



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik

Bürklen, O. Th.

Leipzig, 1896

[urn:nbn:de:hbz:466:1-78595](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-78595)

P
03

Sammlung Götschen

Mathematische
Formelsammlung

VON

Prof. O. Th. Bürklen

Mit 17 Figuren

Sammlung Götschen. Je in elegantem Feinwandband 80 pr.

G. J. Götschen'sche Verlagsbandlung, Leipzig.

1—9 Klassiker-Ausgaben mit Anmerkungen erster Lehrkräfte und Einleitungen von A. Goedeke.

1. Klopstocks Oden in Auswahl. 3. Aufl. 2. Lessings Emilia Galotti. 2. Aufl. 3. Lessings Sabeln nebst Abhandlungen. 3. Aufl. 4. Lessings Laokoon. 3. Aufl. 5. Lessings Minna von Barnhelm. 11. Auflage. 6. Lessings Nathan der Weise. 5. Auflage. 7. Lessings Prosa. Sabeln. Abhandl. üb. Kunst u. Kunstwerke. Dramaturg. Abhandl. Theologische Polemik. Philosoph. Gespräche. Aphorismen. 2. Aufl. 8. Lessings literarische u. dramaturg. Abhandl. 9. Lessings antiquar. u. epigrammat. Abhandl.

10a Der Nibelunge Nôt

und Mittelhochdeutsche Grammatik von Prof. Dr. Goltzer. 3. verm. Auflage.

10b Kudrun und Dietrich-

epen in Ausw. Mit Einl. u. Wörterbuch v. Dr. O. L. Jiriczek. 3. verm. Aufl.

11 Astronomie von A. S. Möbius. 8. Auflage. 30 fig.

12 Pädagogik von Prof. Dr. Rein. 2. Auflage.

13 Geologie von Dr. E. Sraas. Mit 66 Textfig. 2. Auflage.

14 Psychologie und Logik.

Einführung in die Philosophie von Dr. Th. Effenhans. 3. Auflage.

15 Deutsche Mythologie.

Von Prof. Dr. S. Kauffmann. 2. Aufl.

16 Griechische Altertums-

funde von Dr. A. Maass. Mit 8 Vollbildern.

17 Aufsatz-Entwürfe

v. Prof. Dr. L. W. Straub. 2. Aufl.

18 Menschliche Körper, der.

v. Realschuldir. Rehmann mit Gesundheitslehre von Dr. Seiler. Mit 48 Abbildungen. 2. Aufl.

19 Römische Geschichte ○

von Gymn.-Rektor Dr. Bender.

20 Deutsche Grammatik und

Geschichte der deutschen Sprache von Dr. O. Lyou. 2. Auflage.

21 Lessings Philotas und die

Poesie des 11. Krieges. Ausw. v. Prof. O. Günter.

22 Hartmann von Aue,

Wolfram v. Eschenbach u. Gottfr. von Straßburg. Auswahl aus dem höfischen Epos von Dr. A. Marold.

23 Walther v. d. Vogelweide

mit Ausw. aus Minnesang und Spruchdichtung von Prof. O. Günter. 2. Aufl.

24 Seb. Brant, Luther,

Hans Sachs, Fischart m. Dichtungen des 16. Jahrh. von Dr. L. Pariser.

25 Kirchenlied u. Volkslied.

Geistl. u. weltl. Lyrik d. 17. u. 18. Jahrh. bis Klopstock von Dr. G. Ellinger.

26 Physische Geographie von

Prof. Dr. Siegm. Günther. Mit 32 Abbildungen. 2. verm. Aufl.

27 Griechische u. Römische

Mythologie v. Dr. B. Stending.

28 Althochdeutsche Litteratur

m. Grammatik, Uebersetzung u. Erläuterungen von Prof. Th. Schausfler.

29 Mineralogie v. Dr. R. Brauns,

Professor an der Universität Gießen. Mit 130 Abb.

30 Kartenkunde v. Dir. d. nautischen

Schule E. Geleisch u. Prof. S. Santer. Mit gegen 100 Abbild.

31 Deutsche Litteraturge-

schichte von Max Koch, Professor an der Universität Breslau. 2. Aufl.

~~8.7. 3762~~

~~1375~~

Sammlung Götschen. Je in elegantem Feinwandband 80 Pf.

G. J. Götschen'sche Verlagsbandlung, Leipzig.

- | | |
|---|---|
| 32 Deutsche Heldensage von Dr. O. L. Jiriczek. | 43 Geschichte des alten Morgenlandes von Prof. Dr. Fr. Hommel. Mit 6 Bildern und 1 Karte. |
| 33 Deutsche Geschichte im Mittelalter von Dr. F. Kurze. | 44 Die Pflanze ihr Bau u. ihr Leben v. Dr. E. Dennert. Mit 96 Abbildungen. |
| 36 Herder, Eid. Herausg. von Dr. E. Naumann. | 45 Römische Altertums- funde von Dr. Leo Bloch. Mit 7 Vollbildern. |
| 37 Chemie, anorganische von Dr. Jos. Klein. | 46 Das Waltharilied im Vers- maße der Urschrift übersezt u. erl. v. Prof. Dr. B. Althof. |
| 38 Chemie, organische von Dr. Jos. Klein. | 47 Arithmetik u. Algebra von Prof. Dr. B. Schubert. |
| 39 Zeichenschule mit 17 Tafeln in Ton-, Farben- und Golddruck und 200 Voll- und Textbildern von A. Kimmich. 3. Auflage. | 49 Griechische Geschichte von Prof. Dr. B. Swoboda. |
| 40 Deutsche Poetik von Dr. A. Vorinski. | 50 Schulpraxis von Schuldirektor R. Seyfert. |
| 41 Geometrie von Prof. Mahler. Mit 115 zweifarb. fig. | 51 Mathem. Formelsamm- lung v. Prof. O. Bücklen. Mit 20 fig. |
| 42 Urgeschichte der Mensch- heit von Dr. M. Körnes. Mit 48 Abbildgn. | |

Verlag der K. Kultministerial-Abteilung für Gelehrten- und Realschulen.

