. Sofern die flächenbezogene Wärmebedarfsdichte gemeint ist, wird gesondert darauf hingewiesen.

## 4.2.2 Trassierung

Die Trassierung des Netzes orientiert sich an dem erstellten Trassenmodell, welches den Verlauf der Straßen abbildet. Dieser Planungsschritt umfasst hauptsächlich die Auswahl zu verrohrender Trassenabschnitte und die Einbindung in eine bestehende Fernwärmeversorgung oder an ein Heizkraftwerk.

Die Bestimmung zukünftig durch Fernwärme zu erschließender Trassen richtet sich primär nach wirtschaftlichen und technischen Kriterien. Aus betriebswirtschaftlicher Sicht sind vor allem Straßen mit einer möglichst hohen Wärmebedarfsdichte zu erschließen. Die Hauptkriterien für die Wirtschaftlichkeit einzelner Trassen werden in Abschnitt 4.2.4 hergeleitet.

Technische Randbedingungen spielen bei der Trassierung nur eine untergeordnete Rolle, sind jedoch ebenfalls zu berücksichtigen. So sind beispielsweise Leitungen über Brückenbauwerke oder unter Bahntrassen nach Möglichkeit zu vermeiden, da diese einerseits höhere Verlegekosten aufweisen und andererseits anfälliger für Schäden sind (z.B. durch Erschütterungen). Darüber hinaus können aus hydraulischen oder versorgungstechnischen Gründen Ringschlüsse oder andere Maßnahmen erforderlich sein, die bereits bei der Trassierung zu beachten sind. Der überwiegende Teil der technischen Restriktionen kann jedoch erst im Rahmen der operativen Planung bei der hydraulischen Auslegung der Netze geprüft und gegebenenfalls korrigiert werden.

### **4.2.3 Technische Auslegung von Fernwärmenetzen**

Die Auslegung der Erzeugungsanlagen und die Dimensionierung von Fernwärmeleitungen kann sowohl der taktischen als auch der operativen Planung zugeordnet werden. Zumindest für die wichtigsten Erzeugungseinheiten und Hauptleitungen bildet die Auslegung jedoch eine langfristige Begrenzung der Erzeugungs- bzw. Übertragungskapazität, weshalb diese nur begrenzt im Rahmen der operativen Planung dimensioniert werden können.

Die Auslegung technischer Anlagen muss sowohl nach betriebswirtschaftlichen als auch nach technischen Kriterien erfolgen.

#### **4.2.3.1 Dimensionierung von Leitungen**

Die Dimensionierung von Leitungen wurde in Abschnitt 3.2.1 beschrieben. Hauptkriterien für die Dimensionierung einer Leitung sind eine ausreichende Druckhaltung und die Begrenzung der Fließgeschwindigkeiten. Darüber hinaus sind die Pumpstromkosten zu beachten und eine Auskühlung des Netzes durch einen zu geringen Durchfluss ist zu verhindern.

Auch wenn diese Ziele teilweise gegenläufig sind, kann vereinfachend angenommen werden, dass die Gesamtkosten einer Leitung mit der benötigten Übertragungskapazität steigen.

#### 4.2.3.2 Dimensionierung von KWK-Anlagen

Eine sorgfältige Auswahl des Anlagentyps und Dimensionierung einer KWK-Anlage ist Grundvoraussetzung für einen wirtschaftlichen Betrieb. Die Anlagenauswahl richtet sich nach vielen Faktoren, wobei der Leistungsbedarf, die erwarteten Benutzungsstunden, die verfügbaren Brennstoffe und deren Preisentwicklung sowie die Frage der Betriebsart (stromgeführt oder wärmegeführt) maßgeblich sind.

In Anlehnung an Schaumman (vgl. [Schaumann und Schmitz, 2010] S. 30) sind nachfolgende Arbeitsschritte bei der Auslegung von KWK-Anlagen notwendig:

1. Auswahl der einsetzbaren KWK-Anlagentypen anhand der verfügbaren Brennstoffe und sonstiger Rahmenbedingungen
2. Festlegung der Betriebsart (stromgeführt oder wärmegeführt)
3. Leistungsauslegung der Gesamtanlage und der einzelnen Aggregate
4. Festlegung des Mengengerüsts und Berechnung der Investitionen
5. Berechnung der Brennstoff- und Betriebskosten
6. Ökonomische und ökologische Bewertung

##### Auswahl der einsetzbaren Anlagentypen

Die Auswahl der einsetzbaren Anlagentypen hängt hauptsächlich von der Verfügbarkeit der Brennstoffe (Erdgasnetz, Biogaseinspeisung, Biomasse) und dem Leistungsbedarf ab. Im Leistungsbereich von wenigen  $MW_{el}$  werden hauptsächlich Motor-BHKW oder kleine Holzhackschnitzel-BHKW in Frage kommen. Für die zentrale Versorgung großer Fernwärmenetze hingegen beschränkt sich die Auswahl überwiegend auf Gasturbinen-HKW, Kohle- oder Müll-befeuerte Dampf-HKW sowie GuD-Anlagen.

##### Festlegung der Betriebsart

Bei einer stromgeführten Betriebsart (s. Abschnitt 3.1.3) wird die Anlage primär nach dem elektrischen Leistungsbedarf ausgelegt. Hierbei sollte dennoch angestrebt werden, den thermischen Leistungsbedarf nicht zu überschreiten, da die Wärme andernfalls nicht abgesetzt werden kann. Tendenziell bieten sich Anlagen mit einem besonders hohen elektrischen Wirkungsgrad an. Im kleineren Leistungsbereich sind dies Motor-BHKW-Module mit einer hohen Stromkennzahl. Im großen Leistungsbereich zentraler Erzeugungseinheiten bieten sich GuD-Anlagen mit einem elektrischen Wirkungsgrad von bis zu 60 % an. Bei der wärmegeführten Betriebsweise orientiert sich die Auswahl und Fahrweise der Anlagenmodule an dem thermischen Leistungsbedarf. Je nach Anlagengröße, Einsatzzweck und Stromvergütung können auch Anlagen mit einer geringeren Stromkennzahl wirtschaftlich sein, wenn diese entsprechend geringe Investitionskosten aufweisen.

### Leistungsauslegung

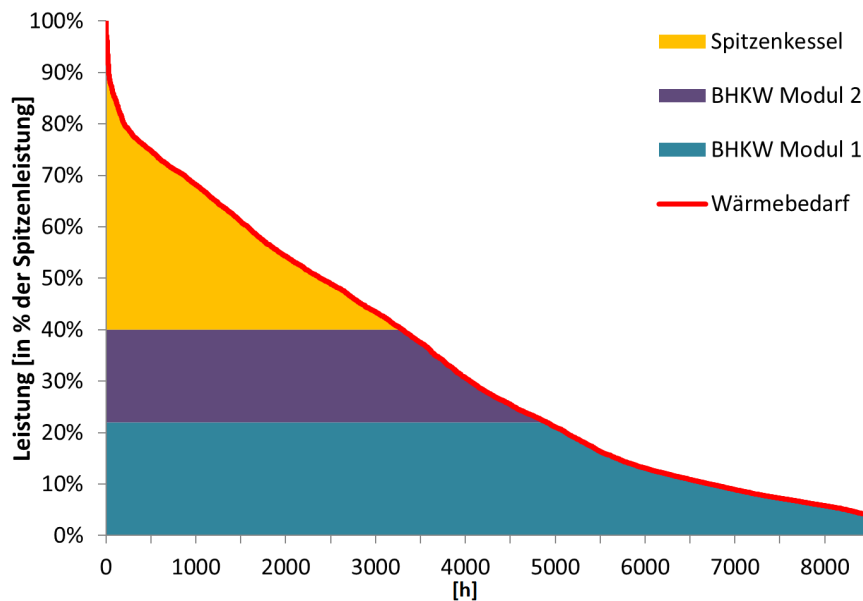
Die Leistung der Gesamtanlage richtet sich bei wärmegeführter Fahrweise nach dem thermischen Leistungsbedarf, eventuell zuzüglich einer Reserveleistung. Bei großen Fernwärmenetzen mit mehreren Einspeisungen ist auf eine ausreichende Gesamtleistungsbereitstellung zu achten.

Entscheidend bei der Dimensionierung einer KWK-Anlage ist die Auslegung der einzelnen Aggregate. Die (thermische) Leistung eines Heizkraftwerks wird in der Regel nur zu einem Teil durch die KWK-Anlage gedeckt. Der verbleibende Leistungsbedarf wird durch einen Spitzenlastkessel bereitgestellt. Hierbei sind zwei gegenläufige Kostenfaktoren zu betrachten. KWK-Anlagen weisen hohe spezifische Investitionskosten auf, der Arbeitspreis für die Bereitstellung der Wärme ist aufgrund der Erlöse aus dem Stromverkauf jedoch vergleichsweise gering. Reine Heizkessel hingegen weisen geringe Investitionskosten auf, der Arbeitspreis ist jedoch höher, da – trotz höherem thermischen Wirkungsgrad – die Brennstoffkosten nicht durch Erlöse aus dem Stromverkauf reduziert werden können (vgl. [Schaumann und Schmitz, 2010] S. 34 ff.).

Je nach Auslastungsgrad der Anlage, welcher in Vollbenutzungsstunden (Verhältnis zwischen Jahresarbeit und Leistungsbedarf) ausgedrückt wird, ist eine der beiden Lösungen günstiger. Generell gilt, dass bei einer hohen Vollbenutzungsstundenzahl KWK-Anlagen günstiger sind, bei niedrigen Benutzungsstunden reine Kesselanlagen. Die Dimensionierung des KWK-Moduls und des Spitzenkessels richtet sich daher nach der Jahresdauerlinie des thermischen Leistungsbedarfs. Als Faustregel für den wirtschaftlichen Betrieb von BHKW-Anlagen gilt, dass die KWK-Module auf mindestens 3500 Benutzungsstunden dimensioniert werden, was bei typischen Jahresdauerlinien einem Anteil an der Spitzenlastdeckung von unter 50 % bedeutet (vgl. [Zahoransky, 2013] S. 253).

Darüber hinaus ist zu beachten, dass die Anlage möglichst im optimalen Wirkungsgrad läuft und nicht im ineffizienten Teillastbetrieb. Daher wird die KWK-Erzeugungseinheit meist auf mehrere Module aufgeteilt, so dass zu Zeiten geringerer Wärmenachfrage einzelne Module komplett abgeschaltet werden können und die verbleibenden Module möglichst annähernd im Volllastbetrieb laufen können. Weitere Kriterien bei der Festlegung der Anzahl der Aggregate sind die Absicherung der Leistung bei Ausfall eines Aggregats sowie der Raumbedarf (vgl. [Schaumann und Schmitz, 2010] S. 36).

Abbildung 4.2 zeigt beispielhaft die Dimensionierung eines BHKW für ein Nahwärmenetz und die Fahrweise in Abhängigkeit der Jahresdauerlinie des Wärmebedarfs. Aus der Grafik ist ersichtlich, dass die beiden BHKW-Module lediglich 40 % der Spitzenleistung abdecken, jedoch insgesamt ca. 75 % der Energie erzeugen.



**Abbildung 4.2** BHKW-Dimensionierung und -Fahrweise in Abhängigkeit der Jahresdauerlinie

### Berechnung der Brennstoff- und Betriebskosten

Der Brennstoffbedarf ergibt sich aus dem Anlagenwirkungsgrad und der Fahrweise. Bei einer ersten Grobdimensionierung der Anlage ist es ausreichend, mit einem mittleren Anlagenwirkungsgrad zu rechnen. Bei einer detaillierten Einzelbetrachtung muss auch das Teillastverhalten der einzelnen Module berücksichtigt werden, indem die Fahrweise der Anlage anhand der Jahresdauerlinie simuliert wird. Für die Betriebskosten (einschließlich der Kosten für Hilfsstoffe) wird im Rahmen dieser Arbeit mit pauschalierten Sätzen gearbeitet. Betriebskostensätze werden pro Jahr in Prozent der Investitionskosten angenommen, Kosten für Hilfs- und Betriebsmittel in € / kWh (s. Abschnitt 4.2.4.2).

### 4.2.4 Wirtschaftlichkeitsbewertung

Nach der Bestimmung des Absatzpotentials und der Wärmebedarfsdichten sind die wirtschaftlichen Rahmenbedingungen festzulegen. Anhand der Erlös- und Kostendaten ist eine übergeordnete Wirtschaftlichkeitsberechnung durchzuführen, wodurch das Untersuchungsgebiet gegebenenfalls auf relevante Gebiete eingeschränkt werden kann und erste Aussagen zum Ausbaupotential getroffen werden können. Darüber hinaus kann so vor Durchführung einer aufwendigen Ausbauplanung der Einfluss der jeweiligen Parameter auf die Profitabilität geprüft werden.

Die Wirtschaftlichkeit der Fernwärme wird hauptsächlich durch drei Faktoren dominiert. Den Fernwärmetarif, welcher die Erlöse bestimmt. Die Wärmegestehungskosten, welche



dem Großteil der variablen Kosten entsprechen. Sowie den hohen Investitionskosten des Kraftwerksbaus und der Leitungsverlegung, welche den überwiegenden Anteil der Fixkosten verursachen und sich nur bei entsprechend langen Nutzungsdauern amortisieren können.

#### 4.2.4.1 Erlösdaten

##### Wärmeverkauf

Erlöse werden durch den Verkauf der Wärme generiert. Hierbei wird zwischen einem Leistungspreis (Grundgebühr abhängig vom Anschlusswert) und einem Arbeitspreis (Preis für die verbrauchte Energie) unterschieden. Für die Wirtschaftlichkeitsberechnung kann jedoch vereinfachend ein Mischpreis verwendet werden, der dem Arbeitspreis zuzüglich eines Aufschlags für den Leistungspreis entspricht. Der bundesweite Mittelwert dieses Mischpreises betrug für ein Mehrfamilienhaus mit einem Leistungsbedarf von 160 kW und 1800 Benutzungsstunden 76,48 € / MWh, mit einem Arbeitspreisanteil von ca. 79 % (vgl. [AGFW, 2012a]).

##### Stromverkauf

Bei der Wärmeerzeugung durch Kraft-Wärme-Kopplung werden zusätzlich Erlöse aus dem Stromverkauf generiert. Die Großhandelspreise für Strom unterliegen starken Schwankungen und hängen von einer Vielzahl von Faktoren wie Wetter, Jahreszeit, Wochentag und Uhrzeit ab. Als Näherungswert kann der Börsenpreis für *Baseload*-Lieferungen<sup>16</sup> für das Folgejahr dienen, welcher seit 2010 bei ca. 50 - 60 € / MWh liegt (vgl. [Hermann et al., 2012] S. 18 f.).

##### Staatliche Förderung

Zur Senkung der Treibhausgasemissionen wird die Nutzung von KWK staatlich gefördert. Die wichtigsten Förderinstrumente sind die finanzielle Unterstützung beim Bau von Wärmenetzen und KWK-Anlagen sowie eine erhöhte Vergütung für Strom, der durch KWK erzeugt wurde. Das *Kraft-Wärme-Kopplungs-Gesetz* (KWKG) von 2012 bildet die rechtliche Grundlage für die Förderung von KWK-Strom und enthält nachfolgende Förderungsmöglichkeiten:

---

<sup>16</sup> Baseload-Lieferungen dienen der gleichmäßigen Deckung der Grundlast. Im Gegensatz dazu dienen *Peak-Load*-Lieferungen der Abdeckung kurzer Lastspitzen.

### – Einspeisevergütung

KWK-Anlagenbetreiber erhalten Zuschläge für den Strom, der in hocheffizienten<sup>17</sup> KWK-Anlagen erzeugt wurde (sowohl für selbstgenutzten als auch in das Stromnetz eingespeisten Strom). Die Gesamtvergütung, welche der KWK-Anlagenbetreiber erhält, setzt sich aus der Zuschlagszahlung gemäß KWKG (s. Tabelle 4.2), der Einspeisevergütung sowie den vermiedenen Netznutzungsentgelten vorgelagerter Spannungsebenen zusammen. Die Einspeisevergütung richtet sich entweder nach dem *üblichen Preis*<sup>18</sup> für Grundlaststrom oder kann direkt mit dem Netzbetreiber verhandelt werden. Die Einspeisevergütung ist aufgrund der degressiven Förderung (s. Tabelle 4.2) vor allem für Betreiber kleiner Blockheizkraftwerke interessant.

Leistungsanteil	ct. je kWh <sub>el</sub>
0 - 50 kW	5,41
50 - 250 kW	4,00
250 - 2000 kW	2,40
> 2000 kW	1,80

**Tabelle 4.2** Zuschlagszahlung  
nach §7 KWKG

### – Investitionszuschläge für den Neu- und Ausbau von Wärmenetzen

Neben der Stromerzeugung aus KWK-Anlagen wird der Neu- und Ausbau von Wärmenetzen gefördert. Nach §5a KWKG sind Netzerweiterungen bzw. Neuerschließungen zuschlagsberechtigt, wenn (im Endausbau) mindestens 60 % der eingespeisten Wärme durch KWK erzeugt wird. Für Netzausbauten mit einem mittleren Nenndurchmesser von mehr als 100 mm (DN 100) beträgt der Zuschlag 30 % der Investitionskosten. Bei einem mittleren Nenndurchmesser bis einschließlich DN 100 beläuft sich die Förderung auf 100 € / m und maximal 40 % der Investitionskosten.

#### 4.2.4.2 Kostendaten

##### Investitionskosten

Investitionen fallen für die Verlegung der Fernwärmleitungen und – sofern neue (Block-) Heizkraftwerke errichtet werden müssen – für den Kraftwerksbau an.

<sup>17</sup> Hierunter werden KWK-Anlagen verstanden, die *hocheffizient* gemäß *Richtlinie 2004/8/EG des Europäischen Parlaments und des Rates vom 11. Februar 2004 über die Förderung einer am Nutzwärmebedarf orientierten Kraft-Wärme-Kopplung im Energiebinnenmarkt* sind. Im Wesentlichen besagen diese Vorschriften, dass durch die KWK-Anlage Primärenergieeinsparungen von mehr als 10 % gegenüber der getrennten Erzeugung von Strom und Wärme erreicht werden müssen.

<sup>18</sup> Gemäß §4 Abs. 3 KWKG wird unter dem *üblichen Preis* der durchschnittliche Preis für Grundlaststrom an der Strombörse EEX in Leipzig im jeweils vorangegangenen Quartal verstanden.

Mit Berücksichtigung des Tiefbaus, der Montage und des Materials betragen die Verlegekosten von Fernwärmeleitungen je nach Rohrdurchmesser ca. 600 - 1000 € je laufendem Meter (s. Abschnitt 3.2.1.2).

Die Investitionen für den Bau von Heizkraftwerken hängen von dem Anlagentyp und der Anlagengröße ab. Kostendaten für verschiedene (Block-) Heizkraftwerke können Abschnitt 3.1 entnommen werden. Als grobe Näherung können für die Errichtung eines Erdgas-BHKW mit einer Leistung bis zu 2 MW<sub>el</sub> Investitionen von ca. 500 - 1000 € je kW<sub>el</sub> veranschlagt werden (vgl. [ASUE, 2011b] S. 11). Für den Bau großer Gasturbinen- oder GuD-Heizkraftwerke ist abhängig von der Technologie und der Leistungsklasse ebenfalls mit Investitionen von ca. 500 - 1000 € je kW<sub>el</sub> zu rechnen (s. Abschnitt 3.1; vgl. [Konstantin, 2009] S. 355 f.). Allerdings fällt die Bandbreite hier größer aus, da bei Großanlagen keine Standardpreise verfügbar sind und die Investitionskosten darüber hinaus maßgeblich von dem Gebäude- und Grundstückspreis abhängen.

### **Betriebskosten**

Die Betriebskosten eines Fernwärmenetzes setzen sich hauptsächlich aus den Kostenbestandteilen Personalkosten, Instandhaltungskosten und Pumpstromkosten zusammen. Die Brennstoff- bzw. Wärmegestehungskosten werden nachfolgend gesondert betrachtet. Als Richtwert für die Höhe der Personal- und Instandhaltungskosten können ca. 1 % / a der Investitionskosten angenommen werden (vgl. [Konstantin, 2009] S. 447). Die Pumpstromkosten sind von dem Wärmeabsatz und der Netzdimensionierung abhängig und können daher ebenfalls nur pauschal abgeschätzt werden. Anhaltswerte für den Pumpstromaufwand von ca. 10 - 15 kWh<sub>el</sub> je MWh<sub>th</sub> finden sich in [Konstantin, 2009] (S. 438).

Die Betriebskosten von Heizkraftwerken hängen von dem Anlagentyp ab und können Abschnitt 3.1 entnommen werden.

### **Erzeugungskosten**

Unter Erzeugungskosten werden hier nur die variablen Kosten der Wärmeerzeugung (Brennstoffkosten) verstanden. Leistungsabhängige Kosten werden in den Investitionen und Betriebskosten berücksichtigt. Die Ermittlung der Erzeugungskosten bei KWK-Anlagen hängt maßgeblich von der Kosten- und Erlösaufteilung zwischen den Koppelprodukten Strom und Wärme ab. Für die Kostenaufteilung können das Stromäquivalenzverfahren sowie das Restwertverfahren verwendet werden (vgl. [Konstantin, 2009] S. 376 ff.).<sup>19</sup>

<sup>19</sup> Darüber hinaus kommen noch das exergetische und das kalorische Verfahren zur Anwendung, welche jedoch Angaben über die thermodynamischen Prozesse der KWK-Anlage erfordern und hier daher nicht näher betrachtet werden.

Das Stromäquivalenzverfahren wird in der Regel für große Heizkraftwerke mit Dampfauskopplung verwendet, die primär der Stromerzeugung dienen. Bei Entnahme-Kondensationskraftwerken führt die Wärmeauskopplung zu einem Rückgang des elektrischen Wirkungsgrades, da ein Teil der in dem Dampf enthaltenen Energie nicht mehr zur Stromerzeugung genutzt werden kann. Dieser Wirkungsgradverlust wird durch die Stromverlustkennziffer  $[\text{kWh}_{el} / \text{kWh}_{th}]$  beschrieben, die angibt wie hoch die Stromeinbuße je erzeugter Kilowattstunde Wärme ist. Die Wärmegestehungskosten entsprechen bei diesem Verfahren den spezifischen Stromgestehungskosten multipliziert mit der Stromverlustkennziffer. Für überwiegend wärmegeführte KWK-Anlagen bietet sich das Restwertverfahren an. Dieses basiert auf der Annahme, dass die Wärme nur in Eigenerzeugung bereit gestellt werden kann, während es möglich ist, Strom auch von außen zu beziehen. Die Stromerzeugung wird daher zu Marktpreisen bzw. in Höhe der Einspeisevergütung bewertet. Bei dem Restwertverfahren werden zunächst die Gesamtkosten für die gekoppelte Produktion beider Produkte berechnet und anschließend die Stromvergütung abgezogen. Der verbleibende Betrag entspricht den Wärmeeerzeugungskosten. Dieses Verfahren weist der Wärmeproduktion tendenziell niedrigere Erzeugungskosten zu, da die Stromvergütung vergleichsweise hoch ist. Bei einer hohen Stromkennzahl und niedrigen Brennstoffkosten können die Wärmeeerzeugungskosten negativ sein. Tabelle 4.3 weist die Wärmeeerzeugungskosten nach der Restwertmethode für exemplarische Anlagentypen aus. Da die Wärmeeerzeugungskosten mit der verwendeten Erzeugungstechnologie, der Anlagengröße (Leistungsklasse) und der Anlagenauslastung variieren, sind die Werte in Tabelle 4.3 nur als grobe Richtwerte zu sehen. Gesicherte Erzeugungskosten können nur anlagenspezifisch ermittelt werden.

	<b>Erdgas BHKW</b>	<b>GuD-HKW</b>	<b>Gaskessel</b>
Wirkungsgrad thermisch [%]	55,0	30,0	90,0
Wirkungsgrad elektrisch [%]	35,0	55,0	0,0
Brennstoffkosten [€/MWh <sub>th</sub> ]	54,5	100,0	33,3
Stromvergütung [€/MWh <sub>th</sub> ]	31,8	91,7	0,0
<b>Wärmeeerzeugungskosten [€/MWh<sub>th</sub>]</b>	<b>22,7</b>	<b>8,3</b>	<b>33,3</b>

**Annahmen:**<sup>20</sup> Brennstoffpreis Erdgas: 30 € / MWh;  
 Stromvergütung: 50 € / MWh<sub>el</sub>; zum Vergleich: Gaskessel

**Tabelle 4.3** Richtwerte für die Erzeugungskosten von Heizkraftwerken nach der Restwertmethode

<sup>20</sup> Der Strom- und Erdgaspreis wurde in Anlehnung an [Hermann et al., 2012] S. 18 angesetzt.

### Netzverluste

Bei der Kalkulation der Erzeugungs- bzw. Wärmegestehungskosten müssen die Wärmeverluste im Leitungsnetz berücksichtigt werden, da hier thermische Energie, die zuvor produziert wurde, verloren geht und nicht vergütet wird (s. Abschnitt 3.2.1.3). Die Berücksichtigung der Netzverluste kann pauschal mit 10 - 15% angenommen werden.

### Wärmegestehungskosten

Für eine Vereinfachung der Wirtschaftlichkeitsberechnung werden alle variablen (mengengebundenen) Kosten der Wärmebereitstellung zu Wärmegestehungskosten  $c^{GEN}$  zusammengefasst. Diese ergeben sich als Summe aus Brennstoffkosten  $c^{BR}$ , CO<sub>2</sub>-Abgaben  $c^{CO_2}$  und den variablen Betriebskosten  $c^{BE}$  (Pumpstromkosten, Hilfs- und Betriebsstoffe), abzüglich der Stromgutschrift  $r^{EL}$  bei KWK-Anlagen. Die Netzverluste  $NV$  (in %) werden ebenfalls berücksichtigt.

$$c^{GEN} = \frac{c^{BR} + c^{BE} + c^{CO_2} - r^{EL}}{1 - NV} \quad (4.1)$$

### Kosten für CO<sub>2</sub>-Emissionen

Gemäß der *Richtlinie 2003/87/EG des Europäischen Parlaments und des Rates über ein System für den Handel mit Treibhausgasemissionszertifikaten* sind die Betreiber energieintensiver Anlagen verpflichtet, ihren CO<sub>2</sub>-Ausstoß über Emissionszertifikate abzudecken. Nach Anhang I der Richtlinie fallen im Bereich der Energieumwandlung alle Anlagen ab einer Feuerungsleistung von 20 MW unter den Emissionshandel.

Der EU-Emissionshandel funktioniert nach dem sogenannten *Cap-and-Trade* Ansatz. Die Staaten legen hierbei eine zulässige Gesamtemissionsmenge (*Cap*) fest und teilen diese anschließend nach bestimmten Verteilungskriterien an die Emittenten auf (vgl. [Lucht und Spangardt, 2005] S. 65ff.). Für Deutschland betrug das zulässige CO<sub>2</sub>-Budget für den Sektor Energiewirtschaft und Industrie in der Periode 2008 - 2012 517,5 Mio. t CO<sub>2</sub>/a (vgl. [BMU, 2006] S. 47). KWK-Anlagen werden bei der Zuteilung bevorzugt behandelt und erhalten entsprechend höhere Emissionszertifikate (vgl. [BMU, 2006] S. 37 f.).

Durch die Möglichkeit die zugeteilten Zertifikate zu handeln, sollen Anreize für eine effiziente Nutzung der eingesetzten Primärenergie geschaffen werden. Emittenten, die aufgrund eines geringeren CO<sub>2</sub>-Ausstoßes überschüssige Zertifikate besitzen, können diese an Unternehmen mit höheren CO<sub>2</sub>-Emissionen verkaufen. CO<sub>2</sub>-Zertifikate können an der Energiebörse EEX in Leipzig gehandelt werden, wobei der Preis für das Emissionsrecht von einer Tonne CO<sub>2</sub> seit 2011 von ca. 15 - 25 € / t auf unter 10 € / t gefallen ist (vgl. [Hermann et al., 2012] S. 18f).

Für Betreiber kleinerer Anlagen (unterhalb 20 MW) fallen demnach keine Kosten für die Emission von CO<sub>2</sub> an. Für Betreiber größerer Anlagen kann ein Preis von ca. 10 € / t angesetzt werden.

### **Kapitalkosten und Betrachtungszeitraum**

Für die Bewertung der Rentabilität einer Investitionsentscheidung ist die Wahl geeigneter Kapitalkosten entscheidend. Je nachdem, ob die Investition durch Eigen- oder Fremdkapital finanziert wird, sind unterschiedliche Diskontierungssätze zu verwenden. In der Praxis ist in der Regel eine Mischfinanzierung von Eigen- und Fremdkapital anzutreffen, als Diskontierungszinssatz kommt daher der durchschnittliche Kapitalkostensatz WACC (Weighted average cost of capital, vgl. z.B. [Trautmann, 2006] S. 217 ff.) zum Einsatz. Unter Berücksichtigung steuerlicher Effekte ist ein angepasster Kapitalkostensatz zu wählen, diese werden hier aus Vereinfachungsgründen jedoch nicht betrachtet.

Die hohen Investitionen für die Leitungsverlegung und gegebenenfalls für den Bau von Heizkraftwerken amortisieren sich in der Regel auch in Gebieten mit einer hohen Wärmebedarfsdichte nur langsam. Für die Wirtschaftlichkeitsbewertung sollte daher ein ausreichend langer Zeitraum gewählt werden. Fernwärmeleitungen sind gemäß der AfA-Tabelle für die Energie- und Wasserversorgung (Fassung vom 24.01.1995) über 20 Jahre abzuschreiben. Die Abschreibungszeiträume für Komponenten von Heizkraftwerken liegen überwiegend bei 15 - 50 Jahren. Als einheitlicher Betrachtungszeitraum bietet sich daher eine Dauer von 20 - 30 Jahren an.

#### **4.2.4.3 Methodik der Wirtschaftlichkeitsberechnung**

Unter der Annahme sicherer Zahlungsströme kann die Vorteilhaftigkeit einer Investitionsentscheidung anhand des Kapitalwerts (*Net Present Value*, NPV) getroffen werden (vgl. [Trautmann, 2006] S. 8 ff., S. 41 ff.). Entgegen dieser Annahme herrscht bei dem Ausbau von Wärmenetzen Unsicherheit zum einen bezüglich der zukünftigen Erlöse, da die Anzahl der Kunden, welche sich für einen Fernwärmeanschluss entscheiden, unbekannt ist. Zum anderen ist die Preisentwicklung auf den Energiemärkten nur schwer vorhersehbar, wodurch auch die zukünftigen Erzeugungskosten mit hoher Unsicherheit behaftet sind. Die Bewertung und Methodik von Investitionsentscheidungen unter Unsicherheit soll jedoch nicht Gegenstand dieser Arbeit sein, daher wird vereinfachend angenommen, dass die Zahlungsströme sicher sind.

Die Bewertung der Wirtschaftlichkeit des Netzausbaus erfolgt somit anhand des Kapitalwerts, welcher der Differenz aus den diskontierten Zahlungsströmen (*Cashflows*,  $CF_t$ ) einer Investition und den Investitionskosten ( $I_0$ ) entspricht:

$$NPV = -I_0 + \sum_{t=1}^T \frac{CF_t}{(1 + \omega)^t} \quad (4.2)$$

Sofern der Kapitalwert positiv ist, also die diskontierten zukünftigen Zahlungsströme die Investitionskosten übersteigen, ist eine Investition positiv zu bewerten.

$d$	[kWh]	Gesamtwärmebedarf
$c^{PIPE}$	[€/m]	Spezifische Verlegekosten für Leitungen
$l$	[m]	Netzlänge
$c_t^{B,PIPE}$	[€/(m · a)]	Spezifische jährliche Betriebskosten für Leitungen
$c^{HKW}$	[€]	Investitionskosten für das Heizkraftwerk
$c_t^{B,HKW}$	[€/a]	Jährliche Betriebskosten für das Heizkraftwerk
$r_t$	[€/kWh]	Spezifischer Erlös für den Wärmeverkauf
$c_t^{GEN}$	[€/kWh]	Spezifische Wärmegestehungskosten
$\omega$	[%/a]	Diskontierungszinssatz (WACC)
$\gamma$	[%]	Anteil Erdgas am Wärmebedarf
$\eta^{GAS}$	[%]	Mittlerer Wirkungsgrad der Erdgasheizungen
$r_t^{GAS}$	[€/kWh]	Spezifische Gasmarge

**Tabelle 4.4** Eingangsgrößen der Wirtschaftlichkeitsberechnung

Zur Berechnung des Kapitalwerts sind zunächst die jährlich wiederkehrenden Zahlungsströme zu bestimmen. Diese setzen sich aus den in Abschnitt 4.2.4.1 und 4.2.4.2 aufgeführten Erlösen und Kosten zusammen. Die verwendeten Symbole sind in Tabelle 4.4 aufgeführt. Der Cashflow ( $CF_t$ ) eines Jahres entspricht folglich den Erlösen des Wärmeverkaufs abzüglich den Wärmegestehungskosten sowie den Betriebskosten für Leitungen und Heizkraftwerke:

$$CF_t = d \cdot (r_t - c_t^{GEN}) - (l \cdot c_t^{B,PIPE} + c_t^{B,HKW}) \quad (4.3)$$

Investitionen fallen für die Verlegung der Leitungen sowie den Bau eines (oder mehrerer) Heizkraftwerks an:

$$I_0 = l \cdot c^{PIPE} + c^{HKW} \quad (4.4)$$

Der Kapitalwert des Neubaus eines Netzes ergibt sich damit als:

$$NPV = -(l \cdot c^{PIPE} + c^{HKW}) + \sum_{t=1}^T \frac{d \cdot (r_t - c_t^{GEN}) - (l \cdot c_t^{B,PIPE} + c_t^{B,HKW})}{(1 + \omega)^t} \quad (4.5)$$

Sofern ein bestehendes Netz erweitert werden soll und kein neues Heizkraftwerk errichtet werden muss, reduziert sich (4.5) unter der Annahme, dass die Netzerweiterung keinen Einfluss auf die Betriebskosten des Heizkraftwerks hat, zu Gleichung (4.6):

$$NPV = -l \cdot c^{PIPE} + \sum_{t=1}^T \frac{d \cdot (r_t - c_t^{GEN}) - l \cdot c_t^{B,PIPE}}{(1 + \omega)^t} \quad (4.6)$$

Die Gleichungen (4.5) bzw. (4.6) ermöglichen damit eine einfache Bewertung der Wirtschaftlichkeit des Neu- und Ausbaus von Wärmenetzen. Prinzipiell kann das Verfahren zur Bewertung einer Einzelmaßnahme (Erschließung eines Trassenabschnitts) oder einer Gesamtmaßnahme (Neubau eines Netzes, großflächige Netzerweiterung, etc.) genutzt werden.

Wie bereits in Abschnitt 4.2.1.3 dargestellt, ist – bei gegebenen Kosten- und Erlösparametern – die Wärmebedarfsdichte (in kWh / m) ausschlaggebend für die Profitabilität einer Netzerschließung. Da die Investitionskosten linear von der Trassenlänge abhängen, kann aus Gleichung (4.6) eine minimale Wärmebedarfsdichte für eine wirtschaftliche Erschließung ( $NPV \geq 0$ ) ermittelt werden. Ein positiver  $NPV$  wird erreicht wenn gilt:

$$\sum_{t=1}^T \frac{d \cdot (r_t - c_t^{GEN}) - l \cdot c_t^{B,PIPE}}{(1 + \omega)^t} \geq l \cdot c^{PIPE} \quad (4.7)$$

Durch Division mit der Trassenlänge erhält man:

$$\sum_{t=1}^T \frac{\frac{d}{l} \cdot (r_t - c_t^{GEN}) - c_t^{B,PIPE}}{(1 + \omega)^t} \geq c^{PIPE} \quad (4.8)$$

Auflösen von (4.8) nach der Wärmebedarfsdichte  $\frac{d}{l}$  ergibt:

$$\frac{d}{l} \geq \frac{c^{PIPE} + \sum_{t=1}^T \frac{c_t^{B,PIPE}}{(1+\omega)^t}}{\sum_{t=1}^T \frac{r_t - c_t^{GEN}}{(1+\omega)^t}} \quad (4.9)$$

Die Bedingung (4.9) erlaubt damit durch Einsetzen der entsprechenden Erlös- und Kostensätze die Rentabilität der Erschließung einer Trasse aus der Wärmebedarfsdichte abzuleiten.

#### 4.2.4.4 Berücksichtigung der Gasverdrängung

Wie in Kapitel 2 dargelegt, wird der deutsche Wärmemarkt durch die Energieträger Erdgas, Heizöl und Fernwärme dominiert. Eine Erweiterung der Fernwärmeversorgung geht stets mit einem Absatzrückgang bei den bestehenden Heizungsarten bzw. Energieträgern



einher. Während eine Verdrängung dezentraler Energieträger wie Heizöl für den Fernwärmeversorger wünschenswert ist, bedeutet ein Absatzrückgang des leitungsgebundenen Erdgases in der Regel einen Rückgang der Erlöse des Versorgungsunternehmens. Dies ist auf die Struktur der deutschen Energieversorgung zurückzuführen, bei der ein Großteil der Kunden durch lokale Stadtwerke versorgt wird, die in der Regel Mehrspartenunternehmen sind (Wasser, Strom, Gas, Fernwärme).

Die Wirtschaftlichkeitsberechnung muss daher um den Erlösrückgang im Gasbereich erweitert werden. Für den Gasverkauf wird aus Gründen der Übersichtlichkeit eine Marge als Nettoerlös angesetzt, d.h. es wird nur der Überschuss aus dem Gasverkauf berücksichtigt. Die einzelnen Erlös- und Kostenterme (Verkaufspreis, Bezugskosten, Netznutzungsentgelte) sind in dieser Marge enthalten.

Zur Berücksichtigung der Gaskundenverdrängung ist die Kapitalwertberechnung nach Gleichung (4.6) zu erweitern:

$$NPV = -l \cdot c^{PIPE} + \sum_{t=1}^T \frac{d \cdot (r_t - c_t^{GEN} - \frac{\gamma}{\eta^{GAS}} \cdot r_t^{GAS}) - l \cdot c_t^{B,PIPE}}{(1+\omega)^t} \quad (4.10)$$

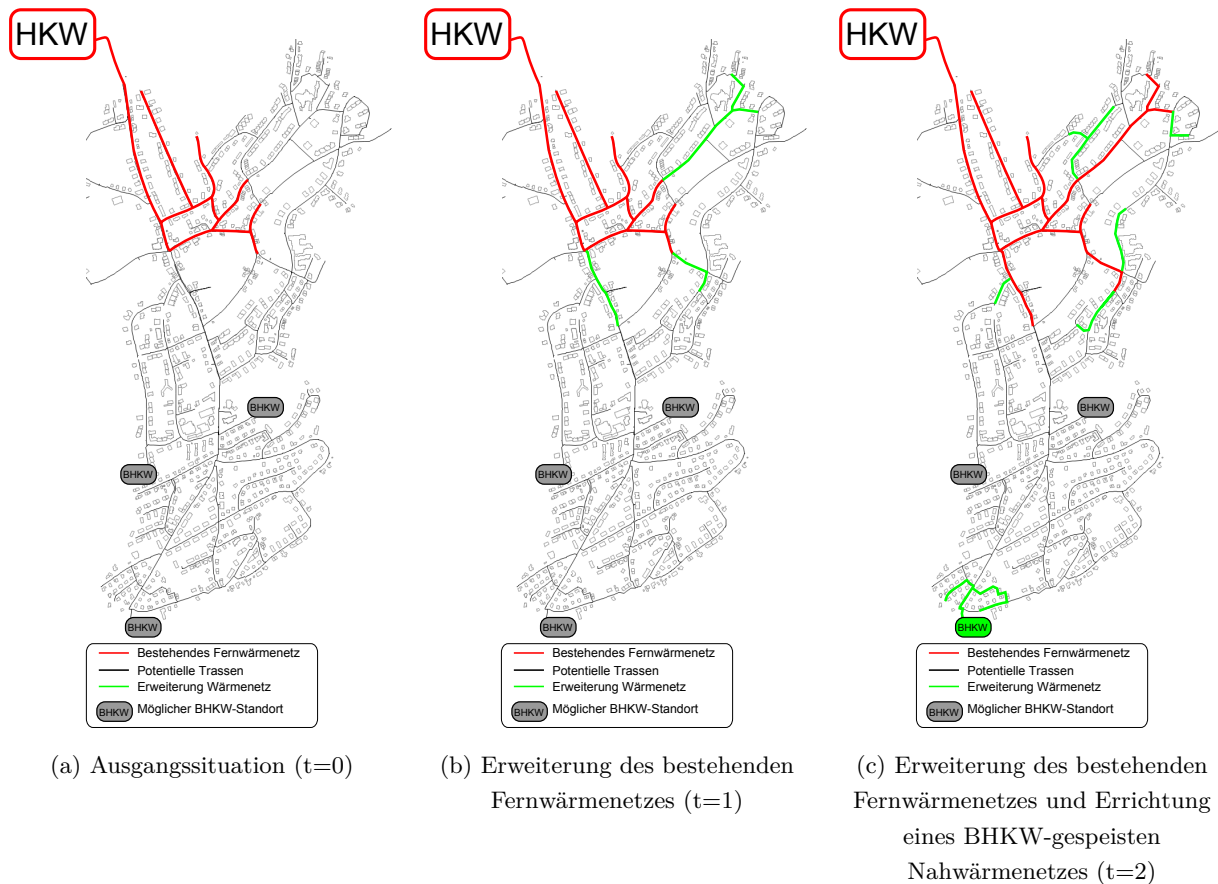
Aus Gleichung (4.10) ist ersichtlich, dass die Wirtschaftlichkeit des Wärmenetzausbaus abnimmt, je höher der Anteil der Gaskunden an dem Gesamtwärmebedarf ist. Die Einbeziehung des mittleren Wirkungsgrades der Erdgasheizungen  $\eta^{GAS}$  (ca. 90 %) verdeutlicht, dass der Gasabsatz bei gleichem Wärmebedarf stets höher als der Fernwärmeabsatz ist, da Erdgas als Primärenergie erst bei den Kunden in Wärme umgewandelt wird. Für den minimal notwendigen Wärmebedarf nach Gleichung (4.9) ergibt die Einbeziehung der Gasverdrängung gemäß nachfolgender Gleichung (4.11), dass dieser zunehmen muss:

$$\frac{d}{l} \geq \frac{c^{PIPE} + \sum_{t=1}^T \frac{c_t^{B,PIPE}}{(1+\omega)^t}}{\sum_{t=1}^T \frac{r_t - c_t^{GEN} - \frac{\gamma}{\eta^{GAS}} \cdot r_t^{GAS}}{(1+\omega)^t}} \quad (4.11)$$

### 4.3 Optimierungsaufgabe

Die Optimierungsaufgabe ergibt sich aus der beschriebenen Planungsaufgabe. Ziel ist es, einen Ausbau der Fernwärme bei maximalem Gewinn für das Versorgungsunternehmen zu konzipieren. Das Verfahren soll einen wirtschaftlich optimalen und technisch realisierbaren Ausbaupfad des Netzes innerhalb eines Betrachtungszeitraums (z.B. 30 Jahre) ermitteln. Für jedes Jahr (bzw. jede Ausbauperiode) werden die neu zu verrohrenden Straßenzüge und zu versorgenden Kunden bestimmt. Technische, betriebliche und wirtschaftliche

Randbedingungen – wie begrenzte Budgets für den Netzausbau – werden berücksichtigt. Abbildung 4.3 zeigt exemplarisch das Ergebnis einer Wärmenetzausbauplanung. Die Optimierung muss bei Unternehmen, die sowohl eine Gas- als auch eine Fernwärmeversorgung betreiben, die Verdrängung von Gaskunden durch Fernwärme berücksichtigen.



**Abbildung 4.3** Exemplarische Darstellung einer optimalen Wärmenetzausbauplanung

Folgende Fragestellungen, die sich einem Gas- und Fernwärmeversorger bei einer geplanten Erweiterung des Wärmenetzes stellen, sollen mit dem Verfahren beantwortet werden können:

- In welchen Ortsteilen bzw. Straßenzügen und unter welchen Voraussetzungen ist ein Ausbau der Fernwärme wirtschaftlich?
- Welche Kunden und Straßenzüge sollten erschlossen werden?
- In welchem Zeitraum kann das Anschlusspotential genutzt werden?
- Welche Rückwirkungen hat der Wärmenetzausbau auf das Gasnetz?
- Welche Erlös- und Kostenentwicklung ist zu erwarten?
- Welche CO<sub>2</sub>-Einsparpotentiale können realisiert werden?
- Wie sensitiv reagieren die Aussagen auf veränderte Rahmenbedingungen (z.B. Gas- und Strompreisentwicklung; rückläufiger Wärmebedarf)?

### 4.3.1 Optimierungsziel

Das Optimierungsziel besteht in der Maximierung des Gewinns über den jeweiligen Betrachtungszeitraum, welcher der Summe aus dem Kapitalwert der Netzerweiterung und den diskontierten Zahlungsüberschüssen aus dem Gasverkauf entspricht.

Erlöse werden aus dem Wärmeverkauf sowie der Stromproduktion in KWK-Anlagen generiert. Bei Mehrspartenunternehmen werden darüber hinaus Erlöse aus dem Gasverkauf erwirtschaftet. Kosten fallen für den Netzausbau, die Errichtung von Heizkraftwerken, den Betrieb des Netzes und der Heizkraftwerke sowie für die Wärmeerzeugung an.

Die Optimierung soll die zu verrohrenden Straßenabschnitte und damit die zu erschließenden Kunden identifizieren. Hierzu ist – je nach konkreter Aufgabenstellung – ein bestehendes Fernwärmenetz zu erweitern oder ein neues Netz zu errichten. An ausgewählten Standorten können neue (Block-) Heizkraftwerke gebaut werden. Hierbei ist aus einer vorgegebenen Menge möglicher Kraftwerkstypen und Leistungsklassen die optimale Auswahl zu treffen.

Darüber hinaus ist für jede Leitung und jedes Heizkraftwerk der Zeitpunkt zu bestimmen, an dem die Leitung oder die Anlage zu errichten ist.

### 4.3.2 Nebenbedingungen

#### Budgetrestriktion

Bei der Planung des Netzausbaus darf in keiner Periode das maximale Budget für Netzerweiterungen überschritten werden. Das Budget muss flexibel für jede Periode festgelegt werden können.

#### Zusammenhang des Netzes

Als essentielle Randbedingung muss zu jedem Zeitpunkt sichergestellt sein, dass jede Leitung mit dem übrigen Netz verbunden ist und über ein Heizkraftwerk mit Wärme versorgt werden kann. Isolierte Teilnetze – z.B. kleine Nahwärmeinseln – sind nur dann zulässig, wenn diese durch ein eigenes BHKW gespeist werden.

#### Dimensionierung der BHKW-Anlagen

Sofern ein neues Netz geplant werden soll oder bei der Erweiterung eines vorhandenen Netzes die Option besteht, zusätzliche Erzeugungseinheiten zu errichten, müssen diese durch

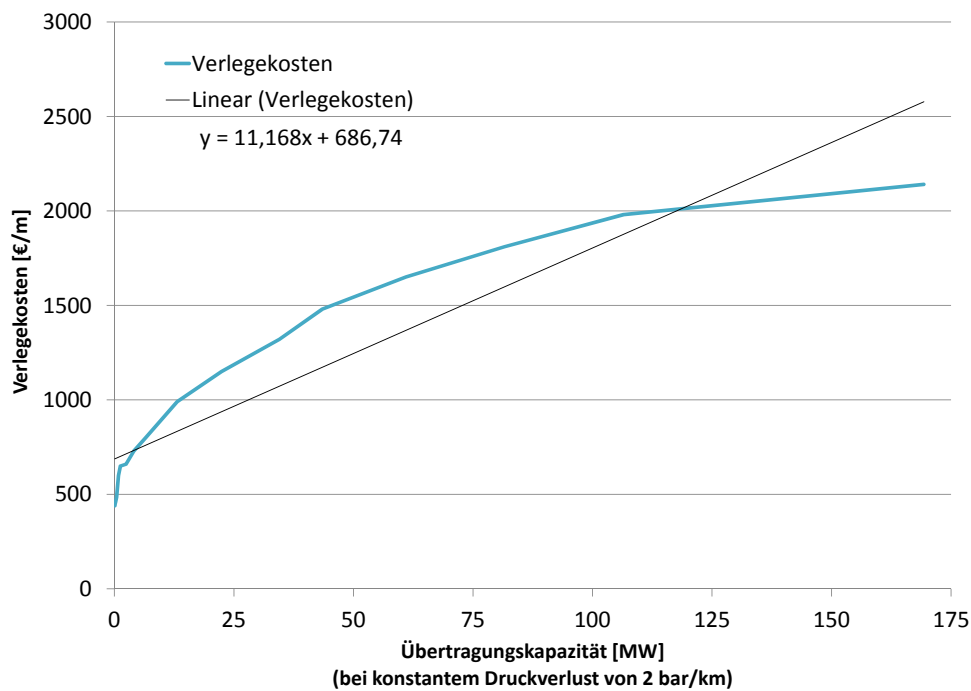
das Optimierungssystem dimensioniert werden. Als Eingangsgröße steht für jeden potentiellen BHKW-Standort eine Auswahl verschiedener Anlagentypen und zugehöriger Leistungsklassen zur Verfügung. Aus dieser diskreten Menge ist das Modul bzw. die Modulkombination zu wählen, welche die benötigte Leistung bereit stellen kann und gleichzeitig die Summe aus Erzeugungs-, Betriebs- und Investitionskosten minimiert.

Bei der Dimensionierung ist zumindest die grobe Fahrweise des BHKW anhand der sortierten Jahresdauerlinie des Wärmebedarfs zu berücksichtigen. Andernfalls werden KWK-Anlagen überdimensioniert und die Wärmegestehungskosten unterschätzt. Eine detaillierte Berücksichtigung der Anlagenfahrweise und Bestimmung der Wirkungsgrade im Teillastbetrieb ist im Rahmen der Ausbauroptimierung (taktische Planung) nicht notwendig. Auf Basis von Erfahrungswerten kann gegebenenfalls ein pauschaler Abschlag auf die Wirkungsgrade der Anlagen erfolgen.

### **Thermische Übertragungskapazität**

Die thermische Übertragungskapazität einer Leitung hängt von der Temperaturspreizung zwischen Vor- und Rücklauf, der Netzbelastung, dem Druckniveau und dem Rohrdurchmesser ab (s. Abschnitt 3.2.1.3). Eine detaillierte Bestimmung der Übertragungskapazität und der notwendigen Leitungsdimensionierung kann erst durch hydraulisch-thermische Simulationen im Rahmen der operativen Umsetzungsplanung erfolgen.

Dennoch können technische bzw. hydraulische Randbedingungen auch bei der taktischen Planung nicht vollständig ignoriert werden, da andernfalls die Investitionskosten je nach Leitung über- oder unterschätzt würden. Die Investitionen einer Leitung steigen – genau wie die Übertragungskapazität – mit ihrem Rohrdurchmesser (s. Abschnitt 3.2.1.2 und 3.2.1.3). Für eine grobe Berücksichtigung der Abhängigkeit zwischen Verlegekosten und Übertragungskapazität bietet es sich an, für einen zulässigen spezifischen Druckverlust (z.B. 2 bar / km) und die geplante Temperaturspreizung (z.B. 130 °C Vorlauf, 70 °C Rücklauf) die Übertragungskapazität einer Leitung in Abhängigkeit des Rohrdurchmessers vorab zu bestimmen (s. Abschnitt 3.2.1.3, Abbildung 3.12). Verknüpft man die resultierende Funktion mit den dimensionsabhängigen Verlegekosten (s. Tabelle 3.5) kann die Übertragungskapazität als Funktion der Verlegekosten dargestellt werden. Aus Abbildung 4.4 ist ersichtlich, dass die Kosteneffizienz einer Dimensionsvergrößerung mit zunehmendem Durchmesser steigt und damit einen nicht-linearen Verlauf aufweist. Für die optimale Ausbauplanung ist eine lineare Näherung mit Fixkostenanteil, wie in der Grafik dargestellt, jedoch ausreichend.



Annahmen: Temperaturspreizung von 60 °C und konstanter spezifischer Druckverlust von 2 bar / km.

**Abbildung 4.4** Verlegekosten in Abhängigkeit der thermischen Übertragungskapazität

### 4.3.3 Konkurrenz zwischen Gas- und Fernwärme

Deutschlandweit betrug der Marktanteil von Erdgas bei der Wärmeversorgung (Raumwärme und Warmwasser) der Haushalte 2011 ca. 50 % (s. Abschnitt 2.1, vgl. [BMW, 2012]). In Bereichen mit hohen Wärmebedarfsdichten, die für einen Ausbau der Fernwärme interessant sind, liegt dieser Anteil tendenziell noch höher.

Wie bereits beschrieben, zieht ein Ausbau der Fernwärme in bereits gasversorgten Gebieten in der Regel immer einen Rückgang der Gaskunden nach sich. Auch wenn ein Wechsel der Gaskunden zur Fernwärme im Regelfall höhere Margen verspricht, ist eine Neueröffnung durch Fernwärme in Gebieten anzustreben, die noch nicht mit Erdgas versorgt werden. Dies ist in der Praxis bis auf wenige Ausnahmen (z.B. Neubaugebiete) jedoch nicht möglich, da die meisten Städte in Deutschland weitgehend flächendeckend gasversorgt sind. Darüber hinaus hängt auch die Wirtschaftlichkeit von Gasversorgungsleitungen hauptsächlich von einer hohen Wärmebedarfsdichte ab. Es kann also davon ausgegangen werden, dass insbesondere lukrative Trassen mit einer hohen Wärmebedarfsdichte bereits durch Gasleitungen erschlossen sind. Eine Beschränkung der Fernwärmetrassen auf nicht bereits gasversorgte Trassen ist damit trotz der Verdrängung eigener Kunden ökonomisch



durch Fernwärme versorgten Straßenzügen gestaltet sich der Wärmenetzausbau de facto deutlich günstiger, da die Erneuerungsinvestitionen der Gasleitungen entfallen.

Die Berücksichtigung eines möglichen Gasnetzrückbaus erfordert neben der Integration des Gasnetzes in das Optimierungssystem eine Bestimmung des notwendigen Erneuerungszeitpunktes der Gasleitungen. Dieser kann vorab durch eine zustands- und risikoorientierte Erneuerungsplanung (s. Abschnitt 3.2.3) ermittelt und als Attribut der jeweiligen Gasleitung hinterlegt werden. Bei Leitungen, die innerhalb des Betrachtungszeitraumes erneuert werden müssen, kann die Optimierung dann eine Stilllegung vorschlagen, wenn vor dem Erneuerungszeitpunkt eine Erschließung durch Fernwärme vorgeschlagen wird. Andernfalls muss die Gasleitung ausgetauscht werden, wobei die Kosten der Ersatzerneuerung in die Gewinnberechnung einfließen.

Inwieweit ein vollständiger Wechsel der bestehenden Gaskunden in der Praxis realistisch ist, wird zum einen von den finanziellen Wechselanreizen des Versorgungsunternehmens abhängen. Zum anderen könnte zukünftig in ausgewiesenen Fernwärmevorranggebieten aufgrund der Vorgaben zur Eindämmung der CO<sub>2</sub>-Emissionen ein Anschlusszwang politisch durchgesetzt werden.





## 5 Theoretische Grundlagen

Für die Entwicklung eines Optimierungsverfahrens muss die im vorangegangenen Kapitel beschriebene praktische Fragestellung des optimalen Fernwärmenetzausbaus formalisiert werden. Unter Vernachlässigung bestimmter praktischer Randbedingungen lässt sich die Problemstellung auf ein bekanntes graphentheoretisches Problem reduzieren: Das *Steiner-Problem in Graphen*. Für dieses finden sich in der Literatur verschiedene Optimierungsansätze, welche detailliert in Kapitel 6 beschrieben werden.

Es existieren zahlreiche Varianten des Steiner-Problems<sup>21</sup>, welche jeweils unterschiedliche Einschränkungen an die Problemformulierung stellen. Daher werden in diesem Kapitel ausgehend von der einfachsten Variante des Steiner-Problems in Graphen, dem *Steiner-Tree Problem* (ST), zunächst die gebräuchlichsten, in der Literatur beschriebenen Varianten des Steiner Problems dargestellt und in Relation zu der Fragestellung des optimalen Wärmenetzausbaus gesetzt. Es wird geprüft inwieweit diese geeignet sind, die Problemstellung hinreichend genau abzubilden.

Zunächst werden in Abschnitt 5.1 die notwendigen graphentheoretischen Grundlagen sowie die verwendeten Bezeichnungen und Symbole erläutert. Die Formalisierung der in Kapitel 4 dargestellten praktischen Optimierungsaufgabe als graphentheoretisches Problem erfolgt in Abschnitt 5.2. Anschließend werden die verschiedenen Steiner-Graph Formulierungen vorgestellt und verglichen. Eine Erweiterung des Steiner-Graph Problems um Kapazitätsbeschränkungen ist Bestandteil von Abschnitt 5.4. Im Vorgriff auf das nachfolgende Kapitel 6 stellt Abschnitt 5.5 die gebräuchlichsten angewandten Optimierungsverfahren vor.

### 5.1 Notation und Symbolik

Sofern nicht anders angegeben, wird im weiteren Verlauf der Arbeit die in Tabelle 5.1 dargestellte Notation und Symbolik verwendet.

---






<sup>21</sup> Die Begriffe *Steiner-Graph-Problem* und *Steiner-Problem* werden synonym für das *Steiner-Problem in Graphen* verwendet. Das *Steiner-Problem in der Ebene* wird in dieser Arbeit nicht betrachtet.

---

**Bezeichnungen**

$V$	Menge der Knoten eines Graphen
$E \subseteq (V, V)$	Menge der Kanten eines ungerichteten Graphen
$A \subseteq (V, V)$	Menge der Pfeile eines gerichteten Graphen
$G = (V, E)$	Ungerichteter Graph $G$ bestehend aus den Knoten der Menge $V$ und den Kanten der Menge $E$
$\vec{G} = (V, A)$	Gerichteter Graph $\vec{G}$ bestehend aus den Knoten der Menge $V$ und den Pfeilen der Menge $A$
$K \subseteq V$	Menge der Basisknoten (Knoten, die zwingend in der optimalen Lösung enthalten sein müssen)
$\overline{K} = V \setminus K$	Menge der Steinerknoten (Nicht-Basisknoten)
$c_{i,j}$	Gewicht von Kante bzw. Pfeil $(i, j)$
$c_i$	Gewicht von Knoten $i$
$f_{i,j}^{MAX}$	Maximale Kapazität von Kante $(i, j)$
$r \in V$	Wurzelknoten $r$

**Symbole**

	Ein Basisknoten mit Gewicht 10
	Ein Basisknoten ohne Gewicht
	Ein Steinerknoten mit Gewicht 10
	Ein Steinerknoten ohne Gewicht
	Wurzelknoten $r$

---

**Tabelle 5.1** Notation und Symbolübersicht**Definitionen:****a. Ungerichteter Graph**

Ein ungerichteter Graph  $G$  besteht aus einer Menge von Knoten  $V$  und Kanten  $E \subseteq (V, V)$ .

**b. Gerichteter Graph**

Ein gerichteter Graph  $\vec{G}$  besteht aus einer Menge von Knoten  $V$  und Pfeilen  $A \subseteq (V, V)$ .

**c. Pfad**

Ein Pfad bezeichnet eine Folge von Knoten, die jeweils durch eine Kante verbunden sind.

**d. Zyklus**

Ein Zyklus bezeichnet einen Pfad in einem gerichteten Graphen, bei dem der Startknoten dem Endknoten entspricht.

e. **Kreis**

Ein Kreis bezeichnet einen Pfad in einem ungerichteten Graphen, bei dem der Startknoten dem Endknoten entspricht.

f. **Zusammenhang**

Ein Graph ist zusammenhängend, wenn jeder Knoten von jedem anderen Knoten des Graphen durch einen Pfad erreichbar ist.

## 5.2 Formale Beschreibung der Optimierungsaufgabe

Zur formalen Beschreibung der Optimierungsaufgabe werden zunächst folgende Teilaspekte der in Kapitel 4 beschriebenen Fragestellung vernachlässigt:

- Verdrängung von Gaskunden
- Rückbauoptionen im Gasnetz
- zeitliche Reihenfolge des Netzausbaus
- Kapazitätsrestriktionen der Leitungen

Das Optimierungsproblem reduziert sich damit zu nachfolgender Maximierungsaufgabe:

Bestimme aus allen möglichen Trassen genau jene, deren Versorgung mit Fernwärme den Gesamtgewinn maximiert. Jeder Trasse wird ein Nettogewinn  $p$  zugewiesen, der sich aus der Differenz der (diskontierten) zukünftigen Erlöse  $r$  und den Kosten  $c$  der Leitungsverlegung ergibt. An Trassen, welche keine potentiellen Kunden aufweisen oder deren Kunden nur geringe Erlöse versprechen, kann  $p$  auch negative Werte annehmen.

**Formal**

Sei  $G = (V, E)$  ein ungerichteter zusammenhängender Graph, mit Knoten  $V$  und Kanten  $E \subseteq (V, V)$ . Jeder Kante  $(i, j) \in E$  sind Erlöse  $e_{i,j} \in \mathbb{R}_0^+$  und Kosten  $c_{i,j} \in \mathbb{R}_0^+$  zugewiesen. Bestimme einen zusammenhängenden Teilgraphen  $G'$  von  $G$ , dessen summierte Kantengewinne  $p_{i,j} = e_{i,j} - c_{i,j}$  maximal sind.

Es gilt:

- $G' = (V', E')$  mit  $V' \subseteq V$  und  $E' \subseteq E$
- $\sum_{(i,j) \in E'} p_{i,j}$  ist maximal
- $G'$  ist zusammenhängend
- $p_{i,j} \in \mathbb{R} \quad \forall (i, j) \in E$

Dieses Problem entspricht einer verallgemeinerten Form des klassischen Steiner-Problems in Graphen. Im folgenden Abschnitt wird gezeigt, wie die ursprüngliche Formulierung

des Steiner Problems (*Steiner-Baum Problem*) in eine allgemeine Form überführt werden kann, welche weitgehend der Fragestellung des gewinnmaximierenden Netzausbaus entspricht. Da das ursprüngliche Steiner Problem in einem Minimierungsproblem besteht, hat sich in der Literatur die Formulierung der Problemstellung als Minimierungsaufgabe durchgesetzt, auch wenn konkrete Fragestellungen in der Praxis gegebenenfalls einer Maximierungsaufgabe entsprechen. Da dem Problem eine lineare Zielfunktion zugrunde liegt, kann das ursprüngliche (Gewinn-) Maximierungsproblem durch Multiplikation mit -1 in ein (Kosten-) Minimierungsproblem gewandelt werden. Gewinne entsprechen dann negativen Kosten. Für einen vereinfachten Vergleich mit bestehenden Formulierungen des Steiner Problems wird im Folgenden die Formulierung als Minimierungsaufgabe beibehalten.

## 5.3 Steiner-Graph-Probleme

### 5.3.1 Das Steiner-Baum-Problem

Die ursprüngliche Formulierung des Problems sucht für einen Graphen einen zusammenhängenden kürzesten (minimalen) Teilgraphen, der eine definierte Teilmenge der Knoten (*Basisknoten*) miteinander verbindet. Diese klassische Variante des Steiner-Problems in Graphen wird häufig auch als *Steiner-Baum-Problem* bzw. *Steiner-Tree Problem* (ST) beschrieben (vgl. [Voss, 1990] S. 12ff.), da die Lösung des Problems bei positiven Kantengewichten stets ein Baum ist.

#### Problemstellung ST

Sei  $G = (V, E)$  ein ungerichteter zusammenhängender Graph, mit Knoten  $V$  und Kanten  $E \subseteq (V, V)$ . Jeder Kante  $(i, j) \in E$  ist ein Gewicht  $c_{i,j} \in \mathbb{R}^+$  zugewiesen. Zu bestimmen ist ein zusammenhängender Teilgraph  $G'$  von  $G$ , der eine gegebene Untermenge der Knoten  $K \subseteq V$  mit minimalen Kantengewichten verbindet.