„Die von der Götschen'schen Verlagshandlung in Stuttgart heraus- gegebene Sammlung von Schulausgaben aus dem Kreise sämtlicher Lehrfächer, von welcher bis jetzt 21 Bändchen erschienen sind, zeichnet sich nicht nur durch ihre äußere Ausstattung, was Druck, Papier und Einband betrifft, und den verhältnismäßig billigen Preis von 80 Pf. für das Bändchen vorteilhaft vor ähnlichen Schulausgaben aus, sondern dürfte sich auch deshalb zur Anschaffung besonders für Schüler empfehlen, sofern ihr Inhalt die Repetition und das eigene Studium derselben zu fördern geeignet ist.“ Stuttgart, 26. Juni 1890. Dorn.

Lehrerzeitg. f. Thüringen u. Mitteldeutschland:

„Diese dauerhaft und elegant gebundenen kleinen Bücher mit dem sehr handlichen Format 16/11 cm. sind, wie aus obiger Aufzählung hervorgeht, für Gymnasien, Realschulen, Lehrerseminare, höhere Mädchen- schulen und verwandte Anstalten bestimmt. Die von berufenster Seite geschriebenen Einleitungen und Anmerkungen, die im einzelnen (Band 7—10) getroffene Auswahl, nicht minder der sorgfältige, saubere Druck verdienen volle Anerkennung. Es ist ein dankenswertes Unternehmen der Verlagshandlung, in dieser wirklich schönen Ausstattung gediegene Schulbücher auch für andere Unterrichtsgegenstände mit erscheinen zu lassen, wie die bekannte, durch den Neubearbeiter noch anschaulicher ge- wordene Astronomie von Möbius. Der Preis ist sehr gering.“

Südd. Bl. f. höh. Unterr.-Anst.: Nachdem die zwei ersten Auflagen von Nr. 10 der Göschenschen Sammlung (Nibelungen und Kudrun in Auswahl) beifällige Aufnahme und sehr raschen Absatz gefunden haben, sind Herausgeber und Verleger übereingekommen, diese Nummer in zwei Bändchen zu zerlegen: a) Der Nibelunge Nôt 2c. b) Kudrun und Dietrichen. Dadurch ist es möglich geworden, den Text zu vermehren und ihn, sowie das Wörterbuch, mit größeren Lettern zu drucken . . . Wir zweifeln nicht, daß die vorgenommene Aenderung, die gewiß den Wünschen vieler Schulmänner entgegenkommt, dieser Einleitung in das mittelhochdeutsche Schrifttum viele neue Freunde zuführen wird.

Deutsche Lehrerzeitg., Berlin: In knappster, aber doch allgemein verständlicher Form bietet uns Dr. Fraas die Geologie. Besonders aber hat uns das 14. Bändchen, welches die Psychologie und Logik enthält, ungemein angesprochen. Elsenhans versteht es, für diesen Lehrgegenstand Interesse zu erregen. Wer größere Werke nicht durchzusehen vermag, wer halb Vergessenes auffrischen will, wer in Kürze Logik und Psychologie in den Grundzügen in leicht faßlicher Weise sich aneignen will, der greife zu diesem Büchlein. Er wird's nicht bereuen. Lessings Philotas, der bekanntlich in antikem Gewand den Geist des siebenjährigen Krieges und vor allem die Denkart Friedrichs des Großen schildert, und die Poesie des siebenjährigen Krieges sind echt patriotische und herzerfreuliche Gaben. Nach den vorliegenden Bändchen stehen wir nicht an, die ganze Sammlung aufs angelegentlichste nicht allein zum Gebrauch in höheren Schulen, sondern auch zur Selbstbelehrung zu empfehlen."

Schwäbischer Merkur: Der bekannte Jenaer Pädagog Prof. Dr. W. Rein giebt in der „Pädagogik im Grundriß“ eine nicht nur lichtvolle, sondern geradezu fesselnde Darstellung der praktischen und der theoretischen Pädagogik. Jedermann, der sich für Erziehungsfragen interessiert, darf man das Büchlein warm empfehlen. Nicht minder trefflich ist die Bearbeitung, welche der Marburger Germanist Rauffmann der Deutschen Mythologie gewidmet hat. Sie beruht durchaus auf den neuesten Forschungen, wie sich an nicht wenigen Stellen, z. B. in dem schönen Kapitel über Baldr, erkennen läßt.

Staatsanzeiger: Das 20. Bändchen, das einen Abriß der deutschen Grammatik und im Anhang eine kurze Geschichte der deutschen Sprache enthält, bietet auch eine gute Uebersicht der deutschen Sprachlehre und deutschen Sprachgeschichte. Die klare und knappe Darstellung giebt auf engem Raum einen überraschend reichen Stoff, sie ist mehr ins Einzelne eingehend, als das kleine Bändchen erwarten läßt.

Pfälz. Kurier: Auch in der griechischen Altertumskunde von Dr. R. Maisch ist die Darstellung concis und, ohne den wissenschaftlichen Charakter zu verleugnen, populär im besten Sinne des Wortes. Druck und Papier sind, wie bei allen Bändchen der „Sammlung Göschens“, vorzüglich; der Einband ist gut und geschmackvoll. Dabei