Es gilt:

- $G' = (V', E')$  mit  $V' \subseteq V$  und  $E' \subseteq E$
- $K \subseteq V'$
- $\sum_{(i,j) \in E'} c_{i,j}$  ist minimal
- $G'$  ist zusammenhängend
- $c_{i,j} \in \mathbb{R}^+ \quad \forall (i, j) \in E$

Von der in Abschnitt 5.2 beschriebenen Problemstellung weicht das Steiner-Baum-Problem in zwei Punkten ab. Zum einen unterstellt es positive Kantengewichte, zum anderen ist die Teilmenge der in der Lösung zwingend enthalten Knoten ( $K$ ) bereits bekannt. Die Fragestellung des gewinnmaximierenden Netzausbaus hingegen besteht genau in der Identifikation der gewinnmaximierenden Knoten bzw. Kanten, die Teil der Lösung sein sollen.

### Komplexität

Das Steiner-Baum-Problem ähnelt in seiner Fragestellung dem Problem des minimalen Spannbaums (*Minimum-Spanning-Tree-Problem*, vgl. z.B. [Prömel und Steger, 2002] S. 66ff.). Dieses sucht für einen gegebenen Graphen einen Teilgraphen mit minimalen Kantengewichten, der *alle* Knoten des Ursprungsgraphen verbindet. Zur Lösung existieren polynomielle Algorithmen, die garantiert einen minimalen Spannbaum finden. Die bekanntesten gehen auf Kruskal (vgl. [Kruskal, 1956]) mit  $\mathcal{O}(|E| \log |V|)$  und Prim (vgl. [Prim, 1957]) mit  $\mathcal{O}(|E| + |V| \log |V|)$  (Komplexität abhängig von der Implementierung) zurück. Im speziellen Fall  $K = V$  entspricht das Steiner-Baum-Problem exakt dem Problem des minimalen Spannbaums, da alle Knoten in der Lösung enthalten sein müssen. Im speziellen Fall  $|K| = 2$  entspricht das Steiner-Baum Problem der Bestimmung des kürzesten Pfades zwischen zwei Knoten (*Shortest-Path-Problem*, vgl. [Dijkstra, 1959]).

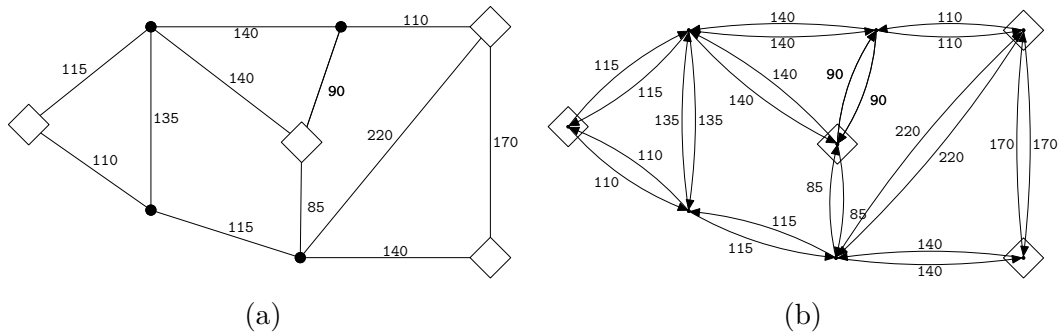
Im Gegensatz zu dem *Minimum-Spanning-Tree-Problem* und dem *Shortest-Path-Problem* gehört das Steiner-Baum-Problem (und damit auch allgemeinere Formen des Steiner-Problems in Graphen) zu der Klasse der  $\mathcal{NP}$ -vollständigen Probleme (vgl. [Prömel und Steger, 2002] S. 52ff. sowie [Voss, 1990] S. 29ff.). Bisher ist für Probleme dieser Komplexitätsklasse kein Algorithmus bekannt, welcher garantiert in polynomialer Zeit eine (optimale) Lösung findet.

Sämtliche nachfolgende Varianten des klassischen Steiner-Problems in Graphen bilden Verallgemeinerungen dieses Problems. Sie können durch Hinzufügen zusätzlicher Restriktionen oder entsprechender Eingangsdaten in das klassische Steiner-Problem überführt werden, welches dann einem Spezialfall des jeweiligen Problems entspricht. Damit sind diese ebenfalls der Klasse der  $\mathcal{NP}$ -vollständigen Probleme zuzuordnen.

### 5.3.2 Das Steiner-Baum-Problem in gerichteten Graphen

Gegenüber dem klassischen Steiner-Baum-Problem unterscheidet sich das Steiner-Baum Problem in gerichteten Graphen nur in der Annahme, dass dem Problem ein *gerichteter* anstelle eines *ungerichteten* Graphen zugrunde liegt. Jedes (ungerichtete) Steiner-Baum

Problem kann in ein gerichtetes Steiner-Baum Problem (*Directed Steiner-Tree Problem*, DST) überführt werden, indem jede ungerichtete Kante  $(i, j)$  des Ausgangsgraphen durch zwei (gerichtete) Pfeile  $(i, j), (j, i)$  ersetzt wird. Eine Lösung des so transformierten Problems stellt immer auch eine Lösung des ungerichteten Problems dar. Die Transformation eines *ungerichteten* Steiner-Baum Problems in ein *gerichtetes* Steiner-Baum Problem kann Abbildung 5.1 entnommen werden.



**Abbildung 5.1** Transformation eines ungerichteten Steiner-Baum Problems (a) in ein äquivalentes gerichtetes Steiner-Baum Problem (b)

### Problemstellung DST

Sei  $\vec{G} = (V, A)$  ein gerichteter zusammenhängender Graph, mit Knoten  $V$  und Pfeilen  $A \subseteq (V, V)$ . Jedem Pfeil  $(i, j) \in A$  ist ein Gewicht  $c_{i,j} \in \mathbb{R}^+$  zugewiesen. Zu bestimmen ist ein zusammenhängender Teilgraph  $\vec{G}'$  von  $\vec{G}$ , der eine gegebene Untermenge der Knoten  $K \subseteq V$  mit minimalen Kantengewichten verbindet.

Es gilt:

- $\vec{G}' = (V', A')$  mit  $V' \subseteq V$  und  $A' \subseteq A$
- $K \subseteq V'$
- $\sum_{(i,j) \in A'} c_{i,j}$  ist minimal
- $\vec{G}'$  ist zusammenhängend
- $c_{i,j} \in \mathbb{R}^+ \quad \forall (i, j) \in A$

### 5.3.3 Das Knoten-Gewichtete Steiner-Baum Problem

Das klassische Steiner-Graph Problem (ST) berücksichtigt ausschließlich (nicht-negative) Kantengewichte. Eine Verallgemeinerung des Steiner-Problems in Graphen stellt das Knoten-Gewichtete Steiner-Baum Problem bzw. *Node-Weighted Steiner-Tree Problem* (NWST) dar (vgl. [Segev, 1987]). In diesem Fall wird neben den Kanten auch den Knoten ein Gewicht zugewiesen.

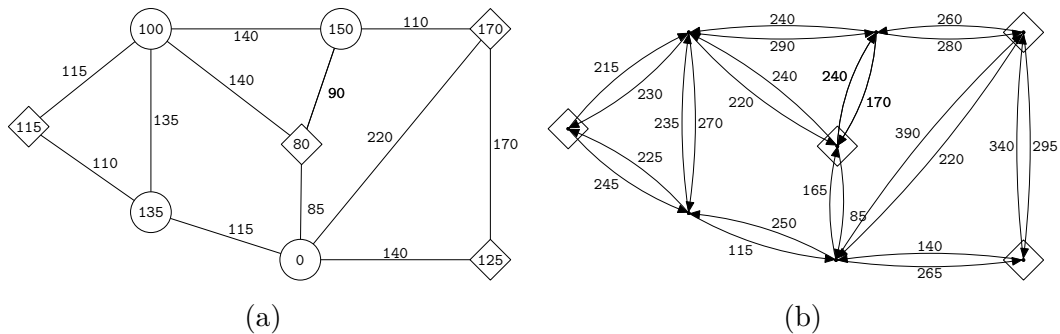
**Problemstellung NWST**

Sei  $G = (V, E)$  ein ungerichteter zusammenhängender Graph, mit Knoten  $V$  und Kanten  $E \subseteq (V, V)$ . Jeder Kante  $(i, j) \in E$  ist ein Gewicht  $c_{i,j} \in \mathbb{R}^+$  zugewiesen, jedem Knoten  $i$  ein Gewicht  $c_i \in \mathbb{R}_0^-$ . Zu bestimmen ist ein zusammenhängender Teilgraph  $G'$  von  $G$ , der eine gegebene Untermenge der Knoten  $K \subseteq V$  mit minimalen Knoten- und Kantengewichten verbindet.

Es gilt:

- $G' = (V', E')$  mit  $V' \subseteq V$  und  $E' \subseteq E$
- $K \subseteq V'$
- $\sum_{(i,j) \in E'} c_{i,j} + \sum_{i \in V'} c_i$  ist minimal
- $G'$  ist zusammenhängend
- $c_{i,j} \in \mathbb{R}^+ \quad \forall (i, j) \in E$
- $c_i \in \mathbb{R}_0^- \quad \forall i \in V$

Für den Fall, dass alle Knotengewichte den Wert 0 aufweisen, entspricht das NWST dem ST. Für den Fall, dass alle Knotengewichte nicht-negativ sind, kann das NWST in das gerichtete Steiner-Baum Problem (DST) überführt werden, indem jede Kante  $(i, j)$  durch zwei Pfeile  $(i, j), (j, i)$  ersetzt wird, jeweils mit dem Gewicht  $c'_{i,j} = c_{i,j} + c_j$  bzw.  $c'_{j,i} = c_{j,i} + c_i$  (s. Abbildung 5.2). Deshalb wird nur der Fall betrachtet, indem die Knotengewichte keine positiven Werte annehmen.



**Abbildung 5.2** Transformation eines Knoten-Gewichteten Steiner-Baum Problems (mit nicht-negativen Knotengewichten) (a) in ein äquivalentes gerichtetes Steiner-Baum Problem (b)

Sofern die Knotengewichte negativ sind, also (bei Minimierung) nicht Kosten sondern einem Gewinn entsprechen, stellt das NWST eine elementare Erweiterung der Fragestellung dar. Im Gegensatz zu dem klassischen Steiner-Baum Problem wird nicht nur die kostengünstigste Verbindung einer vorab definierten Knotenmenge ermittelt, sondern

auch die Einbeziehung zusätzlicher gewinnbringender Knoten. Dieser Fall ist bei realen Netzwerkoptimierungsproblemen häufig anzutreffen und entspricht bereits weitgehend der in Abschnitt 5.2 formulierten Optimierungsaufgabe. Es sollen die Kunden (Knoten) bestimmt werden, die den größtmöglichen Gewinn versprechen, bei gleichzeitiger Minimierung der Kosten für die Leitungen (Kanten). Hierbei sind oftmals vorab keine Basisknoten definiert, welche zwingend in der Lösung enthalten sein müssen ( $K = \emptyset$ ).

Da nur den Knoten negative Gewichte zugewiesen werden dürfen und die Kanten weiterhin nicht-negative Gewichte aufweisen, ist eine optimale Lösung des NWST weiterhin zwingend ein Baum.

### 5.3.3.1 Das Single-Point Node-Weighted Steiner-Tree Problem

Ein bei realen Netzwerkoptimierungsproblemen häufig anzutreffender Spezialfall des Knoten-Gewichteten Steiner-Baum Problems stellt das *Single-Point Node-Weighted Steiner-Tree Problem* dar (vgl. [Segev, 1987]). In diesem Fall entspricht die Menge  $K$  der in der optimalen Lösung zwingend enthaltenen Knoten einem einzelnen Wurzelknoten  $K = \{r\} \Rightarrow |K| = 1$ . Diese Form des Steiner-Graph Problems ist z.B. dann anzutreffen, wenn ein bestehendes Netzwerk erweitert werden soll und mit Ausnahme des Einbindepunktes an das bestehende Netzwerk nicht vorab bekannt ist, welche Knoten Teil des Netzwerks sein sollen. Mit Ausnahme des Wurzelknotens werden also keine Knoten definiert, die in der optimalen Lösung zwingend enthalten sein müssen. Dennoch wird auch hier der Fall mehrerer möglicher Erweiterungspunkte abgedeckt, ohne dass eine Umformulierung der Problemstellung nötig ist. Hierzu ist ein zusätzlicher künstlicher Wurzelknoten zu definieren, der mit sämtlichen möglichen Erweiterungspunkten über Kanten mit Gewicht 0 verbunden ist.

### 5.3.3.2 Das Prize-Collecting Steiner-Tree Problem

Das zuerst von Bienstock et. al (vgl. [Bienstock et al., 1993]) beschriebene *Prize-Collecting Steiner-Tree Problem* (PCST) entspricht weitgehend dem NWST. Die ursprüngliche Formulierung des PCST ist an das *Prize-Collecting Traveling-Salesman Problem* angelehnt. Dieses sucht für einen Graphen einen Pfad, welcher eine bestimmte Untermenge aller Knoten verbindet, wobei die Länge des Pfades zuzüglich Strafkosten für nicht besuchte Knoten minimiert wird (vgl. [Bienstock et al., 1993]). Eine weitere Variante des PCST findet sich in [Johnson et al., 2000] unter der Bezeichnung *Net Worth Maximization problem*.



Mittlerweile hat sich für das Knoten-Gewichtete Steiner-Graph Problem die Bezeichnung als PCST durchgesetzt, daher wird diese im weiteren Verlauf der Arbeit verwendet.

### 5.3.4 Das allgemeine Steiner-Problem in Graphen

Das allgemeine Steiner-Problem in Graphen, das *Connected Steiner-Problem in Graphs* (CSP) entspricht dem klassischen Steiner-Baum Problem (ST) mit der Erweiterung, dass sowohl positive als auch negative Kantengewichte zulässig sind. Analog zu dem NWST bzw. PCST ist also nicht unbedingt eine kostenminimale Verbindung zwischen den Basis-knoten der Menge  $K$  zu finden, sondern es können zusätzliche gewinnbringende Kanten identifiziert werden ( $c_{i,j} < 0$ ), welche den Zielfunktionswert verbessern, unabhängig davon, ob sie für die Verbindung der Knoten aus  $K$  notwendig sind. Sofern einige Kanten negative Kantengewichte aufweisen, ist die optimale Lösung eines CSP in der Regel kein Baum (vgl. [Suhl und Hilbert, 1998] S. 274). Auch für das CSP gilt, dass die Menge der Basisknoten  $K$  keine Elemente enthalten muss.

#### Problemstellung CSP

Sei  $G = (V, E)$  ein ungerichteter zusammenhängender Graph, mit Knoten  $V$  und Kanten  $E \subseteq (V, V)$ . Jeder Kante  $(i, j) \in E$  ist ein Gewicht  $c_{i,j} \in \mathbb{R}$  zugewiesen. Zu bestimmen ist ein zusammenhängender Teilgraph  $G'$  von  $G$ , der eine gegebene Untermenge der Knoten  $K \subset V$  mit minimalen Kantengewichten verbindet.

Es gilt:

- $G' = (V', E')$  mit  $V' \subseteq V$  und  $E' \subseteq E$
- $K \subseteq V'$
- $\sum_{(i,j) \in E'} c_{i,j}$  ist minimal
- $G'$  ist zusammenhängend
- $c_{i,j} \in \mathbb{R} \quad \forall (i, j) \in E$

Das CSP entspricht exakt der in Abschnitt 5.2 formulierten Optimierungsaufgabe, wobei die Menge der Zielknoten im Falle des Wärmenetzausbaus  $K$  in der Regel leer ist oder nur einem einzelnen Knoten entspricht (Einbindepunkt eines bestehenden Netzes).

Das NWST kann in ein äquivalentes CSP transformiert werden und vice-versa. Da das Optimierungsproblem des Fernwärmeausbaus als CSP vorliegt, viele bekannte Lösungsansätze jedoch auf der Formulierung der Problemstellung als NWST bzw. PCST basieren, werden die Transformationsschritte beider Modellformulierungen nachfolgend dargestellt. Ein Beweis der Äquivalenz findet sich in [Suhl und Hilbert, 1998].

### Transformation eines NWST in ein CSP

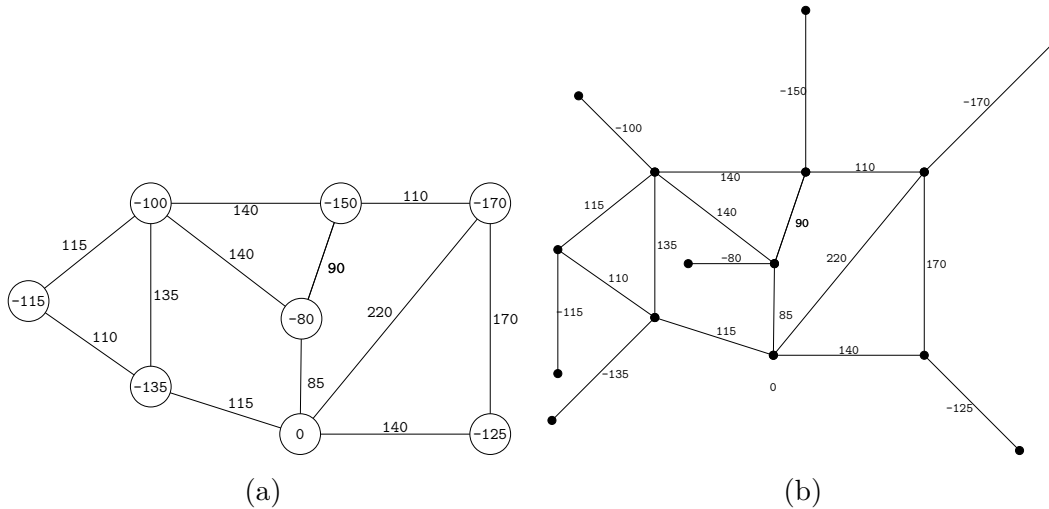
Die Transformation eines NWST in ein CSP erfolgt durch einfaches Hinzufügen zusätzlicher Kanten an Knoten, welche ein Gewicht  $\neq 0$  aufweisen. Die jeweils hinzugefügte Kante bekommt das Gewicht des zugehörigen Knotens zugewiesen.

Sei  $G = (V, E)$  ein ungerichteter zusammenhängender Graph, mit Knoten  $V$  und Kanten  $E \subseteq (V, V)$ . Jeder Kante  $(i, j) \in E$  ist ein Gewicht  $c_{i,j} \in \mathbb{R}^+$  zugewiesen, jedem Knoten  $i$  ein Gewicht  $c_i \in \mathbb{R}_0^-$ . Dann kann das NWST in ein äquivalentes CSP umgeformt werden, indem der Graph  $G$  durch Hinzufügen von Knoten  $V^*$  und Kanten  $E^*$  in einen Graphen  $G^* = (V \cup V^*, E \cup E^*)$  transformiert wird.

Es gilt:

- $c_{i,j} = c_i \quad \forall (i, j) \in E^*$
- und  $E^* \subseteq \{i \in V \mid c_i < 0, j \in V^*\} \quad (V \cap V^* = \emptyset)$

Abbildung 5.3 stellt die Transformation eines NWST in ein CSP dar.



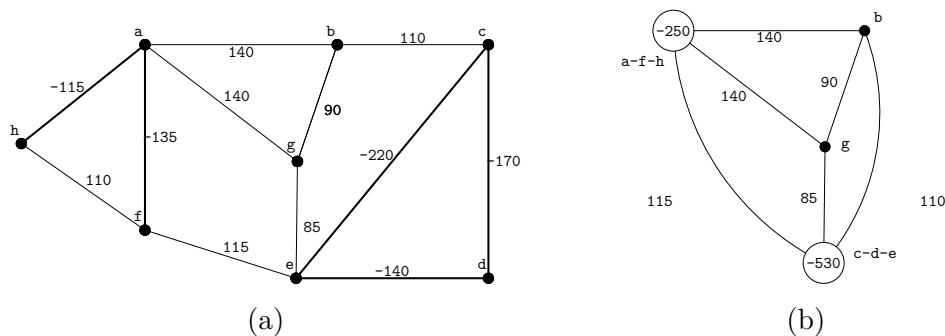
**Abbildung 5.3** Transformation eines Knoten-Gewichteten Steiner-Baum Problems NWST (a) in ein äquivalentes allgemeines Steiner-Graph Problem CSP (b)

Jede Lösung des so transformierten Graphen kann in eine Lösung des Ursprungsproblems umgewandelt werden, indem die zusätzlichen Kanten wieder entfernt werden.

### Transformation eines CSP in ein NWST

Die Umformung eines CSP in ein NWST ist komplizierter, da bei negativen Kantengewichten, die in Knotengewichte umgewandelt werden sollen, nicht eindeutig bestimmt ist, welchem Knoten diese zuzuordnen sind. Es ist dennoch möglich, das ursprüngliche CSP in ein äquivalentes Optimierungsproblem als NWST zu überführen. Hierzu sind sämtliche

Knoten, die über mindestens eine Kante mit negativem Gewicht verbunden sind, zu einem Knoten zusammenzufassen. In Abbildung 5.4 (a) sind dies die fett markierten Kanten. Die Knoten (a, f, h) werden zu einem neuen Knoten a-f-h zusammengefasst, die Knoten (c, d, e) zu c-d-e. Die Knotengewichte der zusammengefassten Knoten entsprechen der Summe aller negativen Kantengewichte der jeweils enthaltenen Kanten. Sofern Kanten mit positivem Gewicht zwischen den Knoten existieren (z.B. Kante (f,h) in Abbildung 5.4) entfallen diese, da sie nicht Teil einer optimalen Lösung sein können. Falls nach der Umformung parallele Kanten zwischen zwei Knoten entstehen, kann die Kante mit dem höheren Gewicht entfallen, da diese nie Teil einer optimalen Lösung sein kann. Abbildung 5.4 (b) stellt den Graphen des als NWST umformulierten CSP aus Abbildung 5.4 (a) dar. Die Lösung des NWST kann in eine Lösung des Ausgangsproblems überführt werden, indem für alle zusammengefassten Knoten, welche Teil der optimalen Lösung sind, die Kontraktion rückgängig gemacht wird und die zugehörigen Kanten mit negativen Gewichten der Lösung hinzugefügt werden.



**Abbildung 5.4** Transformation eines allgemeinen Steiner-Graph Problems CSP (a) in ein Knoten-Gewichtetes Steiner-Baum Problem NWST (b)

### 5.3.5 Das Mehrperiodige Steiner-Graph Problem

In Abschnitt 5.3 wurde stets ein einperiodiger Netzwerkentwurf unterstellt. Die Optimierungsaufgabe wurde mithin darauf beschränkt, für die jeweilige Problemformulierung einen kostenminimalen (bzw. gewinnmaximierenden) Graphen zu bestimmen. Ein schrittweiser Aufbau des Graphen oder eine schrittweise Erweiterung eines bestehenden Graphen wurden nicht betrachtet. Wie in Kapitel 4 bereits dargestellt, ist die Reihenfolge des Netzausbaus für die Fragestellung des Fernwärmeausbaus von essentieller Bedeutung.

Das *Mehrperiodige Steiner-Graph Problem* (MSP) stellt eine Erweiterung des allgemeinen Steiner-Problems in Graphen hinsichtlich der zeitlichen Dimension dar. Für das MSP wird im Folgenden angenommen, dass die Menge der Basisknoten die Kardinalität eins aufweist

und damit nur ein definierter Wurzelknoten  $r$  zwingend in der Lösung enthalten sein muss ( $K = \{r\} \Rightarrow |K| = 1$ ). Diese Annahme wird getroffen, da dies bei der Fragestellung der gewinnmaximierenden Netzwerkerweiterung in der Regel der Fall ist und die Problemformulierung verständlicher macht. Eine Erweiterung der Fragestellung für  $|K| > 1$  ist zwar möglich, allerdings muss in diesem Fall  $K$  zeitabhängig modelliert werden, wodurch die Problembeschreibung komplexer und die Verständlichkeit erschwert wird.

Die Optimierungsaufgabe besteht somit in der Minimierung der Kosten (bzw. Maximierung des Gewinns) über einen bestimmten Betrachtungszeitraum. Zu jedem Zeitpunkt ist zu gewährleisten, dass der Graph zusammenhängend ist. Kanten, die in  $t$  Teil der Lösung sind, bleiben auch in  $t + 1$  Teil der Lösung.

Die folgende Definition beschreibt das MSP analog zu dem CSP, somit sind positive und negative Kantengewichte zulässig. Eine Erweiterung von NWST bzw. PCST um eine zeitliche Dimension ist gleichermaßen möglich.

### Problemstellung MSP

Sei  $G = (V, E)$  ein zusammenhängender ungerichteter Graph. Jeder Kante  $(i, j) \in E$  sind für jeden Zeitpunkt Kosten (bzw. Gewinne)  $c_{i,j,t} \in \mathbb{R}$  zugewiesen. Für jeden Zeitpunkt  $t$  des Betrachtungszeitraums  $T$  ist ein Teilgraph  $G'_t = (V'_t, E'_t)$  zu bestimmen, so dass die Summe aller Kantengewichte über alle Zeitschritte minimal ist. Der Wurzelknoten  $r$  muss in dem Lösungsgraphen in jedem Zeitschritt enthalten sein.

Es gilt:

- $\sum_{t \in T} \sum_{(i,j) \in E'_t} c_{i,j,t}$  ist minimal
- $G'_t = (V'_t, E'_t)$  mit  $V'_t \subseteq V$  und  $E'_t \subseteq E \quad \forall t \in T$
- $V'_{t-1} \subseteq V'_t$  und  $E'_{t-1} \subseteq E'_t \quad \forall t \in T \setminus \{t_0\}$
- $r \in V'_{t_0}$
- $G'_t$  ist zusammenhängend  $\quad \forall t \in T$
- $c_{i,j,t} \in \mathbb{R} \quad \forall (i, j) \in E, t \in T$

## 5.4 Das Kapazitätsbeschränkte Netzwerkentwurfproblem

Das Steiner-Problem in Graphen sowie die beschriebenen Verallgemeinerungen dieses Problems suchen die kostenminimale (bzw. gewinnmaximierende) Verbindung zwischen bestimmten Knoten. Hierbei werden keine Einschränkungen hinsichtlich der Kapazität der Kanten gemacht. In vielen praktischen Fragestellungen des optimalen Netzwerkentwurfs dient das Netzwerk dem Transport eines oder mehrerer Güter. Beispiele hierfür sind

Telekommunikationsnetzwerke (vgl. [Hassin et al., 2000], [Sivaraman, 2007]), Transport- bzw. Logistiknetzwerke sowie Energie- und Wasserversorgungsnetze. Für solche Netzwerke muss in der Regel sichergestellt werden, dass die Kapazität der Verbindungen ausreichend für den Transport des Gutes von den Quellen zu den Senken ist. Je nach Fragestellung kann die Kapazität einer Kante erhöht werden, wobei dies mit Kosten verbunden ist.

Für die Fragestellung des optimalen Fernwärmenetzausbaus spielen Kapazitätsbeschränkungen ebenfalls eine Rolle, da die Leitungen jeweils nur eine begrenzte Übertragungskapazität aufweisen. Die wesentlichen hydraulischen Kennwerte, welche die Kapazität eines Rohres beschreiben, umfassen die Fließgeschwindigkeit sowie den Druckverlust. Beide hängen negativ von dem Rohrdurchmesser ab, somit steigt die Übertragungskapazität einer Leitung bei steigendem Rohrdurchmesser (s. Kapitel 3). Da die Verlegekosten einer Leitung ebenfalls mit dem Rohrdurchmesser steigen, müssen Kapazitätsbeschränkungen berücksichtigt werden, damit die Investitions- bzw. Verlegekosten nicht unterschätzt werden.

Das kapazitätsbeschränkte Netzwerkentwurfproblem (*Capacitated Network-Design Problem*) kann wie folgt beschrieben werden:

#### Problemstellung Kapazitätsbeschränkter Netzwerkentwurf

Sei  $G = (V, E)$  ein ungerichteter zusammenhängender Graph, mit Knoten  $V$  und Kanten  $E \subseteq (V, V)$ . Jeder Kante  $(i, j) \in E$  ist ein Gewicht  $c_{i,j}(f_{i,j}^{MAX}) \in \mathbb{R}^+$  zugewiesen, welches abhängig von der Kapazität  $f_{i,j}^{MAX}$  ist. Jedem Knoten  $i$  ist eine Nachfrage  $d_i \in \mathbb{R}_0^+$  zugewiesen. Zu bestimmen ist ein zusammenhängender Teilgraph  $G'$  von  $G$ , der die Summe aus den Gewichten der Kanten minimiert. Die Nachfrage an jeder Senke muss durch die Quelle  $r \in V$  gedeckt werden. Der Fluss  $f_{i,j}$  auf einer Kante darf die Kapazität der Kante nicht überschreiten.

Es gilt:

- $G' = (V', E')$  mit  $V' \subseteq V$  und  $E' \subseteq E$
- $\sum_{(i,j) \in E'} c_{i,j}(f_{i,j}^{MAX})$  ist minimal
- $G'$  ist zusammenhängend
- $c_{i,j}(f_{i,j}^{MAX}) \in \mathbb{R}^+ \quad \forall (i, j) \in E$
- $d_i \in \mathbb{R}_0^+ \quad \forall i \in V$
- $-f_{i,j}^{MAX} \leq f_{i,j} \leq f_{i,j}^{MAX} \quad \forall (i, j) \in E'$
- $f_{i,j} = 0 \quad \forall (i, j) \in E \setminus E'$
- $\sum_{(h,i) \in E'} f_{h,i} - \sum_{(i,j) \in E'} f_{i,j} = d_i \quad \forall i \in V \setminus \{r\}$

Das kapazitätsbeschränkte Netzwerkentwurfsproblem stellt ebenfalls eine Verallgemeinerung des Steiner-Problems in Graphen dar. Für den Spezialfall  $c_{i,j}(f_{i,j}^{MAX}) = c_{i,j}$ ,  $f_{i,j}^{MAX} = \infty$  und  $d_i > 0 \forall i \in K$  sind beide Fragestellungen identisch. Somit zählt auch diese Problemstellung zu den  $\mathcal{NP}$ -vollständigen Problemen.

## 5.5 Lösungsverfahren

Als  $\mathcal{NP}$ -schweres Problem sind für das Steiner-Problem in Graphen selbst in der einfachsten Form des Steiner-Baum Problems mit nicht-negativen Kantengewichten (ST) bisher keine Algorithmen bekannt, welche garantiert in polynomialer Zeit eine optimale Lösung finden. Damit sind selbst für vergleichsweise kleine Problemgrößen von wenigen Hundert Knoten und Kanten intelligente Verfahren notwendig, die eine optimale Lösung bestimmen oder zumindest approximieren.

Für die Anwendung eines geeigneten Optimierungsverfahrens muss die praktische Fragestellung zunächst in eine geeignete Modellform überführt werden. Hierzu erfolgt eine Abstraktion des Realproblems in ein Optimierungsmodell, welches eine Zielfunktion, Entscheidungsvariablen sowie Restriktionen umfasst (vgl. [Suhl und Mellouli, 2009] S. 6ff). Die Entscheidungsvariablen spiegeln die Freiheitsgrade des Optimierungsmodells wider und gehen mit Koeffizienten gewichtet in die Zielfunktion ein. Diese beschreibt das Optimierungsziel (z.B. Gewinnmaximierung oder Kostenminimierung). Die Restriktionen (oder Nebenbedingungen) beschreiben den zulässigen Lösungsraum. Dies können z.B. Budgetgrenzen oder Kapazitätsbeschränkungen sein.

Je nach Problemstellung lässt sich ein Realproblem gut formalisieren und durch Gleichungen beschreiben. Ist dies der Fall, bieten sich in der Regel mathematische Optimierungsverfahren zur Lösung an. Andernfalls, wenn z.B. Restriktionen eingehalten werden müssen, die sich nur unzureichend durch Gleichungen beschreiben lassen, können heuristische Optimierungsalgorithmen oder Simulationsprogramme als Lösungsmethode genutzt werden. Nachfolgend werden die wichtigsten Lösungsverfahren, welche sich für das Problem des optimalen Fernwärmeausbaus anbieten, vorgestellt.

Generell kann zwischen drei Lösungsansätzen unterschieden werden, wobei diese teilweise kombiniert zur Anwendung kommen. Mathematische Optimierungsverfahren (Abschnitt 5.5.1) bestimmen für ein Optimierungsproblem ein mathematisch bewiesenes Optimum. Sofern dieses nicht in einer angemessenen Zeit gefunden werden kann, ist aufgrund von Optimalitätsbedingungen bekannt, wie weit eine gefundene Lösung von dem globalen Optimum maximal entfernt ist. Die zweite Gruppe bilden Approximationsalgorithmen

(Abschnitt 5.5.2), welche mit einer bestimmten *Approximationsrate* eine Näherung des Optimums finden, wobei die Lösungsgüte bekannt ist. Die letzte Gruppe bilden heuristische Verfahren (Abschnitt 5.5.3), die nach einer vorgegeben Logik möglichst schnell gute (und zulässige) Lösungen für die Optimierungsaufgabe finden sollen. Die Güte einer gefundenen Lösung ist hierbei in der Regel nicht bekannt.

### 5.5.1 Mathematische Optimierung

Mathematische Optimierungsverfahren ermitteln für ein Optimierungsmodell ein mathematisch bewiesenes Optimum oder eine Approximation bekannter Güte des globalen Optimums. Je nach Struktur der Zielfunktion und der Nebenbedingungen ist zwischen linearer Optimierung (*Linear Programming*, LP), ganzzahliger (*Integer Programming*, IP) bzw. gemischt-ganzzahliger linearer Optimierung (*Mixed-Integer Programming* MIP) sowie nichtlinearer Optimierung (*Nonlinear Programming*, NLP) zu unterscheiden. Da Nichtlinearitäten für die Fragestellung des optimalen Fernwärmeausbaus keine bzw. nur eine untergeordnete Rolle spielen, werden nichtlineare Optimierungsprobleme in dieser Arbeit nicht betrachtet.

#### 5.5.1.1 Lineare Optimierung

Sofern sich die Zielfunktion sowie sämtliche Nebenbedingungen als Linearkombinationen der Entscheidungsvariablen darstellen lassen und die Entscheidungsvariablen stetig sind, spricht man von einem linearen Optimierungsproblem (LP).

Sei  $x \in \mathbb{R}^n$  der Vektor der Entscheidungsvariablen,  $c \in \mathbb{R}^n$  der Vektor der Zielfunktionskoeffizienten,  $A \in \mathbb{R}^{m,n}$  die Koeffizientenmatrix sowie  $b \in \mathbb{R}^m$  der Kapazitätenvektor (oftmals auch als *Rechte Seite* bezeichnet). Dann wird ein Optimierungsmodell der Form

$$\min c'x$$

unter den Nebenbedingungen

$$Ax \geq b$$

als lineares Optimierungsmodell (oder lineares Programm) LP bezeichnet.

Die Lösung linearer Optimierungsmodelle erfolgt im Regelfall durch den Simplex-Algorithmus (vgl. z.B. [Zimmermann, 2005] S. 77ff.) oder Innere-Punkte Verfahren (vgl. z.B. [Wright, 1997]).

Ein wesentlicher Vorteil für den praktischen Einsatz linearer Optimierungsmodelle ist die Verfügbarkeit hochoptimierter Standardsoftware (*Solver*) zur Lösung der Modelle<sup>22</sup>. Aufgrund ständiger algorithmischer Weiterentwicklungen können heute teilweise Modelle mit mehreren hunderttausend Variablen und Nebenbedingungen in akzeptabler Zeit gelöst werden. Kleine und mittlere Modelle mit wenigen hundert oder tausend Variablen oftmals im Sekundenbereich. Eine Übersicht der Fortschritte bei der Lösung linearer Optimierungsmodelle wird in [Bixby, 2002] gegeben.

Die Nachteile bei der Verwendung der linearen Optimierung zur Lösung von realen Optimierungsproblemen bestehen im Wesentlichen in den restriktiven Anforderungen an die Modellstruktur. Neben der Bedingung, dass sowohl in der Zielfunktion als auch in sämtlichen Restriktionen lediglich Linearkombinationen der Entscheidungsvariablen zulässig sind, verhindert insbesondere die Anforderung der Stetigkeit sämtlicher Variablen häufig eine adäquate Abbildung eines Optimierungsproblems als LP. So ist es beispielsweise nicht möglich binäre Entscheidungen als LP zu modellieren. Für das Steiner-Problem bedeutet dies, dass die Entscheidung, ob eine Kante Teil der Lösung ist, nicht durch ein LP bestimmt werden kann. Diese Einschränkung der linearen Optimierung wird durch die ganzzahlige bzw. gemischt-ganzzahlige lineare Optimierung überwunden.

#### 5.5.1.2 Gemischt-ganzzahlige lineare Optimierung

Die gemischt-ganzzahlige lineare Optimierung erweitert die lineare Optimierung um die Möglichkeit für bestimmte Entscheidungsvariablen lediglich ganzzahlige oder binäre Werte zuzulassen. Dies vergrößert den Modellierungsspielraum erheblich, da insbesondere binäre Entscheidungsprobleme formuliert werden können, die in der Praxis häufig vorkommen (z.B. Modelle mit Fixkosten). Sofern alle Entscheidungsvariablen auf ganzzahlige Werte beschränkt werden, handelt es sich um ein ganzzahliges lineares Optimierungsproblem (*Integer Program*, IP). Sofern nur bestimmte Entscheidungsvariablen die Ganzzahligkeitsbedingung aufweisen, spricht man von einem gemischt-ganzzahligen linearen Optimierungsproblem (*Mixed-Integer Program*, MIP). Hinsichtlich ihrer Komplexität unterscheiden sich beide Modellklassen nicht und werden nachfolgend synonym verwendet, sofern die Unterscheidung keine wesentliche Rolle spielt.

---

<sup>22</sup> Für eine Übersicht der wichtigsten Solver vgl. [Suhl und Mellouli, 2009] S. 80ff.



Sei  $x \in \mathbb{Z}^n$  der Vektor der Entscheidungsvariablen,  $c \in \mathbb{R}^n$  der Vektor der Zielfunktionskoeffizienten,  $A \in \mathbb{R}^{m,n}$  die Koeffizientenmatrix sowie  $b \in \mathbb{R}^m$  der Kapazitätenvektor. Dann wird ein Optimierungsmodell der Form

$$\min c'x$$

unter den Nebenbedingungen

$$Ax \geq b$$

als ganzzahliges lineares Optimierungsmodell (IP) bezeichnet.

MIP-Modelle gehören im Gegensatz zu den LP-Modellen zur Klasse der  $\mathcal{NP}$ -vollständigen Probleme (vgl. [Suhl und Mellouli, 2009] S. 136). Ein Algorithmus, welcher garantiert eine optimale Lösung in polynomialer Laufzeit erreicht, ist somit nicht bekannt. Dennoch wurden Verfahren entwickelt, die in der Praxis eine Vielzahl – auch großer – MIP-Modelle optimal lösen.

Die gebräuchlichsten Verfahren zur Lösung von MIP-Modellen sind *Branch-and-Bound* (B&B) bzw. *Branch-and-Cut* Algorithmen (B&C). Beiden Verfahren basieren auf der *LP-Relaxierung* des MIP-Modells. Diese entspricht dem äquivalenten LP, wenn die Ganzzahligkeitsbedingungen des MIP aufgehoben werden. Nach Lösung der LP-Relaxierung wird geprüft, ob ganzzahlige Variablen in der optimalen Lösung fraktionelle Werte aufweisen. Ist dies der Fall, wird im Branch-and-Bound Verfahren das LP in zwei Unterprobleme geteilt, welche die aktuelle fraktionelle Lösung für eine Variable verbieten. Nimmt beispielsweise die diskrete Variable  $x_1$  in der optimalen Lösung der LP-Relaxierung den Wert 1,5 an, werden zwei Subprobleme mit der Nebenbedingung  $x_1 \leq 1$  bzw.  $x_1 \geq 2$  hinzugefügt. Hieraus entsteht ein Lösungsbaum, welcher sämtliche noch zu untersuchende Teilprobleme enthält. Verzweigungen in Teilprobleme können auch aufgrund besonderer Variablenrestriktionen (z.B. SOS-Variablen<sup>23</sup>) erfolgen. Damit nur ein Bruchteil der möglichen Teilprobleme untersucht werden muss, werden an jedem Knoten des Lösungsbaums bestimmte Optimalitätsbedingungen geprüft. So kann ein Teilbaum komplett entfallen, sofern die LP-Relaxierung des obersten Teilproblems keine zulässige Lösung aufweist. Da sämtliche nachfolgenden Teilprobleme zusätzliche Restriktionen enthalten, können diese ebenfalls keine zulässige Lösung aufweisen. Darüber hinaus wird an jedem Knoten die lokale untere Schranke (bei Minimierung) gespeichert. Diese entspricht dem Zielfunktionswert der optimalen Lösung der zugehörigen LP-Relaxierung.

<sup>23</sup> SOS: *Special Ordered Set* bezeichnet eine Variablenmenge mit Ordnungsstruktur für die besondere Bedingungen gelten, die der Solver im B&B-Algorithmus berücksichtigen kann. Eine Erläuterung der unterschiedlichen SOS-Mengen findet sich in [Kallrath, 2013] S. 147ff.

Sobald eine zulässige ganzzahlige Lösung gefunden wurde, bildet der Zielfunktionswert dieser Lösung eine globale obere Schranke (bei Minimierung). Sämtliche Teilbäume, deren untere Schranke größer als die globale obere Schranke ist, müssen dann ebenfalls nicht mehr untersucht werden. Im Verlauf des Algorithmus nähern sich die globale untere und obere Schranke an, da die untere Schranke aufgrund unzulässiger Lösungen steigt und die obere Schranke durch verbesserte ganzzahlige Lösungen sinkt. Die (relative) Differenz zwischen oberer und unterer Schranke wird als Ganzzahligkeitslücke (*integrality gap*) bezeichnet. Diese gibt an, wie stark die beste gefundene ganzzahlige Lösung (obere Schranke) maximal von dem globalen Optimum (untere Schranke) entfernt ist.

Die Ganzzahligkeitslücke zeigt einen großen Vorteil der ganzzahligen Optimierung gegenüber heuristischen Lösungsverfahren. Die Lösungsgüte einer gefundenen ganzzahligen Lösung ist stets bekannt. Damit kann der Algorithmus gegebenenfalls abgebrochen werden, sobald eine hinreichende Lösungsgüte ( $GAP^{MAX}$ , z.B. 3 %) erreicht wurde. In vielen Fällen kann dadurch die Laufzeit stark verkürzt werden. Sei bei einem Minimierungsproblem  $Z^{LB}(LP)$  die minimale zulässige Lösung der LP-Relaxierung in dem B&B-Baum (die globale untere Schranke) und  $Z^{UB}(IP)$  die minimale, bereits gefundene ganzzahlige Lösung (die globale obere Schranke). Dann kann der B&B-Prozess abgebrochen werden, sofern gilt<sup>24</sup>:

$$\frac{|Z^{LB}(LP) - Z^{UB}(IP)|}{1 + |Z^{UB}(IP)|} \leq GAP^{MAX}$$

Ein wichtiger Faktor zu Reduzierung der Lösungsdauer eines MIP-Modells ist die *Strenge* oder *Schärfe* der zugehörigen LP-Relaxierung. Damit möglichst wenige Variablen fraktionale Werte aufweisen, ist ein MIP-Modell so zu formulieren, dass bereits in der LP-Relaxierung eine Vielzahl fraktioneller Werte aus dem Lösungsraum abgeschnitten werden. Im (theoretischen) Idealfall entspricht die LP-Relaxierung eines MIP dessen konvexer Hülle. Je besser die LP-Relaxierung die konvexe Hülle eines MIP approximiert, desto *schärfer* oder *strenger* ist diese. Die Erweiterung des B&B-Algorithmus um die automatisierte Generierung solcher Schnitte an den Verzweigungsknoten wird als B&C-Algorithmus bezeichnet.

Obwohl im schlechtesten Fall die Anzahl der zu untersuchenden Teilprobleme eines B&B-Baumes exponentiell mit der Problemgröße wächst, zeigt sich, dass eine Vielzahl auch sehr großer MIP-Modelle mit diesem Verfahren optimal gelöst werden kann. Darüber hinaus kann in vielen Fällen der B&B bzw. B&C-Algorithmus frühzeitig terminiert werden,

---

<sup>24</sup> Der Term +1 in dem Nenner dient der korrekten Behandlung des Falles  $Z^{UB}(IP) = 0$ .

sobald die Ganzzahligkeitslücke die geforderte Genauigkeit unterschreitet. Ein weiterer Vorteil der linearen und ganzzahligen Optimierung besteht in der Möglichkeit eine Vielzahl – auch sehr komplexer – Nebenbedingungen gleichzeitig in dem Modell zu berücksichtigen. Insbesondere bei komplexen Abhängigkeiten oder einer hohen Kombinatorik kann die algorithmische Überprüfung von Restriktionen in einer Lösungsheuristik oder einem Approximationsalgorithmus sehr aufwendig werden. Durch die Integration dieser Nebenbedingungen in die mathematische Modellformulierung wird die Lösungskomplexität stark reduziert und weitgehend in den Solver verlagert.

### 5.5.2 Approximationsalgorithmen

Approximationsalgorithmen finden für ein Optimierungsproblem in polynomialer Laufzeit eine Lösung mit bekannter Güte. D.h. für eine Lösung wird bestimmt, wie weit diese maximal von dem globalen Optimum abweicht. Das Verhältnis von gefundener Lösung zu der unteren Schranke (bei Minimierung; obere Schranke bei Maximierung) des globalen Optimums wird als *Approximationsgüte* oder *Approximationsfaktor* bezeichnet. Sei  $A(i)$  der Wert einer durch Algorithmus  $A$  gefundenen Lösung für die Instanz  $i$  eines Optimierungsproblems und  $OPT(i)$  der Wert der optimalen Lösung dieser Probleminstanz (bzw. dessen unterer oder oberer Schranke), dann bezeichnet

$$\delta_A(i) = \frac{A(i)}{OPT(i)} \quad \text{für } OPT(i) > 0 \quad (5.1)$$

die Approximationsgüte (bzw. den Approximationsfaktor) von Algorithmus  $A$  für die Probleminstanz  $i$  (vgl. [Jansen und Margraf, 2008] S. 12). Bei Maximierungsproblemen gilt folglich immer  $\delta(i) \leq 1$ , bei Minimierungsproblemen  $\delta(i) \geq 1$  (unter der Annahme positiver Zielfunktionswerte). In der Regel hängt die Approximationsgüte von der Eingabegröße des Optimierungsproblems ab. Daher ist hauptsächlich die Approximationsrate  $\rho(n)$  von Interesse. Diese ist für eine Eingabegröße  $n$  definiert<sup>25</sup> als:

$$\max \left( \frac{A(i)}{OPT(i)}, \frac{OPT(i)}{A(i)} \right) \leq \rho(n) \quad \text{für } OPT(i) > 0 \quad (5.2)$$

Durch die Maximumfunktion ist es bei dieser Definition unerheblich, ob es sich um ein Maximierungs- oder Minimierungsproblem handelt, in jedem Fall gilt  $\rho \geq 1$  (wiederum

unter der Annahme positiver Zielfunktionswerte).<sup>25</sup> Im Falle  $\rho = 1$  entspricht die gefundene Lösung dem Optimum, mit wachsendem  $\rho$  entfernt sich die Lösung immer stärker von der optimalen Lösung. Ein Algorithmus, welcher für ein Optimierungsproblem als Eingabe neben dem eigentlichen Optimierungsproblem einen Wert  $\epsilon > 0$  als Eingabe annimmt, so dass gilt  $\rho \leq (1+\epsilon)$  wird *Approximationsschema* (*Polynomial-time approximation Scheme*) genannt.

Algorithmen, deren Laufzeit sich auch mit steigender Approximationsgüte polynomial verhält, die also zusätzlich polynomiell in  $1/\epsilon$  sind, werden als vollständige Approximationsschemata (*fully polynomial-time approximation scheme*) bezeichnet (vgl. [Jansen und Margraf, 2008] S. 150 und [Cormen et al., 2001] S. 1023).

Ein wesentlicher Bestandteil bei dem Entwurf eines Approximationsalgorithmus ist die Bestimmung unterer (bei Minimierung) bzw. oberer Schranken (bei Maximierung) des Zielfunktionswertes der optimalen Lösung, um eine Angabe zur Lösungsgüte machen zu können. Im Gegensatz zu einer Lösungsheuristik ist vor dem Entwurf eines Approximationsalgorithmus demnach zwingend eine mathematische Problemanalyse durchzuführen. Ein wichtiger Vorteil von Approximationsalgorithmen, der sich aus der Bestimmung der Lösungsgüte ergibt, ist das klar definierte Abbruchkriterium: Sobald die angestrebte Approximationsgüte erreicht ist, kann der Algorithmus beendet werden.

### 5.5.3 Heuristiken

Die Begriffe Heuristik bzw. heuristische Verfahren sind nicht einheitlich definiert, da diese teilweise auch in Kombination mit exakten mathematischen Lösungsverfahren genutzt werden. In Anlehnung an [Zimmermann, 2005] (S. 272ff.) können Heuristiken gegenüber anderen Optimierungsverfahren durch die nachfolgenden drei Eigenschaften abgegrenzt werden:

#### 1. Ausschluss potentieller Lösungen

Um den Lösungsaufwand zu begrenzen, werden nicht alle möglichen Lösungen untersucht. Es werden potentielle Lösungen von der Suche ausgenommen, ohne ausschließen zu können, dass sich darunter gültige Lösungen oder das Optimum befinden. Es kann somit der Fall eintreten, dass keine zulässigen Lösungen gefunden werden, obwohl diese existieren.

<sup>25</sup> Diese Definition ist [Cormen et al., 2001] S. 1022f entnommen. Eine Erweiterung der Formel für die Behandlung negativer Zielfunktionswerte oder den Wert 0 ist möglich, wird hier aber analog zu [Cormen et al., 2001] aus Gründen der Übersichtlichkeit vernachlässigt.

## 2. Nicht-willkürliche Suchprozesse

Die Suche nach zulässigen bzw. besseren Lösungen erfolgt nicht willkürlich oder zufällig sondern nach festgelegten sinnvollen Regeln.

## 3. Fehlende Lösungsgarantie

Es kann keine Konvergenz des Verfahrens in ein globales Optimum garantiert werden. Darüber hinaus können keine Aussagen zu der Optimalität einer Lösung getroffen werden.

Allgemein sind Heuristiken darauf ausgelegt für ein Optimierungsproblem möglichst schnell gültige und gute Lösungen zu finden. Im Gegensatz zu Approximationsalgorithmen oder exakten mathematischen Lösungsverfahren sind die Güte einer Lösung und das Konvergenzverhalten bei Heuristiken normalerweise nicht bekannt. Ob eine Lösung „gut“ ist, lässt sich damit mangels Optimalitätsbedingungen nicht oder nur anhand von empirischen Erfahrungswerten bestimmen. Je nach Problem Instanz können Heuristiken in einem Fall schnell das globale Optimum finden, in einem anderen hingegen nur sehr schlechte Lösungen.

Heuristische Verfahren kommen im Bereich der Optimierung dennoch häufig zum Einsatz. Silver (vgl. [Silver, 2004]) gibt eine aktuelle Übersicht zu Heuristiken im Kontext von Optimierungsproblemen und führt unter anderem nachfolgende Gründe für einen sinnvollen Einsatz von Heuristiken zur Lösung von Optimierungsproblemen auf. Heuristiken bieten sich demnach an, wenn das Problem nur unzureichend durch ein mathematisches Modell abgebildet werden kann oder die Implementierung einer Heuristik deutlich einfacher und schneller umzusetzen ist. Als weitere Gründe werden eine gegebenenfalls ausreichende Lösungsgüte und eine hohe Robustheit der Ergebnisse angeführt.

*Deterministische Heuristiken* suchen mittels einer vorgegeben Logik nach guten Lösungen eines Optimierungsproblems. Bei gleichen Eingabedaten wird stets die gleiche Lösung gefunden (vgl. [Domschke und Drexel, 2007] S. 130). Aufgrund der fest vorgegeben Logik und mangels eines Optimalitätsbeweises besteht bei deterministischen Heuristiken die Gefahr der Konvergenz in ein lokales Optimum oder in Bereiche des Lösungsraumes, die keine zulässigen Lösungen enthalten.

Diese Problematik von deterministischen Heuristiken im Bereich von Optimierungsproblemen sollen sogenannte *Metaheuristiken* überwinden. Hierunter werden Verfahren verstanden, die den Suchprozess untergeordneter Optimierungsverfahren steuern (vgl. [Zimmermann, 2005] S. 298f). Metaheuristiken kommen vor allem dann zum Einsatz, wenn die Gefahr besteht, dass das eigentliche (untergeordnete) Optimierungsverfahren in lokale Optima konvergiert. Um dies zu verhindern, beinhalten Metaheuristiken in der Regel

Zufallsprozesse, welche dafür sorgen sollen, dass stets neue Bereiche des Lösungsraumes untersucht werden.

Die bekannteste Gruppe von Metaheuristiken bilden *evolutionäre Algorithmen*. Diese sind in verschiedenen Ausgestaltungen vorzufinden (z.B. *Genetische Algorithmen*, *Tabu-Search*, *Memetische Algorithmen*<sup>26</sup>), wobei der grundlegende Ablauf in der Regel ähnlich ist. Nach [Yu und Gen, 2010] (S. 6f) sind evolutionäre Algorithmen in der Regel *populationsbasiert*, *Fitness-orientiert* und *variationsgesteuert*. Unter *Population* wird eine Gruppe von Lösungen verstanden. Jede Lösung einer Population wird als Individuum bezeichnet. Die Bewertung der Individuen erfolgt anhand einer *Fitnessfunktion* (Bewertungsfunktion), wobei der Algorithmus versucht, mit jeder neuen Population die Fitness der Individuen zu erhöhen und somit bessere Lösungen zu generieren. Die Fitness-Funktion ist daher elementar für die Konvergenz eines evolutionären Algorithmus. Um eine Konvergenz in lokale Optima zu vermeiden, wird die Kreation neuer Individuen, welche auf der Kombination bestehender Individuen (Lösungen) basiert, durch einen Zufallsprozess variiert.

Die Anwendung von Metaheuristiken zur Lösung eines Optimierungsproblems empfiehlt sich in der Regel dann, wenn kein geeignetes exaktes Lösungsverfahren zur Verfügung steht.

---

<sup>26</sup> Für eine vertiefte Darstellung der verschiedenen evolutionären Algorithmen sei auf [Yu und Gen, 2010] und [Weicker, 2007] verwiesen.

## 6 Stand der Technik

Dieses Kapitel erörtert den aktuellen Stand der Technik zur Lösung der Fragestellung des optimalen Fernwärmenetzausbaus. Zunächst werden die wesentlichen theoretischen Erkenntnisse und Lösungsansätze für die in Kapitel 5 beschriebenen Steiner-Graph Probleme und das kapazitätsbeschränkte Netzwerkerweiterungsproblem dargelegt. Anschließend werden praktische Untersuchungen, welche den Ausbau und die Planung von Wärmenetzen behandeln, vorgestellt.

Aus diesen Erkenntnissen wird in Abschnitt 6.4 der Handlungsbedarf abgeleitet, welcher notwendig für eine Lösung der in Kapitel 4 dargelegten Optimierungsaufgabe einschließlich aller praxisrelevanten Randbedingungen ist.

### 6.1 Steiner-Graph Probleme

Das Steiner-Problem in Graphen ist aufgrund seines universellen Charakters Gegenstand vieler Arbeiten im Bereich der Graphen- und Optimierungstheorie. Die praktischen Anwendungsfelder umfassen vor allem klassische Netzwerkdesign- und Netzwerkerweiterungsprobleme im Bereich von Telekommunikations- und Energienetzen (vgl. z.B. [Suhl und Hilbert, 1998], [Bachhiesl et al., 2003], [Ljubic, 2004], [Voss, 2006]). Des Weiteren kann der optimale Entwurf von integrierten Schaltkreisen als Steiner-Problem ausgedrückt werden (vgl. [Ihler et al., 1999]). Gollowitzer und Ljubic (vgl. [Gollowitzer und Ljubic, 2011]) zeigen, dass die optimale Platzierung der Verteilkästen in Glasfasernetzen (*Facility-Location Problem*) ebenfalls als eine Variante des Steiner-Graph Problems ausgedrückt werden kann.

Der überwiegende Teil der Arbeiten befasst sich mit der Lösung des klassischen Steiner-Problems in Graphen (ST). Diese berücksichtigen zum einen keinen zeitlichen Ausbaupfad, zum anderen werden nur positive Kantengewichte (bzw. Knotengewichte, je nach Problemformulierung) zugelassen. Diese Arbeiten decken die Fragestellung des gewinnmaximierenden Netzausbaus somit nicht ab, da hier sowohl positive als auch negative Gewichte zu berücksichtigen sind. Letztere Einschränkung ist essentiell, da viele für das ST gültige Approximationsalgorithmen und Preprocessingroutinen bei negativen Kanten- oder Knotengewichten ihre Gültigkeit verlieren. Allerdings bilden die Lösungsansätze und Modellformulierungen des Steiner-Baum Problems oftmals die Basis für die Lösungsverfahren von allgemeinen Steiner-Graph Problemen. Im Folgenden werden daher vorwiegend

Arbeiten betrachtet, die entweder eine Verallgemeinerung des ST mit negativen Knoten- oder Kantengewichten (NWST, PCST, CSP) untersuchen oder als Ausgangspunkt für diese Lösungsansätze dienen.

Die theoretischen Grundlagen der für die Lösung von Steiner-Graph Problemen zur Anwendung kommenden Lösungsverfahren (Approximationsalgorithmen, Heuristiken und mathematische Optimierung) wurden bereits in Abschnitt 5.5 beschrieben. Nachfolgend wird dargestellt, wie die jeweiligen Verfahren auf verschiedene Varianten des Steiner Problems in Graphen angewendet wurden.

### 6.1.1 Approximationsalgorithmen

Für das NWST bzw. das PCST wurden verschiedene Algorithmen entwickelt, die Approximationen des Optimums mit einer bewiesenen maximalen Abweichung von der Optimallösung bestimmen (vgl. Abschnitt 5.5.2). Die meisten dieser Algorithmen basieren auf LP-Relaxierungen des Steiner-Problems, wodurch untere Schranken für den Zielfunktionswert ermittelt werden können. Eine generelle Methodik für die Entwicklung von Approximationsalgorithmen auf Basis von LP-Relaxierungen (*Prima-Dual Method*) wird in [Goemans und Williamson, 1997] dargestellt, unter anderem mit einem Algorithmus für das PCST.

Der Algorithmus von Goemans und Williamson (vgl. [Goemans und Williamson, 1992]) erreicht bei einer Laufzeit von  $\mathcal{O}(n^2 \log n)$  einen Approximationsfaktor von  $2 - \left(\frac{1}{n-1}\right)$ . Dieser Algorithmus wurde durch Johnson et. al ([Johnson et al., 2000]) verfeinert, wobei der (worst-case) Approximationsfaktor unverändert bleibt. Empirische Ergebnisse der Autoren deuten jedoch darauf hin, dass ihr angepasster Algorithmus in der Praxis bessere Lösungen findet.

In [Bienstock et al., 1993] wird ein Approximationsalgorithmus auf Basis einer LP-Formulierung für das PCST entwickelt, mit einem Approximationsfaktor von 3. Der Algorithmus löst insgesamt  $|V|$  LP-Relaxierungen, die jeweils durch eine Nebenbedingung einen anderen Knoten aus  $V$  in den Lösungsgraphen einbeziehen. Über eine Heuristik wird aus jeder Lösung der LP-Relaxierung ein zulässiger (nicht zwingend optimaler) Steiner-Baum konstruiert. Das Ergebnis des Algorithmus ist die Lösung mit dem kleinsten gefundenen Zielfunktionswert.



### 6.1.2 Heuristiken

Neben Approximationsalgorithmen wurden für die unterschiedlichen Varianten des Steiner Problems in Graphen verschiedene Heuristiken entwickelt. Teilweise werden diese mit Approximationsalgorithmen oder mathematischen Optimierungsverfahren (insbesondere mit der linearen Optimierung) kombiniert.

Winter (vgl. [Winter, 1987], [Winter und MacGregor Smith, 1992]) gibt einen umfangreichen Überblick über Lösungsverfahren für das Steiner-Problem in Graphen, einschließlich verschiedener Lösungsprinzipien, die sich in vielen Heuristiken wieder finden.

Das *Node-Weighted Steiner-Tree Problem* (NWST) wurde zuerst durch Segev beschrieben (vgl. [Segev, 1987]). Die Arbeit gibt für den Spezialfall, dass nur ein Knoten in der Lösung enthalten sein muss (*Single-Point Node-Weighted Steiner-Tree Problem*), eine IP-Formulierung des Problems an, die auf Flussgleichungen basiert. Als Lösungsansätze werden verschiedene Heuristiken vorgeschlagen. Eine der Heuristiken basiert auf einer Lagrange-Relaxierung der IP-Formulierung in Kombination mit der Bestimmung minimaler Spannbäume. Eine weitere Heuristik besteht in der iterativen Berechnung minimaler Spannbäume, mit sukzessiver Hinzunahme weiterer Knoten. Zusätzlich wird eine Greedy-Heuristik präsentiert, die ähnlich wie Prim's Algorithmus für minimale Spannbäume (vgl. [Prim, 1957]) funktioniert, jedoch auch die Knotengewichte berücksichtigt und nicht zwingend alle Knoten der Lösung hinzufügt. Für die verschiedenen Lösungsansätze werden Ergebnisse bis zu einer Knotenanzahl von 40 präsentiert.

Canuto et. al (vgl. [Canuto et al., 2001]) schlagen eine Metaheuristik (*multi-start local search algorithm*) für die Optimierung des PCST vor. Dieser Algorithmus besteht aus mehreren Komponenten. Für die Generierung von Startlösungen wird der Approximationsalgorithmus von Goemans und Williamson (vgl. [Goemans und Williamson, 1992]) verwendet. Dabei wird zunächst eine Vielzahl unterschiedlicher Lösungen generiert, indem die Knotengewichte vor Durchführung des Algorithmus von Goemans und Williamson zufällig variiert werden. Jede Lösung durchläuft anschließend einen *local search* Algorithmus, der versucht, die Lösung durch sequentielle lokale Änderungen (Hinzufügen oder Entfernen von Knoten und Kanten) zu verbessern. Gute Lösungen werden in einem Pool gespeichert und ähnlich zu evolutionären Algorithmen (s. Abschnitt 5.5.3) miteinander kombiniert, um weitere Verbesserungen zu erreichen. Der Algorithmus terminiert nach einer vorgegebenen Iterationsanzahl und gibt die beste gefundene Lösung aus, wobei diese vorher noch eine Postprocessing-Routine durchläuft. Die Ergebnisse wurden mit verschiedenen

Benchmarkinstanzen überprüft. Gegenüber dem Algorithmus von Goemans und Williamson können teilweise deutlich bessere Lösungen gefunden werden.

Ljubić (vgl. [Ljubic, 2004]) hat ebenfalls eine Metaheuristik zur Lösung des PCST entworfen. Ihr *memetischer Algorithmus*<sup>27</sup> kombiniert den populationsbasierten Ansatz evolutionärer Algorithmen mit heuristischen Verfahren zur lokalen Verbesserung der gefundenen Lösung. Für die Erzeugung der Startpopulation (s. Abschnitt 5.5.3) wird eine Heuristik verwendet, die auf der Bestimmung minimaler Spannbäume von zufällig erzeugten Teilgraphen basiert. Die Lösungen werden dann miteinander zu neuen Lösungen kombiniert (Rekombination). Anschließend erfolgt die Verbesserung der Lösungen (*local improvement*) durch eine Heuristik, welche suboptimale Teilbäume des jeweiligen Spannbaums identifiziert und eliminiert. Die verbesserten Lösungen werden dann der Population hinzugefügt und wiederum selektiert und rekombiniert. Der Algorithmus terminiert, wenn eine bestimmte Anzahl von Generationen ohne Verbesserung des Zielfunktionswertes berechnet wurde. Durch Benchmarks zeigt Ljubić, dass ihr Algorithmus deutlich schneller als der Ansatz von Canuto et. al konvergiert. Die Lösungsgüte ist jedoch geringfügig schlechter.

### 6.1.3 Mathematische Optimierung

Im Bereich der exakten Lösungsverfahren kommen bei Steiner-Graph Problemen und verwandten Netzwerkdesign- oder Netzwerkflussproblemen überwiegend die lineare oder ganzzahlige bzw. gemischt-ganzzahlige lineare Optimierung (s. Abschnitt 5.5.1) zum Einsatz.