~~E.K. 3762.~~

Sammlung Götschen

~~1375.~~

Formelsammlung

und

Repetitorium der Mathematik

enthaltend

die wichtigsten Formeln und Lehrsätze

der

Arithmetik, Algebra, niederen Analysis, ebenen Geometrie,
Stereometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie,
mathematischen Geographie, analytischen Geometrie der
Ebene und des Raumes, der höheren Analysis

von

O. Th. Bürklen

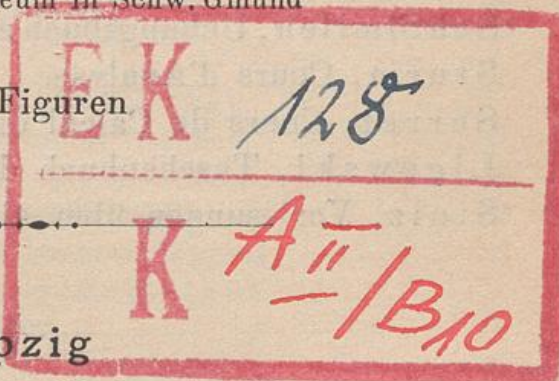
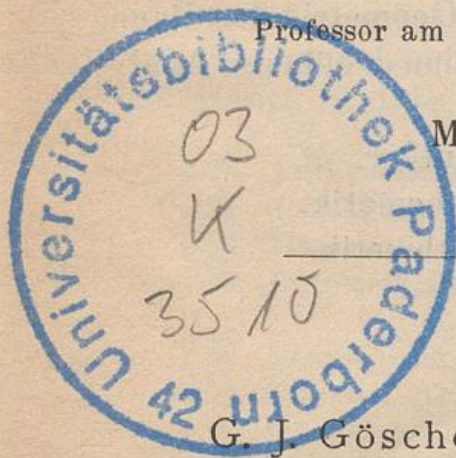
Professor am Realgymnasium in Schw. Gmünd

Mit 20 Figuren

Leipzig

G. J. Götschen'sche Verlagshandlung

1896



Das Recht der Uebersetzung vorbehalten.

Litteratur.

- Schubert, Arithmetik u. Algebra, Sammlung Göschen.
Schubert, Sammlung von arithmetischen u. algebraischen
Fragen und Aufgaben.
Helm es, Elementar-Mathematik.
Heilermann & Diekmann, Lehr- und Uebungsbuch
für den Unterricht in der Algebra.
Mahler, Ebene Geometrie, Sammlung Göschen.
Spieker, Lehrbuch der Geometrie.
Kommerell-Hauck, Lehrbuch der Stereometrie.
Hammer, Lehrbuch d. eb. u. sphär. Trigonometrie.
Lieblein, Aufgaben aus der algebraischen Analysis.
Günther, Lehrbuch der Determinantentheorie.
Holzmüller, Elementarmathematik. III. Teil.
Schlömilch, Handbuch der algebraischen Analysis.
Schlömilch, Lehrbuch der analytischen Geometrie.
Ganter & Rudio, Elem. der analytischen Geometrie.
Hattendorf, Einleitung in die analytische Geometrie.
Salmon, Analytische Geometrie der Kegelschnitte.
Hesse, Vorlesungen über analyt. Geometrie des Raumes.
Schlömilch, Uebungsbuch z. Studium d. höheren Analysis.
Sturm, Cours d'Analyse.
Serret, Cours de Calcul diff. et intégr.
Ligowski, Taschenbuch der Mathematik.
Stolz, Vorlesungen über allg. Arithmetik.

Druck von Carl Rembold, Heilbronn.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Arithmetik, Algebra, niedere Analysis.	
I. Abschnitt. Grundoperationen und Kombinatorik.	
§ 1. Benennungen	7
§ 2. Addition	7
§ 3. Subtraktion	7
§ 4. Negative Zahlen	8
§ 5. Verbindung von Addition und Subtraktion	8
§ 6. Multiplikation	9
§ 7. Division	10
§ 8. Verbindung von Multiplikation und Division	11
§ 9. Klammerlose Ausdrücke	12
§ 10. Brüche	12
§ 11. Proportionen	13
§ 12. Potenzen mit ganzen Exponenten	15
§ 13. Wurzeln	16
§ 14. Potenzen mit gebrochenen Exponenten	19
§ 15. Imaginäre und komplexe Zahlen	20
§ 16. Logarithmen	21
§ 17. Kettenbrüche	22
§ 18. Kombinationslehre	24
§ 19. Determinanten	26
§ 20. Wahrscheinlichkeitsrechnung	29
§ 21. Binomialkoeffizienten	30
II. Abschnitt. Reihen.	
A. Endliche Reihen.	
§ 22. Arithmetische Reihen erster Ordnung	31
§ 23. Geometrische Reihen	31
§ 24. Zinseszins- und Rentenrechnung	32
§ 25. Arithmetische Reihen höherer Ordnung	33
B. Unendliche Reihen.	
§ 26. Konvergenzbedingungen	35
§ 27. Satz von der Koeffizientenvergleichung	36
§ 28. Binomischer Lehrsatz	37
§ 29. Exponentialreihe, logarithmische, trigonometrische und cyklometrische Reihen	37

III. Abschnitt. Gleichungen.

	Seite
§ 30. Gleichungen ersten Grades	39
§ 31. Gleichungen zweiten Grades; Exponentialgleichungen	43
§ 32. Diophantische Gleichungen	47
§ 33. Allgemeine Sätze über höhere Gleichungen	48
§ 34. Binomische Gleichungen	51
§ 35. Kubische Gleichungen	53
§ 36. Biquadratische Gleichungen	55
§ 37a. Höhere numerische Gleichungen. — Näherungsmethoden	56
§ 37b. Grösste und kleinste Werte	59

Ebene Geometrie.

§ 38. Winkelsätze (von Parallelen, vom Dreieck und Vieleck)	62
§ 39. Kongruenzsätze und Längenbeziehungen	63
§ 40. Sätze von Parallelogramm und Trapez	64
§ 41. Gerade Linien und Winkel am Kreis; regelmässiges Vieleck	66
§ 42. Proportionalität von Strecken, Aehnlichkeit	68
§ 43. Flächenvergleichung, Inhaltsbeziehungen	71
§ 44. Längen- und Flächenberechnungen	72
§ 45. Zusammenstellung von Daten; weitere Formeln	76
§ 46. Geometrische Oerter	78
§ 47. Besondere Linien und Punkte am Dreieck	79
§ 48. Harmonische Teilung	80
§ 49. Kreispolaren	81
§ 50. Ceva-, Menelaos-, Pascal-, Brianchonsatz	82
§ 51. Aehnlichkeitspunkte; Potenzlinien (Chordalen)	83

Stereometrie.

§ 52. Gerade Linien und Ebenen	85
§ 53. Kugel-, Cylinder-, Kegelfläche	88
§ 54. Geometrische Oerter	91
§ 55. Sätze über Polyeder. Formeln für Oberflächen und Rauminhalt	94

Ebene Trigonometrie.

I. Goniometrie.

§ 56. Funktionen einfacher Winkel	98
§ 57. Funktionen zusammengesetzter Winkel	102

II. Das Dreieck etc.

§ 58. Formeln über das schiefwinklige Dreieck	103
§ 59. Berechnungen	107

Sphärische Trigonometrie.		Seite
§ 60.	Das rechtwinklige sphärische Dreieck	111
§ 61.	Das schiefwinklige sphärische Dreieck	113

Mathematische Geographie.

I. Beobachtungsmittel.

§ 62.	Koordinatensysteme	120
§ 63.	Lagebestimmung	122
§ 64.	Die Zeit	123

II. Das Sonnensystem.

§ 65.	Die Erde	124
§ 66.	Planeten, Sonne und Mond	125
§ 67.	Weltsysteme	126
§ 68.	Berechnungsaufgaben	127

Analytische Geometrie.

I. Geometrie der Ebene.

§ 69.	Änderung des Koordinatensystems	130
§ 70.	Allgemeine Sätze	130
Linie erster Ordnung (gerade Linie).		
§ 71.	Gleichungsformen; Lagebeziehungen	131
§ 72.	Größenbestimmungen und -Beziehungen	134
§ 73.	Polargleichung der Geraden	136
§ 74.	Strahlbüschel; Doppelverhältnis; projektivische Strahlbüschel	137
§ 75.	Homogene Gleichung der Geraden; trimetrische Punktkoordinaten	139
§ 76.	Linienkoordinaten; Gleichung des Punktes, Punktreihe, projektivische Punktreihen und Strahlbüschel	140
§ 77.	Homogene Gleichung des Punktes, trimetrische Linienkoordinaten	141

Linien zweiter Ordnung.

A. Der Kreis.

78.	Kurvengleichung; Sekante, Tangente, Polare u. s. f.	141
79.	Polarkoordinaten	144

B. Parabel, Ellipse, Hyperbel.

§ 80.	Kurvengleichungen; Sekante, Tangente, Polare u. s. f.	144
§ 81.	Sätze über Kegelschnitte	153
§ 82.	Konstruktion der Kegelschnitte	156
§ 83.	Allgemeine Gleichung zweiten Grades	160
§ 84.	Gleichungen weiterer Kurven	163

II. Geometrie des Raumes.

§ 85. Koordinaten- und Grössenbeziehungen	165
§ 86. Aenderung des Koordinatensystemes	166
§ 87. Allgemeine Sätze	167
§ 88. Die Ebene	168
§ 89. Gerade Linie, gerade Linie und Ebene	171
§ 90. Krumme Flächen	174
§ 91. Flächen zweiten Grades	178

Höhere Analysis.

A. Differentialrechnung.

§ 92. Funktion; unendlich kleine Grössen; Differential- quotient	180
§ 93. Allgemeine Formeln über Differentiation	183
§ 94. Spezielle Formeln	186
§ 95. Die Taylorsche und die Mac Laurinsche Reihe	187
§ 96. Werte unbestimmter Ausdrücke	189
§ 97. Grösste und kleinste Werte von Funktionen	190

B. Integralrechnung.

§ 98. Bezeichnung und Erklärung	191
§ 99. Integration einfacher Funktionen; Grundformeln	192
§ 100. Allgemeine Formeln; Integrationsweisen entwickel- ter Funktionen	193
§ 101. Bestimmte Integrale	196

C. Anwendung der Infinitesimalrechnung auf Geometrie.

§ 102. Ebene Kurven	199
§ 103. Raumkurven (doppelt gekrümmte Kurven)	203
§ 104. Krumme Flächen	206

§ 105. Viel gebrauchte Zahlenwerte	210
--	-----

Arithmetik, Algebra und niedere Analysis.

I. Abschnitt.

Grundoperationen und Kombinatorik.

§ 1. Benennungen.

Summe: $a + b$; a und b Summanden.

Differenz: $a - b$; a Minuend, b Subtrahend.

Produkt: $a \cdot b$; a und b Faktoren (a Multiplikator, b Multiplikand).

Quotient: $a : b$; a Dividend, b Divisor.

§ 2. Addition.

1. $a + b = b + a.$

2. $a + (b + c) = a + b + c$

$$= a + c + b = b + a + c = b + c + a$$

$$= c + a + b = c + b + a$$

2.' $a + (b + c + d + \dots) = a + b + c + d + \dots$

$$= b + a + c + d + \dots = \dots$$

3. $a + 0 = 0$; $0 + a = a$; $0 + 0 = 0.$

§ 3. Subtraktion.

1. Erklärung: $(a - b) + b = a.$

2. $a + b - b = a.$

3. $a - a = 0$; $a - 0 = a$; $0 - 0 = 0.$

§ 4. Negative Zahlen.

$$1. \text{ Erklärung: } \left\{ \begin{array}{l} 7 - 5 = 2 \\ 5 - 5 = 0 \\ 5 - 7 = -2 \end{array} \right. \quad \left| \quad \begin{array}{l} (a + b) - a = b \\ a - a = 0 \\ a - (a + b) = -b. \end{array} \right.$$

$$2. \left\{ \begin{array}{l} +a + (+b) = +a + b \\ -a + (+b) = -a + b \end{array} \right.$$

$$3. \left\{ \begin{array}{l} +a + (-b) = +a - b \\ -a + (-b) = -a - b \end{array} \right.$$

$$4. \left\{ \begin{array}{l} +a - (+b) = +a - b \\ -a - (+b) = -a - b \end{array} \right.$$

$$5. \left\{ \begin{array}{l} +a - (-b) = +a + b \\ -a - (-b) = -a + b \end{array} \right.$$

Zusammenstellung:

$$\left\{ \begin{array}{l} +(+b) = +b \\ -(-b) = +b \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} +(-b) = -b \\ -(+b) = -b \end{array} \right.$$

§ 5. Verbindung von Addition und Subtraktion.