In bestimmten Fällen ist auch im Bereich des Netzwerkdesigns der Einsatz nichtlinearer mathematischer Optimierungsmethoden erforderlich. Hierzu zählen z.B. die Berücksichtigung hydraulischer Randbedingungen bei Energie- und Wasserversorgungsnetzen (vgl. [Bragalli et al., 2012]) oder die endogene Mengen-Preisbestimmung bei der Erweiterung von Telekommunikationsnetzwerken (vgl. [Bienstock et al., 2006]). Von solchen nichtlinearen Problemerkweiterungen wird jedoch für die Fragestellung des wirtschaftlich optimalen Fernwärmenetzausbaus abgesehen. Zum einen ist für die Bestimmung der Wirtschaftlichkeit des Netzausbaus die hydraulische Leistungsfähigkeit des Netzes nur von untergeordneter Bedeutung. Zum anderen weisen nichtlineare Optimierungsverfahren in der Regel eine deutlich schlechtere Lösungsperformance auf als lineare Verfahren und können für größere Instanzen oftmals nicht mehr gelöst werden. Daher werden nur Arbeiten betrachtet, die IP- bzw. MIP-Formulierungen des Steiner-Problems in Graphen behandeln.

---

<sup>27</sup> Memetische Algorithmen werden z.B. in [Weicker, 2007] S. 163ff. beschrieben.

### 6.1.3.1 Übersicht

Es gibt eine Vielzahl verschiedener Möglichkeiten, wie das Steiner-Problem als Integer- oder Mixed-Integer-Problem formuliert werden kann. Die in der Literatur veröffentlichten Problemformulierungen lassen sich in zwei große Klassen einteilen: Flussbasierte Ansätze sowie Branch-and-Cut basierte Lösungsansätze. Für das klassische Steiner-Baum Problem (ST) wird in [Polzin und Daneshmand, 2001] bzw. [Polzin, 2003] sowie in [Goemans und Myung, 1993] eine umfangreiche Übersicht der verschiedenen Modellierungsansätze gegeben. Die gängigsten Modellierungen umfassen:

#### 1. Flussformulierungen

Ausgehend von einem speziellen Wurzelknoten wird über einen Netzwerkfluss und entsprechende Flussvariablen sichergestellt, dass sämtliche Basisknoten ( $K$ ) mit dem Wurzelknoten verbunden sind. Flussformulierungen des Problems werden in der Literatur sowohl in aggregierter Form (*Single-Commodity-Flow*) als auch in disaggregierter Form (*Multi-Commodity-Flow*) vorgeschlagen.

#### 2. Connectivity-Cut Formulierungen

Über Nebenbedingungen wird sichergestellt, dass keine trennenden Schnitte zwischen den Basisknoten (bzw. den Basisknoten und einem Wurzelknoten) bestehen. Da die Anzahl der möglichen Schnitte in einem Graphen exponentiell mit der Anzahl der Kanten steigt, können diese Nebenbedingungen nur sukzessive (z.B. in einem Branch-and-Cut Algorithmus) dem Modell hinzugefügt werden. Eine Lösung ist daher nur iterativ möglich.

#### 3. Subtour-Elimination Constraints

Dieser an das *Travelling-Salesman Problem*<sup>28</sup> angelehnte Modellierungsansatz stellt über Nebenbedingungen sicher, dass der (gerichtete) Lösungsgraph keine isolierten Zyklen (*Subtour*) enthält. Damit kann der Zusammenhang des Graphen durch weitere Nebenbedingungen sichergestellt werden. Analog zu den Connectivity-Cut Formulierungen kann auch dieser Modellierungsansatz nur iterativ durch einen Branch-and-Cut Algorithmus gelöst werden, da wiederum eine exponentielle Anzahl möglicher Zyklen in einem Graphen existiert.

Chopra und Rao (vgl. [Chopra und Rao, 1994a] und [Chopra und Rao, 1994b]) zeigen, dass IP-Formulierungen des Steiner-Baum Problems in gerichteten Graphen (DST) strengere

<sup>28</sup> Das *Travelling-Salesman Problem* (Problem des Handlungsreisenden) beschreibt die Optimierungsaufgabe eine Reihenfolge für den Besuch mehrerer Städte (einschließlich Rückkehr zu dem Startpunkt) zu bestimmen, welche die zurückgelegte Strecke minimiert (vgl. z.B. [Dantzig et al., 1954]).

LP-Relaxierungen aufweisen, als vergleichbare IP-Formulierungen für das Steiner-Baum Problem in ungerichteten Graphen (ST). Darüber hinaus können bestimmte Nebenbedingungen nur für gerichtete Graphen effizient formuliert werden. Die meisten Arbeiten, welche das Steiner-Problem in Graphen als IP-Modelle formulieren, beschränken sich daher auf den gerichteten Fall. Da, wie bereits in Abschnitt 5.3.2 gezeigt, jedes Steiner-Problem in ungerichteten Graphen in ein Steiner-Problem in gerichteten Graphen überführt werden kann, wird nachfolgend auf die Lösung der Problemstellung für gerichtete Graphen fokussiert.

Für die verschiedenen Modellierungsansätze wird jeweils die in der Literatur beschriebene Formulierung des klassischen Steiner-Baum Problems dargestellt und anschließend die relevanten Verallgemeinerungen (PCST, CSP, MSP). Insbesondere die Problemstellung als PCST (bzw. äquivalentes NWST) ist Gegenstand vieler Arbeiten (vgl. [Segev, 1987], [Bienstock et al., 1993], [Canuto et al., 2001], [Johnson et al., 2000], [Ljubic, 2004] bzw. [Ljubic et al., 2006] sowie [Lucena und Resende, 2004] bzw. [Lucena et al., 2009]), während die Formulierung als CSP bzw. MSP hauptsächlich auf [Suhl und Hilbert, 1998] zurück geht.

Für eine bessere Vergleichbarkeit der Modelle werden diese in eine einheitliche Form überführt, auch wenn diese teilweise von der Originalformulierung abweicht. Sämtliche Modelle werden mit einem Wurzelknoten definiert, da die meisten Modellformulierungen einen Wurzelknoten voraussetzen. Für das klassische Steiner-Baum Problem kann ein beliebiger Basisknoten als Wurzelknoten fungieren, da alle Basisknoten in dem Lösungsgraphen enthalten sein müssen. Für das PCST wird dem Modell ein künstlicher Wurzelknoten hinzugefügt, der über Kanten, die ein Gewicht von null zugewiesen bekommen, mit allen Zielknoten (Knoten mit Gewicht  $\neq 0$ ) verbunden ist.

Abweichend von Kapitel 5 gelten daher die nachfolgenden einheitlich definierten Problemformulierungen:

### Problemstellung ST

Sei  $\vec{G} = (V, A)$  ein gerichteter Graph mit Knoten  $V$  und Pfeilen  $A \subseteq (V, V)$ . Sei  $r \in K$  der Wurzelknoten. Den Pfeilen sind Kosten  $c_{i,j} \in \mathbb{R}_0^+$  zugewiesen. Sei  $\vec{G}' = (V', A')$  mit  $V' \subseteq V, A' \subseteq A$  ein kostenminimaler Teilgraph von  $\vec{G}$ , der den Wurzelknoten sowie alle Knoten aus  $K \subseteq V$  aufspannt.

Die Variable  $y_{i,j} \in \{0, 1\}$  gibt an, ob eine Kante Teil der Lösung ist:

$$y_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } (i,j) \in A' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \forall (i,j) \in A \quad (6.1)$$

**Problemstellung PCST**

Sei  $\vec{G} = (V, A)$  ein gerichteter Graph mit Knoten  $V$  und Pfeilen  $A \subseteq (V, V)$ . Sei  $r \in V$  der Wurzelknoten. Den Pfeilen sind Kosten  $c_{i,j} \in \mathbb{R}_0^+$ , den Knoten Gewinne  $p_i \in \mathbb{R}_0^+$  zugewiesen. Die Menge  $R \subseteq V$  umfasst alle Knoten mit einem Gewicht  $> 0$  (Zielknoten). Jeder Zielknoten ist mit dem Wurzelknoten über eine künstliche Kante mit Gewicht 0 verbunden. Gesucht ist ein Teilgraph  $\vec{G}' = (V', A')$  von  $\vec{G}$  mit  $r \in V' \subseteq V$  und  $A' \subseteq A$ , der die Differenz aus Kantenkosten und Knotengewinnen minimiert.

Die Variable  $y_{i,j} \in \{0, 1\}$  gibt an, ob eine Kante Teil der Lösung ist,  $z_v \in \{0, 1\}$  ob ein Knoten Teil der Lösung ist:

$$y_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } (i, j) \in A' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \forall (i, j) \in A \quad (6.2)$$

$$z_v = \begin{cases} 1 & \text{wenn } v \in V' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \forall v \in V \quad (6.3)$$

**Problemstellung CSP**

Sei  $\vec{G} = (V, A)$  ein gerichteter Graph mit Knoten  $V$  und Pfeilen  $A \subseteq (V, V)$ . Sei  $r \in V$  der Wurzelknoten. Den Pfeilen sind Kosten  $c_{i,j} \in \mathbb{R}$  zugewiesen. Gesucht ist ein Teilgraph  $\vec{G}' = (V', A')$  von  $\vec{G}$  mit  $r \in V' \subseteq V$  und  $A' \subseteq A$ , der die Summe aus (positiven und negativen) Kantenkosten minimiert.

Die Variable  $y_{i,j} \in \{0, 1\}$  gibt an, ob eine Kante Teil der Lösung ist:

$$y_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } (i, j) \in A' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \forall (i, j) \in A \quad (6.4)$$

**6.1.3.2 Single-Commodity-Flow Formulierung****6.1.3.2.1 ST**

Flussformulierungen des Steiner-Baum Problems basieren auf der Modellierung von Netzwerkflüssen. Ausgehend von dem Wurzelknoten ( $r$ ) wird über Flussvariablen gewährleistet, dass jeder Basisknoten aus  $K$  mit dem Wurzelknoten verbunden ist.

An jedem Steinerknoten wird sichergestellt, dass der eingehende Fluss dem ausgehenden Fluss entspricht. An jedem Basisknoten muss der eingehende Fluss den Wert eins aufweisen, da die optimale Lösung stets ein Baum ist, dessen Blätter die Basisknoten bilden. Daher weisen diese keinen ausgehenden Fluss auf. Ein Fluss auf einer Kante ist nur zulässig sofern diese Teil der Lösung ist.

Für das gerichtete Steiner-Baum Problem ergibt sich nachfolgende MIP-Formulierung als Eingüter-Netzwerkflussproblem (*Single-Commodity-Flow Problem*), wobei die Variable  $f_{i,j} \in \mathbb{R}_0^+$  den Fluss auf einer Kante angibt.

$$\min \sum_{(i,j) \in A} c_{i,j} \cdot y_{i,j} \quad (6.5)$$

Unter den Nebenbedingungen:

$$\sum_{(r,j) \in A} f_{r,j} = |K| - 1 \quad (6.6)$$

$$\sum_{(h,i) \in A} f_{h,i} = 1 \quad \forall i \in K \setminus \{r\} \quad (6.7)$$

$$\sum_{(h,i) \in A} f_{h,i} - \sum_{(i,j) \in A} f_{i,j} = 0 \quad \forall i \in V \setminus K \quad (6.8)$$

$$f_{i,j} \leq y_{i,j} \cdot (|K| - 1) \quad \forall (i,j) \in A \quad (6.9)$$

Gleichung (6.6) gibt an, dass der abgehende Fluss des Wurzelknotens genau der Anzahl der übrigen Basisknoten entspricht.

Nebenbedingung (6.7) stellt sicher, dass jeder Basisknoten (mit Ausnahme des Wurzelknotens) mit einer Einheit des Gutes versorgt wird und damit Teil des Lösungsgraphen ist. Für alle Steinerknoten muss der eingehende Fluss dem ausgehenden Fluss entsprechen, damit der Graph zusammenhängend ist, was durch (6.8) gewährleistet wird.

Eine Kante darf nur einen Fluss  $\neq 0$  aufweisen, wenn diese Teil des Lösungsgraphen ist. Dies wird durch Gleichung (6.9) ausgedrückt, wobei die Anzahl der Basisknoten (ohne Wurzelknoten) die obere Grenze des Netzwerkflusses darstellt.

Aufgrund der vergleichsweise schwachen LP-Relaxierung der *Single-Commodity-Flow* Formulierung (s. nächster Abschnitt) hat sich diese nicht als Lösungsansatz für das Steiner-Baum Problem durchgesetzt. Im Kontext des PCST wird diese Formulierung z.B. durch [Segev, 1987] verwendet.

#### 6.1.3.2.2 PCST

Analog kann die Modellformulierung für das PCST genutzt werden:

$$\min \sum_{(i,j) \in A} c_{i,j} \cdot y_{i,j} - \sum_{i \in V} p_i \cdot z_i \quad (6.10)$$

Unter den Nebenbedingungen:

$$\sum_{(r,j) \in A} y_{r,j} = 1 \quad (6.11)$$

$$\sum_{(r,j) \in A} f_{r,j} = \sum_{i \in R} z_i \quad (6.12)$$

$$\sum_{(h,i) \in A} y_{h,i} = z_i \quad \forall i \in V \setminus \{r\} \quad (6.13)$$

$$\sum_{(h,i) \in A} f_{h,i} - \sum_{(i,j) \in A} f_{i,j} = 0 \quad \forall i \in V \setminus R \setminus \{r\} \quad (6.14)$$

$$\sum_{(h,i) \in A} f_{h,i} - \sum_{(i,j) \in A} f_{i,j} = z_i \quad \forall i \in R \quad (6.15)$$

$$f_{i,j} \leq y_{i,j} \cdot |R| \quad \forall (i,j) \in A \quad (6.16)$$

Gleichung (6.11) stellt sicher, dass der Wurzelknoten nur eine ausgehende Kante aufweist. Dies ist notwendig, da alle Zielknoten mit dem Wurzelknoten über eine künstliche Kante mit Gewicht null verbunden sind. Ohne diese Nebenbedingung würde die optimale Lösung nur die künstlichen Kanten enthalten.

(6.12) setzt den ausgehenden Fluss des Wurzelknotens auf die Anzahl der in der Lösung enthaltenen Zielknoten. Durch Gleichung (6.13) wird sichergestellt, dass Knoten Teil der Lösung sind, wenn diese einen eingehenden Fluss aufweisen. (6.14) und (6.15) beschreiben die Flussgleichungen für die Steinerknoten bzw. die Zielknoten. Gleichung (6.16) stellt wiederum sicher, dass nur Kanten einen Fluss aufweisen, wenn diese Teil der Lösung sind. Die Flussformulierung kann mit leichten Abweichungen auch für das CSP genutzt werden. In Kapitel 7 wird diese ausführlich beschrieben.

### 6.1.3.3 Multi-Commodity-Flow Formulierung

#### 6.1.3.3.1 ST

In [Beasley, 1984] und [Wong, 1984] wird das Steiner-Baum Problem als Mehrgüterflussproblem (*Multi-Commodity-Flow Problem*) formuliert. Anstelle eines Netzwerkflusses, welcher sämtliche Basisknoten versorgt, wird dem Modell für jeden Basisknoten ein eigenes „Gut“ hinzugefügt.

Das gerichtete Steiner-Baum Problem kann somit als nachfolgendes Integer-Optimierungsproblem ausgedrückt werden, wobei die Variable  $f_{i,j,k} \in \{0, 1\}$  den Fluss des Gutes  $k$  auf dem Pfeil  $(i, j)$  angibt.

$$\min \sum_{(i,j) \in A} c_{i,j} \cdot y_{i,j} \quad (6.17)$$

Unter den Nebenbedingungen:

$$\sum_{(r,j) \in A} f_{r,j,k} = 1 \quad \forall k \in K \setminus \{r\} \quad (6.18)$$

$$\sum_{(h,i) \in A} f_{h,i,i} - \sum_{(i,j) \in A} f_{i,j,i} = 1 \quad \forall i \in K \setminus \{r\} \quad (6.19)$$

$$\sum_{(h,i) \in A} f_{h,i,k} - \sum_{(i,j) \in A} f_{i,j,k} = 0 \quad \forall k \in K \setminus \{r\}, i \in V \setminus \{r, k\} \quad (6.20)$$

$$f_{i,j,k} \leq y_{i,j} \quad \forall (i, j) \in A, k \in K \setminus \{r\} \quad (6.21)$$

Gleichung (6.18) besagt, dass von dem Wurzelknoten genau eine Einheit von jedem Gut gesendet wird.

Gleichung (6.19) drückt aus, dass an jedem Basisknoten  $i$  genau eine Einheit des zugehörigen Gutes  $i$  entnommen wird. Da die Basisknoten immer Blätter des optimalen Steiner-Baums sind, weisen diese keinen abgehenden Fluss auf.

Die Flussgleichung (6.20) stellt sicher, dass an jedem Knoten für jedes Gut der eingehende Fluss dem ausgehenden Fluss entspricht, sofern es sich nicht um den zu dem Gut gehörenden Basisknoten handelt. Durch diese Nebenbedingungen ist gewährleistet, dass der Graph zusammenhängend ist und sämtliche Basisknoten Teil der Lösung sind. Gleichung (6.21) besagt, dass jeder Pfeil, welcher einen Fluss aufweist, Teil der Lösung ist.

Wong (vgl. [Wong, 1984]) zeigt, dass die LP-Relaxierung der Formulierung als *Multi-Commodity-Flow Problem* identisch mit der LP-Relaxierung der *Set-Covering* Formulierung (s. Abschnitt 6.1.3.6.2 bzw. [Aneja, 1980]) ist. Die LP-Relaxierung der *Connectivity-Cut* Formulierung entspricht ebenfalls der LP-Relaxierung der *Multi-Commodity-Flow* Formulierung (vgl. [Polzin, 2003]). Im Gegensatz zu der Formulierung als *Single-Commodity-Flow Problem* weist die LP-Relaxierung der *Multi-Commodity-Flow* Formulierung damit eine höhere Schärfe auf. Dies liegt in der oberen Grenze für die Flussvariablen begründet. Der Fluss jedes Guts nimmt maximal den Wert eins an, da jeweils nur an dem Basisknoten eine Einheit des zugehörigen Guts entnommen wird. Bei der Formulierung als *Single-Commodity-Flow Problem* hingegen nimmt die Flussvariable maximal den Wert  $|K| - 1$  (bzw.  $|R|$ )



bei dem PCST) an, da an allen Basisknoten (bzw. Zielknoten) eine Einheit des gemeinsamen Guts entnommen wird. Bei einer großen Anzahl von Basisknoten nimmt die obere Grenze der Flussvariablen entsprechend hohe Werte an (*Big-M*-Problematik), wodurch die LP-Relaxierung der *Single-Commodity-Flow* Formulierung entsprechend schwach sein kann. Diese Problematik stellt sich bei der Formulierung als *Multi-Commodity-Flow Problem* nicht. Damit zeigt sich, dass die zugehörige LP-Relaxierung strenger ist, als die LP-Relaxierung des *Single-Commodity-Flow Problems* (vgl. z.B. [Polzin und Daneshmand, 2001]). Die Anzahl der Variablen steigt jedoch um den Faktor  $|K| \cdot |A|$  (bzw.  $|R| \cdot |A|$ ), wodurch die Lösungsdauer des zugehörigen LP zunimmt und eine deutlich höhere Anzahl binärer Variablen durch den Branch-and-Bound Algorithmus fixiert werden muss. Insbesondere bei einer hohen Anzahl von Basis- bzw. Zielknoten kann die praktische Lösbarkeit der *Multi-Commodity-Flow* Formulierung damit nicht mehr gegeben sein.

### 6.1.3.3.2 PCST

Analog zu der *Single-Commodity-Flow* Formulierung kann auch die *Multi-Commodity-Flow* Formulierung zur Lösung des PCST genutzt werden:

$$\min \sum_{(i,j) \in A} c_{i,j} \cdot y_{i,j} - \sum_{i \in V} p_i \cdot z_i \quad (6.22)$$

Unter den Nebenbedingungen:

$$\sum_{(r,j) \in A} y_{r,j} = 1 \quad (6.23)$$

$$\sum_{(r,j) \in A} f_{r,j,k} = z_k \quad \forall k \in R \quad (6.24)$$

$$\sum_{(h,i) \in A} y_{h,i} = z_i \quad \forall i \in V \setminus \{r\} \quad (6.25)$$

$$\sum_{(h,i) \in A} f_{h,i,i} - \sum_{(i,j) \in A} f_{i,j,i} = z_i \quad \forall i \in R \quad (6.26)$$

$$\sum_{(h,i) \in A} f_{h,i,k} - \sum_{(i,j) \in A} f_{i,j,k} = 0 \quad \forall k \in R, i \in V \setminus \{k, r\} \quad (6.27)$$

$$f_{i,j,k} \leq y_{i,j} \quad \forall (i,j) \in A, k \in K \setminus \{r\} \quad (6.28)$$

Die Zielfunktion ist identisch mit der Single-Commodity-Flow Formulierung. Durch Gleichung (6.23) wird wiederum sichergestellt, dass der Wurzelknoten nur mit einem Zielknoten direkt verbunden ist. Restriktion (6.24) setzt den von dem Wurzelknoten ausgehenden Fluss des Gutes  $k$  auf den Wert eins, sofern der zugehörige Zielknoten Teil der Lösung ist. Gleichung (6.25) bewirkt, dass ein Knoten genau dann Teil der Lösung ist, wenn er eine eingehende Kante aufweist. Die Flussgleichungen (6.26) und (6.27) stellen wiederum sicher, dass sich ein- und ausgehende Flüsse entsprechen, bzw. an dem Zielknoten für ein zugehöriges Gut eine Einheit entnommen wird, wenn dieser Knoten Teil der Lösung ist. Wie bereits dargestellt, eignet sich die *Multi-Commodity-Flow* Formulierung insbesondere für Modellinstanzen mit wenigen Basisknoten  $K$  (für das ST) bzw. Zielknoten  $R$  (für das PCST), da die Variablenanzahl um den Faktor  $|K| \cdot |A|$  bzw.  $|R| \cdot |A|$  steigt. Bei der Fragestellung des optimalen Fernwärmeausbaus weist in der Regel ein großer Teil der Knoten (bzw. Kanten) Gewinne auf, weshalb sich die Formulierung als Mehrgüterflussproblem hier nicht eignet. Für die Formulierung als CSP ist die Multi-Commodity-Flow Formulierung ebenfalls weniger geeignet, da hier keine Zielknoten festgelegt werden, sondern nur gewinnbringende Kanten. Eine Umformung ist zwar möglich (analog zu der *Single-Commodity-Flow* Formulierung, s. Abschnitt 7.4.1.3) jedoch aus genannten Gründen für praktische Modellinstanzen nicht effizient.

#### 6.1.3.4 Connectivity-Cut Formulierung

##### 6.1.3.4.1 ST

Fischetti ([Fischetti, 1991]) stellt für das gerichtete Steiner-Baum Problem eine Cut-basierte IP-Formulierung vor. Der Zusammenhang des Lösungsgraphen wird hierbei nicht durch Flussgleichungen sondern explizit über Nebenbedingungen, die trennende Schnitte zwischen dem Wurzelknoten und den Basisknoten verbieten, erreicht.

$$\min \sum_{(i,j) \in A} c_{i,j} \cdot y_{i,j} \quad (6.29)$$

Unter den Nebenbedingungen:

$$\sum_{(h,i) \in A} y_{h,i} = 1 \quad \forall i \in K \setminus \{r\} \quad (6.30)$$

$$\sum_{(h,i) \in A} y_{h,i} \leq 1 \quad \forall i \in V \setminus K \quad (6.31)$$

$$\sum_{(i \in V \setminus S, j \in S) \in A} y_{i,j} \geq 1 \quad \forall S \subseteq V \setminus \{r\}, S \cap K \neq \emptyset, |S| \geq 2 \quad (6.32)$$

$$\sum_{(i \in V \setminus S, j \in S) \in A} y_{i,j} \geq \sum_{(m \in V, n \in S) \in A} y_{m,n} \quad \forall S \subseteq V \setminus K, |S| \geq 2 \quad (6.33)$$

Gleichung (6.30) stellt sicher, dass der Eingangsgrad jedes Basisknotens eins ist. Analog dazu erzwingt Gleichung (6.31) einen Eingangsgrad von (maximal) eins für alle Steinerknoten, wenn diese Teil der Lösung sind. Hierdurch wird erzwungen, dass der Lösungsgraph ein Baum ist, wobei die Basisknoten den Blättern entsprechen.

Gleichung (6.32) ist die zentrale Gleichung des Modells und stellt sicher, dass jeder Basisknoten mit dem Wurzelknoten verbunden ist. Die Gleichung besagt, dass aus jedem möglichen Schnitt, der den Wurzelknoten  $r$  von (mindestens) einem Basisknoten trennt, mindestens eine Kante Teil der Lösung sein muss. Restriktion (6.33) stellt die gleiche Anforderung an Steinerknoten, die einen Eingangsgrad von eins aufweisen und somit Teil der Lösung sind. Hierdurch wird gewährleistet, dass in dem Lösungsgraphen kein solcher Schnitt existiert, der Wurzel- und Basisknoten trennt. Es existiert jedoch eine exponentielle Anzahl (exponentiell in der Anzahl der Kanten) möglicher Schnitte in einem Graphen. Eine direkte Berücksichtigung der Nebenbedingungen (6.32) in das Optimierungsmodell ist damit nicht möglich. Diese IP-Formulierung kann somit nicht geschlossen von einem MIP-Solver gelöst werden. Für die Lösung kommt in verschiedenen Arbeiten ein spezieller Branch-and-Cut Algorithmus zum Einsatz. Dieser vernachlässigt zunächst die Nebenbedingung (6.32) und löst die LP-Relaxierung. Anschließend wird geprüft, ob Restriktion (6.32) in der optimalen Lösung der LP-Relaxierung für einen oder mehrere Basisknoten verletzt ist. Ist dies der Fall, wird die verletzte Nebenbedingung dem Modell hinzugefügt und das LP erneut gelöst.

Die Identifizierung der verletzten Nebenbedingungen erfolgt über einen *Maximum-Flow* Algorithmus (vgl. z.B. [Goldberg und Tarjan, 1988]), wobei die Kapazität einer Kante dem Wert der zugehörigen  $y_{i,j}$  Variable in der optimalen LP-Lösung entspricht. Für jeden Basisknoten wird dabei geprüft, ob der maximale Fluss von dem Wurzelknoten zu dem Basisknoten mindestens den Wert eins aufweist. Ist dies nicht der Fall, werden ein oder mehrere minimale Schnitte bestimmt. Für diese wird dann die Nebenbedingung (6.32) hinzugefügt, so dass die Summe der  $y_{i,j}$  aller Kanten des Schnittes mindestens den Wert eins annimmt. Aufgrund des *Max-Flow-Min-Cut Theorems*, nachdem der maximale Fluss in einem Netzwerk stets der Kapazität eines minimalen Schnittes in dem Graphen entspricht (vgl. z.B. [Krumke und Noltemeier, 2012] S. 204), kann die Bestimmung des maximalen Flusses und des minimalen Schnittes in einem Schritt erfolgen.

Dieser Ansatz eines Branch-and-Cut Algorithmus wird in [Chopra et al., 1992] sowie [Koch und Martin, 1998] für das ST und in [Ljubic, 2004] für das PCST verwendet und hat sich in Benchmarks der Autoren als sehr leistungsfähig erwiesen. Der prinzipielle Ablauf des Algorithmus ist in Abbildung 7.6 dargestellt und wird detailliert in den Abschnitten 7.4.1.5 sowie 8.1.3 beschrieben.

Die Nebenbedingungen (6.30) - (6.32) sind ausreichend, damit der Algorithmus eine optimale Lösung für das gerichtete Steiner-Baum Problem finden kann. Gegebenenfalls ist jedoch eine hohe Anzahl von Iterationen zur Bestimmung zusätzlicher Cuts notwendig, um eine zulässige und optimale Lösung des Problems zu bestimmen. Daher sollten möglichst schon in der initialien Formulierung des IP-Modells weitere Restriktionen aufgenommen werden, welche die LP-Relaxierung verschärfen und möglichst viele unzulässige Lösungen verhindern. In [Fischetti, 1991], [Koch und Martin, 1998] und [Ljubic, 2004] (für das PCST) wurden nachfolgende zusätzliche Restriktionen eingeführt, welche für viele Instanzen zu einer deutlichen Verbesserung der Gesamtlösungsdauer führen.

$$\sum_{(h,i) \in A} y_{h,i} \leq \sum_{(i,j) \in A} y_{i,j} \quad \forall i \in V \setminus K \quad (6.34)$$

$$\sum_{(h,i) \in A} y_{h,i} \geq y_{i,j} \quad \forall i \in V \setminus \{r\}, (i,j) \in A \quad (6.35)$$

$$y_{i,j} + y_{j,i} \leq 1 \quad \forall (i,j) \in A \quad (6.36)$$

Gleichung (6.34) und (6.35) beschreiben die sogenannten *Flow-Balance-Constraints* (vgl. [Koch und Martin, 1998]). Nebenbedingung (6.34) bewirkt, dass der Eingangsgrad eines Steinerknotens ( $\delta^-$ ) nicht größer als der Ausgangsgrad ( $\delta^+$ ) sein darf. Diese Einschränkung des Lösungsraums schneidet keine zulässigen Lösungen ab, da sie für alle drei möglichen Fälle korrekt ist. In dem Fall, dass der Ausgangsgrad eines Steinerknotens  $i$  den Wert null annimmt ( $\delta_i^+ = 0$ ), darf der Knoten nicht durch eine Kante erreicht werden ( $\delta_i^- = 0$ ), da ein Steinerknoten in einer optimalen Lösung nie ein Blattknoten sein kann. In dem Fall, dass der Knoten kein Verzweigungsknoten ist ( $\delta_i^+ = 1$ ), muss der Eingangsgrad ebenfalls eins sein ( $\delta_i^- = 1$ ). Für den Fall, dass der Knoten ein Verzweigungsknoten ist ( $\delta_i^+ > 1$ ) muss der Eingangsgrad kleiner als der Ausgangsgrad sein ( $\delta_i^- < \delta_i^+$ ), da ein Knoten in einer optimalen Lösung immer maximal einen Eingangsgrad von eins hat.

Gleichung (6.35) besagt, dass von einem Knoten (mit Ausnahme des Wurzelknotens) nur ein Pfeil abgehen darf, wenn mindestens ein Pfeil in den Knoten zeigt. Diese Bedingung

gilt sowohl für Basis- als auch für Steinerknoten, da sie elementar für den Zusammenhang des Graphen ist.

Die Restriktion (6.36) wiederum stellt sicher, dass die gerichteten Kanten jeweils nur in einer Richtung Teil der Lösung sein dürfen.

#### 6.1.3.4.2 PCST

Die Connectivity-Cut Formulierung wird in der Arbeit von Ljubić (vgl. [Ljubic, 2004]) für das PCST angewendet, welche nachfolgendem IP-Modell entspricht:

$$\min \sum_{(i,j) \in A} c_{i,j} \cdot y_{i,j} - \sum_{i \in V} p_i \cdot z_i \quad (6.37)$$

Unter den Nebenbedingungen:

$$\sum_{(r,j) \in A} y_{r,j} = 1 \quad (6.38)$$

$$\sum_{(h,i) \in A} y_{h,i} = z_i \quad \forall i \in V \setminus \{r\} \quad (6.39)$$

$$\sum_{(i \in V \setminus S, j \in S) \in A} y_{i,j} \geq z_j \quad \forall S \subset V \setminus \{r\}, j \in S \quad (6.40)$$

Gleichung (6.38) gibt an, dass der Wurzelknoten nur genau eine ausgehende Kante haben muss. Diese Bedingung ist notwendig, da andernfalls alle Zielknoten (gewinnbringende Knoten) von dem Wurzelknoten über die künstlichen Kanten (mit Gewicht null) verbunden wären und der Ursprungsgraph damit nicht zusammenhängend wäre.

Der Eingangsgrad jedes Knotens, der Teil der Lösung ist, muss den Wert eins aufweisen, was durch (6.39) ausgedrückt wird.

(6.40) ist die zentrale Nebenbedingung des Modells, welche sicherstellt, dass jeder Knoten, der Teil der Lösung ist, nicht durch einen Schnitt von dem Wurzelknoten getrennt sein darf. Die exponentielle Anzahl möglicher Schnitte erfordert analog zu der *Connectivity-Cut* Formulierung des ST die iterative Lösung des Modells, durch den im vorigen Abschnitt beschriebenen Branch-and-Cut Algorithmus.

#### Mehrperiodizität

In [Arulselvan et al., 2011] wird ein MIP-Modell für das mehrperiodige Netzwerkerweiterungsproblem entwickelt. Hierbei wird das PCST um die Berücksichtigung mehrerer Ausbaustufen erweitert. Auch hier kommt zur Lösung ein Branch-and-Cut Algorithmus

zum Einsatz, welcher im Wesentlichen einer Erweiterung des Modells von Ljubić auf den mehrperiodigen Fall entspricht. Die Gleichungen der Connectivity-Cut Formulierung unter Berücksichtigung der Mehrperiodigkeit werden (für das CSP) in Kapitel 7 beschrieben.

### 6.1.3.5 Subtour-Elimination Formulierung

Eine weitere Möglichkeit den Zusammenhang des Lösungsgraphen sicherzustellen ohne Netzwerkflüsse zu verwenden, bilden sogenannte *Subtour-Elimination Constraints* bzw. Zyklenrestriktionen. Dieser Modellierungsansatz wurde ursprünglich für das *Travelling-Salesman Problem* entwickelt (vgl. [Dantzig et al., 1954]) kann jedoch auch für das Steiner Problem in Graphen mit positiven und negativen Kantengewichten (CSP) verwendet werden.

Für das CSP wurde diese Formulierung von Suhl (vgl. [Suhl und Hilbert, 1998]) angewendet, für das PCST von Lucena (vgl. [Lucena und Resende, 2004] bzw. [Lucena et al., 2009]). Suhl berücksichtigt darüber hinaus eine mehrperiodige Erweiterung des Graphen.

#### 6.1.3.5.1 ST

$$\min \sum_{(i,j) \in A} c_{i,j} \cdot y_{i,j} \quad (6.41)$$

Unter den Nebenbedingungen:

$$\sum_{(h,i) \in A} y_{h,i} = 1 \quad \forall i \in K \quad (6.42)$$

$$y_{i,j} + y_{j,i} \leq 1 \quad \forall (i,j) \in A \quad (6.43)$$

$$y_{i,j} \leq \sum_{(h,i) \in A | h \neq j} y_{h,i} \quad \forall (i,j) \in A | i \neq r \quad (6.44)$$

$$\sum_{(i,j) \in A_z} y_{i,j} \leq |A_z| - 1 \quad \forall z \in Z \quad \text{mit } Z: \text{Menge aller Zyklen von } \vec{G} \quad (6.45)$$

Durch Nebenbedingung (6.42) wird gewährleistet, dass jeder Basisknoten eine eingehende Kante aufweist und damit Teil des Lösungsgraphen ist. Gleichung (6.43) stellt sicher, dass eine gerichtete Kante nur in einer Richtung Teil der Lösung sein darf.

Restriktion (6.44) besagt, dass jede Kante, die nicht von dem Wurzelknoten ausgeht und Teil des Lösungsgraphen ist, mindestens eine eingehende Kante aufweisen muss. Sofern der Lösungsgraph frei von Zyklen ist, reicht (6.44) aus, um einen zusammenhängenden

Graphen zu gewährleisten. Weist die Lösung hingegen Zyklen auf, kann (6.44) erfüllt sein, obwohl isolierte Teilgraphen entstehen. Daher werden Lösungen mit Zyklen durch Nebenbedingung (6.45) explizit als zulässige Lösungen ausgeschlossen.

Analog zu der vorangegangenen Formulierung mit trennenden Schnitten kann diese Modellierung nicht geschlossen gelöst werden, da die Anzahl möglicher Zyklen exponentiell mit der Anzahl der Kanten steigt. Auch hier kommt deshalb ein Branch-and-Cut Algorithmus zur Anwendung, welcher (6.45) zunächst vernachlässigt. Weist die optimale Lösung isolierte Teilgraphen auf, werden die Zyklen identifiziert und als Restriktion dem Modell hinzugefügt. Das so erweiterte Modell wird wieder optimiert und auf nicht verbundene Teilgraphen untersucht. Dieser Prozess wird iterativ durch den Algorithmus so lange wiederholt, bis keine isolierten Teilgraphen mehr in der optimalen Lösung vorhanden sind oder keine zulässige Lösung gefunden wird. Der Algorithmus ist in detaillierter Form in den Abschnitten 7.4.1.4 und 8.1.2 beschrieben.

#### 6.1.3.5.2 PCST

Eine Anwendung der Modellierung auf das PCST ist durch Anpassung der Zielfunktion gemäß Gleichung (6.37) sowie einem Austausch der Gleichung (6.42) durch nachfolgende Nebenbedingung möglich:

$$\sum_{(h,i) \in A} y_{h,i} = z_i \quad \forall i \in R \quad (6.46)$$

#### 6.1.3.5.3 CSP und MSP

Wie bereits erwähnt, ist eine Erweiterung des Steiner-Problems in Graphen auf das mehrperiodige Netzwerkerweiterungsproblem bisher nur Gegenstand weniger Arbeiten. Suhl (vgl. [Suhl und Hilbert, 1998]) untersucht für das allgemeine Steiner-Problem in Graphen mit positiven und negativen Kantengewichten auch den mehrperiodigen Fall. Als Lösungsansatz kommt der beschriebene Branch-and-Cut Algorithmus zum Einsatz, welcher auf *Subtour-Elimination Constraints* basiert.

Die in Abschnitt 6.1.3.1 dargestellte Fragestellung des CSP wird hierbei auf mehrere Perioden erweitert. In [Suhl und Hilbert, 1998] wird zur Lösung dieser Problemstellung nachfolgendes IP-Modell vorgeschlagen.<sup>29</sup>

<sup>29</sup> Das Modell wird hier aus Vereinheitlichungsgründen als Minimierungsaufgabe dargestellt, während das Originalmodell als Maximierungsaufgabe definiert wurde.

Aufgrund der Mehrperiodidigkeit wird die Variable  $y_{i,j,t}$  wie folgt definiert:

$$y_{i,j,t} = \begin{cases} 1 & \text{wenn Kante } (i,j) \text{ in Periode } t \text{ gebaut wird} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \forall (i,j) \in A, t \in T \quad (6.47)$$

Das Optimierungsziel lautet dann:

$$\min \sum_{t \in T} \sum_{(i,j) \in A} c_{i,j,t} \cdot y_{i,j,t} \quad (6.48)$$

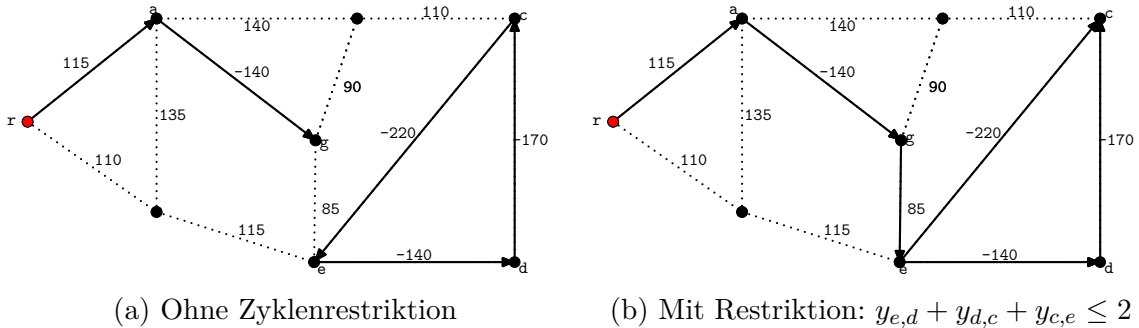
Unter den Nebenbedingungen:

$$\sum_{t \in T} y_{i,j,t} + y_{j,i,t} \leq 1 \quad \forall (i,j) \in A \quad (6.49)$$

$$y_{i,j,t} \leq \sum_{(h,i) \in A | h \neq j} \sum_{\tau \leq t} y_{h,i,\tau} \quad \forall (i,j) \in A | i \neq r, t \in T \quad (6.50)$$

$$\sum_{(i,j) \in A_z} y_{i,j,t} \leq |Z| - 1 \quad \forall z \in Z, t \in T \quad \text{mit } Z: \text{Menge aller Zyklen von } \vec{G} \quad (6.51)$$

Gleichung (6.49) gibt an, dass jede Kante nur einmal errichtet werden darf. Zusätzlich wird sichergestellt, dass die gerichteten Kanten nur in eine Richtung gebaut werden. Restriktion (6.50) bewirkt, dass eine Kante nur errichtet werden darf, wenn diese in der jeweiligen Periode mindestens eine eingehende Kante aufweist. Durch diese Nebenbedingung wird analog zu Gleichung (6.44) erzwungen, dass der Graph in jeder Periode zusammenhängend ist. Da (6.50) jedoch auch für Zyklen isolierter Teilgraphen erfüllt ist, müssen solche Zyklen wiederum über (6.51) verboten werden. Abbildung 6.1 zeigt die optimale Lösung eines CSP ohne bzw. mit Zyklenrestriktion. Die Lösung des Modells erfolgt anhand des für das ST beschriebenen Branch-and-Cut Algorithmus (s. Abschnitt 6.1.3.5.1).



**Abbildung 6.1** Optimale Lösung eines CSP ohne und mit Zyklenrestriktion

Die Autoren zeigen für verschiedene reale Anwendungsfälle mit bis zu 4 Zeitperioden und 550 Kanten, dass der Branch-and-Cut Algorithmus innerhalb weniger Sekunden



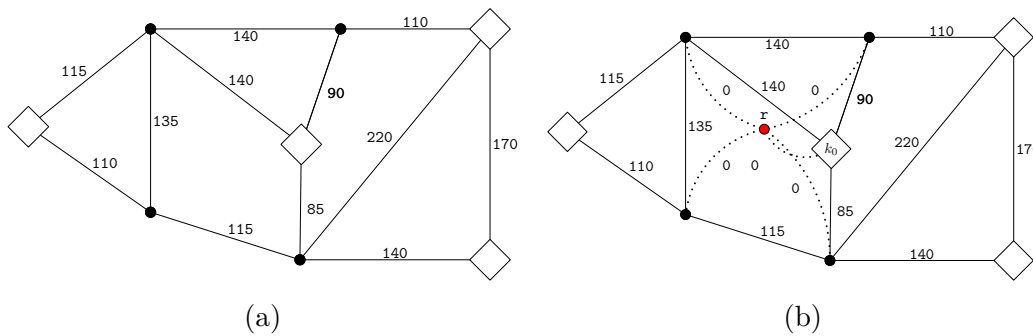
oder Minuten (je nach Problemgröße) eine optimale Lösung findet. Die Anzahl der im Branch-and-Cut Algorithmus hinzugefügten Cuts liegt zwischen 0 und 19.

### 6.1.3.6 Weitere Modellierungsansätze

Neben den drei beschriebenen Modellierungsansätzen (Netzwerkflüsse, Connectivity-Cuts, Subtour-Elimination Constraints) finden sich in der Literatur weitere Modellformulierungen zur Lösung des ST.

#### 6.1.3.6.1 Restricted Minimum-Spanning-Tree Model

In [Duin und Volgenant, 1987] wird das *Restricted Minimum-Spanning-Tree Model* als Lösungsansatz für das (ungerichtete) Steiner-Baum Problem vorgeschlagen. Ein vergleichbarer Ansatz findet sich in [Beasley, 1989]. Hierbei wird der Graph  $G$  zu einem Graph  $G_r = (V \cup \{r\}, E_r)$  erweitert, indem  $G$  ein zusätzlicher Wurzelknoten  $r$  hinzugefügt wird. Für jeden Steinerknoten  $i \in V \setminus K$  wird  $G_r$  eine Kante  $(r, i)$  hinzugefügt, mit  $c_{r,i} = 0$ . Zusätzlich wird für einen Basisknoten  $k_0 \in K$  ebenfalls eine Kante  $(r, k_0)$  mit Gewicht  $c_{r,k_0} = 0$  hinzugefügt. Es gilt somit  $G_r = (V \cup \{r\}, E \cup \{(r, k_0)\} \cup \{(r, i) | i \in V \setminus K\})$ . Die Transformation eines Steiner-Baum Problems in ein *Restricted Minimum-Spanning-Tree Model* ist in Abbildung 6.2 dargestellt.



**Abbildung 6.2** Transformation eines ST (a) in ein *Restricted Minimum-Spanning-Tree Model* (b)

Nach dieser Transformation entspricht das Steiner-Baum Problem der Ermittlung des minimalen Spannbaums von  $G_r$  mit der zusätzlichen Nebenbedingung (6.54). Folgende IP-Formulierung zur Lösung dieses transformierten Problems wird in [Duin und Volgenant, 1987] gegeben:

$$\min \sum_{(i,j) \in E_r} c_{i,j} \cdot y_{i,j} \quad (6.52)$$

Unter den Nebenbedingungen:

$$\{(i, j) \in E_r | y_{i,j} = 1\} \text{ ist ein Spannbaum von } G_r \quad (6.53)$$

$$y_{r,i} + y_{i,j} + y_{h,i} \leq 1 \quad \forall i \in V \setminus K, (i, j) \in E, (h, i) \in E \quad (6.54)$$

Nebenbedingung (6.54) besagt, dass jeder Steinerknoten, der in der Lösung mit dem Wurzelknoten direkt verbunden ist, mit keinem weiteren Knoten verbunden sein darf. Damit wird erzwungen, dass die Knoten aus  $K$  auch nach Entfernen der künstlichen Kanten verbunden sind.

Für Gleichung (6.53) geben die Autoren keine mathematische Formulierung. Die IP-Formulierung des *Minimum-Spanning-Tree* kann über Subtour-Elimination Constraints mit anschließender Separierung der Cuts in einem Branch-and-Cut Algorithmus erfolgen (analog zu der Formulierung des ST, vgl. [Wolsey, 1998] S. 45f, [Polzin und Daneshmand, 2001]). Alternativ kann das Problem über Flussvariablen gelöst werden, in Kombination mit der Restriktion, dass der Eingangsgrad eines Knoten den Wert eins annimmt (vgl. [Segev, 1987] für das NWST).

#### 6.1.3.6.2 Set-Covering Formulierung

Aneja (vgl. [Aneja, 1980]) entwickelt für das klassische Steiner-Baum Problem eine MIP-Formulierung, die auf einer Formulierung des Problems als *Set-Covering Problem* basiert. Hierbei wird der Graph in verschiedene Partitionen aufgeteilt, wobei jeweils mindestens ein Basisknoten in jeder Partition enthalten ist. Ähnlich zu der Formulierung, welche trennende Schnitte zwischen dem Wurzelknoten und den Basisknoten verhindert (s. Abschnitt 6.1.3.4), werden sukzessive Schnitte zwischen den verschiedenen Partitionen über Nebenbedingungen verboten. Die Lösung des Modells wird durch ein spezielles Schnittebenenverfahren realisiert.

### 6.1.4 Preprocessing

Unter Preprocessing sollen Methoden und Algorithmen verstanden werden, die das Ursprungsproblem vor dem Beginn der Optimierung so transformieren, dass die Problemgröße reduziert wird und das Optimierungsproblem anschließend gegebenenfalls schneller gelöst werden kann.

Einige für das Steiner-Baum Problem entwickelte Preprocessing Routinen (vgl. [Balakrishnan und Patel, 1987]) können nur durch Anpassungen für allgemeinere Varianten

des Steiner Problems wie das PCST oder CSP genutzt werden. In [Duin und Volgenant, 1987] werden die von Beasley (vgl. [Beasley, 1984]) für das ST entwickelten Preprocessing-Routinen für das NWST angepasst. Diese können die Problemgröße in einigen Fällen signifikant verringern (vgl. [Ljubic, 2004]) weshalb die wichtigsten Reduktionsverfahren nachfolgend erläutert werden.

### Degree One Test

Sei Knoten  $i \in V \setminus K$  nur mit einem anderen Knoten  $j$  adjazent. Dann kann  $i$  entfernt werden. Sofern gilt  $c_{i,j} + c_i < 0$ , bekommt Knoten  $j$  als Gewicht  $c'_j = c_j + c_{i,j} + c_i$ . Andernfalls bleibt das Gewicht von Knoten  $j$  unverändert.

### Degree Two Test

Sei Knoten  $i \in V \setminus K$  nur mit zwei anderen Knoten  $h, j$  adjazent. Sofern gilt  $c_{h,i} + c_i > 0$  und  $c_{i,j} + c_i > 0$ , können die Kanten  $(h, i)$  und  $(i, j)$  entfernt werden, da  $i$  nie Teil einer optimalen Lösung sein kann. Gleichzeitig wird dem Graph eine neue Kante  $(h, j)$  hinzugefügt, mit Gewicht  $c'_{h,j} = c_{h,i} + c_i + c_{i,j}$ . Falls die Kante  $(h, j)$  bereits existiert, bekommt sie als neues Gewicht  $c'_{h,j} = \min(c_{h,j}, c_{h,i} + c_i + c_{i,j})$  zugewiesen.

### Least Cost Test

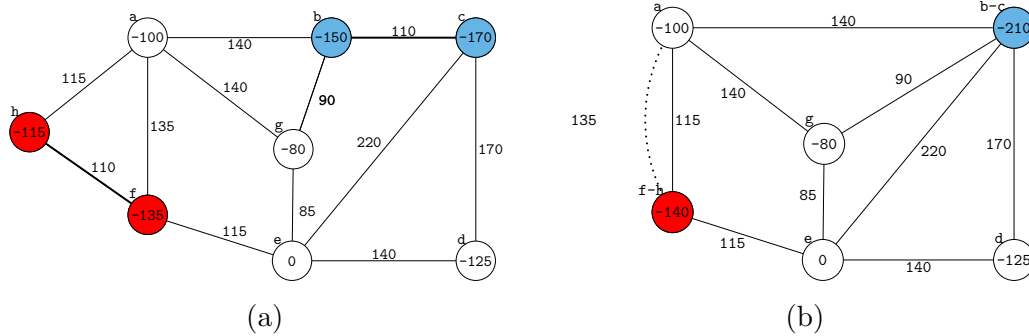
Für den Ursprungsgraph  $G$  wird für jedes Knotenpaar  $(i, j)$ , welches durch eine Kante direkt verbunden ist, der kostenminimale Pfad berechnet. Seien  $d_{i,j}$  die Kosten des minimalen Pfades zwischen  $i$  und  $j$ , dann kann die Kante  $(i, j)$  nicht Teil der optimalen Lösung sein, sofern gilt:  $c_{i,j} > d_{i,j}$ . In diesem Fall kann die Kante aus dem Graph entfernt werden. Eine Verschärfung dieses Tests kann erreicht werden, indem zusätzlich die Knotengewichte berücksichtigt werden. Sei  $\hat{c}_{i,j} = c_{i,j} + \frac{1}{2}c_i + \frac{1}{2}c_j$  und  $\hat{d}_{i,j}$  die Kosten des minimalen Pfades zwischen  $i$  und  $j$ . Die Kante  $(i, j)$  kann nicht Teil der optimalen Lösung sein, sofern gilt:  $c_{i,j} > \hat{d}_{i,j}$ . In diesem Fall kann die Kante aus dem Graph entfernt werden.

Eine Verallgemeinerung des Degree One bzw. Degree Two Tests findet sich unter der Bezeichnung *Degree  $l$  Test* in [Ljubic, 2004] bzw. unter *Cardinality-larger-than-two test* in [Lucena und Resende, 2004].

### $V \setminus K$ Reduction Test

Sofern für die Knoten  $i$  und  $j \in V \setminus K$  gilt:  $\max(c_i, c_j) + c_{i,j} < 0$  und  $c_{i,j} = \min(c_{i,q} | q \in V)$ , können die Knoten  $i$  und  $j$  zu einem Knoten mit Gewicht  $c'_i = c_i + c_j + c_{i,j}$  verschmolzen werden.<sup>30</sup> Falls durch die Verschmelzung parallele Kanten entstehen (z.B Kante  $(a, f - h)$  in Abbildung 6.3) kann die Kante mit dem höheren Gewicht entfallen.

<sup>30</sup> Hierbei ist zu beachten, dass bei negativen Knotengewichten der Knoten mit dem kleineren Absolutwert das Maximum der beiden Knotengewichte aufweist.



**Abbildung 6.3** Anwendung des  $V \setminus K$  Reduction Test mit Hervorhebung der Knotenpaare und Kanten, welche durch den Test verschmolzen werden können

## Ergebnisse

In [Ljubic, 2004] sowie [Lucena und Resende, 2004] finden sich Benchmark-Ergebnisse zur Leistungsfähigkeit der verschiedenen Preprocessing Tests. Implementiert wurden für das PCST der *Least-Cost Test*, der *Degree  $l$  Test* (einschl. *Degree One* und *Degree Two Test*) sowie der  *$V \setminus K$  Reduction Test*<sup>31</sup>. Die drei Testklassen wurden jeweils iterativ so lange auf die Probleminstanzen angewendet, bis keine Änderung des Graphen mehr erreicht wird. Der *Degree  $l$  Test* wurde für  $1 \leq l \leq 8$  durchgeführt.

Die kombinierte Anwendung der Preprocessing-Methoden in [Ljubic, 2004] konnte für verschiedene, in der Literatur zu dem PCST veröffentlichte Modellinstanzen die Anzahl der Knoten um 28 - 57 % und die Anzahl der Kanten um 34 - 53 % reduzieren. Inwieweit Größenreduktionen in ähnlichem Maße bei praktischen Problemen des Wärmenetzausbaus erreicht werden können bleibt zu prüfen, da die synthetischen Benchmarkprobleme teilweise eine andere Struktur und Verteilung der Knoten- und Kantengewichte aufweisen.

## 6.2 Das Kapazitätsbeschränkte Netzwerkerweiterungsproblem

Das Steiner Problem in Graphen berücksichtigt keine Kapazitätsrestriktionen der Kanten. Für die Fragestellung des optimalen Ausbaus von Wärmenetzen sind kapazitätsabhängige Kosten jedoch von Bedeutung, da die Übertragungskapazität einer Leitung mit ihrem Rohrdurchmesser steigt (s. Kapitel 3). Größere Rohrdurchmesser sind wiederum mit höheren Investitionen verbunden.

Im Gegensatz zu dem Steiner Problem ist die Fragestellung von Kapazitätserweiterungen heterogener und stärker mit der zugrunde liegenden praktischen Fragestellung verknüpft.

<sup>31</sup> Die Autoren verwenden synonym den Begriff *Minimum Adjacency Test*.

Die Arbeiten zu Kapazitätserweiterungen in Netzwerken basieren prinzipiell zwar durchgehend auf der Modellierung von Netzwerkflüssen, da nur so die Auslastung der Kanten und der Transport eines Gutes über das Netzwerk berücksichtigt werden kann, allerdings unterscheiden sich die zu berücksichtigenden Randbedingungen und konkreten Modellierungen. So müssen (unabhängig von den mathematischen Modelleigenschaften) je nach praktischer Fragestellung Ein- oder Mehrgüternetzwerkflussmodelle genutzt werden. Darüber hinaus unterscheiden sich die Eigenschaften der Kapazitäten. Abhängig von dem konkreten Problem sind die Kapazitäten als stetig oder diskret anzusehen, wobei die diskreten Kapazitäten gegebenenfalls noch unterschiedlichen Typs sind.

Eine MIP-Formulierung als Mehrgütermodell mit diskreten Kapazitäten eines Typs (*Multi-commodity, single-facility*) wird in [Bienstock und Günlük, 1996] gegeben. Die Autoren lösen das Modell mit einem speziellen Schnittebenenverfahren. Basierend auf zwei realen Problemstellungen im Bereich von Telekommunikationsnetzwerken werden 9 verschiedene Probleminstanzen generiert, die bis zu 16 Knoten und 49 Kanten aufweisen. Im Gegensatz zu dem Branch-and-Bound Algorithmus des Solvers kann ihr Schnittebenenverfahren die Lösungsdauer von einigen Stunden auf wenige Sekunden reduzieren.

[Atamtürk, 2002] zeigt MIP-Formulierungen für verschiedene Ausprägungen des kapazitätsbeschränkten Netzwerkentwurfs. Ausgehend von dem Fall eines Gutes und eines Kapazitätstyps (*Single-commodity, single-facility*), wird das Modell verallgemeinert auf den Fall eines Gutes und verschiedener Kapazitätstypen (*Single-commodity, multi-facility*) bis zu dem allgemeinsten Fall mehrerer Güter und mehrerer Kapazitätstypen (*Multi-commodity, multi-facility*). Auch hier werden die Kapazitäten diskret modelliert. Die Lösung erfolgt durch einen speziellen Branch-and-Cut Algorithmus. Der Autor präsentiert Benchmark-Ergebnisse für Problemstellungen bis zu 29 Knoten und 93 Gütern.

In [Raack et al., 2011] findet sich eine MIP-Modellierung des Mehrgüterflussmodells mit diskreten Kapazitätsblöcken, welches durch einen speziellen Branch-and-Cut Algorithmus gelöst wird. Numerische Ergebnisse werden für 54 Modellinstanzen mit bis zu 65 Knoten und 172 Kanten präsentiert. Für einen Großteil der Instanzen reduziert der speziell angepasste Branch-and-Cut die Lösungsdauer gegenüber dem Standard Branch-and-Bound des MIP-Solvers um ca. 80 % und die Optimalitätslücke (bei einem Zeitlimit von einer Stunde) um ca. 50 %.

Zusätzlich zu der Modellierung diskreter Kapazitäten wird in [Stoer und Dahl, 1994] die Ausfallsicherheit eines Netzwerkes berücksichtigt. Die Fragestellung wird als MIP formuliert und mit einem speziellen Schnittebenenverfahren iterativ gelöst, welches anhand

eines Beispielnetzes mit 27 Knoten und 51 Kanten sowie vier möglichen Kapazitätsstufen getestet wurde.

Die genannten Ansätze beziehen sich vorwiegend auf Anwendungen bei Telekommunikationsnetzwerken, wo die Kapazität einer Leitung diskret modelliert werden muss. Die Lösungsansätze der Autoren fokussieren daher hauptsächlich auf eine effiziente Lösung der ganzzahligen Kapazitätsrestriktionen.

Für die Fragestellung des wirtschaftlich optimalen Wärmenetzausbaus ist es hingegen ausreichend, die Übertragungskapazität stetig zu modellieren, obwohl die Kapazität einer Fernwärmeleitung in der Praxis durch diskrete Standard-Rohrdurchmesser gegeben ist. Die Kapazitätsbeschränkungen der Leitungen werden in der Modellierung lediglich dazu genutzt, die steigenden Investitionskosten bei größeren Rohrdurchmessern zu berücksichtigen. Hierbei ist es ausreichend die Kosten zwischen verschiedenen Standard-Rohrdurchmessern zu interpolieren, da die realen Kosten von einer Vielzahl lokaler Parameter abhängen und vorab nicht exakt bestimmt werden können. Darüber hinaus hängt die reale Übertragungskapazität einer Leitung von den nichtlinearen hydraulischen Druckverlusten in einem Fernwärmenetz ab, weshalb eine exakte Bestimmung der Netzwerkflüsse in einem linearen Modell ohnehin nicht möglich ist.

### 6.3 Praktische Optimierungsansätze im Fernwärmeausbau

Bis heute ist es übliche Praxis, den Aufbau oder die Erweiterung von Wärmenetzen manuell zu planen (unter Zuhilfenahme von Simulationsprogrammen). Eine systematische Optimierung des Fernwärmenetzausbaus, welche über planerische Ansätze hinausgeht, wurde bisher nur in wenigen Veröffentlichungen beschrieben. Eine mathematische Optimierung des Wärmenetzausbaus unter Berücksichtigung der Verdrängung von Erdgaskunden und des Rückbaus erneuerungsbedürftiger Gasversorgungsleitungen ist nicht bekannt.

Blesl (vgl. [Blesl, 2002]) untersucht die Wirtschaftlichkeit von Nah- und Fernwärmenetzen anhand eines Siedlungsmodells. In der Arbeit wird durch die Analyse von Luftbildern eine Typisierung der Siedlungsstruktur und Gebäude durchgeführt, woraus eine flächenbezogene Wärmebedarfsdichte [ $\text{kWh} / \text{m}^2$ ] abgeleitet wird. Diese Daten fließen in ein gemischt-ganzzahliges lineares Optimierungsmodell ein, welches eine volkswirtschaftliche Optimierung der Wärmeversorgung durchführt. Hierbei werden die Alternativen einer zentralen (Fernwärme) und dezentralen Versorgung (Heizungsanlagen der Verbraucher) untersucht. Das Modell bestimmt ein volkswirtschaftliches Gesamtoptimum, das angibt, in welchen Siedlungen eine Nah- bzw. Fernwärmeversorgung sinnvoll ist und in welchen

Siedlungen eine dezentrale (öl- oder gasbefeuerte) Wärmeversorgung vorzuziehen ist. Einzelne homogene Siedlungen werden in dem Optimierungsmodell als Knoten berücksichtigt, die Kanten entsprechen in dem Modell Verbundleitungen zwischen benachbarten Siedlungen. Im Gegensatz zu der in dieser Arbeit untersuchten Fragestellung erfolgt damit keine Modellierung und Betrachtung der einzelnen Trassen und Versorgungsleitungen. Das Modell könnte jedoch gegebenenfalls vorab genutzt werden, um anhand der Siedlungstypologie eine Vorauswahl von Orten oder Ortsteilen zu identifizieren, welche für einen Ausbau der Fernwärme in Frage kommen. Die so ermittelten Gebiete können anschließend im Rahmen einer straßengenauen Optimierung, welche in dieser Arbeit entwickelt wird, detailliert betrachtet werden. Blesl zeigt in seiner Untersuchung anhand realer Siedlungsgebiete, dass auch aus gesamtwirtschaftlicher Sicht Potentiale für den Ausbau von Nah- und Fernwärmenetzen bestehen.

Ein ähnlicher Ansatz wird in [Erb und Gutzwiller, 2011] für die Schweiz verfolgt. Auch hier werden Flächendaten aus einem Geographischen Informationssystem (GIS) ausgewertet. Das Untersuchungsgebiet wird in ein Raster unterteilt, wobei die Zellen jeweils eine Fläche von einem Hektar aufweisen. Anhand der Bebauungsstruktur wird für jeden Hektar die Wärmebedarfsdichte abgeschätzt und eine Typisierung vorgenommen (ländlich, städtisch). Benachbarte Hektare mit ähnlicher Bebauungsstruktur werden zu Clustern zusammengefasst. Anschließend wird für die jeweiligen Cluster anhand verschiedener Kriterien geprüft, ob eine Versorgung durch KWK gespeiste Wärmenetze wirtschaftlich ist. Erwartungsgemäß bietet sich eine Fernwärmeversorgung hauptsächlich für eng bebaute Hektare in Ballungsräumen mit einer entsprechend hohen Wärmebedarfsdichte an.

Die Untersuchung von Eikmeier et. al (vgl. [Eikmeier et al., 2011]) ist ebenfalls den Studien zur Bestimmung eines flächenbezogenen Ausbaupotentials für Wärmenetze zuzuordnen. Für verschiedene Städte in Nordrhein-Westfalen wurde in der Arbeit eine digitale Rasterkarte der Wärmebedarfsdichte generiert und in 3000 Cluster unterteilt, von denen 160 genauer analysiert wurden. Die Studie zeigt ein Potential für wirtschaftlich erschließbare KWK-gespeiste Fernwärmenetze von insgesamt 10623 GWh / a, sofern ein Anschlussgrad von 90 % unterstellt wird. Die größten Potentiale wurden erwartungsgemäß für die dicht besiedelten Großstädte Düsseldorf und Essen identifiziert, während in kleineren westfälischen Städten (Paderborn, Lemgo und weitere) ein vergleichsweise geringes Ausbaupotential besteht.

Eine Optimierung der leitungsgebundenen Wärmeversorgung wird in [Richter, 2007] für die Stadt München durchgeführt. Ziel der Untersuchung ist es, eine kosten- oder CO<sub>2</sub>-minimale Wärmeversorgung zu bestimmen und zu prüfen, ob und unter welchen Randbedin-

gungen eine zentrale (Fernwärme) oder dezentrale Wärmeversorgung (Gaskessel, Mini-BHKW) vorzuziehen ist. Für sämtliche Gebäude der Stadt München wurde hierzu der Wärmebedarf abgeschätzt und eine für den jeweiligen Kundentyp exemplarische (stundengenaue) Wärmebedarfskurve hinterlegt. Zusätzlich wird die Erzeugungskapazität der bestehenden Heizkraftwerke hinterlegt. Die Entwicklung des Wärmebedarfs und der Brennstoffpreise wird bis zum Jahr 2050 prognostiziert. Mit einem Simulationsmodell wird für jedes Jahr geprüft, welche Ausbaupotentiale bestehen und welche Maßnahmen wirtschaftlich sind. Zusätzlich stellt eine hydraulische Berechnung sicher, dass die Systemvorschläge die Übertragungskapazität des Netzes und die Erzeugungskapazität der Anlagen nicht überschreiten. Die Ergebnisse der Untersuchung zeigen, dass insbesondere im Falle hoher Brennstoffpreise ein deutlicher Ausbau der Fernwärme wirtschaftlich ist. Methodisch kann dieser Ansatz als eine Koppelung eines Simulationswerkzeugs mit einer Optimierungstechnik eingeordnet werden. Die genaue Vorgehensweise ist in [Richter et al., 2007] beschrieben.

## 6.4 Handlungsbedarf

Wie in Kapitel 5 gezeigt, ist die Fragestellung des optimalen Fernwärmenetzausbaus eng mit dem Steiner-Problem in Graphen verwandt. Insbesondere das klassische Steiner-Baum Problem (ST) wurde bereits durch eine Vielzahl von Forschungsbeiträgen untersucht, die in Abschnitt 6.1 vorgestellt wurden. Diese umfassen sowohl theoretische Studien zur Struktur verschiedener MIP-Formulierungen des Steiner-Problems als auch die praktische Implementierung von Lösungsalgorithmen.

Relevante Verallgemeinerungen des Steiner-Baum Problems, welche auch den gewinnmaximierenden Netzwerkentwurf mit positiven und negativen Kantengewichten oder Knotengewichten betrachten, sind ebenfalls Bestandteil einiger Forschungsbeiträge. Je nach Problemformulierung finden sich in der Literatur die Begriffe *Node-Weighted Steiner-Tree Problem* (NWST), *Prize-Collecting Steiner-Tree Problem* (PCST) sowie *Connected Steiner-Problem in Graphs* (CSP).

Diese Problemformulierungen vernachlässigen jedoch einen wichtigen Aspekt des optimalen Fernwärmenetzausbaus: Die zeitliche Abfolge der Erweiterungsmaßnahmen. Mehrperiodige Netzwerkentwurfs- bzw. Erweiterungsprobleme sind bisher Gegenstand vergleichsweise weniger wissenschaftlicher Arbeiten. Im Kontext des Ausbaus von Gasnetzen findet sich eine mehrperiodige Formulierung des CSP in [Suhl und Hilbert, 1998]. Die verwandte Fragestellung des *Facility-Location Problems* wird in [Arulselvan et al., 2011] ebenfalls



für den mehrperiodigen Fall behandelt. Weitere Arbeiten beschränken sich überwiegend auf die Optimierung notwendiger Kapazitätserweiterungen von Telekommunikationsnetzwerken (vgl. [Bienstock und Günlük, 1996], [Sivaraman, 2007]), wobei der Fokus hierbei hauptsächlich auf der Kapazität der jeweiligen Leitungen liegt. Mit Ausnahme von [Suhl und Hilbert, 1998] finden sich keine mehrperiodigen Optimierungsansätze für Energienetze, die an praktischen Problemstellungen untersucht wurden.

Obwohl die Arbeiten von [Suhl und Hilbert, 1998] und [Arulselvan et al., 2011] bereits wesentliche Punkte des optimalen Fernwärmenetzausbaus abdecken, werden einige in der Praxis relevante Randbedingungen nicht berücksichtigt. So werden in beiden Arbeiten keine Kapazitätsbeschränkungen der Kanten modelliert. Die Verlegekosten einer Fernwärmeleitung hängen jedoch in nicht unerheblichem Maß von dem Rohrdurchmesser und den damit verbundenen Material- und Tiefbaukosten ab. Je nach konkreter Fragestellung und möglicher Ausprägungen der benötigten Übertragungskapazität kann eine Vernachlässigung dieser dimensionsabhängigen Kosten das Ergebnis deutlich verzerren.

Wie in Kapitel 4 dargestellt, soll nicht nur der Bau eines Fernwärmenetzes bzw. die Erweiterung eines bestehenden Netz optimiert werden, sondern auch ein möglicher Neubau zusätzlicher (Block-) Heizkraftwerke. Hierbei besteht eine zentrale Randbedingung in der Berücksichtigung der Erzeugungskapazitäten und -kosten der verschiedenen Kraftwerkstypen. Dies trifft sowohl auf die Nutzung vorhandener Heizkraftwerke als auch auf den Bau möglicher weiterer Heizkraftwerke zu. Für letztere ist durch die Optimierung zusätzlich zu bestimmen, in welcher Leistungsklasse und Bauart (Motor-BHKW, Gasturbinen-HKW, etc.) diese zu errichten sind.

Eine weitere Besonderheit besteht in der Modellierung der Konkurrenz zu einer bestehenden Gasversorgung und der Berücksichtigung eines möglichen Gasnetzrückbaus. Auch hierzu gibt es bisher keine Untersuchungen, welche diese Fragestellung mit Hilfe mathematischer Optimierungsverfahren lösen.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass die bisherigen Arbeiten zu dem Steiner Problem in Graphen umfangreiche Erkenntnisse und Lösungsansätze aufzeigen. Die dargestellten praktischen Erfordernisse, welche in den bisher untersuchten Modellen keine Berücksichtigung finden, erfordern jedoch eine Anpassung und Erweiterung geeigneter Lösungsansätze für die Fragestellung des optimalen Fernwärmenetzausbaus. Darüber hinaus wurde die Lösungsperformance der meisten Ansätze ausschließlich anhand synthetischer Benchmark-Graphen untersucht. Die Frage, inwieweit diese synthetischen Graphen in ihrer Struktur und Lösbarkeit mit realen Netzwerkentwurfs- und Erweiterungsproblemen vergleichbar sind, bietet ebenfalls Raum für weitere Forschungsarbeiten.

Aus praktischer Sicht umfassen die Studien zur Optimierung des Fernwärmenetzausbaus überwiegend planerische Ansätze, welche teilweise durch Simulationssoftware unterstützt werden. Darüber hinaus gibt es einzelne Arbeiten, die Fernwärmeausbaupotentiale durch eine GIS-unterstützte Flächenanalyse des Wärmebedarfs identifizieren.

Eine systematische straßengenaue Optimierung des Fernwärmeausbaus – insbesondere unter Berücksichtigung eines Gasnetzrückbaus – ist bisher nicht bekannt. Aus den vorangegangenen Betrachtungen kann der Handlungsbedarf zur Lösung dieser praktischen Fragestellung in nachfolgende Arbeitspakete konkretisiert werden:

### **1. Entwicklung eines mathematischen Optimierungsmodells**

Als aktueller Stand der Technik zur Lösung verwandter Netzwerkentwurfsprobleme hat sich primär die gemischt-ganzzahlige lineare Optimierung etabliert. MIP-Formulierungen bilden die Basis der meisten Veröffentlichungen zu Steiner-Graph Problemen und in Benchmarks konnte eine überlegene Lösungsgüte und -performance dieses Verfahrens gegenüber heuristischen Ansätzen oder Approximationsalgorithmen nachgewiesen werden (vgl. z.B. [Ljubic, 2004], [Koch und Martin, 1998]).

Darüber hinaus erlaubt die ganzzahlige Optimierung im Gegensatz zu Heuristiken eine Bestimmung der Lösungsgüte wodurch eine höhere Akzeptanz der Ergebnisse bei Entscheiden in der Praxis zu erwarten ist. Der wesentliche Vorteil der mathematischen Optimierung – auch gegenüber Approximationsalgorithmen – besteht jedoch in der einfachen Einbeziehung zusätzlicher Randbedingungen (z.B. Kapazitätsbeschränkungen der Leitungen). Diese Stärke des Verfahrens gewinnt insbesondere bei der Optimierung mehrperiodiger Modelle an Bedeutung, da die Lösungskomplexität durch die Berücksichtigung mehrerer Ausbauperioden elementar ansteigt und eine Vielzahl der in der Literatur entwickelten Preprocessing-Routinen und Optimalitätsbedingungen ihre Gültigkeit verlieren. Die Entwicklung von Lösungsheuristiken und die Prüfung der Einhaltung von Randbedingungen ist für den mehrperiodigen Fall deutlich schwieriger, als die direkte Formulierung der Problemstellung in einem mathematischen Optimierungsmodell. In Kapitel 7 wird die Entwicklung verschiedener MIP-Formulierungen für den optimalen Wärmenetzausbau beschrieben.

### **2. Überprüfung der Lösungseigenschaften des Optimierungsmodells**

Die Validierung des Optimierungsmodells erfolgt durch Benchmark-Berechnungen. Die Lösbarkeit und die Lösungsdauer der umgesetzten Modellformulierungen werden für folgende drei Klassen von Probleminstanzen untersucht:

- a. In der Literatur zu Steiner-Graph Problemen veröffentlichte Benchmarkinstanzen für einen Vergleich der Ergebnisse mit anderen Forschungsarbeiten,
- b. synthetisch generierte Modellnetze zur gezielten Variation struktureller Eigenschaften der Problem instanzen sowie
- c. reale Netzwerke zur Überprüfung der Praxistauglichkeit.

Die Ergebnisse dieser Berechnungen und ein systematischer Vergleich der Struktur der verschiedenen Modellinstanzen sind Gegenstand von Kapitel 8.

### 3. **Anwendung des Optimierungssystems im Rahmen einer Fallstudie**

Die Integration des Modells in ein entscheidungsunterstützendes System und dessen Anwendung auf eine reale Fragestellung ist Bestandteil des Kapitels 9. Anhand einer Fallstudie wird gezeigt, welche Potentiale für die Erweiterung eines Fernwärmenetzes bestehen und inwieweit ein Rückbau des Gasnetzes möglich ist. Szenarienrechnungen weisen die Effekte verschiedener Absatz- und Preisentwicklungen aus.



## 7 Optimierungsmodell

Für die Optimierung des Fernwärmeausbaus werden in diesem Kapitel drei verschiedene Modellierungsansätze entwickelt, welche sich hinsichtlich ihrer Lösungsdauern sowie der Möglichkeit technische Restriktionen zu berücksichtigen unterscheiden. Die erste Modellformulierung bildet das Fernwärmenetz als Netzwerkflussmodell ab, wobei der Netzwerkfluss dem Wärmetransport von den Heizkraftwerken zu den Kunden entspricht. Die beiden anderen Modellformulierungen verzichten auf die Modellierung der Netzwerkflüsse, wodurch in der Lösung isolierte Teilgraphen entstehen können, die nicht mit einer Wärmequelle (Heizkraftwerk) verbunden sind. Diese Modellierungsansätze werden daher durch Branch-and-Cut Algorithmen gelöst, die durch iterative Optimierung des Modells und dem Hinzufügen weiterer Restriktionen im Verlauf des Algorithmus eine zulässige (zusammenhängende) Lösung generieren. Diese Algorithmen werden in Abschnitt 7.4.1.4 bzw. 7.4.1.5 beschrieben. Die Wahl der Lösungsansätze für die Optimierung des Fernwärmeausbaus wird nachfolgend anhand theoretischer und praktischer Erwägungen erläutert.

Aus mathematischer Sicht unterscheiden sich das Netzwerkflussmodell und die beiden Branch-and-Cut Modellierungen hauptsächlich hinsichtlich ihrer LP-Relaxierungen, wobei die Branch-and-Cut Formulierungen schärfere LP-Relaxierungen aufweisen (s. Kapitel 6). Des weiteren haben sich Branch-and-Cut Algorithmen in der Literatur als aktueller Stand der Technik zur Lösung verschiedener Varianten des Steiner-Problems in Graphen etabliert, weshalb dieser Optimierungsansatz zur Lösung der Fragestellung des optimalen Fernwärmeausbaus geeignet erscheint.

Eine Umsetzung der verschiedenen Modellformulierungen einschließlich der Netzwerkflussmodellierung ist darüber hinaus von Interesse, da hierdurch untersucht werden kann, inwieweit sich die theoretischen Vorteile der Branch-and-Cut Formulierungen aufgrund der strengeren LP-Relaxierung bei der Lösung realer Modellinstanzen tatsächlich bemerkbar machen. Hierbei stellt sich insbesondere die Frage, ob die Bestimmung der zusätzlichen Schnitte im Verlauf des Branch-and-Cut Algorithmus ausreichend schnell eine zulässige (zusammenhängende) Lösung generiert, oder ob die (voraussichtlich) kürzere Lösungsdauer des MIP-Modells durch eine zu hohe Anzahl notwendiger Iterationen zur Generierung zusätzlicher Schnitte überkompensiert wird. Diese Fragestellungen werden in Kapitel 8 untersucht.

Unabhängig von den mathematischen Modelleigenschaften bietet die Netzwerkflussformulierung aus praktischer Sicht einige Vorteile gegenüber den Branch-and-Cut Formulierungen. Durch die Modellierung des Wärmetransportes als Netzwerkfluss können Kapazitätsgrenzen der Leitungen sowie kapazitätsabhängige Verlegekosten berücksichtigt werden. Obwohl das lineare Netzwerkflussmodell die reale Flussverteilung, welche durch nicht-lineare Druckverlustbedingungen bestimmt wird, nicht korrekt abbildet, ist diese Approximation für die näherungsweise Bestimmung der Investitionskosten ausreichend. Darüber hinaus ermöglicht nur die Modellierung der Flüsse auch bei Modellinstanzen mit mehreren Heizkraftwerken eine Zuordnung des Leistungs- bzw. Wärmebedarfs jeder Leitung zu dem zugehörigen Heizkraftwerk. Damit können für jedes Heizkraftwerk der Leistungsbedarf und die jeweils erzeugte Arbeit bestimmt werden, wodurch eine Auswahl des passenden Kraftwerkstyps sowie eine korrekte Bilanzierung der notwendigen Investitions-, Betriebs- und Wärmegestehungskosten durch das Modell ermöglicht werden. In der Branch-and-Cut Formulierung ist dies hingegen nur möglich, sofern lediglich ein einzelnes Heizkraftwerk existiert, da in diesem Fall stets die gesamte Leistung bzw. der gesamte Wärmebedarf von dem Heizkraftwerk gedeckt werden muss und eine Zuordnung einzelner Leitungen zu einem Heizkraftwerk überflüssig ist. Die Zuordnung der Leitungen zu den Heizkraftwerken gewinnt insbesondere dann an Bedeutung, wenn das Optimierungssystem bestimmen soll, ob neben einer zentralen Fernwärmeversorgung auch kleine dezentrale Nahwärmenetze eingerichtet werden sollen. Diese dezentralen Nahwärmeinseln, welche in der Regel durch ein kleines BHKW gespeist werden, bieten sich beispielsweise für periphere Gebiete mit sehr hohem Wärmebedarf an (z.B. Hochhaussiedlungen am Stadtrand). Eine Erschließung durch eine lange Fernwärmeleitung aus der Innenstadt ist hier oftmals teurer als der Bau eines lokalen BHKW-gespeisten Nahwärmenetzes. Für solche Fälle ist es für die Wirtschaftlichkeitsbewertung essentiell, den Leistungs- und Wärmebedarf – und damit die Investitions- und Erzeugungskosten des BHKW – in dem Nahwärmenetz zu bestimmen.

Für eine genaue Bewertung der CO<sub>2</sub>-Emissionen ist die Bestimmung der erzeugten Energie der unterschiedlichen Kraftwerke ebenfalls notwendig. Auch hierfür ist die Flussformulierung notwendig, sofern mehrere (potentielle) Heizkraftwerke bestehen. Unabhängig von der Lösungsperformance können damit je nach konkreter Fragestellung praktische Erwägungen zwingend den Einsatz der Netzwerkflussmodellierung erfordern.

## 7.1 Modellübersicht

Wie bereits im vorangegangenen Abschnitt beschrieben, sind für praktische Anwendungen gegebenenfalls bestimmte technische Randbedingungen einzuhalten und damit im Modell zu berücksichtigen. Gegenüber den in der Literatur beschriebenen Modellformulierungen für die jeweiligen Varianten des Steiner-Problems in Graphen erfordert eine adäquate Abbildung des praktischen Problems des Fernwärmeausbaus einige Modellerweiterungen. Die Vielzahl zusätzlicher Parameter und Nebenbedingungen erschwert jedoch einen Vergleich dieser erweiterten Modellformulierung mit den in Kapitel 6 vorgestellten Modellen. Daher wird zunächst die prinzipielle Formulierung in einem vereinfachten – mit der Literatur kompatiblen – Modell vorgestellt, welches von technischen und speziellen wirtschaftlichen Randbedingungen abstrahiert. Die kompaktere Modellformulierung verdeutlicht besser den prinzipiellen Lösungsansatz und die Modelleigenschaften. Darüber hinaus erlaubt die vereinfachte Modellformulierung die Optimierung der in der Literatur veröffentlichten Benchmark-Instanzen, wodurch ein direkter Vergleich der Ergebnisse möglich ist.

Die problemspezifischen technischen und wirtschaftlichen Randbedingungen des Fernwärmeausbaus werden anschließend in einem vollständigen Modell berücksichtigt (s. Abschnitt 7.4.2), welches auch die Konkurrenz zu der bestehenden Gasversorgung beinhaltet. Sowohl für die vereinfachte als auch für die vollständige Modellformulierung werden die Netzwerkflussformulierung und die beiden mittels Branch-and-Cut gelösten Modellvarianten (B&C Subtour-Elimination, B&C Connectivity) dargestellt. Tabelle 7.1 enthält eine Übersicht der vorgestellten Modellvarianten.

Modellformulierung	Bezeichnung	Berücksichtigung technischer Randbedingungen	Berücksichtigung Gasnetz
<b>Vereinfachtes Modell</b>			
Netzwerkfluss	A1	Nein	Nein
Branch-and-Cut (Subtour-Elimination Constraints)	A2	Nein	Nein
Branch-and-Cut (Connectivity Cuts)	A3	Nein	Nein
<b>Vollständiges Modell</b>			
Netzwerkfluss	B1	Vollständig	Ja
Branch-and-Cut (Subtour-Elimination Constraints)	B2	Teilweise	Ja
Branch-and-Cut (Connectivity Cuts)	B3	Teilweise	Ja

**Tabelle 7.1** Übersicht der Modellformulierungen

## 7.2 Modellkomponenten

Für ein besseres Verständnis der mathematischen Modellformulierungen werden zunächst die wesentlichen Komponenten des Optimierungsmodells einschließlich ihrer Eigenschaften beschrieben. Die grundlegende Abbildung des Fernwärmenetzes als Netzwerkmodell wird in Abschnitt 7.2.4 dargestellt.

### 7.2.1 Fernwärmetrassen

Eine Fernwärmetrasse bildet den Verlauf einer möglichen Fernwärmeleitung. Jede Trasse wird durch folgende Eigenschaften beschrieben:

- **Investitionskosten [€]**

Investitions- bzw. Verlegekosten fallen einmalig für den Bau einer Leitung an. Die Investitionen sind durch einen hohen Fixkostenanteil für Tiefbauarbeiten geprägt. Unter Vernachlässigung der Übertragungskapazität werden die Investitionen ausschließlich als Fixkosten berücksichtigt. Bei der Modellierung mit Netzwerkflüssen können diese zusätzlich um einen kapazitätsabhängigen Kostenanteil ergänzt werden.

- **Betriebskosten [€/a]**

Allgemeine Betriebskosten umfassen regelmäßig (jährlich) anfallende Kosten, z.B. Begehungs-, Reparatur- und Instandhaltungskosten.

- **Transportkapazität [kW]**

Der Druckverlust und die maximal zulässige Fließgeschwindigkeit begrenzen die Transportkapazität einer Leitung. Diese ist in der Praxis von einer Vielzahl von dynamischen Parametern abhängig und kann daher nur näherungsweise berücksichtigt werden. Für die Fragestellung des optimalen Fernwärmeausbaus wird die Transportkapazität einer Leitung als technische Restriktion (Begrenzung des Durchflusses) und zu Bestimmung der kapazitätsabhängigen Verlegekosten benötigt.

- **Leistungsbedarf [kW]**

Der Leistungsbedarf entspricht der Summe des gleichzeitig (s. Abschnitt 2.3) zu erwartenden Leistungsbedarfs aller (potentiellen) Kunden entlang der Trasse.

- **Wärmebedarf [kWh]**

Der Wärmebedarf entspricht der Summe des Wärmebedarfs aller (potentiellen) Kunden entlang der Trasse und beschreibt, welche Energiemenge pro Jahr benötigt wird. Aus dem Wärmebedarf berechnen sich die Erlöse durch den Verkauf der Wärme und die Kosten für die Wärmeproduktion (Brennstoffkosten).



### 7.2.2 Heizkraftwerke

Heizkraftwerke produzieren die benötigte Wärme zur Versorgung der Kunden und entsprechen den Quellen des Netzwerks. Jedem potentiellen Heizkraftwerksstandort wird mindestens ein möglicher Kraftwerkstyp zugewiesen. Ein Kraftwerkstyp beschreibt die technischen und wirtschaftlichen Eigenschaften eines Kraftwerks und wird durch nachfolgende Attribute charakterisiert:

- **Investitionskosten** [€]

Investitionskosten fallen einmalig für den Bau eines Kraftwerks an, für bestehende Kraftwerke werden diese ignoriert. Die Investitionen eines Heizkraftwerks können um einen leistungsabhängigen Term erweitert werden.

- **Betriebskosten** [€/a]

Allgemeine Betriebskosten umfassen regelmäßig anfallende Kosten, welche nicht oder nur unwesentlich von der produzierten Energiemenge abhängen (z.B. Personalkosten).

- **Wärmegestehungskosten** [€/kWh<sub>th</sub>]

Unter Wärmegestehungskosten werden sämtliche variablen Kosten verstanden, die von der produzierten Energiemenge abhängen. Dies sind hauptsächlich Brennstoffkosten, Kosten für Wartung und Verschleiß sowie Roh-, Hilfs- und Betriebsstoffe. Kosten für CO<sub>2</sub>-Emissionen werden gesondert aufgeführt. Bei KWK-Anlagen wird die Stromvergütung bereits in die Wärmegestehungskosten einbezogen, wodurch diese bei einem ausreichend hohen Strompreis auch negative Werte annehmen können.

- **Spezifischer CO<sub>2</sub>-Ausstoß** [g/kWh<sub>th</sub>]

Eine Bilanzierung und Kostenbewertung der CO<sub>2</sub>-Emissionen erfordert Angaben zu dem spezifischen CO<sub>2</sub>-Ausstoß eines Kraftwerks. Bei KWK-Anlagen wird nur der Anteil berücksichtigt, welcher der Wärmeerzeugung zuzuordnen ist (s. Abschnitt 3.4).

- **Thermische Leistung** [kW]

Die thermische Leistung beschreibt, welcher Leistungsbedarf maximal durch das Heizkraftwerk gedeckt werden kann. Durch Berücksichtigung der Leistungsgrenzen wird sichergestellt, dass zu jedem Zeitpunkt eine ausreichende Wärmeerzeugungskapazität bereit steht, um alle Kunden zu versorgen.

### 7.2.3 Gasleitungen

Zur Berücksichtigung der Konkurrenz zwischen einem Ausbau der Fernwärme und der bestehenden Gasversorgung muss das Gasversorgungsnetz einschließlich der bestehenden Gaskunden ebenfalls modelliert werden. Gasleitungen müssen allerdings nur berücksichtigt werden, sofern sie in einer potentiellen Fernwärmetrasse liegen. Ein zusätzlicher Graph wird daher für die Repräsentation des Gasnetzes nicht benötigt. Es ist ausreichend jeder (potentiellen) Trasse des Fernwärmenetzes, welche bereits gasversorgt ist, folgende Parameter zuzuweisen:

- **Notwendiges Erneuerungsjahr**

Für jede Gasleitung wird vorab bestimmt, wann diese voraussichtlich alterungsbedingt erneuert werden muss. Zu diesem Zeitpunkt muss die Gasleitung entweder erneuert oder stillgelegt werden. Letzteres ist jedoch nur möglich, wenn die Trasse zuvor durch eine Fernwärmeleitung erschlossen wurde und die bestehenden Gaskunden damit zukünftig durch Fernwärme versorgt werden.

- **Investitionskosten Gas [€]**

Sofern eine bestehende Gasleitung innerhalb des Planungshorizontes alterungsbedingt zu erneuern ist und die Trasse nicht durch Fernwärme erschlossen wurde, fallen Investitionskosten für die Ersatzerneuerung der Gasleitung an.

- **Betriebskosten [€/a]**

So lange eine Gasleitung nicht stillgelegt wurde, fallen regelmäßige Betriebskosten an.

- **Gasbedarf [kWh]**

Analog zu dem gesamten Wärmebedarf einer Trasse wird der Wärmebedarf der Gaskunden benötigt. Aus diesem wird berechnet, welche Erlöse generiert werden, solange eine bestehende Gasleitung nicht durch Fernwärme erschlossen wird. Da in der Regel nicht alle Häuser entlang einer Gasleitung durch Gas beheizt werden, stimmen der Gesamtwärmebedarf und der Gasbedarf meist nicht überein. Darüber hinaus liegt der Gasbedarf eines Gebäudes aufgrund des Wirkungsgradverlustes des Gaskessels über dem Wärmebedarf des Gebäudes.

Im Gegensatz zu den Fernwärmetrassen werden Gasleitungen als ungerichtete Kanten berücksichtigt, da keine Nebenbedingung eine Modellierung mit gerichteten Kanten erfordert.

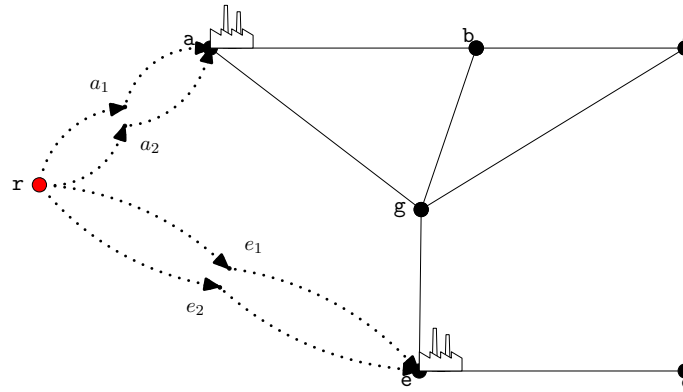
### 7.2.4 Modellierung als Netzwerk

Das Fernwärmenetz wird durch ein Netzwerk abgebildet, dessen Kanten bestehende oder mögliche Trassen für den Bau von Fernwärmeleitungen darstellen. Die Wärme wird über das Netzwerk von den Heizkraftwerken (Quellen) zu den Kunden (Senken) transportiert. Als Besonderheit ist zu sehen, dass Kunden nicht als einzelne Knoten berücksichtigt werden sondern entlang einer Trasse liegen. Würden alle Einzelkunden mit ihrem Hausanschluss berücksichtigt werden, würde die Größe des Netzes stark ansteigen und es könnten praxisferne Lösungen entstehen, wie die Verrohrung eines halben Straßenabschnittes. Die Zuordnung des Verbrauchs zu den Kanten erfordert jedoch eine Modifikation der Netzwerkflussmodellierung, wie in Abschnitt 7.4.1.3 gezeigt wird.

Für alle Modellformulierungen gilt, dass diese auf einem gerichteten Graphen basieren. Sämtliche Kanten des ungerichteten Graphen der möglichen Trassen werden somit durch zwei gerichtete Pfeile ersetzt. Auch wenn sich hierdurch die Anzahl der Variablen verdoppelt, konnte in mehreren Arbeiten gezeigt werden, dass die zugehörige LP-Relaxierung der gerichteten Formulierung strenger ist (s. Abschnitt 6.1.3). Darüber hinaus können bestimmte Nebenbedingungen, welche für die Modellformulierungen benötigt werden, nur für gerichtete Graphen effizient formuliert werden. Es muss durch das Modell jedoch sichergestellt werden, dass stets nur ein gerichteter Pfeil der jeweiligen ungerichteten Kante Teil der Lösung ist.

Dem Netzwerk wird ein zusätzlicher Wurzelknoten ( $r$ ) hinzugefügt, welcher zwingend Teil der Lösung sein muss. Die Einführung eines Wurzelknotens vereinfacht es Bedingungen zu formulieren, welche den Zusammenhang des Graphen sicherstellen. Der Wurzelknoten verfügt nur über ausgehende Kanten, die zu den möglichen Standorten von Heizkraftwerken führen. Knoten, die kein Kraftwerksstandort sind, werden nicht mit dem Wurzelknoten verbunden. In der vereinfachten Modellformulierung (Abschnitt 7.4.1) werden die Heizkraftwerke nicht gesondert betrachtet, um kompatibel zu bestehenden Modellierungen des Steiner-Problems in Graphen zu sein. Hier weisen die Kanten zwischen dem Wurzelknoten und den potentiellen Standorten von Heizkraftwerken als Investitions- und Betriebskosten die entsprechenden Kosten des jeweiligen Kraftwerkstyps auf. Da einem Kraftwerksstandort mehrere mögliche Kraftwerkstypen zugewiesen werden können, führen gegebenenfalls mehrere Kanten von dem Wurzelknoten zu einem Kraftwerksstandort. Um solche parallelen Kanten zu vermeiden, wird für jeden Kraftwerkstyp ein zusätzlicher virtueller Knoten hinzugefügt, der zwischen dem Wurzelknoten und dem Kraftwerksstandort liegt. Der Wurzelknoten wird nicht mehr direkt mit den Kraftwerksstandorten verbunden, sondern nur

mit den virtuellen Knoten, von welchen wiederum eine Kante zu den Kraftwerksknoten führt. Abbildung 7.1 illustriert diese Erweiterung des Graphen, wobei die Knoten  $a_1$  und  $a_2$  bzw.  $e_1$  und  $e_2$  jeweils die virtuellen Knoten für die Kraftwerkstypen 1 und 2 der Standorte  $a$  und  $e$  sind.



**Abbildung 7.1** Berücksichtigung der Heizkraftwerke in der vereinfachten Modellformulierung über zusätzliche Kanten

Diese Transformation des Graphen zur Berücksichtigung der Kraftwerke als Kanten ist nicht zwingend notwendig. Heizkraftwerke könnten auch über eine spezielle Menge und angepasste Nebenbedingungen berücksichtigt werden. In diesem Fall weicht die Modellierung jedoch relativ stark von der ursprünglichen Formulierung des Steiner-Problems in Graphen ab, wodurch zum einen der Modellvergleich mit bestehenden Ansätzen erschwert wird und Benchmark-Probleme ebenfalls transformiert werden müssen. Zum anderen erlaubt diese Darstellung der Kraftwerksstandorte ohne größere Anpassungen die Nutzung bestimmter Graphenalgorithmen, welche für Preprocessing-Routinen und die Branch-and-Cut Algorithmen verwendet werden.<sup>32</sup> Darüber hinaus ist die mathematische Modellformulierung kompakter und muss ebenfalls weniger Spezialfälle abdecken. Der einzige Nachteil dieser Modellierung besteht in einer geringfügig erhöhten Variablenanzahl, welche aus der Einführung der virtuellen Knoten für die unterschiedlichen Kraftwerkstypen resultiert. Diese fällt jedoch in der Regel nicht ins Gewicht, da die Anzahl der Kraftwerksstandorte und -typen im Gegensatz zu der Gesamtanzahl von Knoten und Kanten sehr gering ist. Für die vollständige Modellformulierung wird diese Transformation nicht gewählt, da die Heizkraftwerke über gesonderte Nebenbedingungen berücksichtigt werden. Allerdings muss für die beiden Branch-and-Cut Modelle ebenfalls ein Wurzelknoten eingeführt werden, der nur mit den Knoten der Heizkraftwerke verbunden ist, um auch hier den Zusammenhang des Lösungsgraphen effizient prüfen zu können.

<sup>32</sup> Z.B. kann für den B&C Connectivity Algorithmus ein einfacher *Single-source Maximum-Flow* Algorithmus verwendet werden.

## 7.3 Symbole und Definitionen

### 7.3.1 Mengen und Indizes

#### Allgemein

$v \in V$	Knoten im Netzwerk
$(i, j) \in A \subseteq (V, V)$	(gerichtete) Kanten im Netzwerk (potentielle Fernwärmetrassen)
$t \in T$	Zeitperioden
$\{r\} \subset V$	Wurzelknoten
$z \in Z$	Zyklen des Graphen
$(i, j) \in A_z^{CYC} \mid z \in Z$	Menge der Kanten des Zyklus $z \in Z$
$s \in S_{v \mid v \in V}$	Menge der trennenden Schnitte zwischen dem Wurzelknoten $r$ und dem Knoten $v$
$(i, j) \in A_s^{CUT} \mid s \in S_{v \mid v \in V}$	Menge der Kanten des trennenden Schnittes $s$ zwischen dem Wurzelknoten $r$ und dem Knoten $v \in V$

#### Vollständiges Modell

$(i, j) \in A^{GAS} \subseteq A$	Trassen mit bestehender Gasleitung
$v \in V^{HKW} \subseteq V$	Bestehende und potentielle Heizkraftwerksstandorte
$h \in H_v \mid v \in V^{HKW}$	Heizkraftwerkstypen, die an Knoten $v \in V^{HKW}$ gebaut werden dürfen.
$u \in U$	Menge der Intervalle für die Nachbildung der Jahresdauerlinie des Wärmebedarfs
$A_{(i,j)}^{PARENT} \mid (i,j) \in A$	Menge der vorgelagerten topologischen Brücken von Kante $(i, j) \in A$

### 7.3.2 Entscheidungsvariablen

#### Allgemein

$y_{i,j,t} \in \{0, 1\}$	$\begin{cases} = 1 & \text{falls Leitung } (i, j) \in A \text{ in } t \in T \text{ gebaut wird} \\ = 0 & \text{sonst} \end{cases}$
--------------------------	--

$f_{i,j,t} \in \mathbb{R}_0^+ \quad [\text{kW}]^*$	Fluss (Leistung) auf Leitung $(i, j) \in A$ in Periode $t \in T$
--	--

#### Vollständiges Modell

$x_{v,h,t} \in \{0, 1\}$	$\begin{cases} = 1 & \text{falls an Knoten } v \in V^{HKW} \text{ BHKW-Typ } h \in H_v \\ & \text{in Periode } t \in T \text{ gebaut wird} \\ = 0 & \text{sonst} \end{cases}$
$g_{v,h,t} \in \mathbb{R}_0^+ \quad [\text{kW}]$	Leistung von BHKW mit Typ $h \in H_v$ an Knoten $v \in V^{HKW}$ in Periode $t \in T$
$g_{v,h,t}^{CAP} \in \mathbb{R}_0^+ \quad [\text{kW}]$	Maximale Leistung zur Berechnung der leistungsabhängigen Kosten von BHKW mit Typ $h \in H_v$ an Knoten $v \in V^{HKW}$ in Periode $t \in T$
$g_{v,h,t,u}^{INT} \in \mathbb{R}_0^+ \quad [\text{kW}]$	Leistung von BHKW mit Typ $h \in H_v$ an Knoten $v \in V^{HKW}$ in Periode $t \in T$ für das Intervall $u \in U$
$q_{v,h,t} \in \mathbb{R}_0^+ \quad [\text{kWh}]$	Arbeit von BHKW mit Typ $h \in H_v$ an Knoten $v \in V^{HKW}$ in Periode $t \in T$
$y_{i,j}^{GAS} \in \{0, 1\}$	$\begin{cases} = 1 & \text{falls Gasleitung } (i, j) \in A^{GAS} \text{ erneuert wird} \\ = 0 & \text{sonst} \end{cases}$
$f_{i,j,t}^{CAP} \in \mathbb{R}_0^+ \quad [\text{kW}]$	Notwendige Transportkapazität auf Leitung $(i, j) \in A$ in Periode $t \in T$

\* Einheit gilt nur für das vollständige Modell. Im vereinfachten Modell ist der Netzwerkfluss dimensionslos.

### 7.3.3 Parameter

#### Allgemein

$c_{i,j,t}^{PIPE}$	[€]	Fixe Verlegekosten für Leitung $(i,j) \in A$ bei Verlegung in $t \in T$
--------------------	-----	---

#### Vereinfachtes Modell

$b_t$	[€]	Gesamtbudget in Periode $t \in T$
$p_{i,j,t}$	[€]	Kapitalwert der Leitung $(i,j) \in A$ , wenn diese in Periode $t \in T$ gebaut wird.

#### Vollständiges Modell

$f_{i,j,t}^{MAX}$	[kW]	Maximaler Fluss auf Leitung $(i,j) \in A$ in Periode $t \in T$
$d_{i,j,t}$	[kWh]	Gesamtwärmebedarf an Leitung $(i,j) \in A$ in Periode $t \in T$
$d_{i,j,t}^{GAS}$	[kWh]	Gasbedarf an Leitung $(i,j) \in A$ in Periode $t \in T$
$f_{i,j,t}^{REQ}$	[kW]	Leistungsbedarf auf Leitung $(i,j) \in A$ in Periode $t \in T$
$c_{i,j,t}^{B,PIPE}$	[€/a]	Jährliche Betriebskosten für Leitung $(i,j) \in A$ in Periode $t \in T$
$c_{i,j,t}^{PIPE,VAR}$	[€/kW <sub>th</sub> ]	Kapazitätsabhängige Verlegekosten für Leitung $(i,j) \in A$ bei Verlegung in $t \in T$
$\gamma_{i,j}$		Erneuerungszeitpunkt von Gasleitung $(i,j) \in A^{GAS}$
$c_{i,j,t}^{GAS}$	[€]	Erneuerungskosten für Gasleitung $(i,j) \in A^{GAS}$ $\begin{cases} > 0 & \text{falls die Gasleitung in } t = \gamma_{i,j} \text{ erneuert werden muss} \\ = 0 & \text{sonst} \end{cases}$
$g_h^{MAX}$	[kW]	Maximale Erzeugungsleistung von HKW-Typ $h \in H$
$c_{h,t}^{HKW}$	[€]	Fixe Investitionskosten für HKW-Typ $h \in H$ bei Bau in Periode $t \in T$
$c_{h,t}^{HKW,VAR}$	[€/kW <sub>th</sub> ]	Leistungsabhängige Investitionskosten für HKW-Typ $h \in H$ bei Bau in Periode $t \in T$
$c_{h,t}^{GEN}$	[€/kWh]	Spezifische Wärmegestehungskosten für HKW-Typ $h \in H$ in Periode $t \in T$
$s_h^{CO2}$	[g/kWh]	Spezifischer CO <sub>2</sub> -Ausstoß für HKW-Typ $h \in H$
$c_t^{CO2}$	[€/g]	Spezifische CO <sub>2</sub> -Kosten in Periode $t \in T$
$c_{h,t}^{B,HKW}$	[€/a]	Jährliche Betriebskosten für HKW-Typ $h \in H$ in Periode $t \in T$
$r_t$	[€/kWh]	Spezifischer Erlös für den Wärmeverkauf in Periode $t \in T$
$r_t^{GAS}$	[€/kWh]	Spezifische Marge für den Gasverkauf in Periode $t \in T$
$b_t^{PIPE}$	[€]	Budget für den Bau von Leitungen in Periode $t \in T$
$b_t^{HKW}$	[€]	Budget für den Bau von Heizkraftwerken in Periode $t \in T$
$\psi \in [0, 1]$		Erwarteter Anschlussgrad der Fernwärme
$\omega \in [0, 1]$	[1/a]	Diskontierungszinssatz
$\alpha_t$		Rentenbarwertfaktor für Periodenlänge $> 1$
$\zeta_t$		Diskontierungsfaktor für Periodenlänge $> 1$
$l_t$	[a]	Dauer der Periode $t \in T$
$m_u$	[h]	Dauer des Zeitintervalls $u \in U$
$\beta_u \in [0, 1]$		Multiplikator (in % der Spitzenleistung) des Zeitintervalls $u \in U$

### 7.3.4 Definitionen

#### 7.3.4.1 Diskontierungsfaktoren

Für eine korrekte Barwertberechnung muss die Länge der jeweiligen Zeitperioden berücksichtigt werden, da diese nicht zwingend ein Jahr dauert, sondern eine Dauer von  $l_t$  Jahren aufweist.

##### *Diskontierungsfaktor*

Der Diskontierungsfaktor  $\zeta_t$  ist für Periode  $t$  wie folgt definiert:

$$\zeta_t = \frac{1}{(1 + \omega)^{\sum_{\tau \leq t} l_\tau}} \quad (7.1)$$

##### *Rentenbarwertfaktor*

Der Barwert einer jährlich wiederkehrenden (konstanten) Zahlung kann durch den Rentenbarwertfaktor bestimmt werden. Dieser ist für eine Laufzeit von  $T$  Perioden bei einer Periodenlänge von einem Jahr und Zahlungsbeginn in  $t = 1$  definiert als:

$$\text{Rentenbarwertfaktor}(t) = \sum_{t=1}^T (1 + \omega)^{-t} = \frac{1 - (1 + \omega)^{-T}}{\omega} \quad (7.2)$$

Die korrekte Diskontierung jährlich wiederkehrender Kosten oder Erlöse bei einer abweichenden Periodenlänge erfordert einen angepassten Rentenbarwertfaktor. Zum einen muss analog zu dem Diskontierungsfaktor die Dauer der jeweiligen Perioden berücksichtigt werden. Zum anderen muss der Zahlungsbeginn von  $t = 0$  auf das Startjahr der jeweiligen Periode ( $\sum_{\tau < t} l_\tau$ ) verschoben werden. Der Barwert einer regelmäßigen (jährlich wiederkehrenden) Zahlung in Periode  $t$  ergibt sich dann aus nachfolgender Formel (entspricht der Differenz der Rentenbarwertfaktoren zu den Zeitpunkten  $t + l_t$  und  $t$ ).

$$\alpha_t = \frac{(1 + \omega)^{-\sum_{\tau < t} l_\tau} - (1 + \omega)^{-l_t - \sum_{\tau < t} l_\tau}}{\omega} \quad (7.3)$$

#### 7.3.4.2 Kantengewichte des vereinfachten Modells

In der vereinfachten Modellformulierung werden Parameter wie der Wärmebedarf und die Wärmegestehungskosten nicht direkt im Modell berücksichtigt. Diese Werte sind indirekt in dem jeweiligen Kantengewicht  $p_{i,j,t}$  enthalten. Dieses entspricht dem Kapitalwert einer Leitung, wenn diese in Periode  $t$  gebaut wird. Der Kapitalwert ergibt sich (unter

Vernachlässigung der Gaskundenverdrängung) als Differenz zwischen den diskontierten Nettoerlösen aus dem Wärmeverkauf (Erlöse abzüglich der durchschnittlichen Wärmege-  
stehungskosten  $c_t^{GEN}$  und den Betriebskosten) und den Investitionskosten.

$$p_{i,j,t} = -\zeta_t \cdot c_{i,j,t}^{PIPE} + \sum_{\tau \geq t} \alpha_\tau \left[ d_{i,j,\tau} \cdot (r_\tau - c_\tau^{GEN}) - c_{i,j,\tau}^{B,PIPE} \right] \quad \forall t \in T$$

## 7.4 Modellformulierungen

Nachfolgend werden die in Tabelle 7.1 vorgestellten Modelle beschrieben. Die unterschiedlichen Modellierungsansätze (Netzwerkfluss, B&C Subtour-Elimination, B&C Connectivity) weisen jeweils die selbe Zielfunktion auf und teilen sich gemeinsame Nebenbedingungen. Sowohl für das vereinfachte als auch für das vollständige Modell werden daher zuerst die Zielfunktion und die Nebenbedingungen beschrieben, welche für alle Modellformulierungen notwendig sind. Anschließend werden die zusätzlichen Restriktionen beschrieben, die jeweils nur in einer Formulierung benötigt werden. Abbildung 7.2 veranschaulicht die Modellhierarchie.

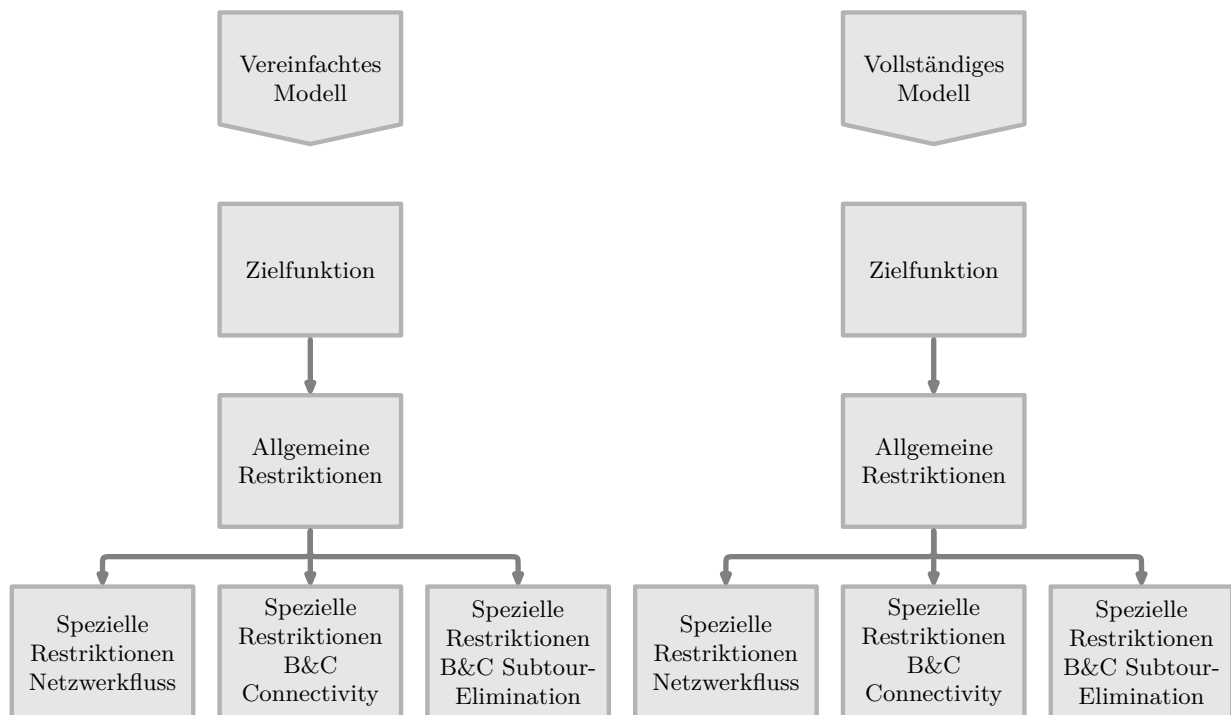


Abbildung 7.2 Übersicht der Modellformulierungen



## 7.4.1 Vereinfachtes Modell

### 7.4.1.1 Zielfunktion

Das Optimierungsziel besteht in der Maximierung des Gesamtgewinns über den Betrachtungszeitraum.

$$\max \sum_{t \in T} \sum_{(i,j) \in A} y_{i,j,t} \cdot p_{i,j,t} \quad (7.4)$$

### 7.4.1.2 Allgemeine Nebenbedingungen

*Jede Leitung darf nur in eine Richtung gebaut werden.*

Gleichung (7.5) besagt, dass jede Leitung im gesamten Zeitraum nur einmal gebaut werden darf. Gleichzeitig wird sichergestellt, dass jede gerichtete Kante nur in einer Richtung Teil der Lösung ist.

$$\sum_{t \in T} y_{i,j,t} + y_{j,i,t} \leq 1 \quad \forall (i,j) \in A \quad (7.5)$$

*Budgetrestriktion*

Das Budget für den Bau von Leitungen und Kraftwerken<sup>33</sup> darf in keiner Periode überschritten werden.

$$\sum_{(i,j) \in A} y_{i,j,t} \cdot c_{i,j,t}^{PIPE} \leq b_t \quad \forall t \in T \quad (7.6)$$

*Leitungen benötigen einen Vorgänger.*

Nebenbedingung (7.7) stellt sicher, dass jede Leitung, die nicht von dem Wurzelknoten abgeht, nur dann Teil der Lösung sein kann, wenn diese mindestens eine eingehende Kante aufweist.

$$y_{i,j,t} \leq \sum_{(h,i) \in A | h \neq j} \sum_{\tau \leq t} y_{h,i,\tau} \quad \forall (i,j) \in A | i \neq r, t \in T \quad (7.7)$$

Wie bereits in Abschnitt 6.1.3.5 erläutert wurde, ist (7.7) zwar eine notwendige, jedoch keine hinreichende Bedingung für den Zusammenhang des Lösungsgraphen. Sofern dieser Zyklen aufweist, kann (7.7) erfüllt sein, obwohl die Lösung isolierte Teilgraphen enthält. Abbildung 6.1 illustriert eine solche Konstellation.

<sup>33</sup> Heizkraftwerke werden in der vereinfachten Modellform ebenfalls als Kanten modelliert, weshalb diese hier nicht gesondert behandelt werden (s. Abschnitt 7.2.4).

Um eine zusammenhängende Lösung zu garantieren sind daher weitere Nebenbedingungen notwendig. Diese werden für die Netzwerkflussformulierung in Abschnitt 7.4.1.3 beschrieben, für die B&C Subtour-Elimination Formulierung in Abschnitt 7.4.1.4 und für die B&C Connectivity Formulierung in Abschnitt 7.4.1.5.

Für die Netzwerkflussformulierung (Modell A1) und die Formulierung mit Connectivity Cuts (Modell A3) ist Gleichung (7.7) nicht zwingend notwendig, da der Zusammenhang des Lösungsgraphen durch Flussgleichungen bzw. dem Ausschluss trennender Schnitte sichergestellt ist, verschärft für diese Modelle jedoch die LP-Relaxierung.

#### *Verschärfung der LP-Relaxierung*

Zur Verschärfung der LP-Relaxierung kann nachfolgende Restriktion hinzugefügt werden, welche die Nebenbedingung (7.7) ergänzt. Gleichung (7.8) zwingt  $y_{i,j,t}$  auf den Wert null, wenn alle eingehenden Kanten zu einem Zeitpunkt  $\tau > t$  errichtet werden. Da jede Leitung nur einmal gebaut werden darf, bedeutet dies, dass in diesem Fall keine eingehende Leitung zum Zeitpunkt  $t$  existieren kann.

$$y_{i,j,t} \leq \sum_{(h,i) \in A | h \neq j} \sum_{\tau > t} (1 - y_{h,i,\tau}) \quad \forall (i,j) \in A | i \neq r, t \in T \quad (7.8)$$

#### **7.4.1.3 Nebenbedingungen Netzwerkfluss (Modell A1)**

In der vereinfachten Modellformulierung hat der Netzwerkfluss keinerlei technische Bedeutung (Wärmetransport) und dient ausschließlich der Gewährleistung des Zusammenhangs des Lösungsgraphen. Dieser wird sichergestellt, indem vom Wurzelknoten genau eine Einheit zu jeder Kante transportiert wird, die Teil der Lösung ist. Da ein Netzwerkfluss von einem Startknoten zu einem Zielknoten fließt und nicht zu einer Kante, ist der Zielknoten jeweils der Endknoten der (gerichteten) Kante.

*Ein Fluss ist nur auf gebauten Leitungen zulässig.*

Gleichung (7.9) lässt einen Fluss über eine Leitung nur zu, wenn diese zuvor errichtet wurde. Der maximale Fluss auf einer Kante ist durch die Anzahl der Kanten beschränkt, da an jeder Kante eine Abnahme von einer Einheit angesetzt wird. Es kann jedoch immer nur die Hälfte der gerichteten Kanten gleichzeitig Teil der Lösung sein, weshalb die obere Grenze für die Flussvariable  $\frac{|A|}{2}$  beträgt.

$$f_{i,j,t} \leq \frac{|A|}{2} \cdot \sum_{\tau \leq t} y_{i,j,\tau} \quad \forall (i,j) \in A, t \in T \quad (7.9)$$

Nebenbedingung (7.9) zeigt bereits eine Schwäche der Flussformulierung: Die vergleichsweise schwache LP-Relaxierung. Die Begrenzung des Flusses auf  $\frac{|A|}{2}$  fixiert in der LP-Relaxierung die Variable  $y_{i,j,t}$  oftmals nicht auf den Wert eins, obwohl die zugehörige Kante einen positiven Fluss aufweist. Da die obere Grenze in den wenigsten Fälle ausgeschöpft wird (*Big-M* Problematik), ist ein fraktioneller Wert ausreichend für die Erfüllung der Nebenbedingung wodurch die Ganzzahligkeit der Lösung erst in dem Branch-and-Bound hergestellt werden muss.

Für eine Verschärfung der LP-Relaxierung in dem mehrperiodigen Fall kann (7.9) zusätzlich disaggregiert formuliert werden. Ein Bau in einer Periode  $t + n$  bedeutet, dass die Leitung in  $t$  auf jeden Fall noch nicht gebaut worden ist, da diese nur einmal gebaut werden darf. Damit muss der Fluss in diesem Fall in Periode  $t$  auf den Wert null fixiert werden.

$$f_{i,j,t} \leq \frac{|A|}{2} \cdot (1 - y_{i,j,\tau}) \quad \forall (i,j) \in A, t \in T, \tau \in T \mid \tau > t \quad (7.10)$$

#### Flussgleichung

Gleichung (7.11) ist die elementare Nebenbedingung des Modells und stellt sicher, dass die Flüsse in jeder Periode ausgeglichen sind. An jedem Knoten muss der Zufluss aller eingehenden Kanten, abzüglich einer Abnahme von einer Einheit für jede eingehende Kante, die in dieser Periode Teil des Lösungsgraphen ist, dem Abfluss entsprechen. Gleichung (7.11) gilt nicht für Kanten, die von dem Wurzelknoten  $r$  abgehen. Diese entsprechen den Heizkraftwerken und weisen (aufgrund der Vernachlässigung technischer Randbedingungen) einen unbeschränkten Zufluss auf.

$$\sum_{(h,i) \in A} \left( f_{h,i,t} - \sum_{\tau \leq t} y_{h,i,\tau} \right) = \sum_{(i,j) \in A} f_{i,j,t} \quad \forall i \in V \setminus \{r\}, t \in T \quad (7.11)$$

Im Gegensatz zu gängigen Netzwerkflussmodellen wird die Abnahme hier nicht einem Knoten zugerechnet sondern einer Kante. Die Bilanzierung der Netzwerkflüsse muss jedoch weiterhin an den Knoten erfolgen, weshalb Restriktion (7.11) nicht ausreichend für eine korrekte Flussverteilung ist. Gleichung (7.11) kann erfüllt sein, obwohl eine Kante, die Teil der Lösung ist, einen Fluss von null aufweist. Dies ist genau dann der Fall, wenn eine andere, mit dem gleichen Knoten inzidente Kante den Fluss übernimmt. Daher muss durch eine weitere Nebenbedingung (7.12) sichergestellt werden, dass jede aktive Kante, mindestens einen Fluss von einer Einheit aufweist. Gleichung (7.12) ist für die vereinfachte Modellformulierung nicht zwingend notwendig, da eine korrekte Flussverteilung nicht erforderlich ist, und die Flussgleichung ausreicht, um sicherzustellen, dass jede

Kante mit dem Wurzelknoten verbunden ist. Für die vollständige Modellformulierung mit Kapazitätsrestriktionen muss Gleichung (7.12) hingegen im Modell berücksichtigt werden (unter Einbeziehung des Leistungsbedarfs der Kante), da sonst die Netzwerkflüsse falsch berechnet werden.

$$f_{i,j,t} \geq \sum_{\tau \leq t} y_{i,j,\tau} \quad \forall (i,j) \in A, t \in T \quad (7.12)$$

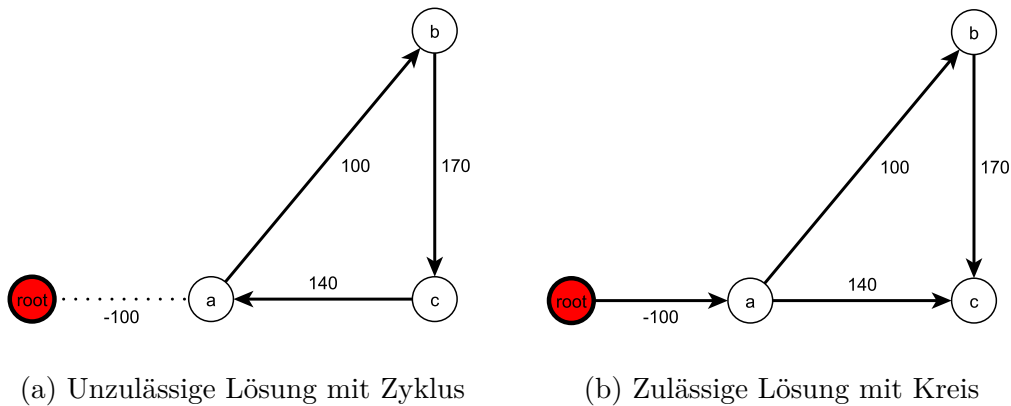
#### 7.4.1.4 Nebenbedingungen B&C Subtour-Elimination (Modell A2)

Wie bereits beschrieben, können trotz Gleichung (7.7) isolierte Teilgraphen entstehen, wenn die Lösung Zyklen enthält. Der Ansatz der Modellformulierung A2 zur Vermeidung solcher unzulässigen Lösungen besteht daher in dem expliziten Ausschluss von Zyklen über zusätzliche Restriktionen.

##### Zyklusrestriktion

Gleichung (7.13) stellt sicher, dass der Lösungsgraph keine Zyklen aufweist, indem immer nur  $|A_z^{CYC}| - 1$  Kanten eines Zyklus  $z$  Teil der Lösung sein dürfen. Bei mehrperiodigen Modellen bewirkt (7.13) lediglich, dass alle Kanten eines Zyklus nicht in der gleichen Periode gebaut werden dürfen. D.h. es ist zulässig einen Zyklus in einer späteren Periode zu schließen. Dies ist ausreichend, da ein Zyklus, der in  $t+1$  vervollständigt wird, in  $t$  noch kein Zyklus war und die zugehörigen Kanten daher mit dem Wurzelknoten verbunden sein müssen.

$$\sum_{(i,j) \in A_z^{CYC}} y_{i,j,t} \leq |A_z^{CYC}| - 1 \quad \forall z \in Z, t \in T \quad (7.13)$$

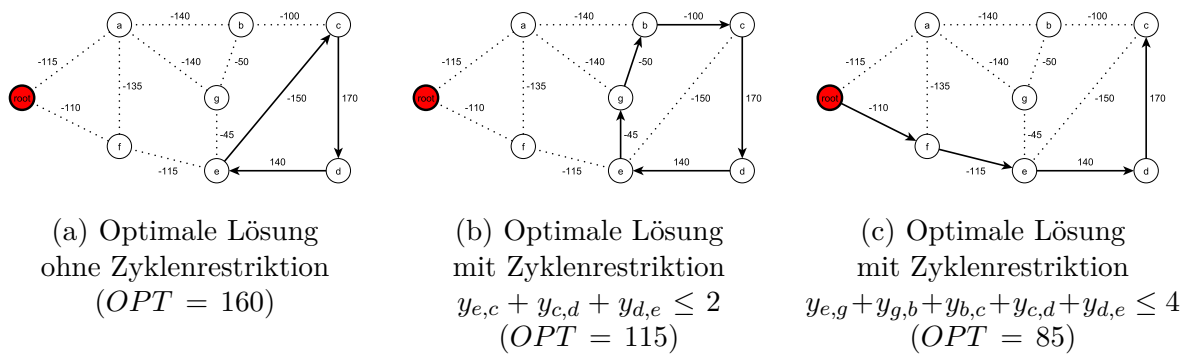


**Abbildung 7.3** Unterschied zwischen Zyklus (gerichtet) und Kreis (ungerichtet)

Das Verbot der Zyklen erzwingt lediglich einen zusammenhängenden Lösungsgraphen. Es werden durch (7.13) keine zulässigen Lösungen des ungerichteten Problems (Kreise) abgeschnitten, da ein Kreis eines ungerichteten Graphen in einem gerichteten Graphen als Zyklus oder als offener Pfad beschrieben werden kann. Abbildung 7.4 veranschaulicht eine optimale Lösung, welche zwingend die (ungerichteten) Kanten  $(a, b)$ ,  $(b, c)$ ,  $(c, a)$  enthalten muss, diese jedoch nicht als Zyklus sondern in der Form  $(a, b)$ ,  $(a, c)$ ,  $(b, c)$  enthält.

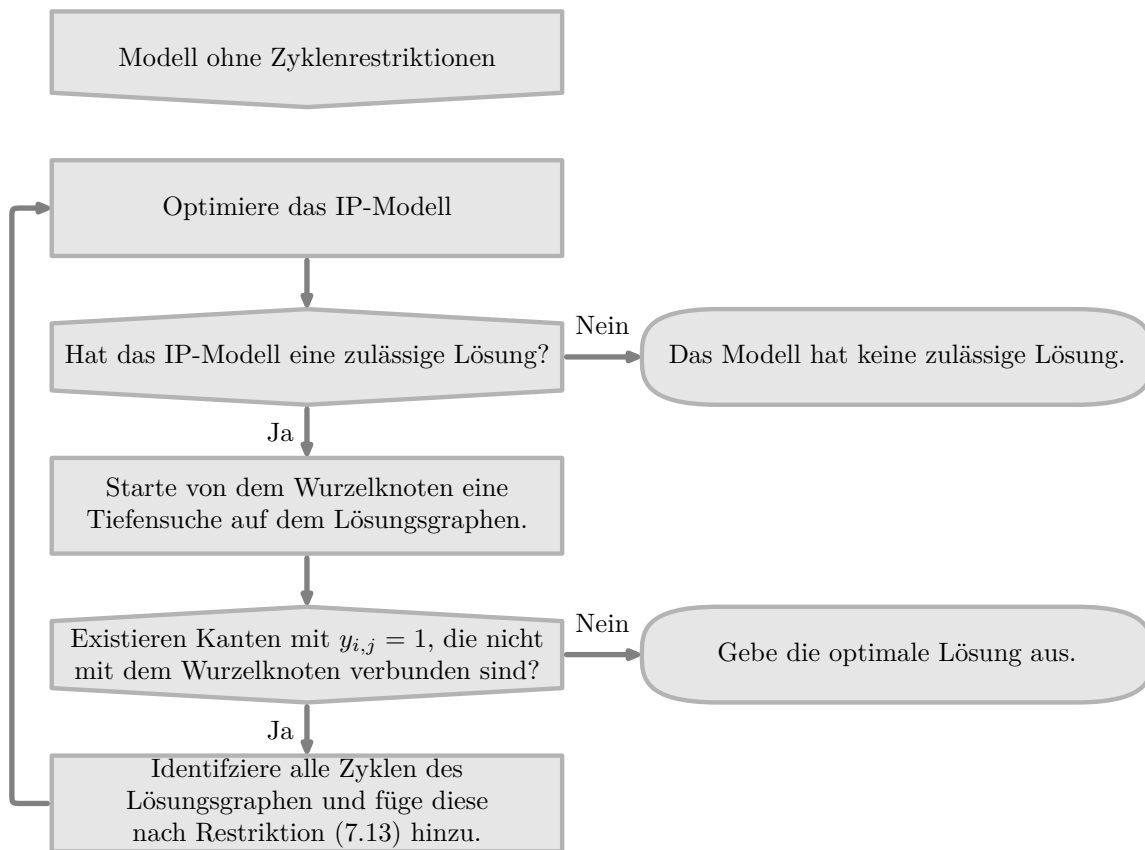
### Ablauf Branch-and-Cut Algorithmus

Die Anzahl der möglichen Zyklen wächst exponentiell mit der Anzahl der Kanten in einem Graphen, weshalb auch eine exponentielle Anzahl der notwendigen Restriktionen nach Gleichung (7.13) existiert. Es ist daher nicht möglich, sämtliche Zyklen vorab zu ermitteln und dem Modell als Nebenbedingungen hinzuzufügen. Zumal dies auch nicht effizient wäre, da in der Regel nur ein geringer Bruchteil aller möglichen Zyklen einer Probleminstance relevant sind.



**Abbildung 7.4** Zyklenbildung im Verlauf des B&C Subtour-Elimination

Die Zyklusrestriktion (7.13) wird daher zunächst vernachlässigt und das Modell gelöst. Anschließend werden Kanten, die in der Lösung nicht mit dem Wurzelknoten verbunden sind, über eine von dem Wurzelknoten ausgehende Tiefensuche ermittelt. Sofern die Lösung isolierte Teilgraphen aufweist, werden alle Zyklen der aktuellen Lösung identifiziert und als zusätzliche Nebenbedingungen gemäß Gleichung (7.13) dem Modell hinzugefügt. Dieser Prozess wird so lange iterativ durchgeführt, bis die optimale Lösung einem zusammenhängenden Graphen entspricht oder keine zulässige Lösung gefunden wird. Der prinzipielle Ablauf des Branch-and-Cut Algorithmus kann Abbildung 7.5 entnommen werden, wobei aus Gründen der Übersichtlichkeit nur der einperiodige Fall dargestellt wird. Ein Beispiel der Zyklenbildung findet sich in Abbildung 7.4. Eine detaillierte Beschreibung des Algorithmus einschließlich Implementierungseigenschaften erfolgt in Kapitel 8.