Gesetze erster Stufe:

$$1. \left\{ \begin{array}{l} a + (b + c) = a + b + c \\ a + (b - c) = a + b - c \\ a + (b - c - d) = a + b - c - d \\ a + (-b + c - d) = a - b + c - d. \end{array} \right.$$

$$2. \left\{ \begin{array}{l} a - (b + c) = a - b - c \\ a - (b - c) = a - b + c \\ a - (-b + c - d) = a + b - c + d. \end{array} \right.$$

$$3. a - b + c - d = a + c - b - d = a + c - d - b \\ = -b + a + c - d = \dots\dots\dots$$

Klammerregeln:

1. Regel: Eine Klammer, vor der ein + Zeichen steht, kann ohne weiteres weggelassen werden; jedes in der Klammer befindliche Glied behält sein Zeichen.

2. Regel: Eine Klammer, vor der ein - Zeichen steht, kann weggelassen werden, wenn alle in der Klammer befindlichen freien + in - Zeichen und umgekehrt verwandelt werden.

3. Regel: Kommen in einem Ausdruck nur $+$ und $-$ Zeichen vor, so kann eine einem $+$ Zeichen folgende Reihe von Gliedern ohne weiteres von einer Klammer umschlossen werden; die einem $-$ Zeichen folgenden Glieder dürfen nur dann von einer Klammer umschlossen werden, wenn man die von der Klammer zu umschliessenden freien $+$ in $-$ Zeichen und umgekehrt verwandelt.

§ 6. Multiplikation.

Erklärung: $\begin{cases} 3 \cdot a = a + a + a \\ m \cdot a = a + a + \dots + a \text{ (m Summanden).} \end{cases}$

$$1. \quad 1 \cdot a = a; \quad 0 \cdot a = 0; \quad 0 \cdot 0 = 0.$$

$$2. \quad a \cdot b = b \cdot a.$$

$$3. \quad (a + b) \cdot c = ac + bc; \quad (a - b) \cdot c = ac - bc.$$

$$4. \quad \begin{cases} (a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd \\ (a + b)(c - d) = ac + bc - ad - bd \\ (a - b)(c + d) = ac - bc + ad - bd \\ (a - b)(c - d) = ac - bc - ad + bd. \end{cases}$$

Zusammenstellung.

$$5. \quad \begin{cases} (+b)(+d) = +bd, & \text{kurz: } + \cdot + = + \\ (+b)(-d) = -bd, & \text{„ } + \cdot - = - \\ (-b)(+d) = -bd, & \text{„ } - \cdot + = - \\ (-b)(-d) = +bd, & \text{„ } - \cdot - = + \end{cases}$$

$$6. \quad (-a)(-b)(-c) = -abc; \quad (-a)(-b)(-c)(-d) = +abcd.$$

Bei ungerader Zahl der negativen Faktoren ist das Produkt negativ, bei gerader Anzahl positiv.

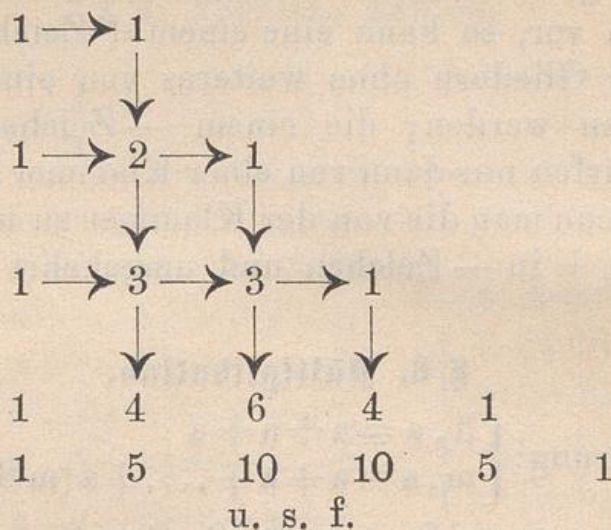
$$7. \quad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

$$8. \quad (a + b + c + d)^2 = a^2 + 2ab + 2ac + 2ad + b^2 + 2bc + 2bd + c^2 + 2cd + d^2.$$

$$9. \quad (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

$$10. \quad (a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

11. Binomialtafel:



(Binomischer Lehrsatz s. § 28.)

$$12. \begin{cases} a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \\ a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^5) \end{cases}$$

u. s. f.

$$13. \begin{cases} a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \\ a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) \end{cases}$$

u. s. f.

$$14. \begin{cases} a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \\ a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a + b)(a - b)(a^2 + b^2) \\ \quad = (a + b)(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3) \\ \quad = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) \end{cases}$$

u. s. f.

§ 7. Division.

$$\text{Erklärung: } \begin{cases} (a : b) \cdot b = a \\ a : b : b = a. \end{cases}$$

$$1. \begin{cases} (+a) : (+b) = + (a : b), & \text{kurz: } + : + = + \\ (-a) : (-b) = + (a : b), & \text{„ } - : - = + \\ (+a) : (-b) = - (a : b), & \text{„ } + : - = - \\ (-a) : (+b) = - (a : b), & \text{„ } - : + = -. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{array}{l} a : a = 1, \quad a : 1 = a, \quad 0 : a = 0; \\ 2. \quad \left\{ \begin{array}{l} a : 0 = \infty \text{ (wobei } 0 \text{ etwas unendlich Kleines);} \\ 0 : 0 = \text{unbestimmte Zahl.} \end{array} \right. \end{array} \right. \\
 & \left\{ \begin{array}{l} (a + b) : m = (a : m) + (b : m) \\ 3. \quad \left\{ \begin{array}{l} (a - b) : m = (a : m) - (b : m) \\ (a - b + c - d) : m = (a : m) - (b : m) + (c : m) - (d : m). \end{array} \right. \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

§ 8. Verbindung von Multiplikation und Division.