**Abbildung 7.5** Ablauf des B&C Subtour-Elimination Algorithmus

#### 7.4.1.5 Nebenbedingungen B&C Connectivity (Modell A3)

Analog zu der vorangegangenen Modellierung wird auch Modell A3 durch einen Branch-and-Cut Algorithmus iterativ gelöst. Während Modell A2 den Zusammenhang des Lösungsgraphen durch das Verbot von Zyklen erreicht, werden in dieser Modellierung Nebenbedingungen hinzugefügt, welche sicherstellen, dass keine trennenden Schnitte zwischen dem Wurzelknoten und den Kanten der optimalen Lösung bestehen.

##### *Keine trennenden Schnitte*

Gleichung (7.14) besagt, dass eine Kante in der optimalen Lösung nicht von einem Knoten ausgehen darf, wenn dieser durch einen Schnitt von dem Wurzelknoten getrennt ist. Ein Schnitt ist genau dann trennend, wenn die Summe des Wertes der  $y_{i,j,t}$  Variable aller Kanten des Schnittes den Wert null annimmt. Sobald der Ausgangsgrad eines Knotens  $i$  in der optimalen Lösung größer null ist, muss folglich die Kapazität aller Schnitte zwischen dem Wurzelknoten und  $i$  mindestens den Wert eins aufweisen.

$$y_{i,j,t} \leq \sum_{(h,i) \in A_s^{CUT}} \sum_{\tau \leq t} y_{h,i,\tau} \quad \forall (i,j) \in A, s \in S_i, t \in T \quad (7.14)$$

Allerdings gilt auch hier, dass eine exponentielle Anzahl möglicher Schnitte existiert. Die Restriktionen nach Gleichung (7.14) können daher nicht vorab dem Modell hinzugefügt werden, sondern müssen im Verlauf des Branch-and-Cut Algorithmus identifiziert werden. Die Funktionsweise dieses Algorithmus wird nachfolgend beschrieben. Der Ablauf ist in Abbildung 7.6 dargestellt, wobei aus Gründen der Übersichtlichkeit nur der einperiodige Fall dargestellt wird. Die genaue Implementierung einschließlich der Bestimmung der Cuts wird in Abschnitt 8.1.3 erläutert.

### Ablauf Branch-and-Cut Algorithmus

Für den Lösungsgraphen gilt, dass ein Pfad von dem Wurzelknoten zu jedem Knoten existieren muss, wenn dieser zusammenhängend ist. Diese Zusammenhangsbedingung kann auch als Netzwerkflussproblem gesehen werden, wobei von dem Wurzelknoten zu jedem Knoten ein Fluss einer Einheit transportiert werden muss. Sei die Transportkapazität jeder Kante der Wert der zugehörigen  $y_{i,j,t}$  Variable aus der optimalen Lösung des MIP-Modells. Der Lösungsgraph ist genau dann zusammenhängend, wenn für jede Kante  $(i,j)$  mit  $y_{i,j,t} = 1$  gilt, dass der maximale Fluss  $f_{r,i,t}^*$  von  $r$  nach  $i$  (in Periode  $t$ ) den Wert eins annimmt. Sofern Kanten existieren, für die gilt  $y_{i,j,t} = 1$  und  $f_{r,i,t}^* = 0$ , ist der Graph nicht zusammenhängend und es existiert ein Schnitt mit Kapazität null zwischen  $r$  und  $i$ . Diese Schnitte werden für jeden Knoten  $i$ , der in  $t$  einen Ausgangsgrad  $> 0$  (also mindestens eine Kante mit  $y_{i,j,t} = 1$ ) aufweist, durch einen Algorithmus zur Bestimmung des maximalen Flusses identifiziert. Anschließend werden die entsprechenden Restriktionen gemäß Gleichung (7.14) dem Modell hinzugefügt. Der Algorithmus löst das Modell so lange iterativ, bis die Lösung entweder keine trennenden Schnitte mehr aufweist oder keine zulässige Lösung existiert.

Ein großer Vorteil dieser Nebenbedingungen gegenüber den Zyklenrestriktionen ist die Möglichkeit, die trennenden Schnitte bereits nach Lösung der LP-Relaxierung zu bestimmen. In der LP-Relaxierung muss der maximale Fluss zwischen dem Wurzelknoten  $r$  und einem Knoten  $i$  nicht zwingend den Wert eins aufweisen, sondern dem Minimum aus eins und dem Ausgangsgrad von  $i$ . Die Bedingung für den maximalen Fluss lautet dann  $f_{r,i,t}^* \geq \min(1, \sum_{(i,j) \in A} y_{i,j,t})$ .

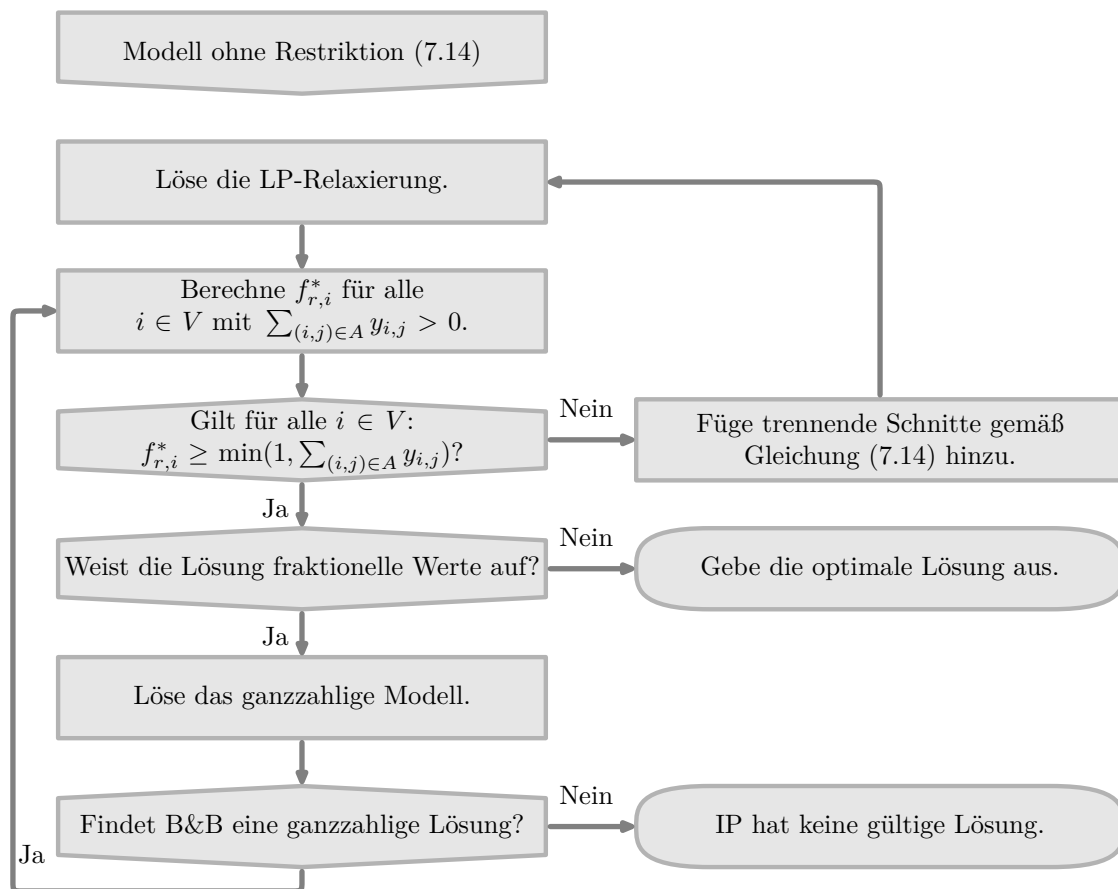


Abbildung 7.6 Ablauf des B&amp;C Connectivity Algorithmus

## 7.4.2 Vollständiges Modell

Das vollständige Modell beinhaltet zum einen detaillierte Kostenterme und technische Restriktionen (Kapazitätsbeschränkungen), zum anderen wird als wesentliche Erweiterung gegenüber dem vereinfachten Modell die Konkurrenz zur bestehenden Gasversorgung berücksichtigt. Nachfolgend werden die Zielfunktion und die Nebenbedingungen des vollständigen Modell erläutert. Zusätzlich werden Modellerweiterungen vorgestellt, die neben einer Bestimmung der kapazitätsabhängigen Verlegekosten von Leitungen eine Modellierung der Fahrweise von Heizkraftwerken zur genauen Bestimmung der Erzeugungskosten ermöglichen.

### 7.4.2.1 Zielfunktion

Nachfolgende Gleichung (7.15) beschreibt das Optimierungsziel, welches der Maximierung des Barwerts des Gesamtgewinns (Gas + Fernwärme) über den Betrachtungszeitraum entspricht. Die einzelnen Erlös- und Kostenterme werden im Anschluss erläutert.



$$\begin{aligned}
\max \sum_{t \in T} & \left[ \underbrace{\sum_{(i,j) \in A} \alpha_t \cdot r_t \cdot \psi \cdot d_{i,j,t} \cdot \sum_{\tau \leq t} y_{i,j,\tau}}_{\text{Erlöse Wärmeverkauf}} \right] \\
& + \left[ \underbrace{\sum_{(i,j) \in A^{GAS}} \alpha_t \cdot r_t^{GAS} \cdot d_{i,j,t}^{GAS} \cdot \sum_{\tau \leq t} (1 - \psi \cdot y_{i,j,\tau})}_{\text{Erlöse Gasverkauf}} \right] \\
& - \left[ \underbrace{\sum_{v \in V^{HKW}} \sum_{h \in H_v} \alpha_t \cdot q_{v,h,t} (c_{h,t}^{GEN} + s_h^{CO2} \cdot c_t^{CO2})}_{\text{Wärmegestehungs- und CO}_2\text{-Kosten}} \right] \\
& - \left[ \underbrace{\sum_{v \in V^{HKW}} \sum_{h \in H_v} \alpha_t \cdot c_{v,t}^{B,HKW} \sum_{\tau \leq t} x_{v,h,t}}_{\text{Betriebskosten HKW}} \right] \\
& - \left[ \underbrace{\sum_{(i,j) \in A} \alpha_t \cdot c_{i,j,t}^{B,PIPE} \cdot \sum_{\tau \leq t} y_{i,j,\tau}}_{\text{Betriebskosten Wärmeleitungen}} \right] \\
& - \left[ \underbrace{\sum_{(i,j) \in A^{GAS}} \alpha_t \cdot c_{i,j,t}^{B,GASPIPE} \cdot \sum_{\tau \leq t} (1 - [\psi] \cdot y_{i,j,\tau})}_{\text{Betriebskosten Gasleitungen}} \right] \\
& - \left[ \underbrace{\sum_{(i,j) \in A} y_{i,j,t} \cdot c_{i,j,t}^{PIPE} \cdot \zeta_t}_{\text{Investitionskosten Wärmeleitungen}} \right] \\
& - \left[ \underbrace{\sum_{(i,j) \in A^{GAS}} y_{i,j}^{GAS} \cdot c_{i,j,t}^{GAS} \cdot \zeta_t}_{\text{Erneuerungskosten Gasleitungen}} \right] \\
& - \left[ \underbrace{\sum_{v \in V^{HKW}} \sum_{h \in H_v} x_{v,h,t} \cdot c_{h,t}^{HKW} \cdot \zeta_t}_{\text{Investitionskosten HKW}} \right]
\end{aligned} \tag{7.15}$$

### Erlöse

Erlöse aus dem Verkauf der Wärme werden in allen Perioden generiert, nachdem eine Leitung gebaut wurde. Die Erlöse ergeben sich aus der abgesetzten Wärmemenge ( $d_{i,j,t}$ ), dem Verkaufspreis der Wärme ( $r_t$ ) und dem erwarteten Anschlussgrad der Fernwärmekunden ( $\psi$ ). Da die Erlöse innerhalb einer Periode in jedem Jahr anfallen, dürfen diese

nicht wie einmalige Zahlungen diskontiert werden, sondern werden mit dem an die Dauer der Ausbauperioden angepassten Rentenbarwertfaktor ( $\alpha_t$ ) multipliziert.

Erlöse aus dem Gasverkauf werden mit den bestehenden Gasleitungen generiert. Unter Erlös wird hier die Marge verstanden. Die Bezugskosten sind bereits von dem Verkaufspreis abgezogen. Sofern der erwartete Anschlussgrad ( $\psi$ ) der Fernwärme 100 % beträgt, werden ab dem Zeitpunkt des Baus der Wärmeleitung keine Erlöse mehr generiert. Bei einem Anschlussgrad  $< 100$  %, verbleibt nach Errichtung der Wärmeleitung ein entsprechender Restabsatz.

Für die Erlösberechnung muss dabei nicht geprüft werden, ob eine Gasleitung erneuert wird oder nicht. Es wird angenommen, dass, sobald in einer Trasse eine Wärmeleitung liegt, die Gaskunden entsprechend dem erwarteten Anschlussgrad zur Fernwärme wechseln. Wird keine Fernwärmeleitung gebaut oder unterschreitet der erwartete Anschlussgrad der Fernwärme 100 %, ist über die Nebenbedingungen (7.28) sowie (7.29) sichergestellt, dass eine erneuerungsbedürftige Gasleitung zwingend ausgetauscht wird und die Versorgung der Kunden weiterhin gewährleistet ist.

### Kosten

Bei der Wärmeerzeugung fallen Wärmegestehungskosten und eine CO<sub>2</sub>-Abgabe an. Beide Kostenbestandteile sind variabel und hängen von der produzierten Energie ab. Sowohl der spezifische CO<sub>2</sub>-Ausstoß ( $s_h^{CO_2}$ ), als auch die spezifischen Erzeugungskosten ( $c_{h,t}^{GEN}$ ) unterscheiden sich je nach Kraftwerkstyp. Bei den Erzeugungskosten ist zu beachten, dass diese für KWK-Anlagen je nach Verhältnis von Brennstoffkosten zu Strompreis auch negative Werte annehmen können, da diese die Erlöse aus der gekoppelten Stromerzeugung enthalten.

Des Weiteren fallen Betriebskosten für Wärme- und Gasleitungen sowie Heizkraftwerke an. Für Wärmeleitungen und Heizkraftwerke sind die Kosten ab dem Zeitpunkt des Baus zu berücksichtigen. Da diese jährlich anfallen, muss auch hier mit dem angepassten Rentenbarwertfaktor gerechnet werden. Betriebskosten für eine Gasleitung fallen so lange an, bis in dieser Trasse eine Fernwärmeleitung verlegt wurde. Sofern der Anschlussgrad unter 100 % liegt, fallen diese auch nach Verlegung der Fernwärmeleitung an.

Der größte Kostenblock neben den Wärmegestehungskosten sind die Investitionen in den Bau neuer Leitungen und Heizkraftwerke. Diese fallen einmalig zum Investitionszeitpunkt an und sind daher mit dem normalen Diskontierungsfaktor ( $\zeta_t$ ) auf den heutigen Zeitpunkt

abzuzinsen. Eine Besonderheit bildet hierbei die Erneuerung der bestehenden Gasleitungen. Für diese ist der geplante Erneuerungszeitpunkt bekannt, weshalb das Optimierungsmodell nur bestimmen muss, ob eine Gasleitung zu erneuern ist und nicht zusätzlich die Periode der Erneuerung. Daher ist es nicht notwendig, die Variable  $(y_{i,j}^{GAS})$  zeitabhängig zu modellieren. Der Zeitpunkt der Erneuerung wird hingegen in den zeitabhängigen Verlegekosten  $c_{i,j,t}^{GAS}$  berücksichtigt, welche nur in der Periode der geplanten Erneuerung den tatsächlichen Verlegekosten entsprechen, in allen anderen Zeitpunkten nehmen diese den Wert null an. Durch diese Modellierung wird die Anzahl der Binärvariablen um den Faktor  $|A^{GAS}| \cdot (|T| - 1)$  reduziert.

### 7.4.2.2 Allgemeine Nebenbedingungen

#### 7.4.2.2.1 Heizkraftwerke

*Ein Kraftwerk darf nur einmal gebaut werden.*

An jedem möglichen Standort darf in der gesamten Laufzeit nur ein Heizkraftwerk errichtet werden und damit auch nur von einem Kraftwerkstyp.

$$\sum_{h \in H_v} \sum_{t \in T} x_{v,h,t} \leq 1 \quad \forall v \in V^{HKW} \quad (7.16)$$

Sofern das Modell dazu genutzt werden soll, verschiedene Module eines Heizkraftwerks auszuwählen und zu einer Gesamtanlage zu kombinieren, ist Nebenbedingung (7.16) durch folgende Gleichung (7.17) zu ersetzen, welche lediglich sicherstellt, dass sämtliche Heizkraftwerkstypen an einem Standort in der gleichen Periode gebaut werden.

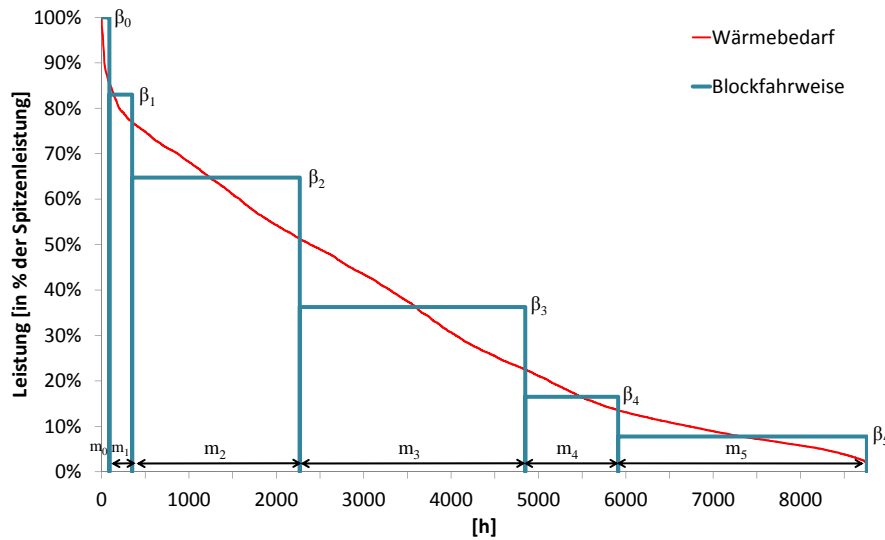
$$x_{v,h,t} \leq 1 - \sum_{h \in H_v} \sum_{\tau \in T | \tau \neq t} x_{v,h,\tau} \quad \forall v \in V^{HKW}, h \in H_v, t \in T \quad (7.17)$$

#### Anlagenfahrweise

Die installierte Leistung der Heizkraftwerke muss in Summe mindestens der gleichzeitigen Jahreshöchstlast der Verbraucher (Leistungsbedarf) entsprechen. Hierdurch wird sichergestellt, dass auch in den Spitzenstunden kalter Wintertage der Wärmebedarf gedeckt werden kann. Da die Investitions- und Betriebskosten mit der Anlagengröße steigen, sollten die Heizkraftwerke jedoch möglichst nicht überdimensioniert werden, sondern sich an der erwarteten Höchstlast orientieren. Darüber hinaus weisen unterschiedliche Anlagentypen unterschiedliche spezifische Investitions- und Erzeugungskosten auf. KWK-Anlagen benötigen beispielsweise hohe spezifische Investitionen [€ / kW], produzieren dafür die

Wärme mit vergleichsweise geringen Erzeugungskosten [€ / kWh]. Gaskessel hingegen weisen sehr geringe spezifische Investitionskosten auf. Die Erzeugungskosten sind dafür höher als bei KWK-Anlagen, da keine Erlöse aus der gekoppelten Stromproduktion anfallen. Heizkraftwerke lohnen sich daher, wenn diese eine möglichst hohe Volllaststundenzahl erreichen. Dagegen werden Gaskessel nur wenige Stunden im Jahr für die Spitzenlastdeckung benötigt. Diese Thematik wurde bereits in Abschnitt 4.2.3.2 detailliert beschrieben. Für eine realistische Bestimmung der Erzeugungskosten muss daher die Auslastung der jeweiligen Anlagen korrekt berechnet werden. Andernfalls würde das Modell die gesamte Energie von der Anlage mit den geringsten Erzeugungskosten produzieren lassen und die übrigen Anlagen nur zur Deckung des Leistungsbedarfs bauen.

Für eine exakte Bestimmung der tatsächlichen Erzeugungskosten muss die sortierte Jahresdauerlinie hinterlegt werden, die angibt, welcher Leistungsbedarf wie viele Stunden im Jahr anfällt. Eine exakte Nachbildung der Jahresdauerlinie ist für die Grobdimensionierung der Anlagen im Rahmen der Ausbauplanung nicht notwendig. Eine Nachbildung in Form von Leistungsblöcken mit ca. fünf Intervallen ist ausreichend genau (s. Abbildung 7.7).



**Abbildung 7.7** Sortierte Jahresdauerlinie des Wärmebedarfs mit Darstellung der Leistungsblöcke

### Jahresarbeit

Die erzeugte Jahresarbeit jedes Heizkraftwerks entspricht der Summe der Leistung in jedem Zeitintervall ( $g_{v,h,t,u}^{INT}$ ) multipliziert mit der Dauer ( $m_u$ ) des Zeitintervalls (in Stunden pro Jahr).

$$q_{v,h,t} = \sum_{u \in U} g_{v,h,t,u}^{INT} \cdot m_u \quad \forall v \in V^{HKW}, h \in H_v, t \in T \quad (7.18)$$

*Bestimmung der Leistung*

In jeder Periode muss in jedem Zeitintervall die Leistung der Heizkraftwerke in Summe dem Leistungsbedarf der angeschlossenen Kunden entsprechen. Hierbei wird angenommen, dass der Verlauf der Jahresdauerlinie unabhängig von der Anzahl der Kunden bzw. der Gesamtleistung ist.

$$\sum_{v \in V^{HKW}} \sum_{h \in H_v} g_{v,h,t,u}^{INT} = \beta_u \cdot \left[ \sum_{(i,j) \in A} \sum_{\tau \leq t} f_{i,j,t}^{REQ} \cdot y_{i,j,\tau} \right] \quad \forall t \in T, u \in U \quad (7.19)$$

Für eine korrekte Verbindung der Flussgleichungen mit der Leistung des Kraftwerks muss die Spitzenleistung (höchste auftretende Leistung) eines Heizkraftwerks bestimmt werden. Diese entspricht dem Maximum aller Leistungswerte in den Intervallen der Jahresdauerlinie. Da die Leistung durch die Flussgleichungen nach oben begrenzt wird, kann Gleichung (7.20) als Ungleichung formuliert werden.

$$g_{v,h,t} \geq g_{v,h,t,u}^{INT} \quad \forall v \in V^{HKW}, h \in H_v, t \in T, u \in U \quad (7.20)$$

*Ein Kraftwerk muss gebaut werden, um Energie zu produzieren.*

Ein Heizkraftwerk kann erst Wärme produzieren, nachdem es gebaut wurde. Nebenbedingung (7.21) stellt darüber hinaus sicher, dass die Leistung ( $g_{v,h,t,u}^{INT}$ ) eines Kraftwerks in jedem Zeitintervall jeder Periode durch die technische Nennleistung ( $g_h^{MAX}$ ) des jeweiligen Kraftwerkstyps beschränkt wird.

$$g_{v,h,t,u}^{INT} \leq g_h^{MAX} \cdot \sum_{\tau \leq t} x_{v,h,\tau} \quad \forall v \in V^{HKW}, h \in H_v, t \in T, u \in U \quad (7.21)$$

*Budgetrestriktion Heizkraftwerke*

Das Jahresbudget für den Bau von Heizkraftwerken darf in keiner Periode überschritten werden.

$$\sum_{v \in V^{HKW}} \sum_{h \in H_v} x_{v,h,t} \cdot c_{h,t}^{HKW} \leq b_t^{HKW} \quad \forall t \in T \quad (7.22)$$

**7.4.2.2.2 Leitungen**

*Jede Leitung darf nur in eine Richtung gebaut werden.*

Analog zu Gleichung (7.5) muss auch in dem vollständigen Modell sichergestellt werden, dass jede Leitung im Betrachtungszeitraum nur einmal gebaut wird und nur eine der beiden gerichteten Kanten genutzt wird.

$$\sum_{t \in T} y_{i,j,t} + y_{j,i,t} \leq 1 \quad \forall (i,j) \in A \quad (7.23)$$

#### *Leitungen benötigen einen Vorgänger*

Eine Leitung, die nicht von einem potentiellen Heizkraftwerksstandort abgeht, muss immer eine eingehende Leitung aufweisen. Restriktion (7.24) ist wie (7.7) nur für die B&C Subtour-EliminationFormulierung (Modell B2) zwingend notwendig, verschärft jedoch die LP-Relaxierung der beiden anderen Modellformulierungen und wird deshalb in allen Modellen verwendet.

$$y_{i,j,t} \leq \sum_{\tau \leq t} \sum_{(h,i) \in A | i \neq j} y_{h,i,\tau} \quad \forall (i,j) \in A | i \notin V^{HKW}, t \in T \quad (7.24)$$

Für Leitungen, die von einem Knoten abgehen, an dem ein Heizkraftwerk errichtet werden darf, gewährleistet Gleichung (7.25), dass diese entweder eine eingehende Leitung aufweisen oder das zugehörige Heizkraftwerk in Betrieb ist.

$$y_{i,j,t} \leq \sum_{\tau \leq t} \left[ \sum_{(h,i) \in A | i \neq j} y_{h,i,\tau} + \sum_{h \in H_i} x_{i,h,\tau} \right] \quad \forall (i,j) \in A | i \in V^{HKW}, t \in T \quad (7.25)$$

#### *Budgetrestriktion Leitungen*

Das Jahresbudget für den Bau von Leitungen darf nicht überschritten werden.

$$\sum_{(i,j) \in A} y_{i,j,t} \cdot c_{i,j,t}^{PIPE} \leq b_t^{PIPE} \quad \forall t \in T \quad (7.26)$$

#### *Topologische Brücken*

„Topologische Brücken“ werden im Rahmen des Preprocessings durch eine angepasste Version des Algorithmus von Tarjan (vgl. [Tarjan, 1972]) zur Bestimmung der starken Zusammenhangskomponenten eines Graphen identifiziert. Bei Leitungen, die nur über eine topologische Brücke (s. rote Kanten in Abbildung 7.8) mit einer Quelle verbunden werden können, wird durch Nebenbedingung (7.27) sichergestellt, dass diese erst gebaut werden dürfen, wenn zuvor die vorgelagerten Leitungen errichtet wurden. Hierdurch können – je nach Netzstruktur – für die beiden Branch-and-Cut Formulierungen einige unzulässige Lösungen durch Zyklenbildung verhindert werden. Für die Netzwerkflussformulierung bedeutet die Hinzunahme eine Verschärfung der LP-Relaxierung.

$$y_{i,j,t} \leq \sum_{\tau \leq t} y_{m,n,\tau} \quad \forall (i,j) \in A, t \in T, (m,n) \in A^{PARENT}(i,j) \quad (7.27)$$

Die Menge der topologischen Brücken der Kanten  $(a,b)$ ,  $(b,g)$  und  $(a,g)$  in Abbildung 7.8 enthält beispielsweise jeweils die Kanten  $(root, f)$ ,  $(f, e)$  sowie  $(e, g)$ .

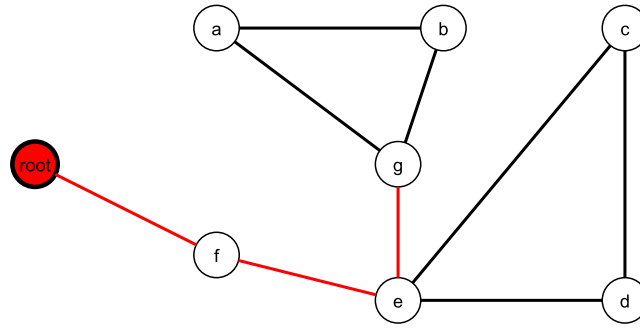


Abbildung 7.8 Topologische Brücken (rot)

### Erneuerung von Gasleitungen

Jede Gasleitung bekommt zum Ende ihrer technischen Nutzungsdauer einen geplanten Erneuerungszeitpunkt zugewiesen. Zu diesem Zeitpunkt muss entweder die Gasleitung ausgetauscht oder die entsprechende Trasse durch Fernwärme versorgt werden. Da innerhalb des Betrachtungszeitraums eine Gasleitung maximal einmalig erneuert werden muss (typische Nutzungsdauer 60 - 100 Jahre) ist es ausreichend über eine einzige Binärvariable festzustellen, ob eine Leitung zu erneuern ist. Gleichung (7.28) gilt hierbei nur für Gasleitungen, deren Erneuerungszeitpunkt ( $\gamma_{i,j}$ ) innerhalb des Betrachtungszeitraumes liegt.

Der Zeitpunkt der Erneuerung wird nicht modelliert, sondern indirekt über den Kostenparameter ( $c_{i,j,t}^{GAS}$ ) festgelegt, welcher nur zum Zeitpunkt der notwendigen Erneuerung einen Wert  $\neq 0$  annimmt (s. Abschnitt 7.4.2.1). Im Gegensatz zu den Fernwärmeleitungen werden Gasleitungen nur als ungerichtete Kanten berücksichtigt, da hier keine Zusammenhangsbedingungen erfüllt sein müssen bzw. vereinfachend angenommen wird, dass ausreichend Paralleltrassen vorhanden sind, um jede Leitung stilllegen zu können.

$$y_{i,j}^{GAS} + \sum_{\tau \leq \gamma_{i,j}} (y_{i,j,\tau} + y_{j,i,\tau}) \geq 1 \quad \forall (i,j) \in A^{GAS} \mid \gamma_{i,j} \leq \max(T) \quad (7.28)$$

Sofern der erwartete Anschlussgrad ( $0 \leq \psi \leq 1$ ) bei Fernwärmeleitungen nicht 100 % beträgt, muss die Gasleitung in jedem Fall erneuert werden. Dies kann über Gleichung (7.29) ausgedrückt werden. Alternativ können direkt durch den Modellgenerator die Fälle  $\psi = 1$  und  $\psi < 1$  unterschieden werden.

$$y_{i,j}^{GAS} \geq 1 - \lfloor \psi \rfloor \quad \forall (i,j) \in A^{GAS} \mid \gamma_{i,j} \leq \max(T) \quad (7.29)$$

### 7.4.2.3 Nebenbedingungen Netzwerkfluss (Modell B1)

*Ein Fluss ist nur auf gebauten Leitungen zulässig.*

Die Netzwerkflussformulierung des vollständigen Modells bildet die tatsächlichen (unter Vernachlässigung der Netzhydraulik) Energieflüsse in dem Netz ab. Im Unterschied zu dem Modell A1 wird daher für jede Kante nicht eine Einheit sondern die tatsächlich benötigte Leistung als Abnahme angesetzt.

Gleichung (7.30) stellt sicher, dass nur Leitungen, die bereits errichtet wurden, einen Fluss  $\neq 0$  aufweisen dürfen. Der maximale Fluss einer Leitung ist durch den Wert  $f_{i,j,t}^{MAX}$  begrenzt. Sofern technische Restriktionen berücksichtigt werden sollen, ergibt sich dieser aus dem maximal zulässigen Rohrdurchmesser und einem vorgegebenen spezifischen Druckverlust (s. Abschnitt 4.2.3.1). Können technische Grenzwerte vernachlässigt werden, ist der maximale Fluss  $f_{i,j,t}^{MAX}$  einer Leitung durch den maximalen Leistungsbedarf der jeweiligen Periode  $(0,5 \cdot \sum_{(i,j) \in A} f_{i,j,t}^{REQ})$  begrenzt.<sup>34</sup>

$$f_{i,j,t} \leq f_{i,j,t}^{MAX} \cdot \sum_{\tau \leq t} y_{i,j,\tau} \quad \forall (i,j) \in A, t \in T \quad (7.30)$$

#### Flussgleichung

Entsprechend Gleichung (7.11) des vereinfachten Modells, werden durch Nebenbedingung (7.31) die Ab- und Zuflüsse an den Netzknoten bilanziert. Hierbei müssen an sämtlichen Knoten, an denen kein Heizkraftwerk gebaut werden darf, der Leistungsabfluss und der Leistungsbedarf aller eingehenden Kanten durch den Leistungszufluss gedeckt sein.

$$\sum_{(i,v) \in A} (f_{i,v,t} - f_{i,v,t}^{REQ} \cdot \sum_{\tau \leq t} y_{i,v,\tau}) = \sum_{(v,j) \in A} f_{v,j,t} \quad \forall v \in V \setminus V^{HKW}, t \in T \quad (7.31)$$

An Knoten, die ein möglicher Heizkraftwerksstandort sind, muss zusätzlich die erzeugte Leistung an dem Knoten als Zufluss berücksichtigt werden.

$$\sum_{(i,v) \in A} (f_{i,v,t} - f_{i,v,t}^{REQ} \cdot \sum_{\tau \leq t} y_{i,v,\tau}) + \sum_{h \in H_v} g_{v,h,t} = \sum_{(v,j) \in A} f_{v,j,t} \quad \forall v \in V^{HKW}, t \in T \quad (7.32)$$

Wie bereits für das vereinfachte Modell dargelegt (s. Gleichung (7.12)), werden die Abnahmen den Kanten und nicht den Knoten zugeordnet, wie dies bei normalen Netzwerkflussmodellen der Fall ist. Daher muss auch für das vollständige Modell sichergestellt werden, dass jede aktive Kante mindestens einen Fluss in Höhe des zugehörigen Leistungsbedarfs aufweist.

<sup>34</sup> Da sämtliche Leitungen als zwei gerichtete Kanten modelliert sind, jedoch jeweils nur eine der beiden Kanten Teil der Lösung sein kann, wird die Summe mit dem Wert 0,5 multipliziert.



$$f_{i,j,t} \geq f_{i,j,t}^{REQ} \sum_{\tau \leq t} y_{i,j,\tau} \quad \forall (i,j) \in A, t \in T \quad (7.33)$$

### Kapazitätsabhängige Kosten

Wie in Abschnitt 4.2.3.1 dargestellt, hängen sowohl die Übertragungskapazität als auch die Verlegekosten einer Leitung von ihrem Rohrdurchmesser ab. Durch Modellierung der Flussverteilung ist es bei Modell B1 möglich, diese Abhängigkeit der Investitionskosten von der Übertragungskapazität zu berücksichtigen.

Die exakte Berechnung der realen Flussverteilung ist nicht möglich, da hierzu die nichtlineare Druckverlustberechnung und zusätzlich der Wärmeverlust modelliert werden müssten. Dies führt selbst für sehr kleine Modellinstanzen mit einzelnen Leitungen zu schwer lösbaren Modellen und numerischen Problemen. Da eine genaue Berechnung der Flüsse somit nicht möglich ist, kann eine lineare Beziehung zwischen Transportkapazität und Investitionskosten als ausreichend genaue Näherung für die Fragestellung des optimalen Fernwärmeausbaus gesehen werden. Die Investitionskosten einer Leitung bestehen damit aus einem Fixkostenanteil, der weitgehend den Tiefbaukosten für eine kleine Leitungsdimension entspricht, sowie einem variablen Anteil, der den Kostenzuwachs für eine höhere Übertragungskapazität widerspiegelt.

Zur Bestimmung der benötigten Transportkapazität einer Leitung ist es nicht ausreichend, den Fluss dieser Leitung in der letzten Periode zu betrachten, da die benötigte Transportkapazität in den jeweiligen Perioden schwanken kann. Hierbei müssen zwei unterschiedliche Effekte beachtet werden. Einerseits führt der Zubau neuer Leitungen in den jeweiligen Perioden zu einem steigenden Kapazitätsbedarf. Andererseits ist der Leistungsbedarf jeder Leitung ( $f_{i,j,t}^{REQ}$ ) zeitabhängig modelliert, da aufgrund von baulichen Tätigkeiten (Zunahme) oder Wärmedämmungsmaßnahmen (Abnahme) die nachgefragte Leistung auf einer Leitung im Zeitverlauf zu- oder abnehmen kann. Die höchste Transportleistung tritt daher nicht zwingend in der letzten Ausbaustufe auf, weshalb die notwendige Transportkapazität über eine zusätzliche Variable bestimmt werden muss.

Nebenbedingung (7.34) ermittelt für jede Leitung die maximale Übertragungskapazität aller Perioden. Es ist allerdings nicht ausreichend nur das Maximum zu bestimmen, da die notwendige Kapazität nur in der Periode des Leitungsbaus in die Zielfunktion eingehen darf. Für alle anderen Perioden muss die Variable den Wert null annehmen. Dies wird in (7.34) durch den Term  $(1 - y_{i,j,t}) \cdot f_{i,j,t}^{MAX}$  sichergestellt, welcher in allen Perioden außer der Periode des Leitungsbaus einen Wert größer als  $f_{i,j,t}$  annimmt, und die Gleichung damit keine Bedeutung hat. In der Periode des Leitungsbaus hingegen, nimmt dieser Term den Wert null an und damit muss  $f_{i,j,t}^{CAP}$  größer als der Fluss in allen Perioden

sein. Da die Übertragungskapazität mit Kosten in die Zielfunktion eingeht, wird immer der kleinstmögliche Wert von  $f_{i,j,t}^{CAP}$  gewählt und entspricht daher exakt der notwendigen Transportkapazität der Leitung.

$$f_{i,j,t}^{CAP} \geq f_{i,j,\tau} - (1 - y_{i,j,t}) \cdot f_{i,j,t}^{MAX} \quad \forall (i,j) \in A, \tau, t \in T \quad (7.34)$$

Die Zielfunktion (7.15) des Modells ist um nachfolgenden Term zu erweitern, wobei  $c_{i,j,t}^{PIPE,VAR}$  den variablen kapazitätsabhängigen Kosten entspricht und  $c_{i,j,t}^{PIPE}$  in Gleichung (7.15) den Fixkosten.

$$\dots - \underbrace{\left[ \sum_{(i,j) \in A} f_{i,j,t}^{CAP} \cdot c_{i,j,t}^{PIPE,VAR} \cdot \zeta_t \right]}_{\text{Kapazitätsabhängige Investitionen}} \quad (7.35)$$

Zusätzlich muss die Budgetrestriktion (7.26) um die kapazitätsabhängigen Kosten erweitert werden.

$$\sum_{(i,j) \in A} \left( y_{i,j,t} \cdot c_{i,j,t}^{PIPE} + f_{i,j,t}^{CAP} \cdot c_{i,j,t}^{PIPE,VAR} \right) \leq b_t^{PIPE} \quad \forall t \in T \quad (7.36)$$

### Leistungsabhängige Kosten für Heizkraftwerke

Analog zu der beschriebenen Methodik für kapazitätsabhängige Kosten bei Leitungen können die Investitionskosten für Heizkraftwerke ebenfalls leistungsabhängig modelliert werden. Hierdurch werden nicht nur diskrete Leistungsklassen ermöglicht, sondern für jeden Kraftwerkstyp kann zusätzlich ein leistungsabhängiger Investitionskostenanteil angegeben werden. Wie in Kapitel 9 gezeigt wird, lassen sich die Investitionskosten für Heizkraftwerke gut linearisieren. Prinzipiell könnten die Investitionskosten auch stückweise linearisiert werden, allerdings ist dieser Genauigkeitsgrad bei der relativ groben Dimensionierung der Heizkraftwerke im Rahmen der taktischen Planung in der Regel nicht erforderlich.

Für die Berücksichtigung eines leistungsabhängigen Kostenterms muss nachfolgende Restriktion in das Modell aufgenommen werden:

$$g_{v,h,t}^{CAP} \geq g_{v,h,\tau} - (1 - x_{v,h,t}) \cdot g_h^{MAX} \quad \forall v \in V^{HKW}, h \in H_v, t, \tau \in T \quad (7.37)$$

Darüber hinaus ist die Budgetrestriktion für Heizkraftwerke (7.22) anzupassen:

$$\sum_{v \in V^{HKW}} \sum_{h \in H_v} \left( x_{v,h,t} \cdot c_{h,t}^{HKW} + g_{v,h,t}^{CAP} \cdot c_{h,t}^{HKW,VAR} \right) \leq b_t^{HKW} \quad \forall t \in T \quad (7.38)$$

Die Zielfunktion ist wiederum um den leistungsabhängigen Kostenanteil zu ergänzen:

$$\dots - \underbrace{\left[ \sum_{v \in V^{HKW}} \sum_{h \in H_v} g_{v,h,t}^{CAP} \cdot c_{h,t}^{HKW,VAR} \cdot \zeta_t \right]}_{\text{Leistungsabhängige Investitionen}} \quad (7.39)$$

### Leistungs- und Energiebilanz

Die hier vorgestellte Formulierung stellt über die Modellierung des Netzwerkflusses sicher, dass jede Leitung mit einem Heizkraftwerk verbunden ist und die installierte Leistung der zugehörigen Heizkraftwerk ausreichend für die Versorgung aller Kunden ist. Die einzelnen Heizkraftwerke weisen jedoch unterschiedlich lange Einsatzdauern auf, weshalb sich das Verhältnis zwischen der Leistung eines Heizkraftwerks und der produzierten Energie bei den verschiedenen Heizkraftwerken unterscheidet.

Sofern ein zusammenhängendes Fernwärmenetz existiert, sind die beschriebenen Gleichungen ausreichend, um eine mit der Jahresdauerlinie übereinstimmende Fahrweise zu gewährleisten. Dies wird durch die Summenbilanz über alle Heizkraftwerke erreicht (Gleichung (7.19)). Bei Lösungen mit isolierten Teilgraphen (z.B. dezentralen Nahwärmenetzen) stellt die Summenbilanz allerdings keine hinreichende Restriktion dar, da diese nur über das gesamte Netz gebildet wird. Die Energie- und Leistungsbilanz muss jedoch in jedem Teilnetz erfüllt sein. So wäre es unter diesen Randbedingungen optimal, ein Nahwärmenetz nur durch einen Spitzenkessel zu versorgen, der geringe Investitionskosten (Leistungskosten) aufweist. Dieser wird dann ausschließlich zur Leistungsbereitstellung genutzt und produziert nur innerhalb des ersten Intervalls der Jahresdauerlinie Energie. Die gesamte restliche Energie wird in einem Heizkraftwerk in dem anderen Teilnetz (z.B. großes Fernwärmenetz) erzeugt, um die dort vorhandene KWK-Anlage mit günstigen Erzeugungskosten auszulasten. Dies ist jedoch unzulässig, da keine Verbindung zwischen beiden Netzen besteht und die Energie daher nicht von dem Heizkraftwerk in das Nahwärmenetz transportiert werden kann. Die Leistungs- und Energiebilanz für das Gesamtnetz wäre dennoch erfüllt.

Zur Umgehung dieser Problematik ist es notwendig, den Leistungsfluss für jedes Intervall der Jahresdauerlinie zu bestimmen. Hierdurch wird sichergestellt, dass in jedem Intervall der Jahresdauerlinie die Leistung des Heizkraftwerks mit der benötigten Leistung der zugehörigen Kunden übereinstimmt und somit gleichzeitig die erzeugte Energie jedes Heizkraftwerks der Fahrweise entspricht.

Die Modellierung der Leistung in jedem Intervall der Jahresdauerlinie erfordert die Erweiterung der Flussvariable um einen zusätzlichen Index, wodurch sich die Anzahl der Variablen um den Faktor  $|T| \cdot |A| \cdot (|U| - 1)$  erhöht. Bei typischerweise fünf bis sechs Intervallen entspricht dies bei einem Netz mit 1000 (ungerichteten) Kanten, bereits im einperiodigen Fall 8000 bis 10000 zusätzlichen Variablen. Die Anzahl der Binärvariablen ändert sich nicht.

Die Flussgleichungen müssen um die Intervalle der Jahresdauerlinie ergänzt werden. Gleichung (7.31) ist durch folgende Restriktion zu ersetzen:

$$\sum_{(i,v) \in A} (f_{i,v,t,u} - \beta_u \cdot f_{i,v,t}^{REQ} \cdot \sum_{\tau \leq t} y_{i,v,\tau}) = \sum_{(v,j) \in A} f_{v,j,t,u} \quad \forall v \in V \setminus V^{HKW}, t \in T, u \in U \quad (7.40)$$

An Knoten, die ein möglicher Heizkraftwerksstandort sind, wird in dieser erweiterten Formulierung die Leistung in dem jeweiligen Intervall  $g_{v,h,t,u}^{INT}$  eingespeist. Damit wird Gleichung (7.32) durch (7.41) ersetzt.

$$\sum_{(i,v) \in A} (f_{i,v,t,u} - \beta_u \cdot f_{i,v,t}^{REQ} \cdot \sum_{\tau \leq t} y_{i,v,\tau}) + \sum_{h \in H_v} g_{v,h,t,u}^{INT} = \sum_{(v,j) \in A} f_{v,j,t,u} \quad \forall v \in V^{HKW}, t \in T, u \in U \quad (7.41)$$

Analog zu Gleichung (7.33) wird durch (7.42) sichergestellt, dass auf jeder gebauten Leitung mindestens die benötigte Leistung in dem Zeitintervall fließt.

$$f_{i,j,t,u} \geq \beta_u \cdot f_{i,j,t}^{REQ} \sum_{\tau \leq t} y_{i,j,\tau} \quad \forall (i,j) \in A, t \in T, u \in U \quad (7.42)$$

Aufgrund der hohen zusätzlichen Variablenanzahl sollte diese Modellierung nur genutzt werden, wenn isolierte Teilnetze betrachtet werden sollen und eine Dimensionierung der Anlagenmodule durch das Optimierungsmodell gefordert ist. Bei einer reinen Netzerweiterung von einem bestehenden Heizkraftwerk oder wenn ein zusammenhängendes Fernwärmenetz geplant ist, kann auf die unterjährige Modellierung des Netzwerkflusses verzichtet werden.

#### 7.4.2.4 Nebenbedingungen B&C Subtour-Elimination (Modell B2)

Die Gleichungen und der Branch-and-Cut Algorithmus sind identisch mit dem vereinfachten Modell. Auch dem vollständigen Modell ist daher die Zyklenrestriktion (7.43) hinzuzufügen. Der Lösungsansatz kann Abschnitt 7.4.1.4 entnommen werden.

*Zyklenrestriktion*

$$\sum_{(i,j) \in A_z^{CYC}} y_{i,j,t} \leq |A_z^{CYC}| - 1 \quad \forall z \in Z, t \in T \quad (7.43)$$

**7.4.2.5 Nebenbedingungen B&C Connectivity (Modell B3)**

Auch der auf Connectivity-Cuts basierende Branch-and-Cut Algorithmus ist in dem vollständigen Modell identisch mit dem Lösungsverfahren des vereinfachten Modells. Gleichung (7.44) entspricht Gleichung (7.14), der Algorithmus aus Abschnitt 7.4.1.5 bleibt unverändert.

*Keine trennenden Schnitte*

$$y_{i,j,t} \leq \sum_{(h,i) \in A_s^{CUT}} \sum_{\tau \leq t} y_{h,i,\tau} \quad \forall (i,j) \in A, s \in S_i, t \in T \quad (7.44)$$



## 8 Numerische Ergebnisse

Nachfolgend werden die Lösungseigenschaften der im vorangegangenen Kapitel beschriebenen mathematischen Modellformulierungen untersucht und verglichen. Abschnitt 8.1 beschreibt die Implementierung der drei Modellierungsansätze. Die Modellinstanzen, welche den Berechnungen zu Grunde liegen, werden in Abschnitt 8.2 vorgestellt und anschließend hinsichtlich ihrer Struktur verglichen. Die Ergebnisse der Vergleichsrechnungen werden in Abschnitt 8.4 beschrieben. Auf Basis dieser Erkenntnisse erfolgt die Entwicklung von Lösungs- und Verbesserungsansätzen und eine abschließende Bewertung der unterschiedlichen Verfahren.

### 8.1 Implementierung

Die in Kapitel 7 beschriebenen Modellformulierungen wurden in der mathematischen Modellierungssprache AMPL (vgl. [Fourer et al., 1990]) implementiert. Die Modelle werden von einer in der Programmiersprache C# entwickelten Software gestartet und mit Modelldaten verknüpft. Die Software ermöglicht den Import realer Netzstrukturen und -daten zur Optimierung von Praxisproblemen. Zusätzlich können generische Modellnetze erzeugt und parametrisiert werden, die es erlauben, bestimmte Modelleigenschaften gezielt zu variieren. Darüber hinaus wurden Schnittstellen umgesetzt, um in der Literatur veröffentlichte Benchmark-Instanzen des Steiner-Problems in Graphen zu importieren.

#### 8.1.1 Flussformulierung

Die Formulierung des mehrperiodigen Steiner-Problems in Graphen als Netzwerkflussproblem ermöglicht eine geschlossene Optimierung des Modells durch einen MIP-Solver. Die Flussgleichungen stellen sicher, dass der Lösungsgraph in jedem Fall zusammenhängend ist. Eine besondere Validierung der Ergebnisse oder ein Eingriff in den Branch-and-Bound Prozess des Solvers ist daher nicht notwendig.

#### 8.1.2 B&C Subtour-Elimination

Die Formulierung des Optimierungsproblems als IP mit Zyklenrestriktionen (s. Abschnitt 7.4.1.4) kann nicht geschlossen durch einen MIP-Solver gelöst werden. Die exponentielle

Anzahl möglicher Zyklen in einem Graphen erfordert eine iterative Lösung des Modells durch einen Branch-and-Cut Algorithmus.

Um einen Lösungsansatz umzusetzen, der nicht auf einen speziellen Solver beschränkt ist, wurde der Branch-and-Cut<sup>35</sup> Algorithmus ebenfalls in AMPL implementiert. Der prinzipielle Ablauf des Algorithmus kann Abbildung 7.5 entnommen werden.

Im ersten Schritt wird das ganzzahlige Modell gelöst, wobei noch keine Zyklenrestriktionen der Gleichung (7.13) in dem Modell enthalten sind. Sofern der Solver eine zulässige ganzzahlige Lösung findet, wird durch eine von dem Wurzelknoten ausgehende Tiefensuche geprüft, ob sämtliche Kanten, die Teil der Lösung sind, mit dem Wurzelknoten verbunden sind. Ist dies der Fall, terminiert der Algorithmus und die optimale Lösung wird ausgegeben. Andernfalls werden mit dem Algorithmus von Tarjan (vgl. [Tarjan, 1973]) alle Zyklen des Lösungsgraphen identifiziert und dem Modell als Restriktionen gemäß Gleichung (7.13) hinzugefügt. Das modifizierte Modell wird erneut gelöst und die Lösung wiederum auf isolierte Teilgraphen untersucht.

Aufgrund der großen Anzahl möglicher Zyklen, kann der Algorithmus unter Umständen sehr viele Iterationen benötigen, bis eine zyklensfreie Lösung gefunden wird. Um diesen Prozess zu beschleunigen ist es ebenfalls möglich, vorab sämtliche Zyklen bis zu einer bestimmten Länge explizit als Restriktionen dem Modell hinzuzufügen<sup>36</sup>. Hierbei muss allerdings zwischen einer geringeren Anzahl von Iterationen des Algorithmus und einer höheren Lösungsdauer des IP abgewogen werden, da diese in der Regel durch das Hinzufügen zusätzlicher Cuts ansteigt. Inwieweit sich die Laufzeit von der Initialisierung des Modells mit vorab berechneten Zyklenrestriktionen verringert, wird in Abschnitt 8.5.2 beschrieben.

### 8.1.3 B&C Connectivity

Der Branch-and-Cut Algorithmus für die Lösung des Modells mit Connectivity Cuts wurde ebenfalls in AMPL umgesetzt. Im Gegensatz zu dem auf Zyklenrestriktionen basierenden Branch-and-Cut Algorithmus wird hier zunächst nur die LP-Relaxierung des Modells

<sup>35</sup> Die Implementierung in AMPL ermöglicht keinen Zugriff auf die einzelnen Knoten des Branch-and-Bound Baums des Solvers, weshalb der hier umgesetzte Ansatz keinem Branch-and-Cut Algorithmus im engeren Sinne entspricht. Der Ansatz ist jedoch prinzipiell vergleichbar, weshalb die Bezeichnung Branch-and-Cut beibehalten wird.

<sup>36</sup> Für die vorab berechneten Zyklen wird ein anderer Algorithmus (vgl. [Liu und Wang, 2006]) genutzt, welcher eine effizientere Zyklenbestimmung ermöglicht, wenn nur kurze Zyklen identifiziert werden sollen. Die Implementierung der vorab berechneten Zyklen erfolgt in C#.



gelöst (s. auch Abbildung 7.6). Anschließend wird für sämtliche Knoten, die in der optimalen Lösung der LP-Relaxierung einen Ausgangsgrad  $> 0$  aufweisen, durch einen Algorithmus zur Bestimmung des maximalen Flusses (vgl. [Edmonds und Karps, 1972]<sup>37</sup>) geprüft, welche Höhe der maximale Fluss zwischen dem Wurzelknoten und dem jeweiligen Zielknoten aufweist. Die Kapazität einer Kante entspricht hierbei dem optimalen Wert der zugehörigen  $y_{i,j,t}$  Variablen. Sofern der maximale Fluss zu einem Knoten kleiner als das Minimum aus eins und der Summe der  $y_{i,j,t}$  Variablen aller von dem Knoten abgehenden Kanten ist, bedeutet dies, dass dieser nicht (ausreichend) mit dem Wurzelknoten verbunden ist. In diesem Fall werden Schnitte mit minimaler Kapazität zwischen dem Wurzelknoten und dem jeweiligen Knoten ermittelt. Nachdem für alle Knoten mit einem unzureichenden maximalen Fluss diese Schnitte dem Modell hinzugefügt wurden, wird erneut die LP-Relaxierung gelöst. Dieser Prozess wird so lange wiederholt, bis alle Knoten korrekt mit dem Wurzelknoten verbunden sind. Sofern diese Lösung bereits ganzzahlig ist, wurde die optimale Lösung gefunden. Andernfalls wird durch den Branch-and-Bound des Solvers eine ganzzahlige Lösung gesucht und diese wiederum auf isolierte Teilgraphen untersucht.

Bei mehrperiodigen Modellinstanzen muss die Prüfung auf den Zusammenhang des Graphen für jede Periode durchgeführt werden. Die Überprüfung wird für einen Knoten abgebrochen, sobald dieser in einer Periode nicht mit dem Wurzelknoten verbunden ist, da es ausreichend ist, die Schnitte für eine Periode zu generieren, unabhängig davon, ob der Knoten in einer der folgenden Perioden weiterhin isoliert ist oder nicht.

### Bestimmung minimaler Schnitte

Aus dem Max-Flow-Min-Cut Theorem (vgl. z.B. [Krumke und Noltemeier, 2012] S. 204) ist bekannt, dass der Wert des maximalen Flusses zwischen zwei Knoten der Kapazität des minimalen Schnittes zwischen diesen Knoten entspricht. Die Bestimmung minimaler Schnitte in dem B&C Connectivity erfolgt durch eine Tiefensuche auf dem Residualgraph der Berechnung des maximalen Flusses. Dieser enthält für jede Kante die residuale Kapazität, welche der Differenz zwischen der Kapazität einer Kante und dem Fluss auf dieser Kante entspricht. Nur Kanten, die vollständig ausgelastet sind und damit eine Residualkapazität von null aufweisen, können Teil eines minimalen Schnittes sein.

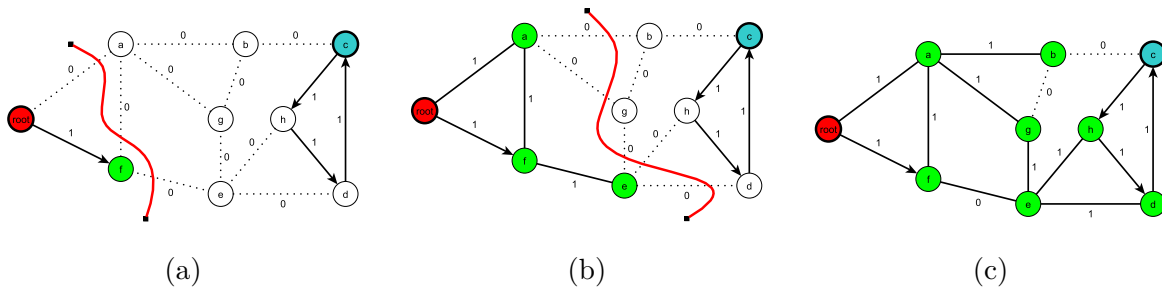
<sup>37</sup> Der Algorithmus von Edmond und Karps wurde aufgrund der einfachen Implementierung gewählt. Neuere Push-Relabel Algorithmen (vgl. [Goldberg und Tarjan, 1988]) sind zwar effizienter, allerdings ist die Umsetzung aufgrund der stark eingeschränkten Programmiermöglichkeiten (keine Definition eigener Funktionen) in AMPL kaum möglich.

Die Tiefensuche startet von dem Wurzelknoten und berücksichtigt nur Kanten mit einer positiven Residualkapazität. Nachdem die Tiefensuche terminiert ist, bilden alle Kanten, bei denen jeweils ein Knoten mit dem Wurzelknoten verbunden ist und der andere nicht, einen minimalen Schnitt. In Abbildung 8.1 (a) bilden somit die Kanten  $(root, a)$ ,  $(f, a)$  und  $(f, e)$  einen minimalen Schnitt zwischen  $root$  und dem Zielknoten  $c$ . Dieser Schnitt wird dem Modell gemäß Gleichung (7.14) hinzugefügt.

Um den Algorithmus zu beschleunigen und nicht nach jedem identifizierten Schnitt eine neue Lösung des Modells durch den Solver zu benötigen, werden in jedem Iterationsschritt weitere Schnitte bestimmt. Hierfür gibt es nachfolgende Ansätze:

### Nested-Cuts

Für jeden Zielknoten können durch Anpassungen der Tiefensuche mehrere Schnitte je Iteration generiert werden. Diese Vorgehensweise wird in [Ljubic, 2004] unter dem Begriff *Nested-Cuts* beschrieben. Hierzu wird nach der Tiefensuche auf dem Residualgraph die Kapazität jeder Kante, die Teil des aktuellen Schnittes ist, temporär auf den Wert eins gesetzt. Auf diesem modifizierten Residualgraph wird wiederum eine Tiefensuche gestartet und der nächste minimale Schnitt  $(a, b)$ ,  $(a, g)$ ,  $(e, g)$ ,  $(e, d)$ ,  $(e, h)$  bestimmt (s. Abbildung 8.1 b). Nach erneuter Modifikation des Residualgraphen wird kein weiterer Schnitt gefunden, da der Zielknoten  $c$  jetzt mit dem Wurzelknoten verbunden ist.

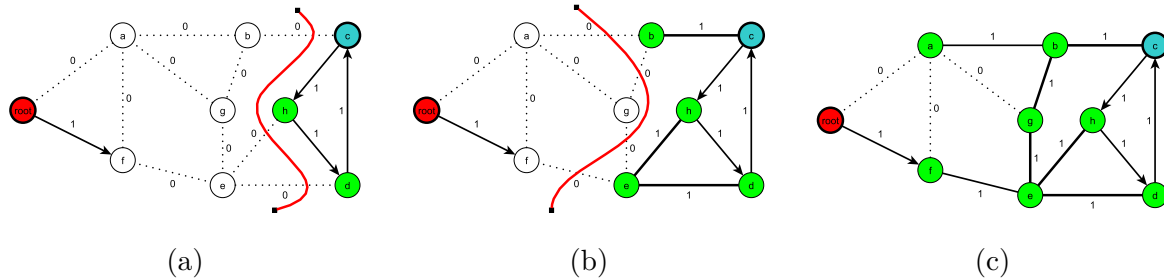


**Abbildung 8.1** Bestimmung minimaler Schnitte mit *Nested-Cuts* (für Zielknoten  $c$ , Kantengewichte entsprechen den Residualkapazitäten)

### Back-Cuts

Eine weitere Möglichkeit zusätzliche Schnitte zu generieren, besteht in der Bestimmung sogenannter *Back-Cuts* (vgl. [Koch und Martin, 1998]). Anstatt die Tiefensuche von dem Wurzelknoten zu starten, wird die Suche ausgehend von dem Zielknoten in Richtung des Wurzelknotens ausgeführt. Die Kanten werden dabei in der entgegengesetzten Richtung ihrer Orientierung durchlaufen. *Back-Cuts* können ebenfalls mit *Nested-Cuts* kombiniert werden, Abbildung 8.2 illustriert diesen Prozess. Der Algorithmus zur Identifikation von

*Back-Cuts* terminiert sobald der Wurzelknoten ausgehend von dem Zielknoten über Kanten mit einer positiven Residualkapazität erreichbar ist.



**Abbildung 8.2** Bestimmung von *Back-Cuts* (für Zielknoten  $c$ , Kantengewichte entsprechen den Residualkapazitäten)

### Orthogonal-Cuts

Für die Knoten  $h$  und  $d$  in Abbildung 8.1, welche ebenfalls Teil der Lösung und nicht mit dem Wurzelknoten verbunden sind, müssen gleichermaßen minimale Schnitte bestimmt werden. Ohne spezielle Modifikationen würde die Methodik für die Knoten  $c, d$  und  $h$  jeweils identische Schnitte erzeugen. Eine Möglichkeit dies zu verhindern besteht – analog zu den *Nested-Cuts* – in der Modifikation der Kapazitäten der Kanten. Hierzu wird nach Bestimmung der Schnitte für einen Zielknoten die Kapazität einer oder mehrerer Kanten auf den Wert eins fixiert. Diese Kanten weisen in der anschließenden Berechnung des maximalen Flusses zwischen dem Wurzelknoten und dem nächsten Zielknoten eine Residualkapazität  $> 0$  auf, wodurch für diesen Zielknoten neue Schnitte gefunden werden. Dieses Vorgehen wird in [Ljubic, 2004] mit *Orthogonal-Cuts* bezeichnet. Der Unterschied zu den *Nested-Cuts* ist hierbei, dass die Kapazität der Kanten nicht vor der Berechnung des maximalen Flusses des nächsten Knotens auf den ursprünglichen Wert aus der LP-Relaxierung zurückgesetzt wird.

#### 8.1.4 Preprocessing

Die Preprocessing Routinen wandeln den Eingangsgraphen in eine der Modellformulierung angepassten Struktur um und vereinfachen die Daten soweit möglich. So werden beispielsweise Kanten eliminiert, die nicht von einem BHKW-Knoten erreichbar sind (bei nicht zusammenhängenden Ausgangsgraphen). Darüber hinaus werden bei praktischen Problem instanzen, die eine Erweiterung eines bestehenden Fernwärmenetzes vorsehen, die Kanten des bestehenden Netzes zu einem Knoten zusammengefasst und der Graph entsprechend modifiziert.

Die in der Literatur für das Steiner Problem veröffentlichten Preprocessing Algorithmen (s. Abschnitt 6.1.4) wurden nicht umgesetzt, da diese für das Netzausbauproblem mit Budgetbeschränkungen nicht zulässig sind. Durch die Budgetbeschränkungen würde eine zu starke Vereinfachung des Graphen bzw. das Zusammenfassen mehrerer Kanten eine Vielzahl zulässiger Lösungen entfernen, da das Budget innerhalb einer Periode gegebenenfalls nicht mehr ausreicht, um die zusammengefassten Kanten zu bauen, einzelne Teilkanten hingegen schon.

## 8.2 Modellinstanzen

Zur Prüfung der Modelleigenschaften und der Lösungsperformance werden drei Gruppen von Modellinstanzen verwendet. Die erste Gruppe bilden Benchmark-Modelle, welche in der Literatur zu dem PCST veröffentlicht wurden. Diese Benchmark-Probleme werden genutzt, um die Lösungsperformance der in dieser Arbeit umgesetzten Modelle und Algorithmen mit bestehenden Modellierungsansätzen zu vergleichen.

Eine weitere Gruppe von Modellinstanzen bilden künstlich generierte Netzmodelle. Ziel hierbei ist es, durch gezielte Variation bestimmter Modelleigenschaften (Modellgröße, Anzahl möglicher BHKW-Standorte, Verteilung der positiven und negativen Kantengewichte) die Lösbarkeit in Abhängigkeit dieser Parameter zu untersuchen.

Die letzte Gruppe bildet eine Auswahl realer Netzmodelle verschiedener Städte, welche die Lösbarkeit der Modelle für praktische Anwendungsfälle sicherstellen soll.