Gesetze zweiter Stufe:

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \left\{ \begin{array}{l} a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c \\ a \cdot (b : c) = a \cdot b : c \\ a \cdot (b \cdot c : d \cdot e) = a \cdot b \cdot c : d \cdot e. \end{array} \right. \\
 2. \quad & \left\{ \begin{array}{l} a : (b \cdot c) = a : b : c \\ a : (b : c) = a : b \cdot c \\ a : (b \cdot c : d \cdot e) = a : b : c \cdot d : e. \end{array} \right. \\
 3. \quad & a : b \cdot c : d = a \cdot c : b : d = c \cdot a : b : d = c : b \cdot a : d = \text{etc.}
 \end{aligned}$$

Klammerregeln:

1. Regel: Kommen in einer Klammer nur freie Rechenzeichen zweiter Stufe vor und steht vor derselben 1. ein Multiplikations- oder 2. ein Divisionszeichen, so darf die Klammer im ersten Fall ohne weiteres, im zweiten nur dann weggelassen werden, wenn man sämtliche freien Multiplikations- in Divisionszeichen und umgekehrt verwandelt.

2. Regel: Kommen in einem Ausdruck nur Rechenzeichen zweiter Stufe vor, so kann eine beliebige einem .Zeichen folgende Reihe von Gliedern ohne weiteres von einer Klammer umschlossen werden; die einem :Zeichen folgenden Glieder dürfen nur dann von einer Klammer umschlossen werden, wenn man die von der Klammer zu umschliessenden freien . in :Zeichen und umgekehrt verwandelt.

§ 9. Klammerlose Ausdrücke.

1. Kommen in einem Ausdruck nur Rechenzeichen gleicher Stufe vor (nur $+$ und $-$ oder nur $\cdot$ und $:$), so darf die Reihenfolge der Glieder beliebig geändert werden, doch darf kein Divisor erstes Glied werden (s. § 5₃ und § 8₃).

2. Der Gang der Rechnung ist von links nach rechts, die höhere Rechenweise ist vor der niederen auszuführen.

§ 10. Brüche.

$$\text{Erklärung: } \begin{cases} \frac{a}{b} \cdot b = a \\ \frac{a b}{b} = a \end{cases}$$

$$1. \begin{cases} \frac{a}{a} = 1, & \frac{a}{1} = a, & \frac{0}{a} = 0 \\ \frac{a}{0} = \infty \text{ (s. § 7,2),} & \frac{0}{0} = \text{unbestimmte Zahl.} \end{cases}$$

$$2. \frac{a}{x} \pm \frac{b}{x} = \frac{a \pm b}{x}$$

$$3. a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a b}{c}, \quad \frac{b}{c} \cdot a = \frac{b a}{c}$$

$$4. \frac{a}{b} : c = \frac{a}{b c}$$

$$5. a : \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b} = \frac{a c}{b}$$

$$6. \frac{a n}{b n} = \frac{a}{b}, \quad \frac{a : n}{b : n} = \frac{a}{b}$$

$$7. \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a c}{b d}$$

$$8. \left\{ \begin{array}{l} + \frac{+a}{+b} = + \frac{a}{b}, \quad + \frac{-a}{-b} = + \frac{a}{b} \\ + \frac{+a}{-b} = + \frac{-a}{+b} = - \frac{a}{b}, \quad - \frac{+a}{-b} = - \frac{-a}{+b} = + \frac{a}{b} \\ \frac{a-b}{c-d} = \frac{b-a}{d-c} = - \frac{b-a}{c-d} = - \frac{a-b}{d-c} \end{array} \right.$$

§ 11. Proportionen.

Wenn $a : b = c : d$, dann ist $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ und

$$1. \quad \begin{array}{l|l} a : c = b : d, & c : a = d : b, \\ b : a = d : c, & c : d = a : b, \\ b : d = a : c, & d : b = c : a, \\ & d : c = b : a, \text{ d. h.:} \end{array}$$

In einer Proportion kann man die inneren Glieder unter sich, die äussern Glieder unter sich vertauschen und es dürfen die inneren Glieder zu äusseren, und die äusseren zu inneren gemacht werden.

$$2. \quad ad = bc, \text{ d. h.:}$$

Das Produkt der äusseren Glieder ist gleich dem Produkt der inneren.

Umgekehrt: Sind zwei Produkte aus je zwei Faktoren einander gleich, so kann aus denselben eine Proportion gebildet werden. Die Faktoren des einen Produkts werden die äusseren, die des andern die inneren Glieder der Proportion.

$$3. \quad \begin{array}{l|l} am : bm = c : d, & (a : m) : (b : m) = c : d, \\ am : b = cm : d, & (a : m) : b = (c : m) : d, \text{ d. h.:} \end{array}$$

In einer Proportion darf ein inneres und ein äusseres Glied zugleich mit derselben Zahl multipliziert oder dividiert werden.

$$4. \quad a^n : b^n = c^n : d^n, \quad \left| \quad \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d} \right.$$

5. Korrespondierende Addition:

$$a : (a + b) = c : (c + d) \mid b : (a + b) = d : (c + d).$$

Korrespondierende Subtraktion:

$$a : (a - b) = c : (c - d) \mid b : (a - b) = d : (c - d).$$

Korrespondierende Addition und Subtraktion:

$$(a + b) : (a - b) = (c + d) : (c - d).$$

Das erste oder zweite Glied einer Proportion verhält sich zur Summe oder Differenz des ersten und zweiten, wie das dritte oder vierte Glied zur Summe oder Differenz des dritten und vierten.

Die Summe des ersten und zweiten Glieds verhält sich zur Differenz derselben wie die Summe des dritten und vierten Glieds zur Differenz derselben.

6. Wenn $a : a_1 = b : b_1 = c : c_1 = \dots = w : 1$, dann ist

$$(a + b + c + \dots) : (a_1 + b_1 + c_1 + \dots) = a : a_1 = \dots = w : 1,$$

und

$$(a m + b n + c p + \dots) : (a_1 m + b_1 n + c_1 p + \dots) = a : a_1 = \dots = w : 1.$$

7. Wenn

$$a : b = c : d$$

$$a_1 : b_1 = c_1 : d_1, \text{ dann ist}$$

$$\begin{cases} (a a_1) : (b b_1) = (c c_1) : (d d_1) \text{ und} \\ (a : a_1) : (b : b_1) = (c : c_1) : (d : d_1). \end{cases}$$

8. Wenn

$$a : b = c : d \text{ und}$$

$$a : b = c : x, \text{ dann ist}$$

$$x = d.$$

9. Stetige Proportion: $a : x = x : b$.

10. Harmonische Proportion:

$$(a - b) : (c - d) = a : d;$$

stetige harmonische Proportion:

$$(a - x) : (x - b) = a : b.$$

11. a) Arithmetisches Mittel aus a und b :

$$x = \frac{a + b}{2}.$$

b) Geometrisches Mittel aus a und b :

$$x = \sqrt{ab}.$$

c) Harmonisches Mittel aus a und b :

$$x = \frac{2ab}{a+b}, \text{ also } \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right),$$

Bei drei Grössen a, b, c ist

$$\text{a) } x = \frac{a+b+c}{3}, \text{ b) } x = \sqrt[3]{abc}, \text{ c) } \frac{1}{x} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

§ 12. Potenzen mit ganzen Exponenten.

I. Positive, ganze Exponenten.

$$\begin{cases} a^3 = a \cdot a \cdot a \\ a^m = a \cdot a \cdot \dots \cdot a \text{ (m Faktoren),} \end{cases}$$

a heisst Basis, m Exponent, a^m Potenz.

$$1. a^1 = a, 0^n = 0, 1^n = 1, a^0 = 1; a^\infty = \begin{cases} 0 \\ 1, \text{ wenn } a \leq 1 \\ \infty \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} (-1)^{2n} = +1, & (-1)^{2n+1} = -1 \\ (-a)^{2n} = +a^{2n}, & (-a)^{2n+1} = -a^{2n+1} \\ (a-b)^{2n} = (b-a)^{2n}, & (a-b)^{2n+1} = -(b-a)^{2n+1}. \end{cases}$$

$$3. a^m \cdot a^r = a^{m+r}$$

$$a^m : a^r = \begin{cases} a^{m-r}, & \text{wenn } m > r \\ 1, & \text{„ } m = r \\ \frac{1}{a^{r-m}}, & \text{„ } m < r \end{cases}$$

$$4. (ab)^m = a^m b^m$$

$$5. \left(\frac{a}{b} \right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

$$6. (a^m)^r = a^{mr}$$

$$7. \frac{a^m - b^m}{a - b} = a^{m-1} + a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 + \dots + ab^{m-2} + b^{m-1}.$$

$$8. \left. \frac{a^m - b^m}{a - b} \right|_{a=b} = \frac{0}{0} = m a^{m-1}.$$

II. Negative Exponenten.

Erklärung: $a^{-m} = \frac{1}{a^m}.$

$$1. \begin{cases} a^m \cdot a^{-r} = a^{m-r} \\ a^{-m} \cdot a^r = a^{-m+r} \\ a^{-m} \cdot a^{-r} = a^{-m-r} = a^{-(m+r)}. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} a^m : a^{-r} = a^{m+r} \\ a^{-m} : a^r = a^{-m-r} \\ a^{-m} : a^{-r} = a^{-m+r}. \end{cases}$$

$$3. (ab)^{-m} = a^{-m} b^{-m}.$$

$$4. \left(\frac{a}{b} \right)^{-m} = \frac{a^{-m}}{b^{-m}} = \left(\frac{b}{a} \right)^m.$$

$$5. \begin{cases} (a^m)^{-r} = a^{-mr} \\ (a^{-m})^r = a^{-mr} \\ (a^{-m})^{-r} = a^{mr}. \end{cases}$$

§ 13. Wurzeln.

Erklärung: Wenn $x^n = a$, dann $x = \sqrt[n]{a}$, also

$$\left(\sqrt[n]{a} \right)^n = a, \quad \sqrt[n]{a^n} = a$$

Benennungen: Bei $\sqrt[n]{a}$ heisst a Radikand, n Wurzelexponent;

$$\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$$

I. Wurzelformeln:

$$1. \sqrt[n]{1} = 1; \sqrt[n]{0} = 0; \sqrt[2n+1]{1} = 1; \sqrt[2n+1]{-1} = -1.$$

$$2. \sqrt[n]{a} = a; \quad \sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = a, \quad \sqrt[2n+1]{-a^{2n+1}} = -a;$$

$$\sqrt[2n]{(-a)^{2n}} = -a.$$

$$3. \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}.$$

$$4. \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a:b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

$$5. \sqrt[n]{a^r} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^r.$$

$$6. \sqrt[n]{a^r} = \sqrt[nx]{a^{rx}}; \quad -\sqrt[n]{a^r} = \sqrt[n]{a^{-r}}.$$

$$7. \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}.$$

$$8. a \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}.$$

II. Rationalmachen des Nenners:

$$1. \frac{z}{\sqrt[n]{a}} = \frac{z \sqrt[n]{a}}{a}; \quad \frac{z}{\sqrt[n]{a}} = \frac{z \sqrt[n]{a^{n-1}}}{a}.$$

$$2. \frac{z}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{z(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{a - b};$$

$$\frac{z}{\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}} = \frac{z(\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})}{a \pm b}$$

$$3. \frac{z}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} = \frac{z(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - c}$$

$$= \frac{z(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})(a + b - c - 2\sqrt{ab})}{(a + b - c)^2 - 4ab};$$

besonderer Fall $a + b = c$.

$$\begin{aligned}
 4. \quad \frac{z}{\sqrt{a + \sqrt{b}}} &= \frac{z \sqrt{a + \sqrt{b}}}{a + \sqrt{b}} = \frac{z \sqrt{a + \sqrt{b}} (a - \sqrt{b})}{a^2 - b} \\
 &= \frac{z \sqrt{(a^2 - b)(a - \sqrt{b})}}{a^2 - b}.
 \end{aligned}$$