### 8.2.1 Benchmark Bibliotheken

In der Literatur zu dem klassischen Steiner-Baum Problem sind verschiedene Benchmark-Instanzen veröffentlicht, die einen Vergleich der unterschiedlichen Lösungsalgorithmen und mathematischen Modellierungsansätze ermöglichen. Einige dieser Probleminstanzen wurden für das Prize-Collecting Steiner-Tree Problem um Knotengewichte ergänzt. Die erste Gruppe bilden die K- und P-Serie aus [Johnson et al., 2000], welche eine Größe von 100 - 400 Knoten bzw. 280 - 1500 Kanten aufweisen. Die K-Serie umfasst 23 Instanzen, welche aus zufällig erzeugten Graphen bestehen, die in ihrer geometrischen Struktur einer Straßenkarte ähneln. Die Kantengewichte entsprechen den euklidischen Distanzen zwischen den jeweiligen Knoten, multipliziert mit einem Skalierungsfaktor. Den Knoten wurden zufällig mit einer Wahrscheinlichkeit von 15 % ein Gewicht  $\neq 0$  zugewiesen. Die

P-Serie umfasst zufällig generierte unstrukturierte Graphen, wobei im Mittel ca. 25 % der Knoten ein Gewicht  $\neq 0$  aufweisen.

Die übrigen Instanzen der Serien C und D sind [Canuto et al., 2001] entnommen und basieren ursprünglich auf Steiner-Graph Problemen der OR-Library (vgl. [Beasley, 1990]) mit 500 - 1000 Knoten und 625 - 25000 Kanten. Den Basisknoten aus den Originalinstanzen der OR-Library wurden Knotengewichte  $> 0$  zugewiesen, den übrigen Knoten jeweils ein Gewicht von null. In den hier veröffentlichten Benchmark-Ergebnissen wurden nur die Instanzen bis zu einer Größe von 5000 Kanten berücksichtigt, da die größeren Instanzen (mit 12500 bzw. 25000 Kanten) zu Speicherproblemen bei der verwendeten 32-bit-Version von AMPL (s. Abschnitt 8.4.1) geführt haben.

Die Benchmark-Instanzen der Serien C, D, K und P haben sich als Standard-Probleme im Kontext des PCST durchgesetzt und sind unter anderem in den Arbeiten von Lucena und Resende (vgl. [Lucena und Resende, 2004], [Lucena et al., 2009]), Ljubić et. al (vgl. [Ljubic, 2004], [Ljubic et al., 2006]) sowie den Autoren der Testsets ([Johnson et al., 2000] für die Serien K und P, bzw. [Canuto et al., 2001] für die Serien C und D) verwendet worden. Die in Tabelle 8.1 aufgeführten Instanzen wurden gemäß der in Abschnitt 5.3.4 beschriebenen Transformation aus dem PCST in ein äquivalentes CSP überführt.

Serie	Instanzen	Anzahl Knoten	Anzahl Kanten
C	30	500	625 - 2500
D	30	1000	1250 - 5000
K	23	100 - 400	307 - 1576
P	11	100 - 400	284 - 1212

**Tabelle 8.1** Übersicht der Benchmark-Instanzen

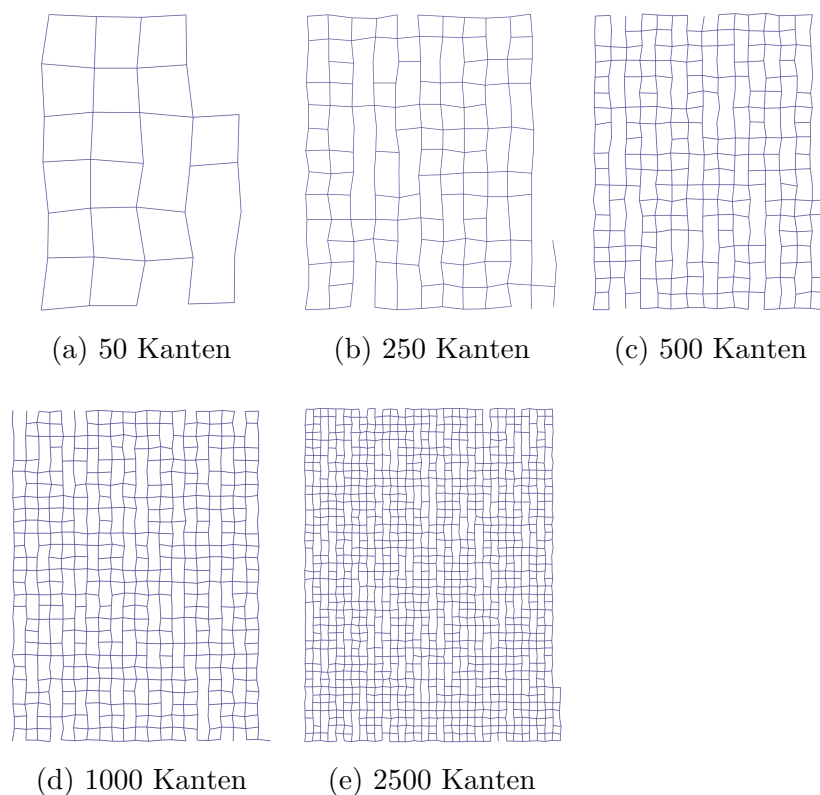
### 8.2.2 Generierte Fernwärmenetze

Um eine gezielte Variation der Instanzen zu ermöglichen wurde ein Modellgenerator umgesetzt, welcher es erlaubt, unterschiedliche Netztopologien anhand verschiedener Kriterien automatisiert zu erzeugen. In den untersuchten Netzmodellen wurden die Anzahl der Kanten, die Anzahl potentieller HKW-Standorte sowie die Höhe des Wärmebedarfs auf den Trassen variiert.

Die Anzahl der Kanten bestimmt die Größe einer Modellinstanz (Anzahl der Variablen) und hat daher voraussichtlich den größten Einfluss auf die Lösungsdauer. Es wurden fünf unterschiedliche Netzgrößen gebildet: 50, 250, 500, 1000 und 2500 Kanten. Während die kleinste Netzgröße mit 50 Kanten hauptsächlich analytischen Zwecken dient, können mit

250 - 1000 Kanten – je nach Detaillierungsgrad der Trassenabschnitte – bereits Kleinstädte oder einzelne Stadtteile von Großstädten abgebildet werden. 2500 Kanten entsprechen in etwa der Netzgröße einer kleinen Großstadt. Die Modelle sind von ihrer Größe und Struktur daher mit realen Netzmodellen vergleichbar.

Die Netzmodelle entsprechen ausschließlich planaren Graphen mit einem maximalen Knotengrad von vier. Die Länge der Kanten wurde um maximal 15 % variiert, wobei dies für die Optimierung nur eine untergeordnete Rolle spielt, da sich die Variation der Kantengewichte (der Gewinne / Verluste) hauptsächlich aus dem unterschiedlichen Wärmebedarf der einzelnen Kanten ergibt. Die Struktur der Netzmodelle geht aus Abbildung 8.3 hervor.



**Abbildung 8.3** Struktur der generierten Modellnetze

Neben der Anzahl der Kanten wurde die Anzahl der Einspeisestandorte (HKW-Standorte) variiert, um zu prüfen, inwieweit hierdurch die Lösungsdauer beeinflusst wird. Es ist tendenziell zu erwarten, dass eine höhere Anzahl möglicher Einspeisestandorte die Lösungsdauer (bei gleicher Modellgröße) erhöht, da es nicht mehr nur einen Startknoten gibt, ab dem das Netz ausgebaut werden kann. Hierdurch wird der Optimierungsspielraum deutlich erhöht.

Die Höhe des Wärmebedarfs steuert die Anzahl der Kanten, die ein positives Gewicht (Gewinn) aufweisen. Durch Variation dieses Parameters soll insbesondere für die beiden

Branch-and-Cut Ansätze geprüft werden, wie die Lösungsdauer von dem Anteil der Kanten mit positivem Gewicht abhängt. Zu erwarten ist eine negative Korrelation, da ein hoher Anteil von Kanten mit positivem Gewicht auch ohne das Hinzufügen der Zusammenhangsbedingungen größere zusammenhängende Teilgraphen erzeugt. Eine geringerer Anteil bedeutet hingegen, dass es ohne Restriktionen, die den Zusammenhang des Lösungsgraphen sicherstellen, viele isolierte gewinnbringende Kanten geben wird.

Tabelle 8.2 gibt eine Übersicht der generierten Netzmodelle und ihrer Eigenschaften.

Bezeichnung	Anzahl Kanten	Wärmebedarf	Anzahl HKW-Standorte
50a	50	gering	1
50b	50	gering	3
50c	50	hoch	1
50d	50	hoch	3
250a	250	gering	1
250b	250	gering	3
250c	250	hoch	1
250d	250	hoch	3
500a	500	gering	1
500b	500	gering	5
500c	500	hoch	1
500d	500	hoch	5
1000a	1000	gering	1
1000b	1000	gering	5
1000c	1000	hoch	1
1000d	1000	hoch	5
2500a	2500	gering	1
2500b	2500	gering	5
2500c	2500	hoch	1
2500d	2500	hoch	5

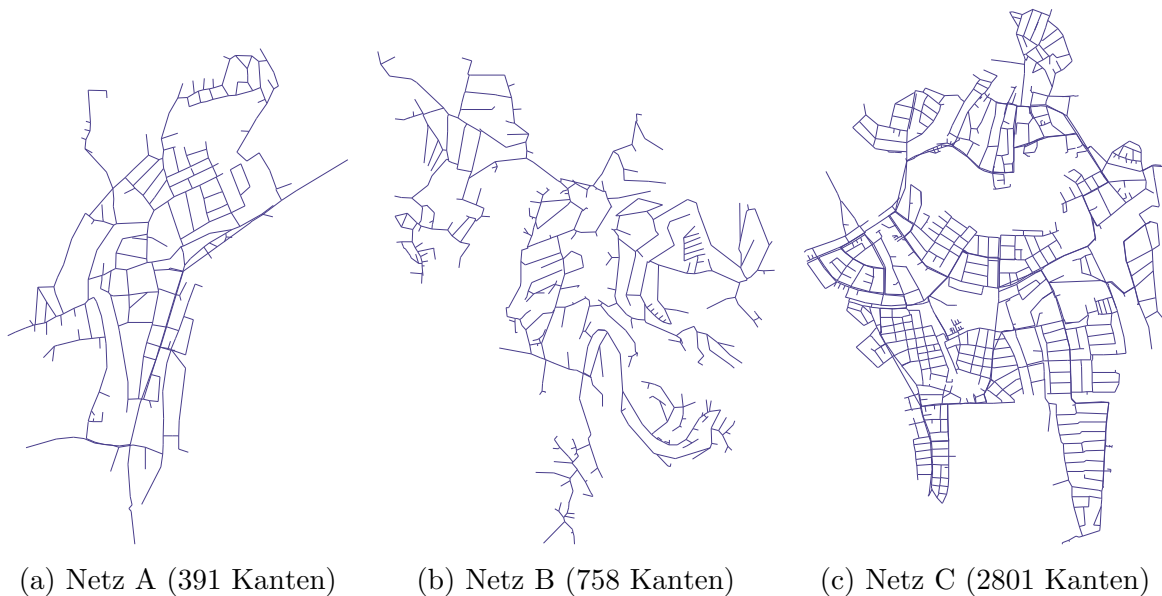
**Tabelle 8.2** Übersicht der generierten Modellinstanzen

### 8.2.3 Reale Netze

Zur Prüfung der Praxistauglichkeit der entwickelten Verfahren werden diese auf drei reale Netzmodelle angewendet. Die Modelle wurden aus bestehenden Gasnetzen generiert, wodurch eine realistische Trassenstruktur und Wärmebedarfsverteilung vorliegt. Die Netze gehören zu verschiedenen Städten und weisen bis zu 2800 Trassenabschnitte (Kanten) auf. Das kleinstädtische Netz A umfasst eine Trassenlänge von 30,6 km, die sich auf 391 Trassenabschnitte aufteilt. Aus dem Wärmebedarf von insgesamt 28627 MWh ergibt sich eine mittlere spezifische Wärmebedarfsdichte von 935 kWh / m.

Netz B besteht aus 758 Trassenabschnitten mit einer Gesamtlänge von 44,6 km. Der Wärmebedarf liegt bei 91793 MWh, was einer Wärmebedarfsdichte von 2057 kWh / m entspricht. Das Netz gehört zu einer mittleren Kleinstadt mit ca. 25000 Einwohnern.

Das größte Netz C gehört zu einer Stadt mit ca. 60000 Einwohnern und weist eine Trassenlänge von 139,6 km auf. Das Netzmodell beinhaltet 2801 Kanten mit einem Gesamtwärmebedarf von 284488 MWh. Die resultierende mittlere Wärmebedarfsdichte beträgt 2038 kWh / m. Die mit der Netzgröße ansteigende Wärmebedarfsdichte spiegelt die höhere Bebauungs- und Einwohnerdichte in größeren Städten wider, welche tendenziell vorteilhafter für den kostenintensiven Ausbau der Fernwärme ist. Die Struktur der drei Netze ist in Abbildung 8.4 dargestellt.



**Abbildung 8.4** Struktur der realen Netzmodelle

### 8.3 Strukturelle Eigenschaften der Modellinstanzen

Die drei Gruppen von Modellinstanzen weisen einige Unterschiede hinsichtlich der Struktur der zugrunde liegenden Graphen auf, welche die Lösungsdauer sowie die Eignung der verschiedenen Modellformulierungen beeinflussen können. Für eine bessere Einordnung der im nächsten Abschnitt vorgestellten Berechnungsergebnisse werden die Graphen der unterschiedlichen Modellgruppen nachfolgend anhand der in Tabelle 8.3 aufgeführten Kennwerte charakterisiert.

Ein erstes wichtiges Unterscheidungsmerkmal der Graphen besteht in der Struktur der Kanten. Reale Trassenmodelle entsprechen immer planaren Graphen, da Leitungen, welche sich kreuzen, durch einen Knoten verbunden sind. Dementsprechend sind auch die hier



verwendeten realen und generierten Fernwärmenetze planar. Von den Benchmark-Instanzen hingegen sind nur wenige Graphen planar. Diese abweichende Struktur zeigt sich auch in dem mittleren Knotengrad ( $2 \cdot \frac{|E|}{|V|}$ ), der bei planaren Graphen maximal den Wert sechs annehmen kann (vgl. [Krumke und Noltemeier, 2012] S. 324). Der mittlere Knotengrad der realen und generierten Netzmodelle von 3,2 bzw. 2,2 liegt deutlich unter dem theoretischen Maximum, wobei sich diese Werte mit der Auswertung der Strukturen von städtischen Straßenverläufen in [Cardillo et al., 2006] decken. Die Graphen sind damit erheblich dünner besetzt, als die Benchmark-Graphen mit einem mittleren Knotengrad von 6,0.

Kennwert	Benchmark-Instanzen	Generierte Netzmodelle	Reale Netzmodelle
Anzahl Knoten	100 - 1000	36 - 1467	342 - 2521
Anzahl Kanten	284 - 5000	50 - 2500	391 - 2801
$\frac{\text{Zyklen bis Länge 5}^*}{\text{Anzahl Kanten}}$	5,49	0,57	0,04
Anteil der Kanten mit Gewicht $> 0^*$	7%	54%	29%
Mittlerer Knotengrad*	6,0	3,2	2,2
Planar	Teilweise	Ja	Ja

\*Mittelwert über alle Instanzen der jeweiligen Gruppe

**Tabelle 8.3** Strukturelle Eigenschaften der unterschiedlichen Modellinstanzen

Die Auswirkungen des geringeren Verhältnisses zwischen der Anzahl der Kanten und der Knoten in den planaren Graphen werden deutlich, wenn die Anzahl der Zyklen in den Graphen betrachtet wird. Obwohl auch bei planaren Graphen die Anzahl möglicher Zyklen exponentiell mit der Anzahl der Kanten steigt, ist diese meist erheblich geringer als bei (dichter besetzten) nicht-planaren Graphen. Zur Veranschaulichung dieser Eigenschaft wurde für die verschiedenen Modellinstanzen die Anzahl aller Zyklen bis zu einer Länge von fünf berechnet und in das Verhältnis zu der Anzahl der Kanten des Graphen gesetzt. Bei den realen und generierten Netzmodellen liegt dieses Verhältnis mit 0,04 (reale Modelle) und 0,57 (generierte Modelle) deutlich unter eins. Bei den Benchmark-Instanzen hingegen beträgt die Anzahl der Zyklen mit bis zu fünf Kanten bereits das 5,5-Fache der Anzahl der Kanten. Aufgrund des exponentiellen Verlaufs nimmt diese Differenz stark zu, je länger die Zyklen sind. Für die größten nicht-planaren Benchmark-Instanzen können die Zyklen mit dem verwendeten Algorithmus bereits bei einer Länge von unter zehn nicht mehr in vertretbarer Laufzeit berechnet werden, während diese bei den planaren Graphen in Sekundenbruchteilen zu ermitteln sind.

Als weiteres Kriterium, welches die Optimierungsdauer und die Eignung der verschiedenen Modellformulierungen beeinflusst, konnte der Anteil der Kanten mit einem positiven Gewicht ermittelt werden. Wie die Ergebnisse zeigen werden, sind Modellinstanzen mit einem hohen Anteil von Kanten, die positiv in die Zielfunktion eingehen, bei der verwendeten Formulierung als CSP meist einfacher zu lösen, als Modelle mit wenigen isolierten gewinnbringenden Kanten. Für die Modellierung als PCST, welche den Arbeiten der Benchmark-Instanzen zugrunde liegt, gilt dies nicht unbedingt, da diese in der Modellierung explizit zwischen Knoten mit Gewicht  $> 0$  (Zielknoten) und den übrigen Knoten (Steinerknoten) unterscheidet. Auch die Cut-Generierung beschränkt sich auf die Zielknoten. Dementsprechend weisen von den Benchmark-Instanzen im Mittel nur 7 % der Kanten einen positiven Zielfunktionskoeffizienten auf, während dieser Anteil bei den realen und generierten Netzmodellen mit 29 % bzw. 54 % deutlich höher liegt.

## 8.4 Berechnungsergebnisse

### 8.4.1 Annahmen

Alle Berechnungen wurden auf einem Dual Core Intel i7 Mobile (2,7 GHz) mit 2,5 GB Arbeitsspeicher unter Windows 7 durchgeführt. Als Solver kommt MOPS (vgl. [Suhl, 2000]) in der Version 10.8.6.0 zum Einsatz, AMPL wird in der Version vom 22.01.2010 verwendet. Aus Lizenzgründen musste AMPL in der 32bit-Version genutzt werden, weshalb auch MOPS als 32bit-Version eingesetzt wurde.

Die Berechnungen wurden mit dem vereinfachten Modell durchgeführt, da die Benchmark-Instanzen nur mit diesem kompatibel sind. Als maximal zulässige Lösungsdauer wurden 600 Sekunden (Benchmark-Instanzen)<sup>38</sup> bzw. 1800 Sekunden (generierte und reale Netzmodelle) angesetzt, danach werden die Optimierungsläufe abgebrochen. Der Branch-and-Bound wird bei einem LP-Gap  $\leq 0,5\%$  abgebrochen, wodurch die verschiedenen Lösungsansätze in Einzelfällen geringfügig abweichende Optima finden. Bei den Testrechnungen hat sich gezeigt, dass ein vollständiger Optimalitätsbeweis insbesondere bei dem B&C Subtour-Elimination und der Netzwerkflussformulierung zu deutlich längeren Lösungsdauern führt, ohne das Ergebnis signifikant zu ändern. Bei dem B&C Connectivity

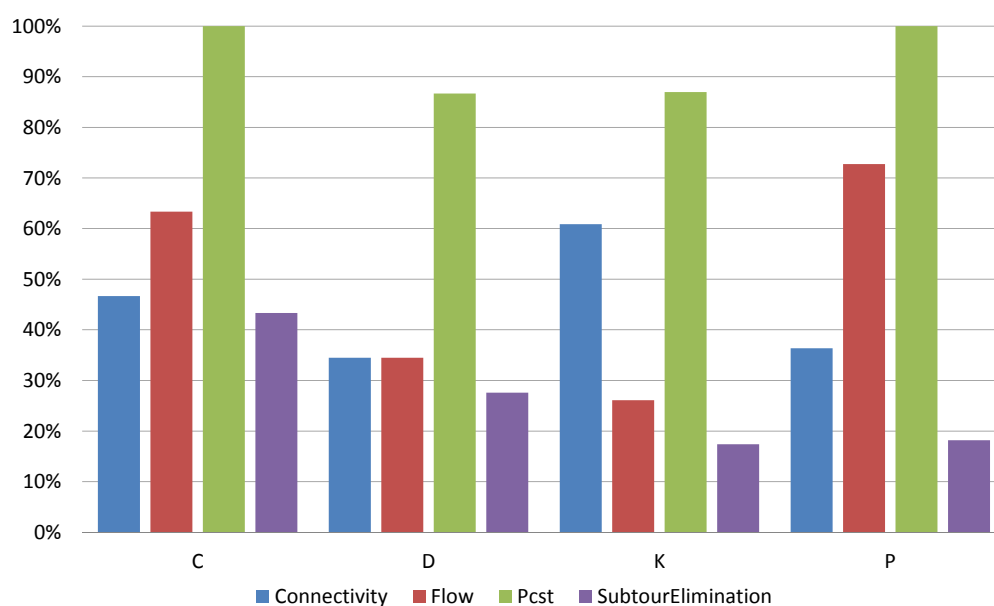
<sup>38</sup> Für die Benchmark-Instanzen wurde eine geringere maximale Lösungsdauer angesetzt, da diese von anderen in der Literatur veröffentlichten Ansätzen überwiegend in einer kürzeren Zeitspanne optimal gelöst werden können (s. nächster Abschnitt). Darüber hinaus ist die Gesamtberechnungsdauer (einschließlich der Berechnung maximaler Flüsse) bei dem B&C Connectivity deutlich länger, was bei der Vielzahl der Instanzen zu sehr langen Optimierungsläufen führen kann.

spielt der Branch-and-Bound hingegen eine untergeordnete Rolle, da in den einzelnen Iterationen lediglich die LP-Relaxierung gelöst werden muss.

Für die Branch-and-Cut Algorithmen wird nur die kumulierte Optimierungsdauer des Solvers ausgegeben, d.h. die Berechnungsdauer zur Bestimmung der maximalen Flüsse und der Zyklen fließt nicht in die Lösungsdauer ein. Mit dem umgesetzten Algorithmus von Edmond-Karps dauert die wiederholte Berechnung der maximalen Flüsse in AMPL deutlich länger, als mit einer effizienteren Umsetzung (z.B. Push-Relabel, vgl. [Goldberg und Tarjan, 1988]) in einer kompilierten Programmiersprache. Da dieser Anteil an der Gesamtlösungsdauer ausschließlich in der Implementierung begründet ist und bei der Umsetzung für ein Produktivsystem durch eine direkte Anbindung des B&C Connectivity an einen spezifischen Solver problemlos umgangen werden kann, sollen die Ergebnisse nicht zu Lasten des B&C Connectivity verzerrt werden.

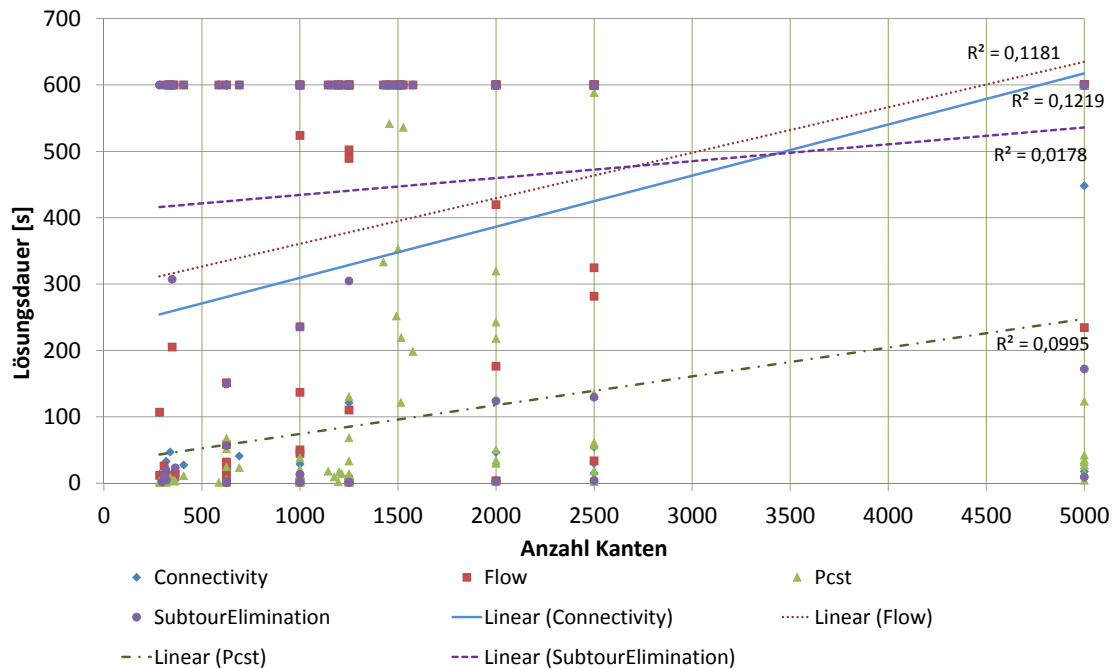
### 8.4.2 Benchmark Bibliotheken

Die untersuchten Benchmark-Instanzen können mit den umgesetzten Optimierungsalgorithmen innerhalb der maximalen Lösungsdauer von 600 Sekunden nur teilweise optimal gelöst werden. Der B&C Connectivity sowie die Flussformulierung finden das Optimum für etwa die Hälfte aller Modellinstanzen (s. Abbildung 8.5). Der B&C Subtour-Elimination konnte hingegen nur für weniger als ein Drittel der Instanzen das Optimum bestimmen.



**Abbildung 8.5** Anteil der Benchmark-Instanzen, die innerhalb der maximalen Lösungsdauer optimal gelöst werden konnten

Die Größe der berechneten Benchmark-Instanzen reicht von 284 bis zu 5000 Kanten. Zu erwarten wäre ein ausgeprägter Zusammenhang zwischen der Modellgröße bzw. der Anzahl der Kanten und der Lösungsdauer. Dieser kann anhand der Berechnungsergebnisse allerdings nicht nachgewiesen werden. Abbildung 8.6 zeigt die Lösungsdauer der einzelnen Instanzen in Abhängigkeit der Modellgröße. Aufgrund des hohen Anteils nicht lösbarer Modellinstanzen ist jedoch keine exakte statistische Auswertung der Einflussfaktoren auf die Berechnungsdauer möglich, da diese einheitlich auf 600 Sekunden begrenzt wurde. Die in der Grafik dargestellten linearen Trendlinien dienen daher nur der Veranschaulichung einer schwach positiven Tendenz. Eine Beschränkung der Auswertung auf die Modellinstanzen, welche optimal gelöst werden konnten, ergibt ebenfalls keinen belastbaren Zusammenhang<sup>39</sup> zwischen Modellgröße und Lösungsdauer.



**Abbildung 8.6** Lösungsdauer der einzelnen Benchmark-Instanzen in Abhängigkeit von der Modellgröße (für Modelle, die nicht optimal gelöst werden konnten, wurde die maximale Lösungsdauer von 600 Sekunden angesetzt)

Im Vergleich zu den Ergebnissen aus Arbeiten zu dem PCST ([Ljubic, 2004], [Lucena und Resende, 2004], [Lucena et al., 2009]), welche sämtliche oder den Großteil der Instanzen optimal lösen, sind die mit der Formulierung als CSP erreichten Ergebnisse unbefriedigend. Nachfolgend wird daher für die verschiedenen Lösungsansätze erläutert, welche Gründe für die schlechteren Lösungseigenschaften verantwortlich sein könnten.

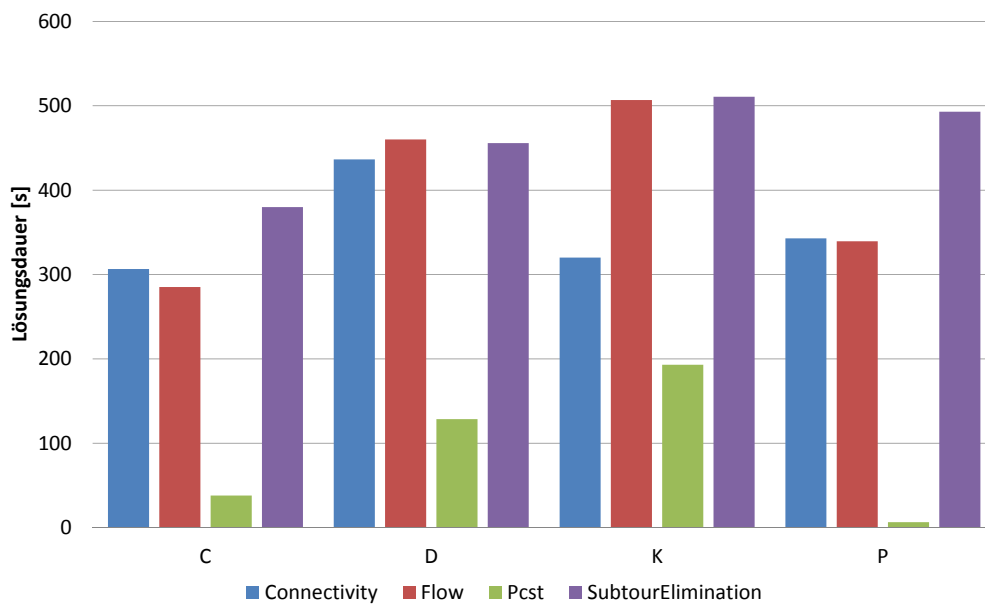
<sup>39</sup> Es konnte weder ein linearer, noch quadratischer oder exponentieller Zusammenhang nachgewiesen werden.

#### 8.4.2.1 Flussformulierung

Die Formulierung der Optimierungsaufgabe als Netzwerkflussproblem findet bei etwa der Hälfte (46%) der Modellinstanzen das Optimum innerhalb der maximalen Lösungsdauer (s. Abbildung 8.5). Bei den Modellklassen C und P mit der höchsten Erfolgsquote (63% bzw. 73%) liegt die mittlere Lösungsdauer bei 285 bzw. 339 Sekunden. Bei den Benchmarkproblemen der Klasse D und K, bei denen nur für 34% (D) bzw. 26% (K) der Instanzen das Optimum gefunden wird, nähert sich die mittlere Lösungsdauer mit 460 bzw. 506 Sekunden der maximal zulässigen Lösungsdauer an.

Trotz der vergleichsweise schwachen LP-Relaxierung der Flussformulierung liegen sowohl die mittlere Lösungsdauer (mit Ausnahme der K-Gruppe), als auch die Anzahl der gefunden Optima in etwa mit dem B&C Connectivity gleich auf. Im Vergleich zu dem B&C Subtour-Elimination schneidet die Flussformulierung besser ab. Bei der Gesamtlösungsdauer ist die Flussformulierung daher konkurrenzfähig, obwohl das Modell eine schwächere LP-Relaxierung aufweist. Im Gegensatz zu den beiden Branch-and-Cut Algorithmen, welche die Lösungskomplexität weitgehend in den Prozess der Generierung geeigneter Schnitte verlagern und deren MIP-Modelle relativ einfach zu lösen sind, besteht die Schwierigkeit bei der Lösung der Flussformulierung hauptsächlich in der effizienten Bestimmung des ganzzahligen Optimums durch den Solver. Bei detaillierter Betrachtung der Benchmarkergebnisse hat sich hierbei gezeigt, dass das ganzzahlige Optimum in vielen Fällen bereits innerhalb der ersten 100 Sekunden gefunden wurde, der Optimalitätsbeweis bis zur zulässigen Ganzzahligkeitslücke von 0,5% jedoch die langen Lösungsdauern bedingt. Auch dies deutet auf eine schwache LP-Relaxierung des Modells hin. In der Praxis ist dieses Problem von geringerer Bedeutung, da der Fernwärmeausbau mit sehr vielen Unsicherheitsfaktoren belastet ist und daher ein LP-Gap von bis zu etwa 5 - 10% akzeptabel ist. Immerhin 60% der Modellinstanzen konnten innerhalb der zulässigen 600 Sekunden bis zu einem LP-Gap von 5% gelöst werden.

Bei einzelnen Instanzen wurde zunächst teilweise keine zulässige Lösung gefunden. Hierbei hat sich herausgestellt, dass numerische Probleme in den Flussgleichungen zulässige Lösungen abschneiden können. Sämtliche Gleichungen, welche die Flussvariablen enthalten, wurden daher um einen Toleranzfaktor  $\epsilon$  von  $10^{-3}$  ergänzt, der diese Rundungsfehler ausgleicht. Durch den Toleranzfaktor konnten die numerischen Probleme vollständig eliminiert werden.



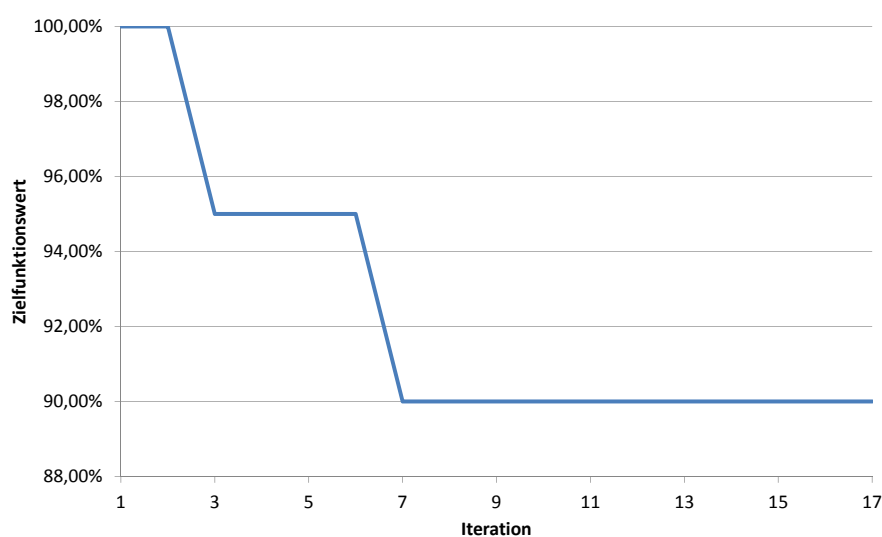
**Abbildung 8.7** Mittlere Lösungsdauer der Benchmark-Instanzen (für Modelle, die nicht optimal gelöst werden konnten, wurde die maximale Lösungsdauer von 600 Sekunden angesetzt)

#### 8.4.2.2 B&C Subtour-Elimination

Der B&C Subtour-Elimination, welcher auf Zyklenrestriktionen basiert, schneidet von den drei Optimierungsansätzen am schwächsten ab. Innerhalb der zulässigen Lösungsdauer wird lediglich für 29% der Modellinstanzen das Optimum gefunden. Besonders die Instanzen der K- und P-Serie bereiten dem Algorithmus Probleme.

Die Schwierigkeiten des B&C Subtour-Elimination bei der Lösung der Benchmark-Modelle können auf die Modellstruktur zurückgeführt werden. Zum einen konnte in Abschnitt 8.3 gezeigt werden, dass die Anzahl der Zyklen im Verhältnis zu der Anzahl der Kanten des Graphen bei den Benchmark-Instanzen sehr hoch ist, wodurch der B&C Subtour-Elimination entsprechend viele Iterationen benötigen kann. Zum anderen basieren die Modellinstanzen ursprünglich auf dem Steiner-Baum Problem, welches die kostengünstigste Verbindung zwischen einzelnen Knoten sucht, die durch eine Vielzahl von Kanten verbunden sind. Bezogen auf das CSP bedeutet dies, dass nur einzelne wenige Kanten Gewinne aufweisen, die durch eine Vielzahl von Kanten mit negativem Gewicht verbunden sind. Die gewinnbringenden Kanten sind daher oftmals relativ weit voneinander entfernt, wodurch eine Verbindung dieser Kanten hohe Kosten verursacht. Diese Konstellation ist der schlechteste Fall für den B&C Subtour-Elimination. Der Algorithmus generiert wiederholt neue Zyklen im nahen Umkreis der gewinnbringenden Kanten, da dies günstiger ist, als diese weit voneinander entfernten Kanten miteinander zu verbinden.

Die Connectivity-Cuts (s. nächster Abschnitt) scheinen daher bei Graphen mit wenigen gewinnbringenden Kanten, welche weit voneinander entfernt liegen, besser geeignet zu sein, den Zusammenhang des Graphen in möglichst wenigen Iterationen sicherzustellen. Diese Schwäche des B&C Subtour-Elimination zeigt sich deutlich bei der Betrachtung des optimalen Zielfunktionswertes in den jeweiligen Iterationen. Der Zielfunktionswert kann entweder gleich bleiben oder verschlechtert sich, da eine Verbesserung aufgrund zusätzlicher Restriktionen nicht möglich ist. Im Idealfall – also bei schneller Konvergenz – fällt der Zielfunktionswert in jeder Iteration bis das Optimum ohne Zyklen gefunden wurde. Bei den Modellinstanzen aus den Benchmark-Bibliotheken kann hingegen beobachtet werden, dass der Algorithmus oftmals über viele Iterationen keine Veränderung des Zielfunktionswertes erreicht. Dieser Fall kann eintreten, wenn der Algorithmus in aufeinanderfolgenden Iterationen Zyklen mit unterschiedlichen (gerichteten) Kanten aber gleichen Kosten generiert. Abbildung 8.8 zeigt dieses problematische Konvergenzverhalten des Algorithmus exemplarisch für die Modellinstanz D12-A. Aus der Grafik ist ersichtlich, dass der Zielfunktionswert nur in zwei Iterationen zurück geht, in allen anderen Iterationen wird nur eine Stagnation des Zielfunktionswertes erreicht.



**Abbildung 8.8** Konvergenzverhalten des B&C Subtour-Elimination für die Instanz D12-A

Hiermit verbunden ist eine weitere prinzipielle Schwäche dieses Modellierungsansatzes. Im Gegensatz zu dem B&C Connectivity, der in jeder Iteration eine Vielzahl verschiedener Schnitte generiert, können bei dem B&C Subtour-Elimination in einer Iteration oftmals nur wenige neue Schnitte hinzugefügt werden, da nur einzelne (teilweise jedoch sehr lange) Zyklen auftreten.

Ein weiterer Nachteil gegenüber dem B&C Connectivity, der sich insbesondere bei größeren Modellen zeigt, besteht darin, dass die Zyklen nur für ganzzahlige Lösungen bestimmt werden können. In jeder Iteration muss daher der Branch-and-Bound Algorithmus des Solvers zunächst das ganzzahlige Optimum ermitteln. Aufgrund der strengen LP-Relaxierung wird das Optimum in den ersten Iterationen meist sehr schnell gefunden. Sobald dem Modell jedoch mehrere Cuts hinzugefügt werden, kann die Lösungsdauer des ganzzahligen Problems stark ansteigen, wodurch jede Iteration des Branch-and-Cut Algorithmus vergleichsweise viel Zeit benötigt. Eine Integration der Zyklenbestimmung in den Branch-and-Bound Algorithmus des Solvers könnte dieses Problem abschwächen, da bereits die ersten ganzzahligen Lösungen in dem Branch-and-Bound Baum auf isolierte Teilgraphen untersucht werden könnten. Dies würde eine frühzeitige Eliminierung einer Vielzahl unzulässiger Lösungen ermöglichen.

#### 8.4.2.3 B&C Connectivity

Während der B&C Connectivity bei Ljubić zu sehr guten Ergebnissen führt und sämtliche Modelle in einer vergleichbaren maximalen Lösungsdauer optimal löst, wird in der hier umgesetzten Variante lediglich für etwa die Hälfte aller Instanzen das Optimum gefunden. Prinzipiell gibt es für diese starke Abweichung der Ergebnisse zwei Möglichkeiten. Zum einen kann die Umsetzung der Cut-Generierung unterschiedlich und verantwortlich für die schlechteren Resultate sein. Zum anderen könnte die unterschiedliche LP-Formulierung des Optimierungsproblems der Grund für die unbefriedigenden Ergebnisse sein.

Zur Klärung dieser Frage wurde zusätzlich exakt die Modellformulierung als PCST aus [Ljubic, 2004] (s. Abschnitt 6.1.3.4.2) umgesetzt und mit der gleichen<sup>40</sup> Branch-and-Cut Implementierung wie die CSP-Formulierung gelöst. Sofern die Ergebnisse bei dieser Kombination ebenfalls zu einer geringen Quote optimaler Lösungen führt, kann das Problem zumindest teilweise auf die Cut-Generierung und allgemeine Umsetzung des Branch-and-Cut Algorithmus zurückgeführt werden. Bei guten Ergebnissen hingegen liegen die Abweichungen in der Kombination des Algorithmus mit der abweichenden LP-Formulierung begründet.

Abbildung 8.5 führt die Ergebnisse dieser Umsetzung als PCST auf. Aus der Grafik ist ersichtlich, dass mit Ausnahme einzelner Instanzen in den Gruppen D und K, welche auch bei Ljubić vergleichsweise lange Laufzeiten benötigen, sämtliche Modellinstanzen optimal gelöst werden konnten. Die Implementierung des B&C Connectivity und der

<sup>40</sup> Mit Ausnahme minimaler Anpassungen der Syntax an die Modellformulierung als PCST.



Cut-Generierung scheint also vergleichbar mit der Umsetzung von Ljubić zu sein. Damit liegt die schlechtere Lösungsperformance in der Formulierung als CSP begründet. Bei näherer Analyse der Ergebnisse hat sich gezeigt, dass diese Formulierung bei größeren Benchmark-Instanzen zu einer deutlich höheren Anzahl verletzter Cuts führt. Hierdurch steigt zum einen die Berechnungszeit der einzelnen LP-Relaxierungen an, zum anderen werden deutlich mehr Iterationen benötigt, um einen zusammenhängenden Lösungsgraphen zu erreichen.

Darüber hinaus treten teilweise Speicherprobleme auf, da dem Modell mehrere Tausend Cuts mit vielen Kanten hinzugefügt werden. In der Regel ist nur eine Teilmenge dieser Cuts zwingend notwendig, weswegen versucht wurde das Speicherproblem durch eine starke Beschränkung der zusätzlichen Cuts je Iteration zu lösen. Dies führt allerdings nur zu einer Erhöhung der Anzahl der Iterationen bis wiederum die Anzahl der Cuts zu groß oder die Laufzeit überschritten wird. Die Speicherproblematik wird auch in [Ljubic, 2004] (S. 136) für das PCST beschrieben, konnte dort jedoch durch die Nutzung von *Back-Cuts* eliminiert werden, was bei der CSP-Formulierung offensichtlich nicht ausreicht. Ein Umstieg auf die 64bit-Version von AMPL würde voraussichtlich die Speicherproblematik lösen, jedoch aufgrund der höheren Anzahl generierter Cuts zu längeren Laufzeiten führen und damit ebenfalls keine befriedigende Lösung darstellen.

Einzelne Instanzen wurden darüber hinaus aufgrund numerischer Probleme bei der Berechnung des maximalen Flusses von dem Wurzelknoten zu den jeweiligen Basisknoten nicht optimal gelöst. Abhängig von der Wahl des Schwellwertes, ab dem der maximale Fluss als unterschritten gilt ( $10^{-3}$  bei den Benchmark-Rechnungen), werden teilweise aufgrund numerischer Ungenauigkeiten Leitungen fälschlicherweise als nicht-verbunden identifiziert, obwohl diese verbunden sind. Je nach Wahl des Schwellwertes werden manche Instanzen innerhalb weniger Sekunden gelöst oder der Algorithmus konvergiert nicht oder nur sehr langsam. Durch eine Anpassung des Schwellwertes können diese Instanzen zwar korrekt gelöst werden, jedoch treten hierdurch bei anderen Instanzen vereinzelt Probleme auf. Die Implementierung von Ljubić scheint diese Probleme nicht aufzuweisen, allerdings werden auch hier numerische Instabilitäten im Zusammenspiel der Cut-Generierung mit dem Solver angedeutet (vgl. [Ljubic, 2004] S. 129).

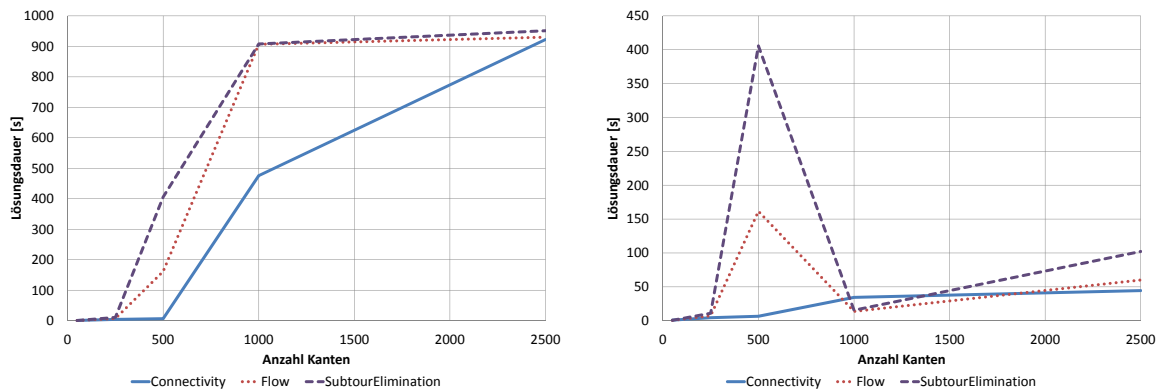
Abschließend kann für die Benchmark-Instanzen festgestellt werden, dass die Formulierung als PCST der CSP-Formulierung überlegen ist. Für die anderen Modellinstanzen (generierte und reale Fernwärmenetze) wird die Formulierung als PCST dennoch nicht angewendet, da sämtliche Daten kantenbasiert vorliegen und eine eindeutige Transformation des als CSP vorliegenden Problems in ein PCST nicht bzw. nur durch eine starke

Aggregation möglich ist (s. Abschnitt 5.3.4). Diese Aggregation ist jedoch – analog zu den Preprocessing-Routinen – für das budgetbeschränkte Steiner-Graph Problem nicht zulässig. Eine angepasste Transformation, welche nicht mathematisch äquivalent ist, aber dennoch eine vergleichbare Beschreibung der Fragestellung als PCST ermöglicht, könnte prinzipiell umgesetzt werden. Diese würde allerdings zum einen mindestens die doppelte Anzahl von Variablen benötigen. Zum anderen erzeugt das PCST zwingend Baumstrukturen, welche bei Fernwärmenetzen nicht unbedingt gewünscht sind. Darüber hinaus deuten die in Abschnitt 8.3 beschriebenen Kennwerte zur Struktur der Graphen darauf hin, dass die Formulierung als PCST insbesondere bei den Benchmark-Instanzen, welche überwiegend eine hohe Anzahl von Zyklen und einen geringen Anteil von Kanten mit positivem Gewicht aufweisen, Vorteile gegenüber der Modellierung als CSP hat.

### 8.4.3 Generierte Fernwärmenetze

#### 8.4.3.1 Performance in Abhängigkeit der Netzgröße

Sofern Modellinstanzen, die nicht innerhalb von 1800 Sekunden optimal gelöst werden konnten, mit der maximalen Lösungsdauer bewertet werden, ergibt sich ein deutlicher Zusammenhang zwischen der Modellgröße und der Lösungsdauer (s. Abbildung 8.9 a). Dieser beruht jedoch weitgehend auf der zunehmenden Anzahl nicht optimal gelöster Modellinstanzen, die mit einer entsprechend hohen Lösungsdauer bewertet werden. Sofern nur die optimal gelösten Instanzen betrachtet werden, ist dieser Trend weniger stark zu beobachten, wobei für die Flussformulierung und den B&C Subtour-Elimination ein Sprung bei den Modellinstanzen mit 500 Kanten auftritt (s. Abbildung 8.9 b). Bei den generierten Netzmodellen bestätigt sich daher die Erkenntnis aus den Benchmark-Instanzen, dass es tendenziell eine sehr starke Zufallskomponente in dem Zusammenhang zwischen der Modellgröße und der Lösungsperformance gibt und ab einer Größe von ca. 500 - 1000 Kanten das Optimum nicht mehr sicher innerhalb einer kurzen Laufzeit ermittelt wird. Bei größeren Modellinstanzen scheinen die konkreten Modelldaten ausschlaggebend für die Lösungsperformance zu sein und nicht die genaue Größe einer Modellinstanz. Einige große Instanzen sind extrem schnell zu lösen, während für andere Modellnetze bei ähnlicher Struktur der Graphen das Optimum nicht oder erst sehr spät gefunden wird.



(a) Alle Instanzen  
(nicht optimal gelöste Instanzen  
werden mit  $t^{MAX} = 1800$  s bewertet)

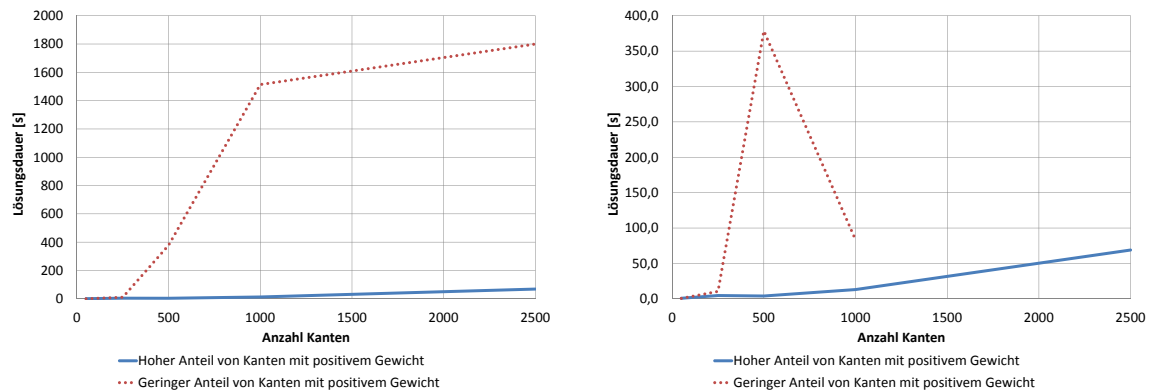
(b) Nur optimal gelöste Instanzen

**Abbildung 8.9** Mittlere Lösungsdauer der generierten Netzmodelle in Abhängigkeit der Netzgröße

#### 8.4.3.2 Performance in Abhängigkeit des Anteils von Kanten mit positivem Gewicht

Es wurde daher neben der Modellgröße die Verteilung der gewinn- und verlustbringenden Kanten gezielt variiert, da diese einen Einfluss auf die Lösungsdauer haben könnte. Sofern das Budget für den Netzausbau nicht eingeschränkt wird, ist tendenziell zu erwarten, dass Modelle mit einem hohen Anteil an gewinnbringenden Kanten deutlich leichter zu lösen sind. Dies kann darauf zurückgeführt werden, dass ein großer Teil der Kanten in dem Lösungsgraphen enthalten sein muss und daher bereits in dem Ausgangs-LP der Branch-and-Cut Algorithmen den Wert eins aufweist. Aufgrund der hohen Anzahl von Kanten, die Teil der Lösung sind, ist damit bereits ein Großteil des Lösungsgraphen zusammenhängend. Für den Extremfall, dass sämtliche Kanten Gewinne aufweisen, ist die optimale Lösung stets der Ausgangsgraph. Für die Flussformulierung führt diese Datenlage ebenfalls zu einer schnelleren Lösung, da – bei unbeschränktem Budget – nur Kanten mit negativem Gewicht in der LP-Relaxierung fraktionelle Werte aufweisen.

Das erwartete Verhalten zeigt sich eindeutig in den untersuchten Modellinstanzen (s. Abbildung 8.10). Bei den Modellinstanzen mit einem hohen Anteil von Kanten mit positivem Gewicht (im Mittel 70%) liegt die mittlere Lösungsdauer bei ca. 18 Sekunden. Die Instanzen mit einem geringeren Anteil von Kanten mit positivem Gewicht (im Mittel 40%) weisen hingegen eine durchschnittliche Berechnungsdauer von 740 Sekunden auf, wobei auch hier Modellinstanzen, die nicht optimal gelöst werden konnten mit 1800 Sekunden in die Auswertung eingeflossen sind. Aus Abbildung 8.10 (b) ist ersichtlich, dass keine der Modellinstanzen mit 2500 Kanten und einem geringen Anteil von Kanten mit positivem Gewicht optimal gelöst werden konnte. Um Zufallsergebnisse auszuschließen, wurden im



(a) Alle Instanzen  
(nicht optimal gelöste Instanzen  
werden mit  $t^{MAX} = 1800$  s bewertet)

(b) Nur optimal gelöste Instanzen

**Abbildung 8.10** Mittlere Lösungsdauer der generierten Netzmodelle in Abhängigkeit der Netzgröße und des Anteils von Kanten mit positivem Gewicht (hoch=70%, gering=40%)

Rahmen der Berechnungen auch andere Kombinationen (30% gering, 80% hoch) untersucht, die alle zu ähnlichen Ergebnissen geführt haben.

#### 8.4.3.3 Performance in Abhängigkeit der Anzahl der Heizkraftwerke

Die Anzahl der Heizkraftwerksstandorte und somit die Anzahl der Kanten, welche direkt mit dem Wurzelknoten verbunden sind, könnte ebenfalls eine Auswirkung auf die Lösungsdauer haben. Tendenziell ist zu erwarten, dass eine größere Anzahl möglicher Heizkraftwerke zu einer höheren Lösungsdauer führt, da es eine Vielzahl verschiedener Startpunkte im Netz gibt, ab dem der Zusammenhang des Graphen sichergestellt werden muss. Daher wurden zusätzliche Modellinstanzen mit 5, 10 und 15 möglichen HKW-Standorten berechnet. Die Untersuchungen haben allerdings ergeben, dass ein solcher Zusammenhang für keinen der drei Optimierungsansätze nachgewiesen werden kann. Hier scheint die Lage der Heizkraftwerke eher zufällig zu leicht oder schwer lösbaren Modellen zu führen.

#### 8.4.3.4 Performance in Abhängigkeit der Anzahl der Perioden

Bisher wurde ausschließlich das einperiodige Netzwerkentwurfsproblem untersucht. Wie bereits in den vorangegangenen Kapiteln erläutert, ist bei dem Problem des optimalen Fernwärmenetzausbaus die zeitliche Abfolge der einzelnen Erweiterungsmaßnahmen von Bedeutung.

Durch die Berücksichtigung mehrerer Perioden steigt die Komplexität des Optimierungsproblems erheblich an. Eine Ausnahme bildet der Sonderfall, dass das Budget der ersten

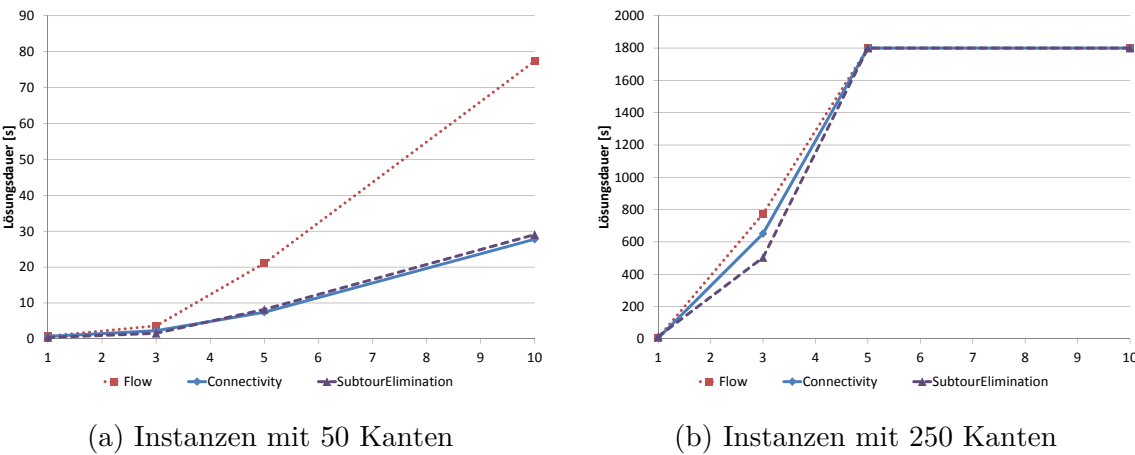
Periode ausreicht, sämtliche Leitungen, die erschlossen werden sollen, in der ersten Periode zu bauen. In diesem Fall ist die Komplexität des mehrperiodigen Modells kaum höher als bei dem einperiodigen Modell und die Lösungszeiten unterscheiden sich nur geringfügig. Für eine sinnvolle Ausbauplanung muss daher das Budget der ersten Perioden angemessen eingeschränkt werden, da es – bei unbeschränktem Budget – immer<sup>41</sup> optimal ist, eine Leitung in der ersten Periode zu errichten, um über einen möglichst langen Zeitraum Erträge zu generieren.

Zur Bestimmung belastbarer Benchmark-Ergebnisse wurde das Budget daher so gewählt, dass bei den Instanzen mit drei und fünf Perioden in einer Optimierungsperiode maximal 15% der Leitungen gebaut werden können, bei den Instanzen mit zehn Perioden nur 10%. Der gesamte Betrachtungszeitraum beträgt 30 Jahre, wobei die letzte Periode 20 Jahre dauert und die ersten 10 Jahre gleichmäßig auf die vorherigen Perioden aufgeteilt wurden<sup>42</sup>. In der letzten Periode werden oftmals keine Leitungen mehr errichtet, sondern nur noch Erlöse generiert. Zusätzlich wurde der Wärmebedarf gegenüber den einperiodigen Modellinstanzen leicht angehoben, da andernfalls ein Großteil der Leitungen keinen Gewinn mehr aufweist, wenn diese erst in der zweiten oder dritten Bauperiode errichtet werden. In diesem Fall wäre es optimal, keine Leitungen zu bauen, da der Gewinn dieser wenigen Leitungen die Kosten für die Errichtung des BHKW nicht ausgleicht. Ein zu geringer mittlerer Gewinn (bzw. eine zu hohe Anzahl von Kanten, die nur bei Bau in der ersten Periode Gewinne generieren) ist damit ebenfalls ein sehr einfach zu lösender Fall, der in der Regel innerhalb weniger Sekunden optimal gelöst wird. Aufgrund der generell längeren Lösungsdauern wurde bei den mehrperiodigen Modellen ein LP-Gap von 3 % zugelassen, da dieses in der Praxis einer ausreichenden Genauigkeit entspricht. Die gefundenen Optima der drei Modellierungsansätze können daher leicht voneinander abweichen.

Abbildung 8.11 stellt die Lösungsdauer in Abhängigkeit der Anzahl der Ausbauperioden dar. Aus der Grafik ist ersichtlich, dass für die kleinsten Netzmodelle mit 50 Kanten auch Instanzen mit zehn Perioden problemlos gelöst werden können. Aus den vier Datenpunkten je Modellierungsansatz (1, 3, 5, 10 Perioden) ist ein monotoner Anstieg der Lösungsdauer mit der Anzahl der Ausbauperioden erkennbar. Am stärksten ausgeprägt ist die Zunahme der Laufzeit bei der Flussformulierung, die für die Modellinstanzen bei

<sup>41</sup> Abhängig von den Annahmen bezüglich der Inflation sowie der Entwicklung des Wärmebedarfs und der Energiekosten kann es in Einzelfällen auch bei unbeschränktem Budget optimal sein, eine Leitung später zu bauen.

<sup>42</sup> Sofern die 10 Jahre nicht gleichmäßig aufgeteilt werden konnten, wurden der vorletzten Periode die verbleibenden Jahre zugewiesen.



**Abbildung 8.11** Mittlere Lösungsdauer in Abhängigkeit der Anzahl der Ausbauperioden für die generierten Netze (Lösungsdauer bei 1800 Sekunden gedeckelt)

zehn Perioden im Mittel ca. 80 Sekunden benötigt. Die beiden Branch-and-Cut Verfahren schneiden hier deutlich besser ab und weisen einen wesentlich flacheren Anstieg der Lösungsdauer auf. Bei den Modellinstanzen mit zehn Perioden benötigen die Branch-and-Cut Algorithmen weniger als die Hälfte der Berechnungsdauer der Flussformulierung. Obwohl die absoluten Lösungsdauern für die kleinen Modellinstanzen mit 50 Kanten auch bei mehreren Perioden im Bereich weniger Sekunden liegen, zeigt der relative Anstieg der Laufzeit (s. Tabelle 8.4) im Vergleich zu dem einperiodigen Modell, die deutliche Zunahme der Komplexität. Bei fünf Perioden erhöht sich die Berechnungsdauer im Mittel bereits um das 6- (B&C Connectivity) bis 20-fache (Flussformulierung) des Mittelwerts der einperiodigen Instanzen, bei zehn Perioden um das 27- (B&C Connectivity) bis 76-fache (Flussformulierung). Die Bezugsgröße (Lösungsdauer des einperiodigen Modells) wurde in dieser Betrachtung auf eine Sekunde erhöht (Ursprungswert  $< 1$  Sekunde), um den Effekt durch Messungenauigkeiten nicht zu überschätzen.

Ausbauperioden	B&C Connectivity	Flussformulierung	B&C Subtour-Elimination
3	+129%	+263%	+55%
5	+643%	+2007%	+721%
10	+2677%	+7635%	+2805%

**Tabelle 8.4** Relative Veränderung der mittleren Lösungsdauer der mehrperiodigen Instanzen mit 50 Kanten gegenüber dem einperiodigen Fall

Bereits für die Instanzen mit 250 Kanten führt die mehrperiodige Optimierung zu nicht mehr lösbaren Modellen. Innerhalb der vorgegebenen 1800 Sekunden können nur noch 75% der dreiperiodigen Modellinstanzen optimal gelöst werden. Für die Instanzen mit fünf und zehn Ausbauperioden wird in keinem Fall das Optimum gefunden. Dementsprechend

ist der Anstieg der Lösungsdauer zwischen den ein- und den dreiperiodigen Instanzen deutlich ausgeprägter als bei den Modellen mit 50 Kanten und liegt bei dem 35- (B&C Subtour-Elimination) bis 155-fachen (B&C Connectivity).

Aufgrund der bereits schwachen Ergebnisse bei den Modellinstanzen mit 250 Kanten wurden keine weiteren Berechnungen für die größeren Netze mit 500 - 2500 Kanten durchgeführt, da diese bereits für den einperiodigen Fall nur teilweise gelöst werden konnten. Ein Lösungsansatz für die mehrperiodige Optimierung großer Modellinstanzen wird in Abschnitt 8.5.1 entwickelt.

#### 8.4.4 Reale Netze

Wie bereits dargestellt, hängt die Lösbarkeit einer Modellinstanz nur teilweise von der Modellgröße ab. Als weitere Faktoren konnten der Anteil von Kanten mit einem positiven Gewicht sowie das verfügbare Budget für den Netzausbau identifiziert werden. Aufgrund dieser hohen Abhängigkeit der Lösungsperformance von den konkreten Modelldaten soll anhand realer Netzstrukturen, die auf der Trassierung bestehender Gasnetze basieren, mit typischen Kosten-, Erlös- und Budgetdaten geprüft werden, ob die Optimierungsverfahren in der Praxis nutzbar sind. Das Budget wurde jeweils auf ca. 50 % (gerundet) der Summe der Investitionskosten aller Kanten festgelegt. Bei den mehrperiodigen Modellen wurde das Budget gleichmäßig auf die jeweiligen Ausbauperioden verteilt.

Tabelle 8.5 führt die Ergebnisse der Berechnungen für den einperiodigen Fall auf.

Netz	B&C Connectivity	Netzwerkfluss	B&C Subtour-Elimination
A	3,8	8,0	82,5
B	27,5	29,6	1024,2
C	-	55,3	-

**Tabelle 8.5** Lösungsdauer der realen Netzmodelle (einperiodig)

##### 8.4.4.1 Flussformulierung

Bei den realen Netzmodellen liefert die Modellformulierung mit Netzwerkflüssen die stabilsten Ergebnisse. Die optimale Lösung wird bei allen drei Modellinstanzen innerhalb einer Minute gefunden, wobei die Optimierung der größten Modellinstanz (Netz C) erwartungsgemäß am längsten dauert. Die Laufzeiten der Flussformulierung ändern sich auch bei Variation einzelner Parameter (Standorte und Investitionskosten möglicher Heizkraftwerke) nur geringfügig. Einzig eine deutliche Einschränkung des verfügbaren Budgets führt in Einzelfällen zu längeren Lösungsdauern (s. Abschnitt 8.4.4.5).

#### 8.4.4.2 B&C Subtour-Elimination

Bei den realen Netzen schneidet der B&C Subtour-Elimination deutlich schlechter ab, als die Netzwerkflussformulierung. Für das größte Netz C terminiert der Algorithmus nicht innerhalb der maximalen Lösungsdauer, d.h. der Lösungsgraph ist selbst nach 32 Iterationen mit insgesamt 666 identifizierten Zyklen nicht zusammenhängend. Da die Berechnungsdauer des ganzzahligen Optimums durch das Hinzufügen weiterer Cuts in jeder Iteration kontinuierlich ansteigt (von 2,6 Sekunden in der ersten Iteration auf ca. 600 Sekunden in der letzten Iteration) kann mit zunehmender Zyklenanzahl innerhalb der zulässigen Zeitspanne nur eine begrenzte Anzahl von Iterationen berechnet werden.

Bei der Analyse der Ergebnisse zeigt sich, dass die langsame Konvergenz des B&C Subtour-Elimination vorwiegend auf die hohen Fixkosten bei dem Bau eines BHKW in Kombination mit dem geringen Anteil von Kanten mit positivem Gewicht (18 %) zurückzuführen ist. Im Gegensatz zu den generierten Netzmodellen und den Benchmark-Instanzen wurden bei den realen Netzmodellen realistische Fixkosten von 2 Mio. € für den Bau eines BHKW angesetzt. Um die Investitionskosten für den Bau eines zweiten BHKW oder die Anbindung an ein weit entferntes BHKW zu umgehen bildet der Algorithmus sukzessive immer wieder neue Zyklen. Diese unterscheiden sich oftmals nur minimal von einem bereits aufgetretenen und damit nicht mehr zulässigen Zyklus. Das generell schlechtere Konvergenzverhalten bei Netzmodellen mit relativ wenigen gewinnbringenden Kanten wurde bereits in Abschnitt 8.4.3.2 dargestellt.

#### 8.4.4.3 B&C Connectivity

Der B&C Connectivity löst die beiden kleineren Instanzen A und B geringfügig schneller als die Netzwerkflussformulierung. Die größte Modellinstanz kann der Algorithmus jedoch genau wie der B&C Subtour-Elimination nicht innerhalb der zulässigen Berechnungszeit optimal lösen. Auffällig hierbei ist, dass der Algorithmus sehr viele (mehrere Tausend) Schnitte erzeugt und weiterhin Knoten nicht angebunden werden. Durch verschiedene Strategien zur Generierung der Schnitte konnten keine deutlichen Verbesserungen erzielt werden. Weder die Anpassungen der Parameter zur Generierung der *Nested-* und *Orthogonal-Cuts* noch die Nutzung von *Minimum-Cardinality-Cuts* (s. Abschnitt 8.5.3) haben eine ausreichende Reduktion der Berechnungszeit ermöglicht.

Die Ursachen für das schlechte Konvergenzverhalten scheinen wie bei dem B&C Subtour-Elimination in der geringen Anzahl gewinnbringender Kanten und den hohen Fixkosten der Heizkraftwerke begründet zu liegen. In den Netzmodellen sind jeweils drei



potentielle BHKW-Standorte hinterlegt, wobei die Kosten für den Bau eines BHKW einheitlich mit 2 Mio. € angesetzt wurden. In der LP-Relaxierung geht die  $y_{i,j,t}$ -Variable der Kanten zwischen dem Wurzelknoten und den BHKW-Knoten daher mit einem sehr hohen negativen Koeffizienten in die Zielfunktion ein. Der Algorithmus versucht deshalb stets, diese Variablen zu minimieren.

Als Vergleichsrechnung wurden die Kosten für den Bau der BHKW in einer Variante auf den Wert null gesetzt, in einer zweiten Variante auf 50000 €. Bei Kosten von 0 € löst das Modell innerhalb von 101 Sekunden (12 Iterationen). Bei der Variante mit geringen Kosten (50000 €) ist bereits ein deutlicher Anstieg der Lösungsdauer auf 814 Sekunden (23 Iterationen) zu beobachten. In den generierten Netzmodellen ist die Fixkostenproblematik nicht in dem gleichen Ausmaß aufgetreten, da hier deutlich geringere Fixkosten für den Bau eines BHKW angesetzt wurden. Hier zeigt sich, dass künstlich erzeugte Benchmark-Instanzen nicht zwingend ein guter Vergleichsmaßstab für die Lösbarkeit praktischer Probleminstanzen sein müssen und eine Verallgemeinerung der Ergebnisse von Benchmark-Modellen zu falschen Schlüssen führen kann.

Die Fixkosten scheinen jedoch nicht das einzige Problem zu sein, da auch die Anzahl der generierten Cuts sehr viel höher als in den Benchmark-Instanzen und den generierten Netzmodellen ist. Der Grund für die hohe Anzahl generierter Cuts konnte nicht festgestellt werden, da die Struktur der Modellinstanzen vergleichbar mit den generierten Netzmodellen ist. Beides sind planare Graphen und der mittlere Knotengrad ist ebenfalls vergleichbar. Unter Umständen spielen numerische Probleme bei der Berechnung der maximalen Flüsse eine Rolle, wobei die hierfür relevante Toleranz ebenfalls ohne Erfolg variiert wurde.

#### 8.4.4.4 Performance in Abhängigkeit der Anzahl der Perioden

Die Mehrperiodigkeit bedeutet auch bei den realen Netzmodellen eine deutliche Erhöhung der Komplexität. Bereits bei dem kleinsten Netz A findet der B&C Subtour-Elimination für die Modellinstanz mit drei Perioden nicht mehr das Optimum innerhalb der maximalen Lösungsdauer. Die Flussformulierung sowie der B&C Connectivity finden zwar die optimale Lösung, die Berechnungszeit liegt mit 675 bzw. 1593 bzw. Sekunden (s. Tabelle 8.6) jedoch etwa um den Faktor 230 bzw. 1900 über der Lösungsdauer der einperiodigen Instanz. Die Modellinstanz mit fünf Perioden kann von keinem der drei Verfahren optimal gelöst werden. Auch eine Verdoppelung der zulässigen Berechnungsdauer auf 3600 Sekunden ermöglicht keine Bestimmung des Optimums, wobei das Netzwerkflussmodell in diesem Fall zumindest eine ganzzahlige Lösung mit einem LP-Gap von 10% findet.

Ausbauperioden	B&C Connectivity	Netzwerkfluss	B&C Subtour-Elimination
1	8,3	2,9	190,5
3	1592,6	675,5	–
5	–	–	–

**Tabelle 8.6** Lösungsdauer in Abhängigkeit der Anzahl der Ausbauperioden für Netzmodell A

Die mehrperiodigen Modellinstanzen der beiden größeren Netzmodelle B und C werden von keinem Modellierungsansatz optimal gelöst. Bereits für die Instanz mit drei Perioden wird auch bei einer verlängerten zulässigen Optimierungszeit von 3600 Sekunden keine optimale Lösung gefunden.

Die Ergebnisse der realen Netzmodelle bestätigen damit die Resultate aus den generierten Netzmodellen, dass die Mehrperiodigkeit nur bei sehr kleinen Modellinstanzen zu akzeptablen Berechnungszeiten führt. Der in Abschnitt 8.5.1 beschriebene zweistufige Optimierungsansatz bietet eine Lösung dieses Problems.

#### 8.4.4.5 Performance in Abhängigkeit des Budgets

Bei den Testrechnungen ist aufgefallen, dass die Berechnungsdauern teilweise stark schwanken, wenn das verfügbare Budget angepasst wird. Das Budget für den Netzausbau scheint daher ein weiterer Faktor zu sein, der die Berechnungsdauer beeinflusst. Tendenziell ist bei einem unbeschränkten Budget (bzw. einem Budget, welches die Erschließung aller Trassen ermöglicht) eine kürzere Berechnungszeit zu erwarten, da die  $y_{i,j,t}$  Variablen eines Großteils der Kanten mit einem positiven Gewicht bereits in der LP-Relaxierung den Wert eins annehmen und bei diesen Kanten die Ganzzahligkeit nicht erst durch den Branch-and-Bound Algorithmus hergestellt werden muss. Bei einem begrenzten Budget hingegen ist es nicht mehr möglich, sämtliche Leitungen mit einem positiven Beitrag zu der Zielfunktion in die Lösung aufzunehmen. Daher werden Leitungen mit einem geringen positiven Koeffizienten fraktionale Werte in der LP-Relaxierung aufweisen.

Budget	B&C Connectivity	Netzwerkfluss	B&C Subtour-Elimination	Mittelwert
25%	21	17	1024	<b>354</b>
50%	5	17	804	<b>276</b>
100%	5	9	106	<b>40</b>
<b>Mittelwert</b>	<b>10</b>	<b>14</b>	<b>645</b>	<b>223</b>

**Tabelle 8.7** Lösungsdauer der Modellnetze A und B in Abhängigkeit des verfügbaren Budgets

Für die beiden kleineren Netze A und B wurden zur Überprüfung dieser Hypothese drei Varianten berechnet. Jeweils mit einem Budget, welches für die Erschließung von 25 %, 50 % sowie 100 % (= unbeschränkt) der Trassen ausreichend ist. Die Ergebnisse der Optimierungsrechnungen mit den unterschiedlichen Budgets sind in Tabelle 8.7 aufgeführt, wobei jeweils der Mittelwert über beide Modelle gebildet wurde.

Für die beiden untersuchten Modellinstanzen stützen die Ergebnisse in ihrer Tendenz die Annahme, dass ein unbeschränktes Budget die Lösungsdauer verkürzt. Für den B&C Subtour-Elimination zeigt sich der stärkste Effekt, was plausibel ist, da hier — im Gegensatz zu dem B&C Connectivity — in jeder Iteration der Branch-and-Bound Algorithmus die Ganzzahligkeit herstellen muss. Bei der Flussformulierung ist der Effekt erwartungsgemäß schwächer ausgeprägt, da hier auch bei unbeschränktem Budget bereits viele Kanten in der LP-Relaxierung fraktionelle Werte aufweisen, wenn diese nur über Kanten mit negativem Gewicht zu erreichen sind. Aufgrund der geringen Anzahl von Beobachtungen und des teilweise schwach ausgeprägten Effekts können die Ergebnisse jedoch nur als Tendenz gewertet werden.

## 8.5 Verbesserungsansätze

Für das mehrperiodige Modell wurden einzelne Restriktionen mit dem Ziel einer Verschärfung der LP-Relaxierung hinzugefügt (s. Kapitel 7), welche jedoch nur einen marginalen Einfluss auf die Laufzeit haben. Daher wird nachfolgend ein praktischer Ansatz zur Optimierung mehrperiodiger Modellinstanzen vorgestellt, welcher auch große Modellinstanzen stabil lösen kann (sofern diese für den einperiodigen Fall lösbar sind).

Anschließend wird auf Verbesserungsansätze der Cut-Generierung eingegangen, welche im Rahmen der Entwicklung umgesetzt wurden. Eine deutliche Verbesserung der Lösungsperformance durch grundlegende Umformulierungen der Modelle konnte nicht erreicht werden, da – wie bereits in Kapitel 6 dargelegt wurde – MIP-Formulierungen von Steiner-Graph Problemen bereits im Rahmen einer Vielzahl von Arbeiten intensiv untersucht und verbessert worden sind.

### 8.5.1 Mehrperiodigkeit

Die hohe Komplexität bei der Berücksichtigung mehrerer Ausbauperioden lässt sich durch zusätzliche Restriktionen für eine Verschärfung der LP-Relaxierung nur unzureichend

reduzieren. Insbesondere für größere Netze mit 500 oder mehr Kanten, kann nur in wenigen Fällen das Optimum in einer akzeptablen Dauer gefunden werden. In der Praxis wird der Netzausbau – je nach Netzgröße und Umfang der Netzerweiterungen – jedoch oftmals auf einen Zeitraum von etwa zehn Jahren gestreckt, weshalb mindestens drei bis fünf Ausbauperioden berücksichtigt werden sollten. Um stabile und praxistaugliche Ergebnisse zu erzielen, wurde daher das Optimierungsverfahren zusätzlich als zweistufiges Modell umgesetzt.

### Umsetzung

In der ersten Stufe wird nur das einperiodige Problem gelöst. Dieses bestimmt die Leitungen, welche im Endausbau des Netzes enthalten sind. Ausgehend von dem Lösungsgraphen der ersten Stufe wird in der zweiten Stufe nur noch die Reihenfolge der Ausbaumaßnahmen bestimmt. D.h. die Entscheidung, ob eine Leitung gebaut werden soll, ist bereits getroffen.

Dem Modell wird eine weitere Menge  $A^{OPT}$  hinzugefügt, die sämtliche Leitungen enthält, welche in der ersten Stufe Teil der optimalen Lösung sind. Hierbei gibt  $y_{i,j,0}^*$  in Gleichung (8.1) den optimalen Wert der Variablen aus der ersten (einperiodigen) Optimierungsstufe an.

$$A^{OPT} = \{(i, j) \in A \mid y_{i,j,0}^* = 1\} \quad (8.1)$$

Für das Modell der zweiten Stufe gelten dann zusätzlich nachfolgende Nebenbedingungen:

$$\sum_{t \in T} y_{i,j,t} + y_{j,i,t} = 1 \quad \forall (i, j) \in A^{OPT} \quad (8.2)$$

$$\sum_{t \in T} y_{i,j,t} + y_{j,i,t} = 0 \quad \forall (i, j) \in A \setminus A^{OPT} \quad (8.3)$$

Hierbei ist zu beachten, dass in den Nebenbedingungen jeweils beide gerichteten Pfeile einer Kante enthalten sein müssen, da die Richtung einer Kante in dem mehrperiodigen Modell nicht mit der Richtung einer Kante aus dem einperiodigen Modell übereinstimmen muss. Dies ist zum Beispiel der Fall, wenn eine Kante von zwei Seiten angebunden ist (also Teil eines Kreises des ungerichteten Graphen ist). In dem einperiodigen Modell ist die Richtung der Kante nicht relevant, da alle Kanten in einem Schritt angebunden werden. Bei dem mehrperiodigen Modell kann es jedoch optimal sein, die Kante in einer Periode erst von einer bestimmten Seite mit dem Graphen zu verbinden und den Kreis erst in einer späteren Periode zu schließen.

Ein weiterer Punkt, der bei dem zweistufigen Modell beachtet werden muss, ist die Höhe des zulässigen Budgets in den jeweiligen Perioden. Wird in der ersten Stufe das Gesamtbudget als Summe der einzelnen Periodenbudgets gebildet, ist es möglich, dass in der zweiten Stufe keine zulässige Lösung gefunden wird. Dies ist der Fall, wenn in einzelnen Perioden das Budget nicht voll ausgeschöpft werden kann, das Gesamtbudget in der ersten Optimierungsstufe jedoch weitgehend verbraucht wurde. Dieses Problem kann gelöst werden, indem das Budget der letzten Periode gemäß Gleichung (8.4) nicht auf das Periodenbudget, sondern das Gesamtbudget abzüglich der bereits erfolgten Investitionen beschränkt wird.

$$\sum_{(i,j) \in A} y_{i,j,\max(T)} \cdot c_{i,j,\max(T)}^{PIPE} \leq \sum_{t \in T} b_t - \sum_{(i,j) \in A} \sum_{\tau < \max(T)} y_{i,j,\tau} \cdot c_{i,j,\tau}^{PIPE} \quad (8.4)$$

Alternativ kann durch *Soft-Constraints*<sup>43</sup> eine geringe Budgetüberschreitung in den einzelnen Perioden ermöglicht werden. Eine andere Variante besteht in der Reduktion des Gesamtbudgets in der ersten Stufe auf z.B. 80 % der Summe der Periodenbudgets, wodurch die Wahrscheinlichkeit verringert wird, dass es zu unzulässigen Lösungen in der zweiten Stufe kommt.

Neben den Budgetvorgaben ist bei dem zweistufigen Modell eine Anpassung der Kantengewichte in der ersten Optimierungsstufe notwendig. Das Kantengewicht gibt für jede Periode den erwarteten Gewinn (oder Verlust) an, der entsteht, wenn die Kante in der jeweiligen Periode gebaut wird. In der Regel ist der Gewinn am größten, wenn eine Leitung in der ersten Periode gebaut wird, da diese dann über den gesamten Betrachtungszeitraum Erlöse generiert. Werden in der ersten Optimierungsstufe einfach die Kantengewichte der ersten Periode verwendet, überschätzt das Modell den Gewinn, da ein Teil der Kanten in der zweiten Stufe erst in späteren Perioden gebaut wird und entsprechend niedrigere Gewinne aufweist. Eine exakte Lösung für diese Problematik existiert nicht, da zum Zeitpunkt der ersten Stufe nicht bekannt ist, wann eine Leitung errichtet wird. Diese Ungenauigkeit ist der größte Nachteil des zweistufigen Ansatzes. Eine Abschwächung dieser Problematik kann durch die Verwendung angepasster Kantengewichte erfolgen, z.B. indem in der ersten Stufe angenommen wird, dass eine Leitung zur Mitte des Betrachtungszeitraumes gebaut wird.

<sup>43</sup> Unter *Soft-Constraints* (weiche Restriktionen) werden Restriktionen verstanden, die nicht zwingend eingehalten werden müssen, deren Überschreitung jedoch mit hohen Strafkosten in die Zielfunktion eingeht.

Eine weitere Einschränkung bei Nutzung des zweistufigen Ansatzes zeigt sich bei der Berücksichtigung des Gasnetzrückbaus. Dieser kann in der ersten Stufe nicht mehr zeitlich gestaffelt erfolgen, wodurch Gasleitungen, die in der ersten Periode ersetzt werden müssen, genauso behandelt werden, wie Leitungen, die in der letzten Periode zu erneuern wären. Allerdings hat sich im Rahmen der Fallstudie (s. Kapitel 9) gezeigt, dass der Gasnetzrückbau bei der Auswahl der zu erschließenden Trassen nur eine untergeordnete Rolle spielt, weswegen diese Unschärfe der ersten Stufe in den meisten Fällen vertretbar sein sollte.

### Numerische Ergebnisse

Die Lösungsperformance des zweistufigen Modells wird fast ausschließlich durch die Lösbarkeit der ersten Stufe bestimmt. In der zweiten Stufe werden in der Regel nur wenige Sekunden für die Lösung benötigt, bei größeren Modellinstanzen wenige Minuten. Tabelle 8.8 zeigt exemplarisch anhand der realen Netzmodelle A und B, wie sich die Lösungsdauer der zweiten Stufe zu der ersten Stufe verhält.

Ausbauperioden	B&C Connectivity	Netzwerkfluss	B&C Subtour-Elimination
Stufe 1	16	19	553
Stufe 2: 3 Perioden	1	4	5
Stufe 2: 10 Perioden	44	191	197

**Tabelle 8.8** Lösungsdauer bei der zweistufigen mehrperiodigen Optimierung (Mittelwert für die Netzmodelle A und B)

Auch bei den anderen Modellinstanzen hat sich gezeigt, dass die Lösbarkeit der zweiten Stufe sehr stabil ist und im Gegensatz zu der Lösung der ersten Stufe kaum unlösbare Instanzen existieren (bei 3 - 5 Ausbauperioden). Lediglich bei einer sehr hohen Anzahl von Perioden wird auch die zweite Stufe deutlich schwieriger zu lösen.

### 8.5.2 Zyklengenerierung B&C Subtour-Elimination

Aufgrund der vergleichsweise schwachen Performance des B&C Subtour-Elimination wurde geprüft, ob durch eine Vorabbestimmung von Zyklenrestriktionen die Laufzeit verbessert werden kann. Obwohl aufgrund der exponentiellen Anzahl möglicher Zyklen in einem Graphen nicht alle Zyklen vorab identifiziert und in das Modell aufgenommen werden können, ist es möglich, zumindest Zyklen bis zu einer bestimmten Länge vorab zu generieren und bereits in das Start-LP als Nebenbedingungen aufzunehmen. Die Bestimmung aller Zyklen

bis zu einer Länge von vier liegt selbst für große (planare) Graphen mit einigen Tausend Kanten im Sekundenbereich.

Durch die Einbeziehung dieser Zyklen als Nebenbedingungen verlangsamt sich die Lösungsdauer der einzelnen Iterationen, es ist jedoch zu erwarten, dass weniger Iterationen benötigt werden. Anhand der generierten Modellnetze wurde für die 16 Instanzen, welche der B&C Subtour-Elimination innerhalb von 1800 Sekunden optimal lösen konnte, geprüft, ob die Einbeziehung aller Zyklen bis zur Länge vier den Gesamtlösungsprozess beschleunigt oder verlangsamt.

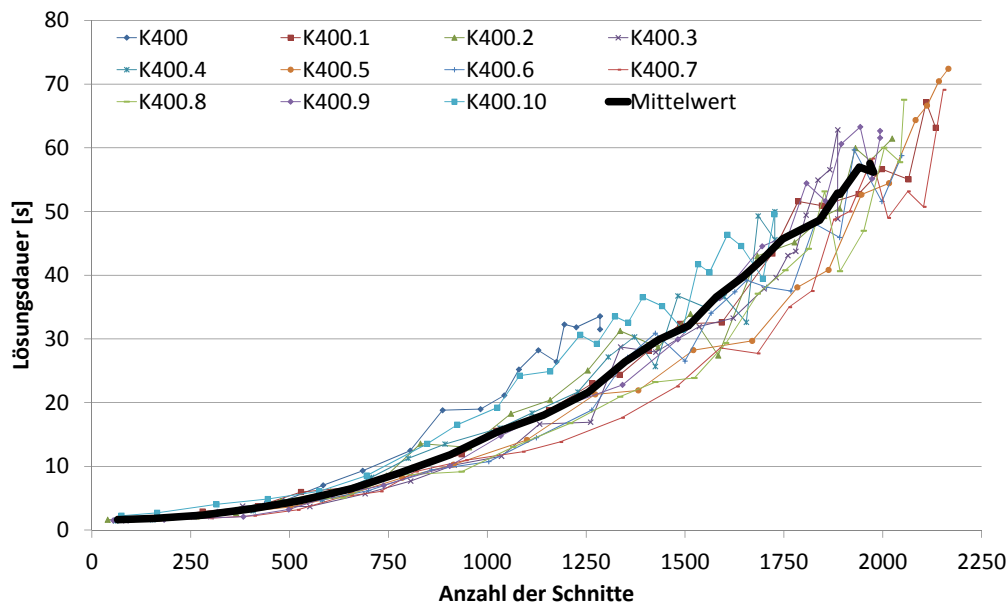
Hinsichtlich der Anzahl der Iterationen fällt das Ergebnis wie erwartet aus. Im Mittel benötigt der Algorithmus bei Einbeziehung aller Zyklen mit bis zu vier Kanten in dem Ausgangs-IP ein Drittel weniger Iterationen, als bei einer Initialisierung des Modells ohne Zyklenrestriktionen. Die mittlere Gesamtlösungsdauer kann von den eingesparten Iterationen jedoch nicht profitieren, sondern liegt um 10% höher.

### 8.5.3 Cut-Generierung B&C Connectivity

Die Umsetzung der Cut-Generierung ist ausschlaggebend für die Performance des B&C Connectivity. Hierbei ist zum einen die Anzahl der gefundenen Schnitte von Bedeutung, zum anderen sollten die jeweiligen Schnitte möglichst geringe Überschneidungen aufweisen.

Hinsichtlich der Anzahl der generierten Schnitte ist auf eine sinnvolle Balance zwischen der Anzahl notwendiger Iterationen und der Lösungsdauer eines einzelnen LP zu achten. Je mehr Schnitte innerhalb einer Iteration hinzugefügt werden, desto weniger Iterationen werden benötigt, gleichzeitig steigt die Lösungsdauer der einzelnen Iterationen. Abbildung 8.12 zeigt den Effekt der zunehmenden Berechnungsdauer des LP exemplarisch anhand der Benchmark-Instanzen der K400-Serie, welche vergleichsweise schwer zu lösen sind. Aus der Grafik ist ersichtlich, dass für die untersuchten Instanzen im Mittel ein quadratischer Anstieg der Lösungsdauer beobachtet werden kann. Bei den anderen Modellinstanzen kann ein vergleichbares Verhalten beobachtet werden. Für die Benchmark-Rechnungen wurden maximal 10 Schnitte je Knoten und Iteration zugelassen, wobei dies bei großen Modellen bereits zu sehr vielen Schnitten führen kann. Es konnte jedoch keine optimale Anzahl von Schnitten bestimmt werden, die zu den besten Ergebnissen führt.

Für die Generierung möglichst unterschiedlicher Cuts wurden die Konzepte der *Orthogonal-Cuts*, *Nested-Cuts* sowie *Back-Cuts* umgesetzt (s. Abschnitt 8.1.3). Bei der Bildung



**Abbildung 8.12** Anstieg der Lösungsdauer des LP in Abhängigkeit von der Anzahl der Cuts (für die Modellinstanzen der Benchmark-Serie K400).

von *Orthogonal-* und *Nested-Cuts* gibt es verschiedene mögliche Vorgehensweisen. So können alle Kanten eines gefundenen Cuts auf die Kapazität eins gesetzt werden und sind dann in der jeweiligen Iteration nicht mehr Teil eines weiteren Cuts. Diese Vorgehensweise ist in Abbildung 8.1 dargestellt. Um zusätzliche Schnitte zu identifizieren, ist es jedoch ausreichend nur eine Kante zu modifizieren. Im Rahmen der Modellentwicklung hat sich gezeigt, dass es zu den besten Ergebnissen führt, wenn jeweils ein geringer Prozentsatz (25% bei den Benchmarkrechnungen) der Kanten eines gefundenen Cuts zufällig ausgewählt und mit der Kapazität eins versehen wird. Dies gilt gleichermaßen für die *Orthogonal-* und die *Nested-Cuts*.

Darüber hinaus ist die Nutzung von *Back-Cuts*, welche ausgehend von den Zielknoten gebildet werden, essentiell für die Funktionsweise des B&C Connectivity. Anhand der generierten Netzmodelle wurde untersucht, wie sich die Nutzung von *Back-Cuts* auf die Lösungsdauer des B&C Connectivity auswirkt. Im Mittel reduziert sich durch das Hinzufügen der *Back-Cuts* die Berechnungszeit um 29%. Die mittlere Anzahl der Iterationen reduziert sich sogar um zwei Drittel. Diese Ergebnisse decken sich mit den Arbeiten von Ljubić sowie Koch und Martin (vgl. [Ljubic, 2004] S. 136, [Koch und Martin, 1998] S. 213), welche ebenfalls eine deutliche Verbesserung der Lösungsperformance durch die Generierung von *Back-Cuts* erzielen konnten.



### Minimum-Cardinality-Cuts

Eine weitere Möglichkeit zur Verbesserung der generierten Schnitte besteht in der Identifikation sogenannter *Minimum-Cardinality-Cuts* (vgl. [Ljubic, 2004] S. 136f sowie [Koch und Martin, 1998]<sup>44</sup> S. 213). Diese werden gebildet, indem vor der *Maximum-Flow* Berechnung die Kapazität aller Kanten, deren  $y_{i,j,t}$  in der LP-Relaxierung einen Wert von null aufweist, auf einen sehr geringen Wert (z.B.  $10^{-5}$ ) gesetzt wird. Hierdurch werden nicht beliebige trennende Schnitte zwischen dem Wurzelknoten und einem Zielknoten gefunden, sondern immer die trennenden Schnitte mit der geringsten Kantenanzahl. Während Koch und Martin von guten Ergebnissen bei der Nutzung von *Minimum-Cardinality-Cuts* berichten, zeigen die Resultate von Ljubić je nach Modellinstanz einen positiven oder negativen Effekt. Das Problem bei der Bestimmung der *Minimum-Cardinality-Cuts* ist die zunehmende Laufzeit des Max-Flow-Algorithmus, da alle Kanten eine positive Kapazität aufweisen und der Algorithmus daher später terminiert<sup>45</sup>.

Die Nutzung von *Minimum-Cardinality-Cuts* wurde ebenfalls umgesetzt und anhand der generierten Netzmodelle getestet. Obwohl nur die reine Lösungsdauer des Solvers betrachtet wurde, der Effekt der längeren Laufzeit des Max-Flow-Algorithmus sich also nicht auswirkt, konnte im Mittel keine signifikante Verbesserung der Lösungsdauer erzielt werden.

## 8.6 Bewertung

Insgesamt zeigt sich ein gemischtes Bild bei der Bewertung der verschiedenen Lösungsansätze, da diese bei den unterschiedlichen Modellinstanzen keine einheitlichen Ergebnisse erzielen.

Bei den Benchmark-Instanzen scheint die Formulierung als CSP zu verhindern, dass ähnlich gute Resultate wie in den Arbeiten von Ljubić sowie Lucena et. al erreicht werden können. Die deutlich besseren Ergebnisse der Modellformulierung als PCST in Abschnitt 8.4.2 unterstützen diese Einschätzung. Im Vergleich untereinander schneiden sowohl die Netzwerkflussformulierung als auch der B&C Connectivity deutlich besser als der B&C Subtour-Elimination ab, welcher weniger als ein Drittel der Modellinstanzen optimal lösen kann.

Bei den generierten Netzmodellen zeigt sich ein ähnliches Bild, wobei der B&C Connectivity die geringste mittlere Laufzeit aufweist und am meisten Instanzen optimal lösen

<sup>44</sup> Bei Koch und Martin wird der Begriff *Creep-Flow-Cuts* verwendet

<sup>45</sup> Die längere Berechnungsdauer des Max-Flow Algorithmus ist auf die höhere Anzahl von Kanten mit positiver Kapazität zurückzuführen, wodurch im Verlauf des Algorithmus länger augmentierende Pfade gefunden werden.

kann. Die Netzwerkflussformulierung und der B&C Subtour-Elimination liegen in etwa gleich auf. Die Lösung mehrperiodiger Modellinstanzen bereitet allen Verfahren große Probleme und ist nur für die kleinsten Modellinstanzen mit 50 Kanten zuverlässig möglich.

Bei den realen Netzmodellen weist die Netzwerkflussformulierung die höchste Erfolgsquote auf und kann als einzige die größte Modellinstanz mit 2800 Kanten zuverlässig lösen. Die größten Probleme mit den realen Modellinstanzen hat der B&C Subtour-Elimination, der aufgrund hoher Fixkosten für den Bau von BHKW sehr viele Iterationen benötigt, bis sämtliche Zyklen ausgeschlossen werden können.

Abschließend ist festzustellen, dass kein Modellierungsansatz generell überlegen ist und je nach Modellklasse und -instanz Vor- oder Nachteile gegenüber den anderen Verfahren aufweist. Die theoretischen Nachteile der Netzwerkflussformulierung hinsichtlich ihrer schwachen LP-Relaxierung führen nicht zwingend zu längeren Lösungsdauern, da die Branch-and-Cut-Ansätze teilweise sehr viele Iterationen benötigen. Aus praktischer Sicht ist daher die Netzwerkflussformulierung zu bevorzugen, da diese als einzige eine ausreichend genaue Berücksichtigung technischer Randbedingungen und kapazitätsabhängiger Kosten sowie eine exakte Bestimmung der Erzeugungskosten ermöglicht. Darüber hinaus besteht die Komplexität bei der Lösung der Flussformulierung hauptsächlich in der Bestimmung des ganzzahligen Optimums, während die Branch-and-Cut Ansätze stark von der konkreten Implementierung der Cut-Generierung abhängen. Daher kann die Flussformulierung vermutlich auch ohne Anpassungen am stärksten von Fortschritten bei den Lösungsalgorithmen für MIP-Modelle (MIP-Preprocessing, Branching-Heuristiken, etc.) der Solver profitieren, wodurch sich zukünftig die Lösungsperformance weiter verbessern sollte.

## 9 Fallstudie

Die Anwendung des Optimierungssystems auf einen realen Anwendungsfall soll die Praxis-tauglichkeit des Verfahrens prüfen und die Effekte unterschiedlicher Absatz- und Preissze-narien aufzeigen.

Die Fallstudie basiert auf einer Untersuchung, welche in Zusammenarbeit mit den Stadtwerken einer deutschen Großstadt durchgeführt wurde. Aufgrund von Datenschutzbestim-mungen sind die Ergebnisse anonymisiert und die Eingangsdaten (Fernwärmetarif, Gas-marge, etc.) wurden für die Fallstudie leicht variiert. Die prinzipiellen Aussagen bleiben hiervon jedoch unberührt.

### 9.1 Ausgangssituation und Aufgabenstellung

Im Zuge der Erneuerung und des Ausbaus eines bestehenden zentralen Heizkraftwerks (GuD-Anlage) soll zukünftig ein weiterer Stadtteil einer deutschen Großstadt durch Fern-wärme erschlossen werden. Die Anbindung der Netzerweiterung an das bestehende Netz über eine neue Transportleitung wurde festgelegt und projektiert. Einzelne Gewerbekun-den mit einem hohen Wärmebedarf konnten bereits für den Umstieg auf eine Fernwärme-versorgung gewonnen werden. Zusätzlich zu den bisher gewonnen „Leuchtturmkunden“ wird angestrebt, zukünftig durch verstärkte Vertriebsaktivitäten auch in der Fläche wei-tere Kunden zu akquirieren. Hierzu ist eine Erweiterung des Netzes – ausgehend von der bereits geplanten Fernwärmeleitung – innerhalb des Stadtteils notwendig. Im Rahmen der Untersuchung soll bestimmt werden, welche weiteren Ausbaupotentiale bestehen, inwie-weit ein weiterer Ausbau der Fernwärme aus Sicht des Versorgungsunternehmens wirt-schaftlich ist und welche Konsequenzen ein forcierter Fernwärmeausbau auf das beste-hende Gasnetz hat. Im Hinblick auf das Gasnetz sind insbesondere mögliche Rückbaupo-tentiale zu identifizieren und die Auswirkungen auf die Erlössituation zu berücksichtigen.

### 9.2 Datengrundlagen

Die Untersuchung basiert auf den nachfolgend aufgeführten Datengrundlagen.

**Netz- und Umgebungsdaten****– Digitales Wärmekataster**

Das digitale Wärmekataster enthält auf Ebene von Baublöcken den Wärmebedarf gruppiert nach den Heizungstypen Gas, Strom-Nachtspeicher und Öl / sonstige. Der Wärmebedarf wurde für die Untersuchung proportional auf die Gebäude eines Baublocks aufgeteilt. Zusätzlich zu dem Wärmekataster lag die aktuelle Jahresverbrauchsabrechnung der Gaskunden vor, welche genauer als die Angaben des Wärmekatasters ist und bei gasversorgten Gebäuden daher vorrangig genutzt wurde.

**– Katasterdaten**

Die Katasterdaten enthalten die Verläufe der Straßen sowie die Gebäudegeometrien und die Adressdaten.

**– Trassenverlauf der Gasleitungen**

Die bestehenden Gasleitungen liegen mit ihrem Rohrwerkstoff und Rohrdurchmesser, dem Leitungsverlauf (Geometrie) sowie dem Baujahr vor. Es besteht eine Zuordnung der Gebäude zu den Gastrassen.

**– Geplante Erneuerungsmaßnahmen im Gasnetz**

Die zukünftig geplanten Erneuerungsmaßnahmen im Gasnetz aus einer risikoorientierten Erneuerungsplanung (s. Abschnitt 3.2.3) dienen der Identifikation von Rückbaupotentialen im Gasnetz.

**– Verlauf der projektierten Fernwärmetrasse**

Die bereits projektierte neue Fernwärmetrasse bildet den Ausgangspunkt der Netzerweiterung und ist die Anbindung an das Heizkraftwerk.

**Kosten- und Erlösdaten****– Verlegekosten Gas und Fernwärme**

Die dimensionsabhängigen Verlegekosten für Gas- und Fernwärmeleitungen werden zur Bestimmung des Investitionsbedarfs benötigt.

**– Marge Gasverkauf**

Die Marge des Gasverkaufs wird benötigt, um den Erlösrückgang durch die Verdrängung von Gaskunden durch Fernwärme zu ermitteln. Durch die Margenbetrachtung müssen keine separaten Bezugspreise berücksichtigt werden.

**– Marge Fernwärmeverkauf**

Da das bestehende Heizkraftwerk genutzt wird und keine Auswahl der Erzeugungstechnologie erfolgen muss, ist es ausreichend, die Erlöse und Erzeugungskosten der Fernwärme durch eine Marge zu berücksichtigen.

## 9.3 Untersuchungsgebiet

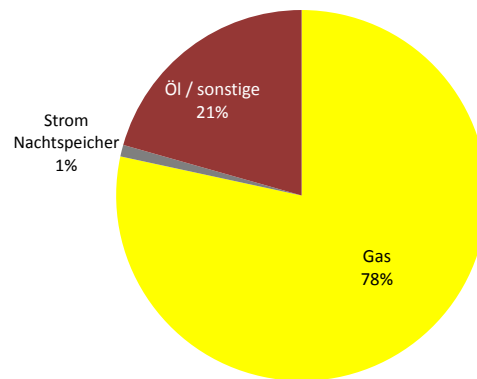
Das Untersuchungsgebiet umfasst einen Stadtbezirk mit einer Fläche von etwa 4 km<sup>2</sup> und ca. 18000 Einwohnern. In dem ausgewählten Bereich sind überwiegend Haushaltskunden anzutreffen. Gewerbekunden sind in peripheren Gewerbegebieten ebenfalls vorhanden. Der Umfang des Gebiets geht aus Abbildung 9.1 hervor.



**Abbildung 9.1** Lage des Untersuchungsgebietes

Die Wärmeversorgung in dem Untersuchungsgebiet wird durch Gasheizungen dominiert, welche mehr als drei Viertel des Raumwärmebedarfs decken. Die übrigen Gebäude werden weitgehend durch Heizöl versorgt, vereinzelt sind Strom-Nachtspeicher-Heizungen anzutreffen. Die in Abbildung 9.2 dargestellte Beheizungsstruktur verdeutlicht, dass ein Ausbau der Fernwärme in dem betroffenen Stadtbezirk hauptsächlich zu Lasten der Gasversorgung geht. Eine Berücksichtigung der Erlösrückgänge bei bestehenden Erdgaskunden ist daher zwingend notwendig.

Die bisher gewonnen Fernwärmekunden sind überwiegend größere gewerbliche Kunden (Büroparks, Hotels, etc.). Für eine vollständige Ausschöpfung des Ausbaupotentials werden jedoch auch Haushaltskunden versorgt werden müssen, die für ca. 90 % des Wärmebedarfs von insgesamt ca. 185 GWh / a stehen. Bei angenommenen 1600 Benutzungstunden entspricht dies einer Anschlussleistung von 116 MW. Ohne die Verdrängung von Gaskunden reduziert sich das zusätzliche Absatzpotential für Fernwärme auf 40 GWh/a (25 MW).



**Abbildung 9.2** Bestehende Beheizungsstruktur im Untersuchungsgebiet

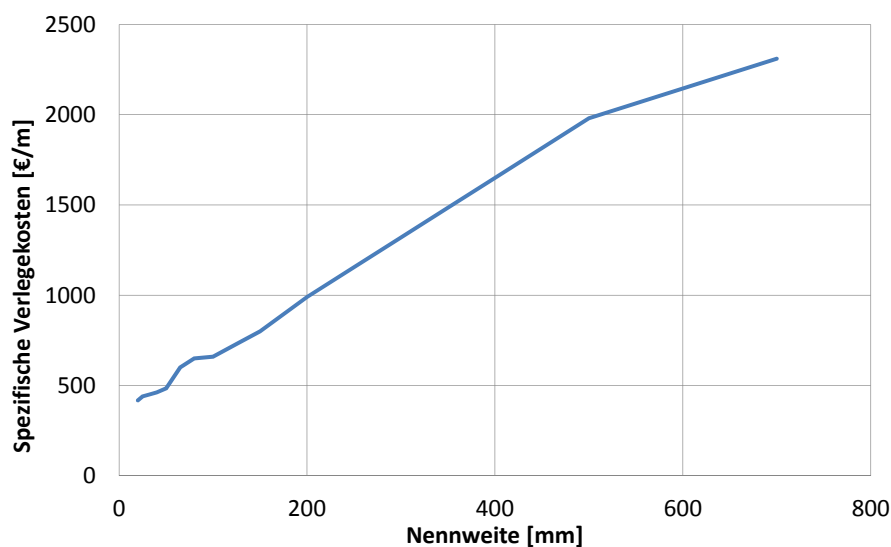
## 9.4 Rahmenbedingungen

### 9.4.1 Kosten- und Erlösdaten

#### Verlegekosten

Die spezifischen Verlegekosten für Fernwärmeleitungen betragen ca. 500 – 2000 € / m und können nachfolgender Abbildung 9.3 entnommen werden. Für die Untersuchung der Wirtschaftlichkeit des Wärmenetzausbaus sind hauptsächlich die Verlegepreise im Bereich DN 80 – DN 150 interessant, da diese den größten Anteil an der Netzlänge haben.

Unter der Berücksichtigung von kapazitätsabhängigen Verlegekosten (s. Abschnitt 4.3.2) ergibt sich aus Abbildung 4.4 ein variabler Kostenanteil von ca. 0,011 € / kW<sub>th</sub>. Der Fixkostenanteil wird für die Fallstudie mit 600 € angenommen.



**Abbildung 9.3** Dimensionsabhängige Verlegekosten

**Betriebskosten**

Die Kosten des Netzbetriebs (ohne Ersatzerneuerungsmaßnahmen) werden pauschaliert berücksichtigt und richten sich nach üblichen Erfahrungswerten. Für Gasleitungen werden Betriebskosten in Höhe von 0,5 %/a der Investitionskosten angesetzt, für Wärmeleitungen in Höhe von 3 %. Für die Betriebskosten der Wärmeleitungen wird eine mittlere Nennweite DN 100 unterstellt, wodurch sich Betriebskosten von 18 € / m ergeben. Bei den Gasleitungen richten sich die Betriebskosten nach der bestehenden Nennweite.

**Marge Fernwärme**

Die Fernwärmemarge wird mit 0,028 € / kWh angesetzt. Diese Marge entspricht der Differenz aus dem Verkaufspreis und den Wärmegestehungskosten.

**Marge Gas**

Die Gasmarge beträgt in der vorliegenden Untersuchung 0,015 € / kWh und umfasst sowohl die Vertriebsmarge, als auch die Erlöse aus den Netznutzungsentgelten, welche durch den Kunden für den Transport des Gases zu zahlen sind.

**9.4.2 Anschlussgrad**

Für einen Rückbau des Gasnetzes ist es notwendig, dass sämtliche Gaskunden zur Fernwärme wechseln. Um ein sinnvolles Rückbaupotential zu bestimmen, wird daher ein Anschlussgrad von 100 % unterstellt. In der Praxis wird dieser hohe Anschlussgrad erfahrungsgemäß nur auf einzelnen Trassen zu erreichen sein. Dennoch soll das Potential auf Basis dieses theoretischen Werts ermittelt werden. Zur Prüfung der Sensitivität der Ergebnisse wird zusätzlich ein realistisches Szenario untersucht, welches einen Anschlussgrad von 35 % unterstellt (Mittelwert bei Netzerweiterungen der letzten Jahre).

**9.4.3 Budget und Ausbauperioden**

Der Betrachtungszeitraum wird auf die Abschreibungsdauer der Leitungen von 30 Jahren festgelegt. Der Netzausbau und Gasnetzrückbau soll in vier Ausbaustufen erfolgen. Diese weisen eine zeitliche Staffelung mit einer Dauer von drei Jahren (Periode eins), fünf Jahren (Periode zwei), sieben Jahren (Periode drei) sowie fünfzehn Jahren (Periode vier) auf. In der ersten Ausbauperiode steht ein Budget von 2 Mio. €, in der zweiten Periode von 3 Mio. € und in den letzten beiden Perioden von 4 Mio. € zur Verfügung. Mit einem Budget von 2 Mio. € können ca. 3 km Fernwärmeleitungen gebaut werden, mit 4 Mio. € entsprechend ca. 6 km.

## 9.5 Szenarien

Zur Quantifizierung verschiedener Effekte werden drei unterschiedliche Szenarien untersucht.

### **Szenario 1: optimistisch (100 %)**

Das Szenario 1 unterstellt einen Anschlussgrad von 100 % bei der Erschließung durch Fernwärme. Dieses Szenario ist hauptsächlich als oberer Grenzwert für einen Fernwärmeausbau zu sehen. Darüber hinaus ermöglicht die Annahme einer hundertprozentigen Wechselbereitschaft, sämtliche Optionen für einen Rückbau des Gasnetzes aufzuzeigen.

### **Szenario 2: realistisch (35 %)**

Szenario 2 nimmt einen realistischen Anschlussgrad der Fernwärme von 35 % an, welcher in etwa dem mittleren Anschlussgrad bei bisherigen Netzerweiterungen des Versorgungsunternehmens entspricht. Ein flächendeckender Rückbau des Gasnetzes ist in diesem Szenario nicht möglich.

### **Szenario 3: Neubau Heizkraftwerk (100 %)**

Entgegen der ursprünglichen Aufgabenstellung des Versorgungsunternehmens, ein bestehendes Fernwärmenetz auf einen weiteren Stadtteil zu erweitern, wird in Szenario 3 angenommen, dass noch kein Heizkraftwerk besteht und dieses neu errichtet werden muss. Dieses Szenario soll aufzeigen, wie das Optimierungssystem dazu genutzt werden kann, den optimalen Standort und die Dimensionierung eines oder mehrerer Heizkraftwerke auszuwählen. In diesem Szenario wird – analog zu Szenario 1 – ein Anschlussgrad von 100 % angenommen, da der Fokus auf den wirtschaftlichen Auswirkungen verschiedener Kraftwerkskombinationen liegt.

## 9.6 Wirtschaftlichkeitsbewertung

Mit der in Abschnitt 4.2.4 entwickelten Methodik, kann eine erste Abschätzung des wirtschaftlichen Potentials eines Netzausbaus bestimmt werden. Gemäß Gleichung (4.9) kann die minimale Wärmebedarfsdichte [kWh/m] für eine profitable Netzerweiterung (Einzelbetrachtung) unter Berücksichtigung der Gasverdrängung anhand der Parameter Verlegkosten, Betriebskosten, den Margen aus dem Gas- und Fernwärmeverkauf sowie dem Anschlussgrad bestehender Gaskunden ermittelt werden.

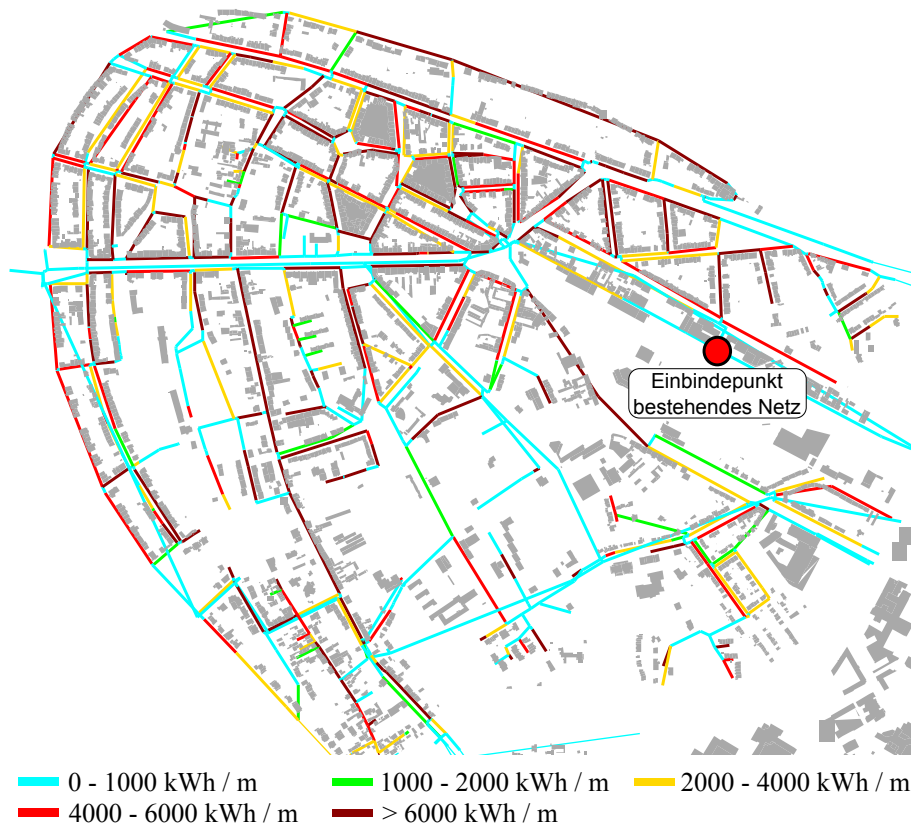


Diese Bewertung gibt – unabhängig von den Ergebnissen der Optimierung – einen ersten Überblick über das wirtschaftlich erschließbare Ausbaupotential und ermöglicht eine Plausibilisierung der Ergebnisse der Ausbauroptimierung.

$c^{PIPE} = 660$	[€/m]	Spezifische Verlegekosten für Leitungen
$c_t^{B,PIPE} = 18$	[€/(m · a)]	Spezifische jährliche Betriebskosten für Leitungen
$r_t = 0,028$	[€/kWh]	Spezifische Marge für den Wärmeverkauf
$c_t^{GEN} = 0$	[€/kWh]	Spezifische Wärmegestehungskosten (entfallen wegen Margenbetrachtung)
$\omega = 5$	[%/a]	Diskontierungszinssatz (WACC)
$\gamma = 75$	[%]	Anteil Erdgas am Wärmebedarf
$\eta^{GAS} = 90$	[%]	Mittlerer Wirkungsgrad der Erdgasheizungen
$r_t^{GAS} = 0,015$	[€/kWh]	Spezifische Gasmarge
$T = 30$	[a]	Betrachtungszeitraum

**Tabelle 9.1** Eingangsgrößen der Wirtschaftlichkeitsberechnung

Unter Annahme der Parameter in Tabelle 9.1 ergibt sich bei einem Anschlussgrad der Fernwärme von 100 % gemäß Gleichung (4.9) eine minimale Wärmebedarfsdichte von 3931 kWh / m für einen wirtschaftlichen Netzausbau. Sofern die Verdrängung von Gaskunden ignoriert wird, reduziert sich dieser Wert nach Gleichung (4.6) auf 2176 kWh / m.



**Abbildung 9.4** Verteilung der Wärmebedarfsdichte im Untersuchungsgebiet

Die mittlere Wärmebedarfsdichte liegt im Untersuchungsgebiet bei ca. 3550 kWh / m, weshalb bei einem Anschlussgrad von 100 % ein Großteil der Leitungen (unter Berücksichtigung der Gasverdrängung) wirtschaftlich zu erschließen ist. Die Verteilung der Wärmebedarfsdichte im Untersuchungsgebiet kann der Abbildung 9.4 entnommen werden. Aus der Netzdarstellung ist ersichtlich, dass insbesondere im nördlichen Bereich eine Vielzahl von Trassen eine ausreichend hohe Wärmebedarfsdichte aufweisen (rote und braune Trassen). Insgesamt weisen 20,6 km der Trassen einen ausreichend hohen Wärmebedarf für eine wirtschaftliche Erschließung bei 100 % Anschlussgrad auf.

## 9.7 Optimierung des Netzausbaus

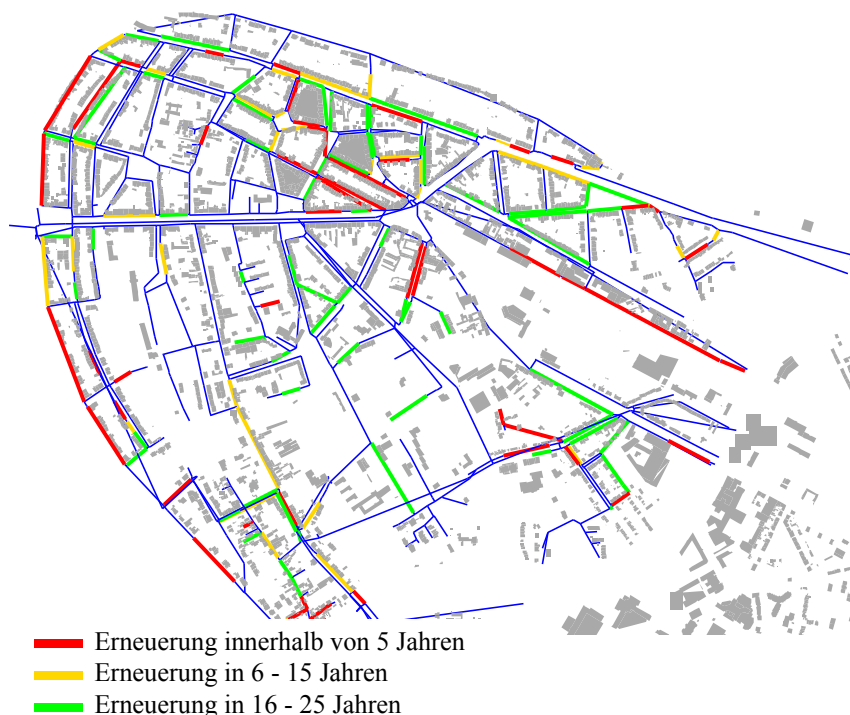
### 9.7.1 Netzmodell

Das Optimierungsmodell für den Fernwärmeausbau enthält ein vollständiges Trassenmodell des Untersuchungsgebietes. Da bereits sämtliche für einen Ausbau in Frage kommenden Straßenabschnitte durch das Gasnetz erschlossen sind, wurde das bestehende Gasnetz als Grundlage für die Trassierung möglicher Fernwärmeleitungen genutzt. Dies vereinfacht darüber hinaus die Verknüpfung der Trassen zu den bestehenden Gasleitungen, welche für die Bestimmung der Rückbauoptionen im Gasnetz notwendig ist. Als Einspeisepunkt dient das Ende der bereits projektierten Fernwärme-Transportleitung (s. Abbildung 9.4), welche von dem zentralen Heizkraftwerk in den neu zu erschließenden Stadtteil führt. Das Netzmodell umfasst eine Trassenlänge von 52 km, die sich auf 1090 Trassenabschnitte (Kanten) aufteilen, welche durch 987 Knoten verbunden sind.

Sämtliche Berechnungen wurden mit dem vollständigen Netzwerkflussmodell durchgeführt, da nur bei diesem Modell kapazitätsabhängige Verlegekosten modelliert werden können und die Modellformulierung als einzige eine exakte Dimensionierung der Heizkraftwerke (für Szenario 3) ermöglicht.

### 9.7.2 Erneuerungsbedarf Gas

Zur Bestimmung der Rückbaumöglichkeiten im Gasnetz wird eine mittel- bis langfristige Planung der zu erneuernden Leitungen benötigt. Diese lag aus einer vorangegangenen risikoorientierten Erneuerungsplanung (s. Abschnitt 3.2.3) vor, welche auf Basis des Rohwerkstoffs und des Alters einer Leitung sowie weiterer Faktoren (Leitungsumgebung) eine Priorisierung des Erneuerungsbedarfs ermittelt.



**Abbildung 9.5** Erneuerungsplanung  
der bestehenden Gasleitungen

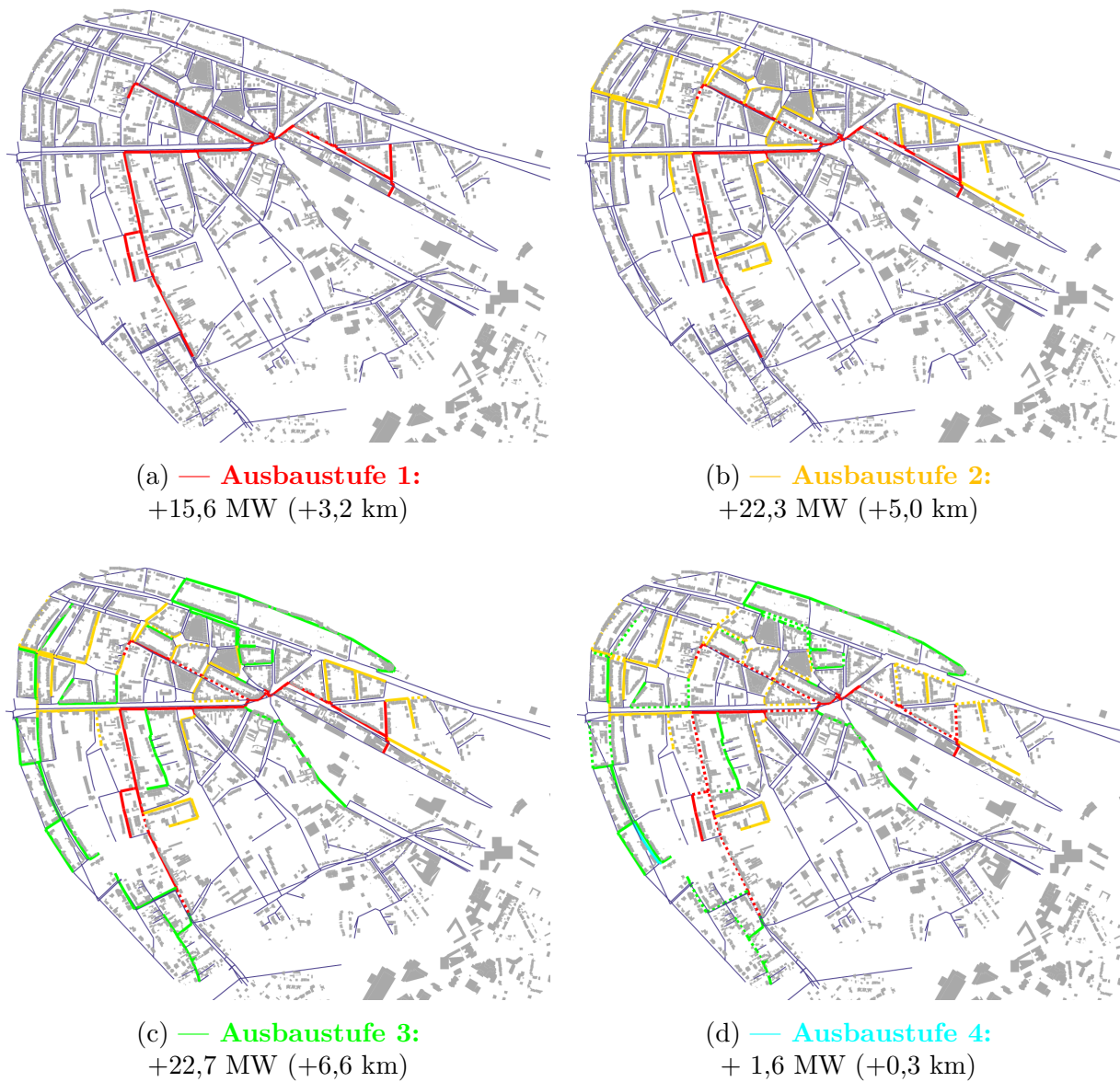
Aus dieser Untersuchung ist für jede Trasse in dem Modell das Jahr des geplanten alterungsbedingten Austausches der zugehörigen Gasleitung hinterlegt. In dem Betrachtungszeitraum von 30 Jahren sind insgesamt 19,8 km (38%) der Gasleitungen zu erneuern und entsprechen dem theoretisch maximalen Rückbaupotential. Abbildung 9.5 zeigt das Ergebnis der Erneuerungsplanung.

### 9.7.3 Optimierungsergebnis

#### 9.7.3.1 Szenario 1 (100 %)

Als Resultat der Optimierungsrechnung wird vorgeschlagen, insgesamt ca. 15,1 km Trassenlänge durch Fernwärme zu versorgen, was einem Anteil an der Trassenlänge des Netzmodells von etwa 29 % entspricht. Die mittlere Wärmebedarfsdichte der Fernwärmeleitungen liegt bei 6730 kWh / m und damit deutlich über dem Mittelwert in dem gesamten Untersuchungsgebiet von ca. 3500 kWh / m. Durch die Optimierung wird daher mit weniger als einem Drittel der Trassenlänge über die Hälfte des Wärmebedarfs erschlossen. Von den 15,1 km Fernwärmetrassen könnten ca. 6,1 km der parallelen Gasleitungen zurück gebaut werden, da die Wärmeleitung vor dem geplanten Erneuerungszeitpunkt der Gasleitung zum Bau vorgeschlagen wird. Die hierdurch eingesparten Erneuerungskosten betragen ca. 1,7 Mio. €.

Der Barwert des Gesamtgewinns (Gas und Fernwärme) beträgt 82,9 Mio. € über 30 Jahre. Hierin sind die Nettoerlöse (Margen) Gas und Fernwärme, die Investitionskosten des Fernwärmenetzausbaus, die Erneuerungskosten der Gasleitungen sowie die Betriebskosten (Gas und Fernwärme) enthalten. Von den 82,9 Mio. € Gewinn im Betrachtungszeitraum entfallen mit 45,4 Mio. € etwa die Hälfte auf die Fernwärme.



**Abbildung 9.6** Optimierungsergebnis Szenario 1 (- - - Rückbau Gasnetz)

In der endgültigen Ausbaustufe werden jährlich insgesamt 99,5 GWh Fernwärme abgesetzt (ca. 62,2 MW Leistung). Davon gehen ca. 74,3 GWh (46,4 MW) zu Lasten der Gasversorgung, was einem Rückgang des Gewinns im Gasbereich von jährlich 2,2 Mio. € entspricht. Dem steht ein zusätzlicher Gewinn der Fernwärme von jährlich ca. 4,5 Mio. € gegenüber. Die Investitionen in den Fernwärmeleitungsbau für die 15,1 km Netz summieren sich auf

9,1 Mio. €, wobei das Budget in den ersten drei Perioden vollständig ausgeschöpft wird. In der vierten Optimierungsperiode werden nur noch 300 m Fernwärmeleitungen zugebaut und überwiegend Gasleitungen stillgelegt.

Die Ausbauschritte können Abbildung 9.6 entnommen werden. Rückbauoptionen im Gasnetz, die sich durch eine rechtzeitige Erschließung mit Fernwärme ergeben, sind in der Grafik als gestrichelte Linien markiert.

### **Plausibilisierung**

Zur Plausibilisierung der Trassenauswahl dient der Plan mit der Einfärbung der Trassen nach Wärmebedarfsdichte. Für den gewinnmaximalen Ausbau müssen hauptsächlich die Trassen mit der höchsten Wärmebedarfsdichte durch Fernwärme erschlossen werden. Der Vergleich zwischen den in Abbildung 9.6 ausgewählten Trassen mit den rot und braun eingefärbten Trassen aus Abbildung 9.4 zeigt eine hohe Übereinstimmung. Die von der Optimierung ausgewählten Trassen sind nachvollziehbar.

### **Ergebnisse bei Vernachlässigung der Gasverdrängung**

Zur Prüfung, wie stark sich die Berücksichtigung der Gasverdrängung und des Gasnetzrückbaus auf die Trassenauswahl auswirkt, wurde die Optimierung unter Vernachlässigung der Gasleitungen erneut durchgeführt. Zu erwarten ist, dass tendenziell mehr Trassen für eine Erschließung durch Fernwärme vorgeschlagen werden und sich auch die Auswahl stärker auf Trassen mit einem hohen Anteil von Gaskunden verschiebt.

Die Ergebnisse beider Varianten unterscheiden sich jedoch nur geringfügig. Der Grund hierfür ist zum einen, dass in den ersten drei Perioden das Budget bereits voll ausgeschöpft wird und daher nicht wesentlich mehr Fernwärmeleitungen gebaut werden können. Zum anderen ist der Anteil der Gaskunden relativ gleichmäßig in dem Versorgungsgebiet verteilt, weshalb auch die Auswahl der Fernwärmetrassen überwiegend deckungsgleich ist. Die Wärmebedarfsdichte einer Trasse ist somit ausschlaggebend für die Wirtschaftlichkeit einer Fernwärmeleitung. Die Verdrängung der Gaskunden und ein mögliches Einsparpotential durch nicht anfallende Erneuerungskosten bei Stilllegung einer zukünftig fernwärmeversorgten Gasleitung sind nur nachrangige Kriterien für die Trassenauswahl.

### **Auswirkungen eines rückläufigen Wärmebedarfs**

Bis 2030 wird ein allgemeiner Rückgang des Wärmebedarfs um ca. 20 - 25 % prognostiziert (s. Abschnitt 2.2). Die Auswirkungen dieses Verbrauchsrückgangs wurden durch eine Anpassung des Szenarios 1 mit einem entsprechend reduzierten Wärmebedarf untersucht. Interessanterweise verringert sich die zu erschließende Trassenlänge nur marginal.

Dieser zunächst nicht zu erwartende Effekt ist nach Betrachtung der in Abschnitt 9.6 durchgeführten Wirtschaftlichkeitsberechnung plausibel. Aus dieser geht hervor, dass die minimale Wärmebedarfsdichte für eine wirtschaftliche Erschließung bei ca. 4000 kWh/m liegt. Die mittlere Wärmebedarfsdichte der in Szenario 1 vorgeschlagenen Fernwärmetrassen liegt heute bei 6730 kWh / m und reduziert sich bei einem Rückgang um 25 % auf ca. 5050 kWh / m, wodurch diese noch immer ausreichend hoch ist. Da sich die Erlöse aus dem Gasverkauf ebenfalls um 25 % reduzieren, gibt es keine Verschiebung zugunsten der bestehenden Gaskunden. Der Effekt eines Verbrauchsrückgangs ist daher nicht vergleichbar mit einem geringeren Anschlussgrad. Wie nachfolgend in Szenario 2 beschrieben wird, verschiebt der geringere Anschlussgrad das Verhältnis der Erlöse aus dem Gas- und Wärmeverkauf und hat hierdurch stärkere Auswirkungen auf die Wirtschaftlichkeit des Wärmenetzausbaus.

### **Numerische Eigenschaften**

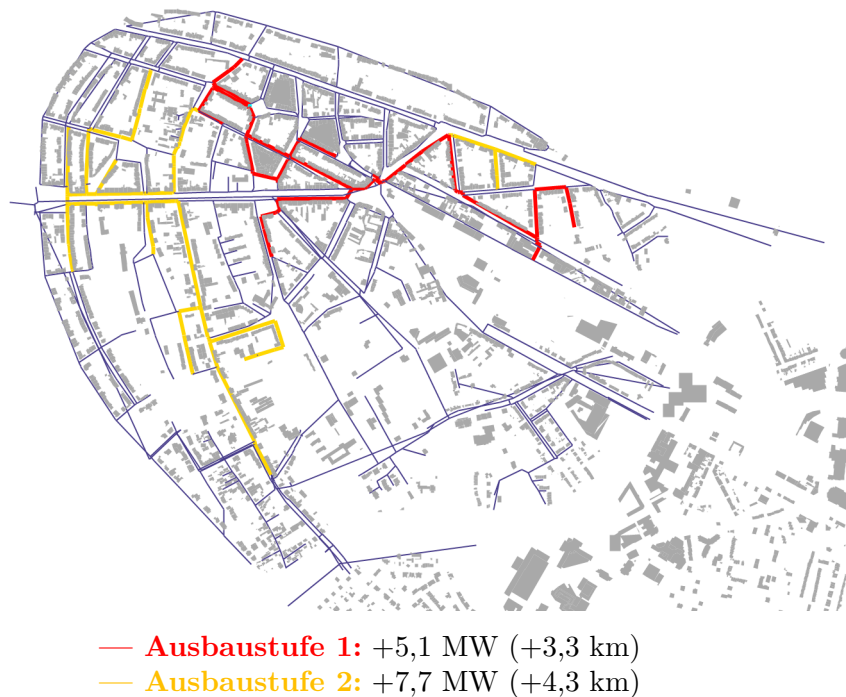
Das Modell wurde mit der Flussformulierung gelöst, da nur diese kapazitätsabhängige Kosten berücksichtigen kann und darüber hinaus bei den Vergleichsrechnungen mit anderen realen Netzmodellen am besten abgeschnitten hat (s. Abschnitt 8.4.4). Bei der Berücksichtigung mehrerer Perioden wurde auf das zweistufige Verfahren (s. Abschnitt 8.5.1) zurückgegriffen, da für das einstufige Modell keine Lösungen in akzeptabler Laufzeit gefunden wurden. Die Lösungsdauer beträgt für beide Stufen jeweils ca. 1 - 3 Minuten (je nach Parametern, Budget, etc.) und findet das ganzzahlige Optimum. Die gute Lösungsperformance könnte neben der konkreten Datenlage zumindest teilweise auf die Berücksichtigung der kapazitätsabhängigen Kosten zurückzuführen zu sein, da diese durch den variablen Kostenterm die Fixkostenproblematik in der LP-Relaxierung reduzieren.

Die Einbeziehung der Gasleitungen hat keine signifikanten Auswirkungen auf die Berechnungsdauer. Je nach Parametrierung führt die Berücksichtigung des Gasnetzrückbaus teilweise sogar zu kürzeren Laufzeiten.

#### **9.7.3.2 Szenario 2 (35 %)**

Unter Annahme eines realistischen Anschlussgrades von 35 % reduziert sich die zu erschließende Trassenlänge erwartungsgemäß gegenüber dem optimistischen Szenario 1 deutlich. Anstatt 15,1 km werden nur noch 7,6 km der Trassen für eine Versorgung durch Fernwärme vorgeschlagen. Die mittlere Wärmebedarfsdichte der Fernwärmeleitungen liegt mit 7735 kWh / m signifikant höher als in Szenario 1, da sich bei dem geringeren Anschlussgrad nur noch Trassen mit einem besonders hohen Wärmebedarf rentieren. Aufgrund der

geringeren Netzlänge ist das Budget der ersten beiden Perioden ausreichend, um sämtliche Leitungen zu erschließen. In den letzten beiden Perioden werden daher keine neuen Leitungen mehr gebaut. Auf die Stilllegung von Gasleitungen wurde verzichtet, da bei diesem geringen Anschlussgrad nicht von einem flächendeckenden Rückbau des Gasnetzes ausgegangen werden kann. Die Trassierung der neu zu erschließenden Fernwärmeleitungen kann Abbildung 9.7 entnommen werden.



**Abbildung 9.7** Optimierungsergebnis  
 Szenario 2 (--- Rückbau Gasnetz)

Insgesamt wird ein Wärmebedarf von 20,6 GWh erschlossen, welcher einer Leistung von 12,8 MW entspricht. Hiervon gehen 9,5 MW zu Lasten der Gasversorgung, wodurch sich die Erlöse im Gasbereich um 1,3 Mio. € / a verringern. In der Sparte Fernwärme kann hingegen in der letzten Ausbaustufe ein jährlicher Überschuss von 2,6 Mio. € erwirtschaftet werden. Der Barwert des Gesamtgewinns über 30 Jahre liegt bei 30,3 Mio. €, von dem der Großteil der Erdgasversorgung zuzurechnen ist. Die Fernwärme erwirtschaftet in dem Betrachtungszeitraum lediglich einen Gewinn von 3,7 Mio. €, wobei hierin bereits ein Verlust von 1,4 Mio. € in der ersten Ausbauperiode enthalten ist. Die Gesamtinvestitionen für die Erweiterung des Fernwärmenetzes belaufen sich auf 4,6 Mio. €.

#### **Auswirkungen eines rückläufigen Wärmebedarfs**

Ein Wärmebedarfsrückgang um 25 % bedeutet für Szenario 2, dass keine Trassen mehr für einen Ausbau der Fernwärme geeignet sind. Auch wenn sich einzelne Trassen selbst



unter dem rückläufigen Wärmebedarf noch rentieren, ist die Erschließung dieser Trassen ausgehend von der Einbindung an das bestehende Netz zu teuer, um durch die Erlöse aus dem Wärmeverkauf gedeckt zu werden. Unter der Annahme eines geringen Anschlussgrades von 35 % ist somit bei rückläufigem Wärmebedarf der flächendeckende Weiterbetrieb des Gasnetzes und ein Verzicht auf den Ausbau der Fernwärme wirtschaftlicher.

### 9.7.3.3 Szenario 3 (Neubau Heizkraftwerk)

Anhand des Szenarios 3 soll gezeigt werden, wie das Modell die Auswahl und Dimensionierung von Heizkraftwerken optimiert. Hierzu sind gegenüber den ersten beiden Szenarien weitere Annahmen zu treffen, welche nachfolgend dargestellt werden. Zusätzlich wurde das Netzmodell geringfügig modifiziert, indem ein Teilbereich mit hohem Wärmebedarf topologisch von dem übrigen Netz getrennt wurde, um zu veranschaulichen, wie das Modell ein dezentrales Nahwärmenetz erzeugt (s. Abbildung 9.9). Für die korrekte Leistungs- und Energiebilanzierung mit isolierten Teilnetzen wurde für das Szenario 3 daher die erweiterte Modellformulierung mit der unterjährigen Modellierung des Leistungsflusses genutzt (s. Abschnitt 7.4.2.3 „Leistungs- und Energiebilanz“).

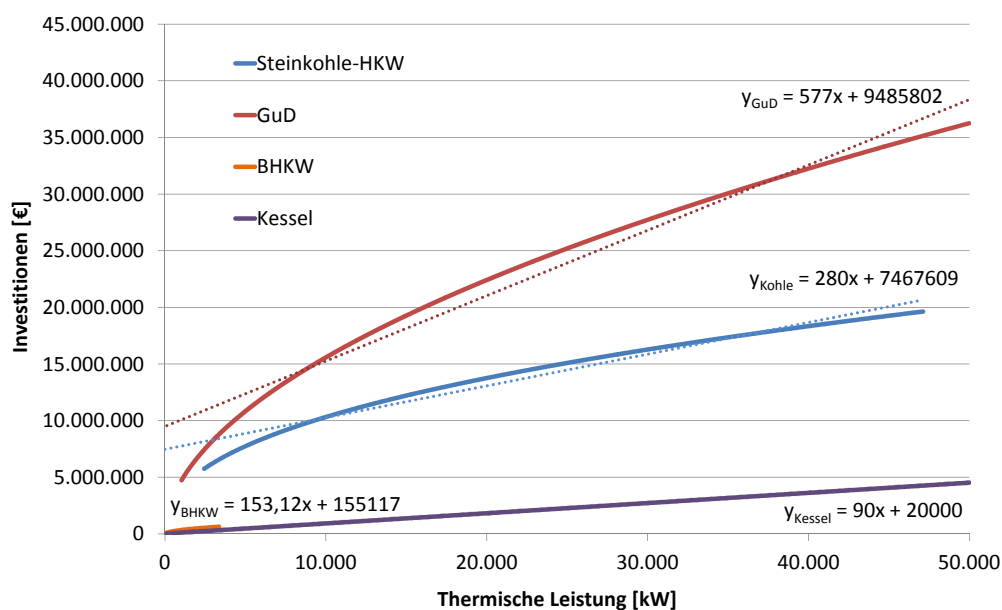
#### 9.7.3.3.1 Heizkraftwerkstypen

Für die Ermittlung des optimalen Heizkraftwerkstyps stehen vier unterschiedliche Module zur Auswahl. Ein Erdgas-Blockheizkraftwerk, ein Gas-und-Dampfturbinen Heizkraftwerk, ein Steinkohle-Heizkraftwerk sowie ein Erdgaskessel. Die unterschiedlichen Anlagentypen schließen sich hierbei nicht aus, sondern können an einem Standort zu einer Gesamtanlage kombiniert werden (maximal zwei Module an einem Standort, z.B. GuD-HKW und Gaskessel). Die Investitionskosten enthalten sowohl einen fixen als auch einen leistungsabhängigen Term, der nach Abbildung 9.8 linearisiert wurde. Die Kostenkurven wurden aus eigenen Berechnungen gebildet, welche auf den Grundlagen aus Abschnitt 3.1 basieren. Als Betriebskosten wurden pauschal für alle Kraftwerkstypen jährlich 5% der Investitionssumme angesetzt.

#### 9.7.3.3.2 Kosten- und Erlösdaten

Abweichend von der ursprünglichen Fragestellung müssen in Szenario 3 die Wärmegestehungskosten durch das Modell bestimmt werden. Daher kann für die Fernwärme nicht





**Abbildung 9.8** Leistungsabhängige Investitionskosten der Heizkraftwerkstypen

Kennwert	BHKW	Steinkohle HKW	GuD HKW	Spitzenkessel
Maximale Leistung elektrisch [kW]	2500	38889	91667	–
Maximale Leistung thermisch [kW]	3355	50000	50000	50000
Wirkungsgrad elektrisch [%]	38%	35%	55%	–
Wirkungsgrad thermisch [%]	51%	45%	30%	95%
CO <sub>2</sub> -Emissionen [g/kWh <sub>th</sub> ]	169	216	144	223
Investitionen fix [€]	155120	7467610	9485800	20000
Investitionen leistungsabhängig [€/kW <sub>th</sub> ]	153	280	577	90
Betriebskosten [% Inv./a]	5%	5%	5%	5%

**Tabelle 9.2** Heizkraftwerkstypen

mit einer Marge gerechnet werden, sondern es müssen die tatsächlichen Verkaufserlöse einfließen.

### Verkaufspreis Fernwärme

Es wird von einem Arbeitspreis für die Fernwärme von 0,08 € / kWh ausgegangen. Vereinfachend wird angenommen, dass dieser bereits den mittleren Leistungspreis (Grundgebühr) enthält.

### Brennstoffkosten und Emissionsabgaben

Die Brennstoffkosten für Erdgas werden mit 0,025 € / kWh angesetzt, was in etwa dem aktuellen Börsenpreis entspricht. Der Verkaufspreis (ohne Steuern und Abgaben) beträgt 0,04 € / kWh.

Die Bezugskosten für Steinkohle belaufen sich auf 0,015 € / kWh. Die Kosten für die Emission von CO<sub>2</sub> werden mit 10 € / t angesetzt (s. Abschnitt 4.2.4.2).

### **Strompreis**

Für den Strompreis werden zwei Preisszenarien untersucht. In Szenario 3a wird der in KWK erzeugte Strom mit 0,08 € / kWh<sub>el</sub> vergütet, wobei die Einspeisevergütung nach KWKG darin bereits enthalten ist. Dieser Strompreis ist unter den derzeitigen Randbedingungen vergleichsweise optimistisch (zumindest für Großanlagen mit geringer KWKG-Förderung).

Aufgrund der zunehmenden Einspeisung von subventioniertem regenerativ erzeugtem Strom, ist mittelfristig nicht mehr mit steigenden Börsenpreisen zu rechnen. Dem pessimistischeren Szenario 3b wird daher ein Stromerlös von 0,05 € / kWh<sub>el</sub> zugrunde gelegt, welcher in etwa dem aktuellen Börsenpreis ohne KWKG-Vergütung entspricht.

Die beiden Preisszenarien wurden gewählt, um zu untersuchen, inwieweit sich die Höhe der Stromvergütung auf die Auswahl und Dimensionierung der Heizkraftwerke auswirkt.

### **9.7.3.3.3 Budget und Ausbauperioden**

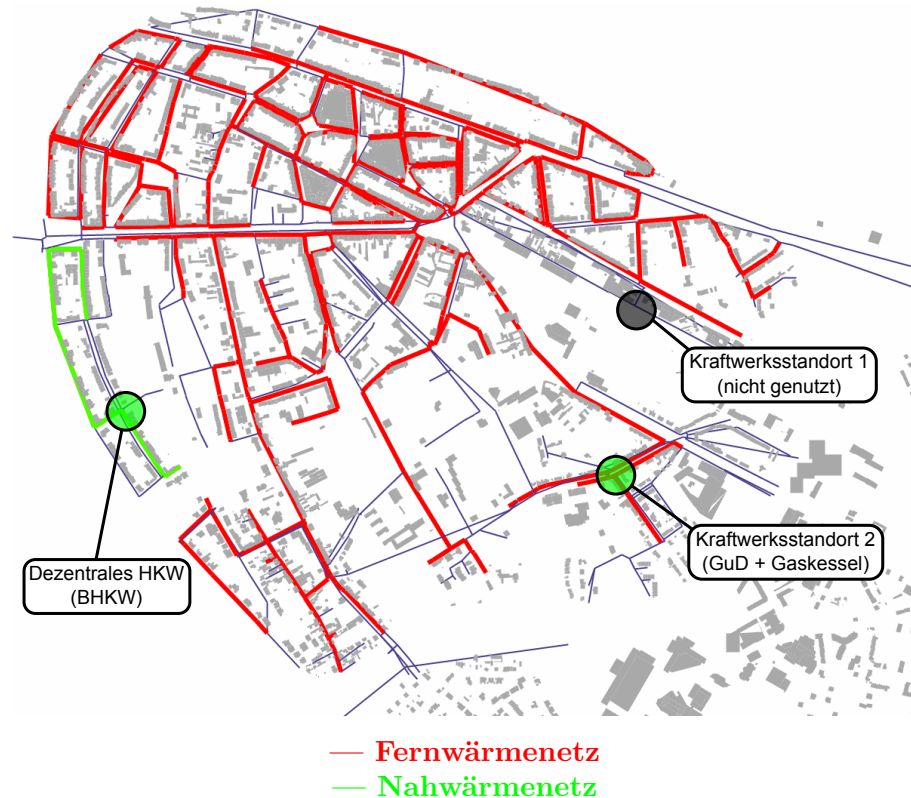
In Szenario 3 wird nur der einperiodige Fall betrachtet, da der Fokus auf der Auswahl und Dimensionierung der Heizkraftwerke liegt. Die Ergebnisse sind jedoch vollständig auf den mehrperiodigen Fall übertragbar. Das Budget für den Leitungsbau wurde mit 15 Mio. € höher als in den Szenarien 1 und 2 angesetzt, um den potentiell erschließbaren Wärmebedarf zu vergrößern und damit die Auswahl und Dimensionierung der Heizkraftwerke interessanter zu gestalten. Das Budget für den Bau von Heizkraftwerken wurde auf 30 Mio. € festgelegt.

### **9.7.3.3.4 Ergebnisse**

#### **Szenario 3a (hohe Stromvergütung)**

Aufgrund der Annahme eines Anschlussgrades von 100 % und dem hohen verfügbaren Budget von 15 Mio. € werden mehr Leitungen erschlossen, als in den ersten beiden Szenarien. Die Trassenlänge des Fernwärmenetzes beträgt insgesamt 24,8 km und umfasst damit etwa die Hälfte der Gesamtlänge des Netzmodells.

Mit 148,1 GWh werden beinahe 80 % des gesamten Wärmebedarfs erschlossen, was einer Leistung von ca. 92,5 MW entspricht. 77 % des zukünftig durch Fernwärme zu deckenden Wärmebedarfs gehen zu Lasten der bestehenden Gasversorgung.

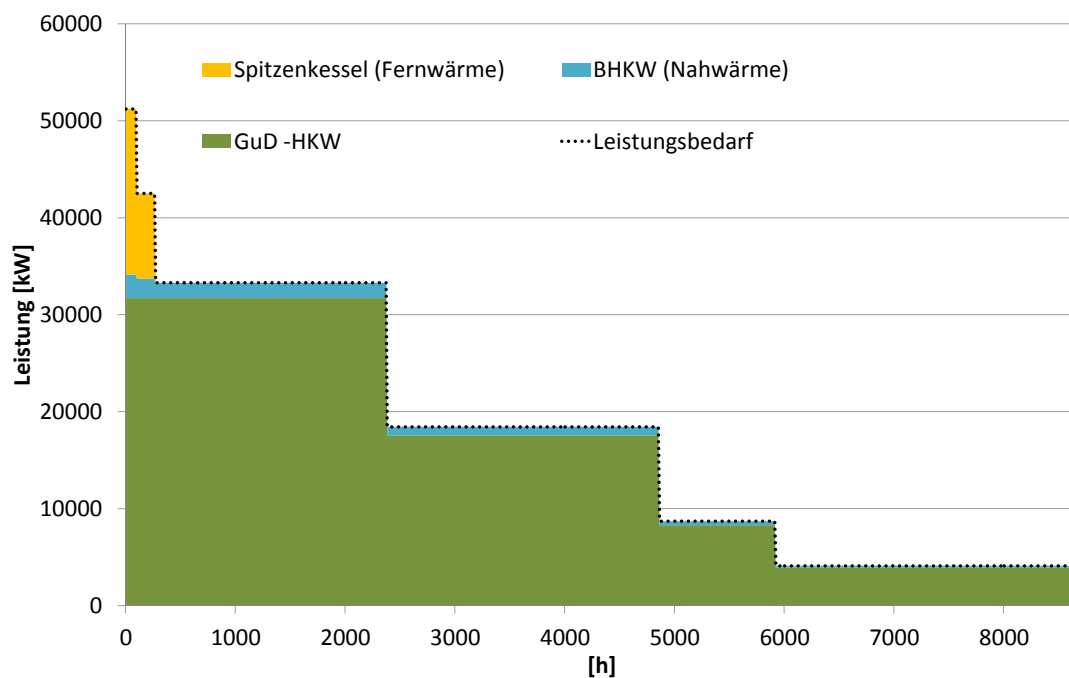


**Abbildung 9.9** Trassen und Heizkraftwerksstandorte in Szenario 3a (hohe Stromvergütung)

Der hohe Anschlussgrad und die hohe Stromvergütung führen zu einem Barwert des Gewinns über 30 Jahre von 250,4 Mio. €. Da beinahe sämtliche Kunden zur Fernwärme wechseln, entfällt – bei Zurechnung der Erlöse aus dem Stromverkauf zu der Sparte Fernwärme – nur noch ein geringer Anteil des Gewinns auf den Gasverkauf (5,4 Mio. €).

Die Anlagenauswahl fällt bei der hohen Stromvergütung erwartungsgemäß auf die GuD-Anlage mit einem hohen elektrischen Wirkungsgrad von 55 %. Trotz hoher spezifischer Investitionskosten deckt das GuD-Heizkraftwerk mit einer Leistung von 31,7 MW ca. 62 % des thermischen Leistungsbedarfs. Hierbei ist zu beachten, dass aufgrund des Gleichzeitigkeitsfaktors (s. Abschnitt 2.3) der Leistungsbedarf von 51,2 MW nicht mit der Summe der Anschlussleistung (92,5 MW) übereinstimmt. Der zugehörige Spitzenlastkessel weist nur eine Leistung von 13,8 MW auf. Zusätzlich wird ein BHKW errichtet, welches ein dezentrales Nahwärmenetz speist und damit unabhängig von dem zentralen GuD-Heizkraftwerk produziert. Das BHKW wird nicht durch einen Spitzenlastkessel ergänzt, was ebenfalls auf die hohe Stromvergütung zurückzuführen ist.

Abbildung 9.10 zeigt die Fahrweise der jeweiligen Kraftwerksmodule. Fast die gesamte Wärme wird in KWK erzeugt, lediglich zu Spitzenzeiten übernimmt der Erdgaskessel einen Teil der Gesamtlast. Die Grafik zeigt, dass die Fahrweise prinzipiell korrekt ist und



**Abbildung 9.10** Fahrweise der Heizkraftwerke in Szenario 3a (hohe Stromvergütung)

die Leistungs- und Arbeitswerte der einzelnen Kraftwerke mit dem Leistungs- und Energiebedarf übereinstimmen. Trotz einer relativ hohen Abdeckung des Leistungsbedarfs kommt die GuD-Anlage auf eine Volllaststundenzahl von 4300 h / a. Dies ist zwar etwas gering für ein Kraftwerk dieser Leistungsklasse, bewegt sich jedoch in einem realistischen Rahmen, insbesondere unter der Annahme der hohen Stromvergütung. Die Benutzungsstunden können in der Praxis darüber hinaus erhöht werden, indem im Sommer das Heizkraftwerk auch ohne Wärmeauskopplung betrieben wird.

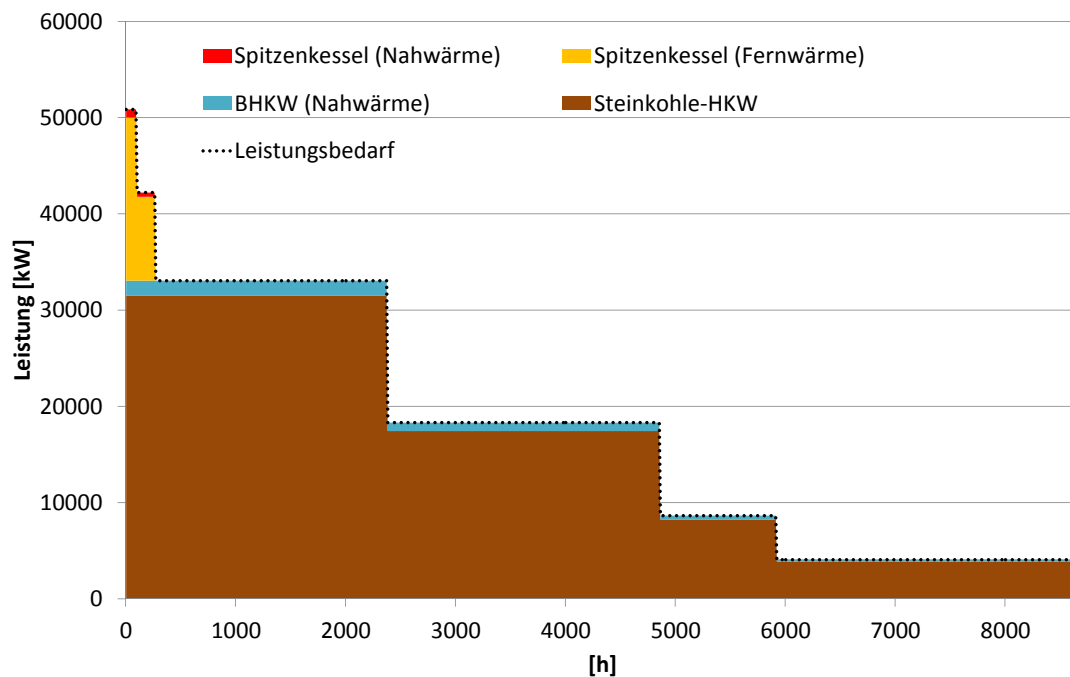
Die gesamten Investitionen für die GuD-Anlage, welche sich aus den fixen und den variablen Investitionskosten ergeben, liegen bei 27,8 Mio. €. Bezogen auf die elektrische Leistung entspricht dies spezifischen Investitionen von 876 € / kW<sub>el</sub>, die im Rahmen der in der Literatur angegebenen Kosten für GuD-Anlagen liegen.

### **Szenario 3b (geringe Stromvergütung)**

Die Trassenlänge der zukünftig zu erschließenden Fernwärmeleitungen ist mit 25 km nahezu unverändert gegenüber Szenario 3a. Die geringere Stromvergütung ermöglicht also – zumindest unter der Annahme eines Anschlussgrades von 100 % – weiterhin einen flächendeckend wirtschaftlichen Ausbau des Fernwärmenetzes.

Der Wärmebedarf und die Anschlussleistung sind mit 147 GWh bzw. 91,9 MW ebenfalls beinahe unverändert. Die um 0,03 € / kWh geringere Stromvergütung schlägt sich allerdings in einem deutlich geringeren Gewinn (Barwert über 30 Jahre) nieder, welcher sich auf 142,7 Mio. € nahezu halbiert. Auf die Gassparte entfallen 5,6 Mio. €.

Während in Szenario 3a ein Großteil der Wärme durch eine GuD-Anlage erzeugt wird, ist unter der geringeren Stromvergütung das Steinkohle-Heizkraftwerk günstiger. Dieses hat einen höheren thermischen bzw. geringeren elektrischen Wirkungsgrad und ist daher – im Vergleich mit der GuD-Anlage – tendenziell bei niedrigeren Strompreisen zu bevorzugen. Darüber hinaus sind die Brennstoffkosten für Steinkohle geringer als für Erdgas.



**Abbildung 9.11** Fahrweise der Heizkraftwerke in Szenario 3b (geringe Stromvergütung)

Die Auslegung des zentralen Steinkohle-Heizkraftwerks entspricht mit 31,5 MW weitgehend der Dimensionierung der GuD-Anlage in Szenario 3a. Dies ist plausibel, da das Verhältnis zwischen der Leistung der KWK-Anlagen und den Spitzenkesseln wesentlich durch den Verlauf der Jahresdauerlinie bestimmt wird und diese in beiden Szenarien identisch ist. Bei dem Nahwärmenetz hingegen wirkt sich die geringere Stromvergütung auf die Dimensionierung des BHKW aus. Das BHKW deckt nur noch 65% des Leistungsbedarfs des Nahwärmenetzes ab, der Rest wird durch einen kleinen Spitzenlastkessel mit 0,85 MW bereitgestellt. In Szenario 3a war die Deckung des gesamten Leistungsbedarfs durch ein BHKW wirtschaftlicher. Die Fahrweise der Heizkraftwerke in Szenario 3b kann Abbildung 9.11 entnommen werden.

### Numerische Eigenschaften

Die Optimierung der Modellinstanzen von Szenario 3 dauert ca. 15 - 30 Minuten (abhängig von den gewählten Heizkraftwerksstandorten, Kosten- und Budgetdaten). Gegenüber den

Szenarien 1 und 2 steigt die Lösungsdauer damit merklich an. Dies ist nachvollziehbar, da durch die Modellierung der Leistungsflüsse innerhalb der Intervalle der diskretisierten Jahresdauerlinie die Anzahl der Variablen je Kante um den Faktor fünf zugenommen hat. Generell hat die Aufgabenstellung durch die erhöhte Anzahl von Einspeisestandorten und die Vielzahl verschiedener Kraftwerksmodule an Komplexität gewonnen. Die Lösungsdauern sind dennoch völlig ausreichend für die Fragestellung, da diese Optimierungsrechnungen strategischen Charakter haben und nicht wiederholt berechnet werden müssen.

## 9.8 CO<sub>2</sub>-Bewertung

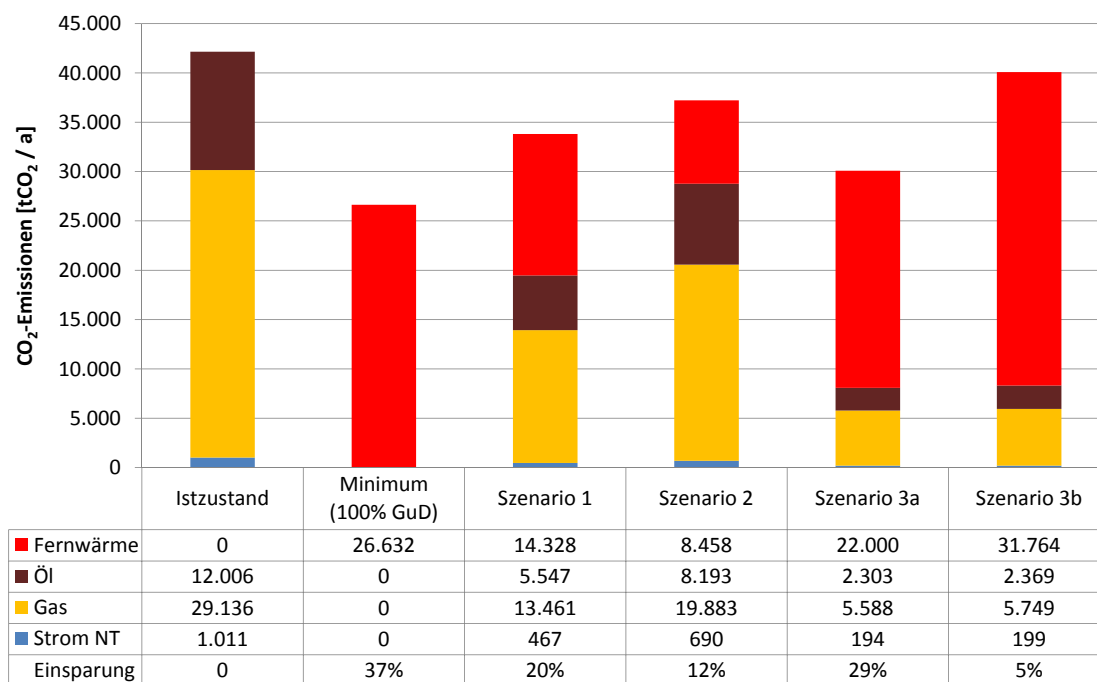
Durch den Ausbau der Fernwärme kann ein Großteil der Wärmeenergie in KWK erzeugt werden. Durch die gekoppelte Produktion elektrischer und thermischer Energie wird eine bessere Brennstoffausnutzung erreicht, die sich in geringeren Treibhausgasemissionen widerspiegeln sollte. Im Vergleich mit dem Istzustand wird daher gezeigt, in welchem Maße die Erweiterung des Fernwärmenetzes die CO<sub>2</sub>-Emissionen zukünftig reduzieren könnte. Für die Szenarien 1 und 2 wird angenommen, dass die gesamte Wärme in einer zentralen GuD-Anlage erzeugt wird. Für die Szenarien 3a und 3b ist der CO<sub>2</sub>-Ausstoß von den eingesetzten Heizkraftwerkstypen abhängig.

Technologie	CO <sub>2</sub> -Emissionen [g/kWh <sub>th</sub> ]
Gasheizung	201
Strom-Nachtspeicher (Strom-Mix-DE)	539
Heizöl	315
GuD-HKW	144
Erdgas-BHKW	169
Steinkohle-HKW	216
Gaskessel (Heizwerk)	223

**Tabelle 9.3** Spezifische  
CO<sub>2</sub>-Emissionsfaktoren

Die in Tabelle 9.3 aufgeführten spezifischen CO<sub>2</sub>-Emissionsfaktoren sind [Fritsche und Rausch, 2008] entnommen und wurden mit der EU-Methode berechnet (s. Abschnitt 3.4). Aus der Tabelle ist ersichtlich, dass die heute vorherrschenden Erdgasheizungen bereits einen relativ geringen CO<sub>2</sub>-Ausstoß aufweisen. Die mittleren spezifischen CO<sub>2</sub>-Emissionen liegen im Untersuchungsgebiet dementsprechend aktuell bei ca. 229 g / kWh<sub>th</sub>. Signifikante

Einsparungen sind daher hauptsächlich durch den Ausbau eines Fernwärmenetzes, welches durch ein hocheffizientes GuD-Heizkraftwerk versorgt wird, zu realisieren. Dieses weist mit 144 gCO<sub>2</sub> / kWh<sub>th</sub> einen um 37 % geringeren spezifischen CO<sub>2</sub>-Ausstoß auf. Für den theoretischen Fall einer vollständigen Versorgung des Gebietes durch Fernwärme könnten die Emissionen demnach maximal um 37 % gesenkt werden (Szenario „Minimum“ in Abbildung 9.12).



**Abbildung 9.12** CO<sub>2</sub>-Emissionen in den verschiedenen Ausbauszenarien

Selbst bei einem Anschlussgrad von 100 % können durch die Versorgung der in Szenario 1 mit dem vorgegebenen Budget erreichbaren Kunden lediglich 20 % der CO<sub>2</sub>-Emissionen eingespart werden. Das Potential reduziert sich bei einem realistischen Anschlussgrad von 35 % in Szenario 2 auf nur noch 12 %.

Das höhere Budget für den Netzausbau in Szenario 3a in Verbindung mit der Wärmeerzeugung durch ein GuD-Heizkraftwerk ermöglicht die Reduktion des CO<sub>2</sub>-Ausstoßes um 29 %. Wird bei einer geringen Stromvergütung aus wirtschaftlichen Gründen hingegen ein Steinkohle-Heizkraftwerk zur primären Versorgung des Fernwärmenetzes genutzt, ist nur ein minimaler Rückgang der Treibhausgasemissionen um 5 % zu erwarten. Hier spiegelt sich der hohe CO<sub>2</sub>-Gehalt der Steinkohle wider, der trotz überwiegender Nutzung von Kraft-Wärme-Kopplung keine signifikante Senkung des CO<sub>2</sub>-Ausstoßes ermöglicht.

## 9.9 Bewertung der Ergebnisse

Die Fallstudie hat die Praxistauglichkeit des entwickelten Optimierungssystems unter Beweis gestellt. Mittlere Problemgrößen, wie das hier berechnete Trassenmodell eines großstädtischen Stadtbezirks, lassen sich stabil innerhalb weniger Minuten lösen.

Die Ausbauvorschläge der Optimierung wurden mit Hilfe des Plans der Wärmebedarfsdichten und einer überschlägigen Wirtschaftlichkeitsuntersuchung plausibilisiert. Die Ergebnisse hinsichtlich der zur Netzerweiterung vorgeschlagenen Trassen sind nachvollziehbar. Die Untersuchung hat gezeigt, dass bei dem realistischen Szenario 2 mit einem Anschlussgrad von 35 % in dem Stadtgebiet ein Anschlusspotential von ca. 13 MW besteht. Die neu zu erschließende Trassenlänge beträgt hierbei 7,6 km. Auch unter Berücksichtigung der Verdrängung bestehender Gaskunden, die in dem Untersuchungsgebiet einen Anteil an dem Wärmebedarf von etwa drei Vierteln haben, ist ein wirtschaftlicher Fernwärmeausbau damit möglich.

Darüber hinaus konnte durch Szenario 1 gezeigt werden, dass mittelfristig ein erhebliches Rückbaupotential im Gasnetz besteht, sofern an den entsprechenden Trassen sämtliche Kunden bereit sind, zur Fernwärme zu wechseln.

Anhand der Auswahl und Dimensionierung der Heizkraftwerke in den Szenarien 3a und 3b wurde dargestellt, wie sich die Vergütung des KWK-Stroms auf die Wirtschaftlichkeit verschiedener Erzeugungstechnologien auswirkt. Durch die Berücksichtigung der (diskretisierten) Jahresdauerlinie trifft die Optimierung eine sinnvolle Anlagenauswahl und kombiniert die KWK-Anlagen mit Spitzenlastkesseln, um bei den teuren KWK-Modulen eine ausreichend hohe Anzahl von Volllaststunden zu erreichen. Bei den Berechnungen hat sich allerdings auch gezeigt, dass die Auswahl der Anlagentypen aufgrund der langen Nutzungszeiträume und der hohen Energiemengen sensibel auf Änderungen in den Kosten- und Erlösdaten reagiert. Die Ergebnisse sind deshalb nicht pauschal auf andere Untersuchungen übertragbar und haben einen exemplarischen Charakter.

Die Berechnung der Treibhausgasemissionen zeigt ein begrenztes CO<sub>2</sub>-Einsparpotential durch den Fernwärmeausbau. Der hohe Marktanteil von Erdgasheizungen in dem Untersuchungsgebiet geht bereits heute mit einem relativ geringen mittleren spezifischen CO<sub>2</sub>-Ausstoß von 229 g / kWh<sub>th</sub> einher. Lediglich in der effizientesten Variante (Szenario 3a) mit einer überwiegenden Wärmeerzeugung durch eine GuD-KWK-Anlage und einer fast vollständigen Versorgung aller Kunden durch Fernwärme reduzieren sich die Emissionen um 29 %. Deutlich höhere Einsparungen sind nur bei Nutzung von Biomasse-BHKW oder zukünftigen Technologien wie der Tiefengeothermie zu erreichen.



## 10 Zusammenfassung und Ausblick

Der Umbau der Energieversorgung zu einer CO<sub>2</sub>-ärmeren Strom- und Wärmeerzeugung bedingt einen forcierten Ausbau der Kraft-Wärme-Kopplung. Ziel der Politik ist daher der Ausbau KWK-gespeicher Nah- und Fernwärmenetze. Die Versorgungsunternehmen streben vielfach ebenfalls einen Ausbau ihrer Fernwärmeversorgung an, scheuen jedoch oftmals die hohen Investitionen und die Konkurrenz zu der eigenen Gasversorgung. Um auch unter diesen Voraussetzungen einen wirtschaftlichen Ausbau von Wärmenetzen zu ermöglichen, wurde in der vorliegenden Arbeit ein entscheidungsunterstützendes System entwickelt, welches durch eine optimale Trassenauswahl eine möglichst hohe Rentabilität der Investitionen erreicht.

Im Gegensatz zur gängigen praktischen Vorgehensweise, welche überwiegend auf Simulationsrechnungen oder manuellen Planungsrechnungen basiert, wurde erstmals ein System umgesetzt, welches durch Nutzung mathematischer Optimierungsverfahren straßengenau eine optimale Trassenauswahl bestimmt. Zusätzlich ermöglicht der gewählte Ansatz die Bestimmung geeigneter Standorte für Heizkraftwerke und eine sinnvolle Anlagendimensionierung. Die Arbeit grenzt sich hierbei von bestehenden Optimierungsansätzen zur flächenbasierten Bestimmung von Fernwärmepotentialen ab.

Aufbauend auf theoretischen Optimierungsansätzen zur Lösung der verwandten graphentheoretischen Fragestellung des Steiner-Baum Problems, wurde ein gemischt-ganzzahliges lineares Optimierungsmodell entworfen, welches die theoretischen Lösungsansätze auf das praktische Problem des Wärmenetzausbaus erweitert. Da in der Literatur verschiedene Modellierungsansätze mit spezifischen Vor- und Nachteilen veröffentlicht sind, wurden drei unterschiedliche Modellformulierungen umgesetzt, mit dem Ziel, die Eignung der jeweiligen Ansätze für die Fragestellung des Wärmenetzausbaus zu vergleichen.

Durch intensive Benchmark-Rechnungen anhand synthetischer und praktischer Modellinstanzen konnte gezeigt werden, dass kein Lösungsverfahren prinzipiell überlegen ist. Aus praktischer Sicht empfiehlt sich daher die Nutzung der Modellierung als Netzwerkflussproblem, welche als einzige die Einbeziehung aller praxisrelevanten Restriktionen ermöglicht. Die anschließende Anwendung des Optimierungssystems im Rahmen einer Fallstudie konnte die Praxistauglichkeit des Verfahrens nachweisen. Anhand eines realen Trassenmodells und unternehmensspezifischer Kosten- und Erlösdaten konnte gezeigt werden, dass in dem Untersuchungsgebiet ein erhebliches Potential für die Erweiterung des vorhandenen Fernwärmenetzes besteht. Durch Szenarienrechnungen wurde ermittelt, welche Auswirkungen

ein Rückgang des Wärmebedarfs und eine geringe Wechselbereitschaft der Verbraucher auf die Wirtschaftlichkeit und den optimalen Entwurf des Netzausbaus haben. Darüber hinaus wurden die Rückbauoptionen im bestehenden Gasnetz durch das System identifiziert und im Rahmen des zeitlich gestaffelten Ausbaupfades ausgewiesen.

In einem weiteren Szenario wurde die Fragestellung um den Neubau von Heizkraftwerken erweitert. Anhand verschiedener Preisszenarien konnte gezeigt werden, wie sich die optimale Auswahl und Dimensionierung der Heizkraftwerke bei einer Änderung der Stromvergütung verschiebt. Bei einem hohen Strompreis fällt die Auswahl der Optimierung auf ein GuD-Heizkraftwerk, welches einen besonders hohen elektrischen Wirkungsgrad aufweist. Bei einer geringeren Stromvergütung wird hingegen ein Steinkohle-Heizkraftwerk errichtet, welches geringere Brennstoffkosten aufweist. Darüber hinaus reduziert sich der Anteil der in KWK erzeugten Wärme.

Das Ziel der Arbeit, ein praktisch einsetzbares Optimierungssystem für die Planung des Nah- und Fernwärmenetzausbaus zu entwickeln, wurde erreicht. Die Ergebnisse der Fallstudie sind plausibel und konnten mit dem Optimierungsmodell innerhalb weniger Minuten berechnet werden. Durch umfangreiche Benchmark-Berechnungen konnte die allgemeine Tauglichkeit des Optimierungsverfahrens zur Lösung der Aufgabenstellung bestätigt werden. Die numerischen Ergebnisse zeigen jedoch auch, dass ab einer Problemgröße von ca. 1000 Trassenabschnitten die Lösbarkeit nicht mehr zwingend innerhalb einer kurzen Zeitspanne möglich ist und von der konkreten Modellinstanz abhängt. Die stabile Lösung von Modellen, welche ganze Großstädte abbilden, bietet Raum für zukünftige Forschungsarbeiten.

Aus praktischer Sicht könnte die Fragestellung des optimalen Fernwärmenetzausbaus auf eine allgemeine spartenübergreifende Optimierung der Energieversorgung ausgeweitet werden. Die verstärkte Einspeisung regenerativer und damit volatiler Stromerzeugung in die Stromnetze stellt die Versorgungsunternehmen vor technische und wirtschaftliche Herausforderungen. Elektro-Wärmepumpen als Stromverbraucher sowie die verstärkte Nutzung zentraler und dezentraler KWK-Anlagen zur Stromerzeugung können unter diesen Voraussetzungen helfen, die Auslastung und Stabilität der Stromnetze zu erhöhen. Diese engere Verzahnung der Strom- und Wärmenetze erfordert zukünftig eine spartenübergreifende Netzoptimierung, welche eine abgestimmte Ausgestaltung der Strom-, Gas- und Fernwärmenetze bestimmt.

# Literaturverzeichnis

- Arulselvan, A. et al. (2011). MIP modeling of Incremental Connected Facility Location. In *INOC*, Seiten 490-502, Berlin / Heidelberg. Springer.
- AGEB (2012). *Energieverbrauch in Deutschland - Daten für das 1. bis 4. Quartal 2012*. Arbeitsgemeinschaft Energiebilanzen e.V., Berlin.
- AGFW (2012a). *Fernwärme-Preisübersicht*. AGFW - Der Energieeffizienzverband für Wärme, Kälte und KWK e. V., Frankfurt am Main.
- AGFW (2012b). *AGFW-Hauptbericht 2011*. AGFW - Der Energieeffizienzverband für Wärme, Kälte und KWK e. V., Frankfurt am Main.
- AGFW (2007). *Arbeitsblatt FW 440 - Teil 2: Hydraulische Berechnung von Heizwasser-Fernwärmenetzen; Grundlagen zur stationären Berechnung; Kennwerte und Berechnungsgrößen*. AGFW - Der Energieeffizienzverband für Wärme, Kälte und KWK e. V., Frankfurt am Main.
- Aneja, Y. P. (1980). An Integer Linear Programming Approach to the Steiner Problem in Graphs. *Networks*, 10:167-178.
- ASUE (2011a). *Die Strom erzeugende Heizung*. Arbeitsgemeinschaft für sparsamen und umweltfreundlichen Energieverbrauch e.V., Berlin.
- ASUE (2011b). *BHKW-Kenndaten 2011*. Arbeitsgemeinschaft für sparsamen und umweltfreundlichen Energieverbrauch e.V., Berlin.
- Atamtürk, A. (2002). On capacitated network design cut-set polyhedra. *Mathematical Programming*, 92(3):425-437.
- Bachhiesl, P. et al. (2003). Simulation and Optimization of the Implementation Costs for the Last Mile of Fiber Optic Networks. *Networks and Spatial Economics*, 3:467-482.
- Balakrishnan, A. und Patel, N. R. (1987). Problem Reduction Methods and a Tree Generation Algorithm for the Steiner Network Problem. *Networks*, 17(1):65-85.
- Balzer, G. und Schorn, C. (2011). *Asset Management für Infrastrukturanlagen - Energie und Wasser*. Springer, Berlin / Heidelberg, 1. Auflage.
- Beasley, J. E. (1990). OR-Library: Distributing Test Problems by Electronic Mail. *Journal of the Operational Research Society*, 41:1069-1072.
- Beasley, J. E. (1989). An SST-Based Algorithm for the Steiner Problem in Graphs. *Networks*, 19(1):1-16.
- Beasley, J. E. (1984). An Algorithm for the Steiner Problem in Graphs. *Networks*, 14:147-159.

- Bienstock, D. et al. (1993). A note on the prize collecting traveling salesman problem. *Mathematical Programming*, 59:413-420.
- Bienstock, D. und Günlük, O. (1996). Capacitated Network Design – Polyhedral Structure and Computation. *INFORMS Journal on Computing*, 8:243-259.
- Bienstock, D. et al. (2006). Combined Network Design and Multiperiod Pricing: Modeling, Solution Techniques, and Computation. *Operations Research*, 54(2):261-276.
- Bixby, R. E. (2002). Solving real-world linear programs: A decade and more of progress. *Operations Research*, 50(1):3-15.
- Blesl, M. (2002). *Räumlich hoch aufgelöste Modellierung leitungsgebundener Energieversorgungssysteme zur Deckung des Niedertemperaturwärmebedarfs*. Dissertation, Universität Stuttgart.
- BMU (2006). *Nationaler Allokationsplan 2008-2012 für die Bundesrepublik Deutschland*. Bundesministerium für Umwelt, Naturschutz und Reaktorsicherheit, Berlin.
- BMWi (2012). *Zahlen und Fakten - Energiedaten- Nationale und Internationale Entwicklung*. Bundesministerium für Wirtschaft und Technologie, Berlin. Excel-Datei: URL: <http://www.bmwi.de/BMWi/Redaktion/Binaer/energie-daten-gesamt,property=blob,bereich=bmwi2012,sprache=de,rwb=true.xls>  
Abgerufen am 03.04.2013.
- Böhmer, S. und Gössl, M. (2009). Optimierung und Ausbaumöglichkeiten von Fernwärmesystemen. Technischer Bericht, Umweltbundesamt GmbH, Wien.
- Bragalli, C. et al. (2012). On the optimal design of water distribution networks: a practical MINLP approach. *Optimization and Engineering*, 13:219-246.
- Canuto, S. A., Resende, M. G. und Ribeiro, C. C. (2001). Local search with perturbations for the prize-collecting Steiner tree problem in graphs. *Networks*, 38(1):50–58.
- Cardillo, A. et al. (2006). Structural properties of planar graphs of urban street patterns. *Phys. Rev. E*, 73:066107.
- Cerbe, G. (1992). *Grundlagen der Gastechnik*. Carl Hanser Verlag, München / Wien, 4. Auflage.
- Chopra, S., Gorres, E. R. und Rao, M. R. (1992). Solving the Steiner Tree Problem on a Graph Using Branch and Cut. *INFORMS Journal on Computing*, 4(3):320-335.
- Chopra, S. und Rao, M. R. (1994a). The Steiner tree problem I: Formulations, compositions and extension of factes. *Mathematical Programming*, 64:209-229.
- Chopra, S. und Rao, M. R. (1994b). The Steiner tree problem II: Properties and classes of factes. *Mathematical Programming*, 64:231-246.

- Cormen, T. H. et al. (2001). *Introduction to Algorithms*. MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 2. Auflage.
- Dantzig, G., Fulkerson, R. und Johnson, S. (1954). Solution of a Large-Scale Traveling-Salesman Problem. *Journal of the Operations Research Society of America*, 2(4):393-410.
- Dijkstra, E. W. (1959). A Note on Two Problems in Connexion with Graphs. *Numerische Mathematik*, 1:269-271.
- DIN (2012). *DIN 31051: Grundlagen der Instandhaltung*. Deutsches Institut für Normung e.V..
- Domschke, W. und Drexl, A. (2007). *Einführung in Operations Research*. Springer, Berlin / Heidelberg, 7. Auflage.
- Droste-Franke, B. et al. (2009). *Brennstoffzellen und Virtuelle Kraftwerke*. Springer, Berlin / Heidelberg, 1. Auflage.
- Duin, C. W. und Volgenant, A. (1987). Some Generalizations of the Steiner Problem in Graphs. *Networks*, 17:353-364.
- DVGW (2011). *Hinweis G 402 (A): Netz- und Schadenstatistik – Erfassung und Auswertung von Daten zum Aufbau von Instandhaltungsstrategien für Gasverteilungsnetze*. Deutsche Vereinigung des Gas- und Wasserfaches e.V., Bonn.
- DVGW (2008). *Hinweis GW 122: Netzinformationssysteme und GIS-Systeme als wesentlicher Bestandteil der technischen IT-Systeme zur Netzinformation*. Deutsche Vereinigung des Gas- und Wasserfaches e.V., Bonn.
- DVGW (2006a). *Arbeitsblatt GW 303-1: Berechnung von Gas- und Wasserrohrnetzen - Teil 1: Hydraulische Grundlagen, Netzmodellierung und Berechnung*. Deutsche Vereinigung des Gas- und Wasserfaches e.V., Bonn.
- DVGW (2006b). *Arbeitsblatt GW 303-2: Berechnung von Gas- und Wasserrohrnetzen - Teil 2: GIS-gestützte Rohrnetzberechnung*. Deutsche Vereinigung des Gas- und Wasserfaches e.V., Bonn.
- Edmonds, J. und Karp, R. M. (1972). Theoretical Improvements in Algorithmic Efficiency for Network Flow Problems. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 19(2):248-264.
- Eikmeier, B. et al. (2011). *Potenzialerhebung von Kraft-Wärme-Kopplung in Nordrhein-Westfalen*. Bremer Energie Institut, Bremen.
- Erb, M. und Gutzwiller, S. (2011). *Ausbau von WKK in der Schweiz: WKK-Standortevaluation auf Basis einer GIS-Analyse*. V3E - Verband Effiziente Energie Erzeugung, Sarnen, 1. Auflage.

- Europäische Union (2004). Richtlinie 2004/8/EG des europäischen Parlaments und des Rates vom 11. Februar 2004 über die Förderung einer am Nutzwärmebedarf orientierten Kraft-Wärme-Kopplung im Energiebinnenmarkt und zur Änderung der Richtlinie 92/42/EWG.
- Fischetti, M. (1991). Facets of two Steiner arborescence polyhedra. *Mathematical Programming*, 51:401-419.
- Fourer, R., Gay, D. M. und Kernighan, B. W. (1990). AMPL: A Mathematical Programming Language. *Management Science*, 36:519-554.
- Fritsche, U. und Rausch, L. (2008). Endbericht zum F & E-Vorhaben - Bestimmung spezifischer Treibhausgas-Emissionsfaktoren für Fernwärme. Technischer Bericht, Umweltbundesamt.
- Glueck, B. (1984). *Heizwassernetze für Wohn- und Industriegebiete*. VEB Verlag für Bauwesen, Berlin, 1. Auflage.
- Goemans, M. X. und Myung, Y. (1993). A Catalog of Steiner Tree Formulations. *Networks*, 23:19-28.
- Goemans, M. X. und Williamson, D. P. (1997). *Approximation algorithms for NP-hard problems*, Kapitel The primal-dual method for approximation algorithms and its application to network design problems, Seiten 144–191. PWS Publishing Co., Boston, MA, USA.
- Goemans, M. X. und Williamson, D. P. (1992). A general approximation technique for constrained forest problems. In *Proceedings of the third annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms SODA '92*, Seiten 307–316, Philadelphia, PA, USA. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Goldberg, A. V. und Tarjan, R. E. (1988). A New Approach to the Maximum-Flow Problem. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 35(4):921-940.
- Gollowitzer, S. und Ljubic, I. (2011). MIP models for connected facility location: A theoretical and computational study. *Computers & Operations Research*, 38(2):435 - 449.
- Greene, W. H. (2003). *Econometric Analysis*. Pearson Education, Upper Saddle River NJ, 5. Auflage.
- Hassin, R., Ravi, R. und Salman, F. (2000). Approximation Algorithms for a Capacitated Network Design Problem. In Jansen, K. und Khuller, S., Herausgeber, *Approximation Algorithms for Combinatorial Optimization*, Nummer 1913 in Lecture Notes in Computer Science, Seiten 23-38. Springer, Berlin / Heidelberg.
- Hermann, H. et al. (2012). *Strompreisentwicklungen im Spannungsfeld von Energiewende, Energiemärkten und Industriepolitik*. Öko-Institut e.V., Berlin.
- Hessisches Umweltministerium (2012). *Niedrigenergiehäuser*. Hessisches Ministerium für Umwelt, Energie, Landwirtschaft und Verbraucherschutz, Wiesbaden.

- Ihler, E., Reich, G. und Widmayer, P. (1999). Class Steiner trees and VLSI-design. *Discrete Applied Mathematics*, 90:173 - 194.
- IINAS (2013). *GEMIS (Globales Emissions-Modell Integrierter Systeme) Version 4.8*.  
Excel-Datei:  
URL: [http://www.iinas.org/tl\\_files/iinas/downloads/IINAS\\_2013\\_GEMIS\\_4.8-Ergebnisdaten-Energie.xls](http://www.iinas.org/tl_files/iinas/downloads/IINAS_2013_GEMIS_4.8-Ergebnisdaten-Energie.xls)  
*Abgerufen am 03.04.2013.*
- Jansen, K. und Margraf, M. (2008). *Approximative Algorithmen und Nichtapproximierbarkeit*. De Gruyter, Berlin, 1. Auflage.
- Johnson, D. S., Minkoff, M. und Phillips, S. (2000). The Prize Collecting Steiner Tree Problem: Theory and Practice. In *Proceedings of the Eleventh Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, Seiten 760-769, Philadelphia, PA, USA. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Kail, C., Spahn, K. und Grupczynski, M. (2010). Die Brennstoff-Frage - Energieversorgungslösungen für Industrie und Kommunen. *BWK*, 62(1/2):58-66.
- Kallrath, J. (2013). *Gemischt-ganzzahlige Optimierung: Modellierung in der Praxis*. Springer Spektrum, Wiesbaden, 2. Auflage.
- Koch, T. und Martin, A. (1998). Solving Steiner Tree Problems in Graphs to Optimality. *Networks*, 32:207-232.
- König, D. und Wehr, R. (2007). Die Instandhaltung von Versorgungsnetzen mit risiko- und kostenorientierter Ersatzerneuerung. *GWF Wasser Abwasser*, 148(13):42-49.
- Konstantin, P. (2009). *Praxisbuch Energiewirtschaft*. Springer, Berlin / Heidelberg, 2. Auflage.
- Krumke, S. O. und Noltemeier, H. (2012). *Graphentheoretische Konzepte und Algorithmen*. Vieweg, Wiesbaden, 3. Auflage.
- Kruskal, J. B. (1956). On the Shortest Spanning Subtree of a Graph and the Traveling Salesman Problem. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 7(1):48-50.
- Liu, H. und Wang, J. (2006). A new way to enumerate cycles in graph. In *Telecommunications, 2006. AICT-ICIW '06. International Conference on Internet and Web Applications and Services/Advanced International Conference on*, Seiten 57-57.
- Ljubic, I. (2004). *Exact and Memetic Algorithms for Two Network Design Problems*. Dissertation, TU Wien.
- Ljubic, I. et al. (2006). An Algorithmic Framework for the Exact Solution of the Prize-Collecting Steiner Tree Problem. *Mathematical Programming*, 105:427-449.
- Lucena, A. et al. (2009). A relax-and-cut algorithm for the prize-collecting Steiner problem in graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 157:1198-1217.

- Lucena, A. und Resende, M. G. (2004). Strong lower bounds for the prize collecting Steiner problem in graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 141(1-3):277 - 294.
- Lucht, M. und Spangardt, G. (2005). *Emissionshandel*. Springer, Berlin / Heidelberg, 1. Auflage.
- Mauch, W., Corradini, R. und und, Marco Schwentzek, K. W. (2010). Allokationsmethoden für spezifische CO<sub>2</sub>-Emissionen von Strom und Wärme aus KWK-Anlagen. *Energiewirtschaftliche Tagesfragen*, 55(9):12-14.
- Nast, M. et al. *Ergänzende Untersuchungen und vertiefende Analysen zu möglichen Ausstattungsvarianten eines Wärmegesetzes*. Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt e.V. (DLR), Stuttgart.
- Nitsch, J. et al. (2010). *Langfristszenarien und Strategien für den Ausbau der erneuerbaren Energien in Deutschland bei Berücksichtigung der Entwicklung in Europa und global - Leitstudie 2010*. Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt e.V. (DLR), Stuttgart.
- Oschatz, B. und Mailach, B. (2010). *BDEW-Heizkostenvergleich Altbau 2010*. Institut für Technische Gebäudeausrüstung Forschung und Anwendung GmbH, Dresden.
- Paar, A. et al. (2013). *Transformationsstrategien von fossiler zentraler Fernwärmeversorgung zu Netzen mit höheren Anteilen erneuerbarer Energien*. AGFW – Der Energieeffizienzverband für Wärme, Kälte und KWK e.V., Frankfurt am Main.
- Pehnt, M. (2010). *Energieeffizienz*. Springer, Berlin / Heidelberg, 1. Auflage.
- Polzin, T. (2003). *Algorithms for the Steiner Problem in Networks*. Dissertation, Universität Saarland.
- Polzin, T. und Daneshmand, S. V. (2001). A comparison of Steiner tree relaxations. *Discrete Applied Mathematics*, 112:241 - 261.
- Prim, R. C. (1957). Shortest connection networks and some generalizations. *The Bell System Technical Journal*, 36:1389-1401.
- Prognos (2009). *Trendstudie Energiemarkt 2020*. VWEW Energieverlag, Frankfurt am Main, 1. Auflage.
- Prömel, H. J. und Steger, A. (2002). *The Steiner Tree Problem*. Vieweg, Braunschweig / Wiesbaden, 1. Auflage.
- Raack, C. et al. (2011). On cut-based inequalities for capacitated network design polyhedra. *Networks*, 57(2):141–156.
- Richter, S. (2007). Strukturoptimierung im Ballungsgebiet München. *Euro Heat and Power*, Seiten 1-8.
- Richter, S., Graf, R. und Manderfeld, M. (2007). Strukturoptimierung leitungsgebundener Energieträger. *Euro Heat and Power*, Seiten 40-47.



- Schaumann, G. und Schmitz, K. W. (2010). *Kraft-Wärme-Kopplung*. Springer, Berlin / Heidelberg, 4. Auflage.
- Scholz, G. (2012). *Rohrleitungs- und Apparatebau*. Springer Vieweg, Berlin / Heidelberg, 1. Auflage.
- Segev, A. (1987). The Node-Weighted Steiner Tree Problem. *Networks*, 17:1-17.
- Silver, E. A. (2004). An Overview of Heuristic Solution Methods. *The Journal of the Operational Research Society*, 55(9):936-956.
- Sivaraman, R. (2007). *Capacity Expansion in Contemporary Telecommunication Networks*. Dissertation, Massachusetts Institute of Technology.
- Statistisches Bundesamt (2013). *Daten zur Energiepreisentwicklung – Lange Reihen von Januar 2000 bis Februar 2013*. Statistisches Bundesamt, Wiesbaden.
- Stoer, M. und Dahl, G. (1994). A polyhedral approach to multicommodity survivable network design. *Numerische Mathematik*, 68:149-167.
- Suhl, L. und Mellouli, T. (2009). *Optimierungssysteme – Modelle, Verfahren, Software, Anwendungen*. Springer, Berlin / Heidelberg, 2. Auflage.
- Suhl, U. H. (2000). MOPS - Mathematical OPTimization System. *OR News*, 8:11-16.
- Suhl, U. H. und Hilbert, H. (1998). A Branch-and-Cut Algorithm for Solving Generalized Multiperiod Steiner Problems in Graphs. *Networks*, 31:273-282.
- Tarjan, R. (1973). Enumeration of the Elementary Circuits of a Directed Graph. *SIAM Journal on Computing*, 2(3):211-216.
- Tarjan, R. E. (1972). Depth-First Search and linear graph algorithms. *SIAM Journal on Computing*, 1(2):146-160.
- Tietz, H.-P. (2007). *Systeme der Ver- und Entsorgung*. B. G. Teubner, Wiesbaden, 1. Auflage.
- Trautmann, S. (2006). *Investitionen - Bewertung, Auswahl und Risikomanagement*. Springer, Berlin / Heidelberg, 1. Auflage.
- VDI (2012). *VDI Richtlinie 2067 - Wirtschaftlichkeit gebäudetechnischer Anlagen - Grundlagen und Kostenberechnung*. Verein Deutscher Ingenieure e.V., Düsseldorf.
- Voss, S. (1990). *Steiner-Probleme in Graphen*. Verlag Anton Hain Meisenheim GmbH, Frankfurt am Main, 1. Auflage.
- Voss, S. (2006). Steiner Tree Problems in Telecommunications. In Resende, M. G. C. und Pardalos, P. M., Herausgeber, *Handbook of Optimization in Telecommunications*, Seiten 459-492. Springer US.
- Weicker, K. (2007). *Evolutionäre Algorithmen*. Teubner, Wiesbaden, 2. Auflage.

- Winter, P. (1987). Steiner Problem in Networks: A Survey. *Networks*, 17:129-167.
- Winter, P. und MacGregor Smith, J. (1992). Path-distance heuristics for the Steiner problem in undirected networks. *Algorithmica*, 7:309-327. 10.1007/BF01758765.
- Winter, W., Haslauer, T. und Obernberger, I. (2001). Untersuchung der Gleichzeitigkeit in kleinen und mittleren Nahwärmenetzen. *Eurheat and Power*, Seiten 1 - 10.
- Wöhe, G. und Döring, U. (2002). *Einführung in die Allgemeine Betriebswirtschaftslehre*. Vahlen, München, 21. Auflage.
- Wolsey, L. A. (1998). *Integer Programming*. Wiley-Interscience, New York, 1. Auflage.
- Wong, R. (1984). A dual ascent approach for steiner tree problems on a directed graph. *Mathematical Programming*, 28:271-287.
- Wright, S. J. (1997). *Primal-Dual Interior-Point Methods*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1. Auflage.
- Yu, X. und Gen, M. (2010). *Introduction to Evolutionary Algorithms*. Springer, London, 1. Auflage.
- Zahoransky, R. A. (2013). *Energietechnik*. Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 6. Auflage.
- Zimmermann, H.-J. (2005). *Operations Research - Methoden und Modelle. Für Wirtschaftsingenieure, Betriebswirte, Informatiker*. Vieweg, Wiesbaden, 1. Auflage.