III. Zerlegung einer Quadrat-Wurzel:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+r}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-r}{2}}, \text{ wobei } r = \sqrt{a^2 - b}.$$

IV. Beispiele für Quadrat- und Kubikwurzelauszziehung:

$$1. \sqrt{12 | 53 | 16} = 354$$

$$\begin{array}{r}
 9 \\
 6 \overline{) 353} \\
 \underline{325} \\
 70 \overline{) 2816} \\
 \underline{2816} \\
 \hline
 \text{====}
 \end{array}$$

$$2. \sqrt[3]{44 | 361 | 864} = 354$$

$$\begin{array}{r}
 27 \\
 27 \overline{) 17361} \\
 \underline{135} \\
 225 \\
 \underline{125} \\
 3675 \overline{) 1486864} \\
 \underline{14700} \\
 1680 \\
 \underline{64} \\
 \hline
 \text{=====}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 3. \sqrt[3]{\left(25x^6 - 30x^5 + 79x^4 - 57x^3 + 58x^2 - 21x + \frac{9}{4}\right)} & & \\
 \quad \underline{+ 25x^6} & & \\
 10x^3 \overline{) -30x^5 + 79x^4} & = 5x^3 - 3x^2 + 7x - \frac{3}{2} & \\
 \quad \underline{+ 30x^5 + 9x^4} & & \\
 10x^3 - 6x^2 \overline{) + 70x^4} & & \\
 \quad \underline{+ 70x^4 + 42x^3 + 49x^2} & & \\
 10x^3 - 6x^2 + 14x \overline{) -15x^3 + 9x^2} & & \\
 \quad \underline{+ 15x^3 + 9x^2 + 21x + \frac{9}{4}} & & \\
 & = & = & = & =
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 4. \sqrt[3]{(125x^9 - 225x^8 + 660x^7 - 657x^6 + 924x^5 - 441x^4 + 343x^3)} & & \\
 \quad \underline{+ 125x^9} & = 5x^3 - 3x^2 + 7x & \\
 75x^6 \overline{) -225x^8} & & \\
 \quad \underline{+ 225x^8 + 135x^7 + 27x^6} & & \\
 75x^6 - 90x^5 + 27x^4 \overline{) + 525x^7 - 630x^6} & & \\
 \quad \underline{+ 525x^7 + 630x^6 + 189x^5} & & \\
 & \underline{+ 735x^5 + 441x^4 + 343x^3} & \\
 & = & = & = & =
 \end{array}$$

§ 14. Potenzen mit gebrochenen Exponenten.

Erklärung: $a^{\frac{r}{n}} = \sqrt[n]{a^r}$; $a^{\frac{r}{n}} = a^{\frac{-r}{n}} = a^{-\frac{r}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{r}{n}}} = \sqrt[n]{a^{-r}}$

$$= \sqrt[n]{a^r} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^{-r}}}$$

$$1. \frac{r}{n} = 1; \quad 0^{\frac{r}{n}} = 0.$$

$$2. a^{\frac{r}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{r}{n} + \frac{p}{q}}.$$

$$3. a^{\frac{r}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{r}{n} - \frac{p}{q}}.$$

$$4. (a \cdot b)^{\frac{r}{n}} = a^{\frac{r}{n}} b^{\frac{r}{n}}.$$

$$5. (a : b)^{\frac{r}{n}} = a^{\frac{r}{n}} : b^{\frac{r}{n}}.$$

$$6. \left(\frac{r}{a^n}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{r}{n}} \cdot \frac{p}{q}.$$

§ 15. Imaginäre und komplexe Zahlen.

Erklärung: $\sqrt{-1} = i$ (imaginäre Einheit),
 $\sqrt{-a} = i \sqrt{a}$ (imaginäre Zahl),
 $a + bi$ (komplexe Zahl; Normalform).

$$1. \quad \begin{array}{ll} i = i & i^{4n} = +1 \\ i^2 = -1 & i^{4n+1} = i \\ i^3 = -i & i^{4n+2} = -1 \\ i^4 = +1 & i^{4n+3} = -i. \end{array}$$

$$2. \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = i^2 \sqrt{ab} = -\sqrt{ab}; (\sqrt{-a})^2 = -a;$$

$$\sqrt{-a} : \sqrt{-b} = \sqrt{a : b}.$$

$$3. \text{Konjugierte komplexe Zahlen: } a + bi \text{ und } a - bi,$$

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2.$$

$$4. \text{Wenn } a + bi = 0, \text{ dann ist } a = 0 \text{ und } b = 0,$$

$$,, \quad a + bi = x + iy, \text{ dann ist } a = x, b = y.$$

$$5. \text{Setzt man: } a = r \cos \varphi \text{ (}\varphi \text{ Anomalie),}$$

$$b = r \sin \varphi \text{ (}r \text{ Modulus),}$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \text{ dann ist}$$

$$\underline{a + bi} = r (\cos \varphi + i \sin \varphi) \text{ (Kanonische Form)}$$

allgemeiner:

$$\underline{a + bi} = r ((\cos \varphi + 2k\pi) + i \sin (\varphi + 2k\pi)).$$

$$6. (\cos \varphi + i \sin \varphi) (\cos \psi + i \sin \psi)$$

$$= \cos (\varphi + \psi) + i \sin (\varphi + \psi).$$

7. Moivre's Formel:

$$(\cos \varphi \pm i \sin \varphi)^{\frac{m}{n}} = \cos \frac{m}{n}(2k\pi + \varphi) \pm i \sin \frac{m}{n}(2k\pi + \varphi);$$

$$\text{im einzelnen: } (\cos \varphi \pm i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi \pm i \sin n\varphi$$

$$(\cos \varphi \pm i \sin \varphi)^{\frac{1}{n}} = \cos \frac{2k\pi + \varphi}{n} \pm i \sin \frac{2k\pi + \varphi}{n}.$$

§ 16. Logarithmen.

Erklärung: Wenn $c^x = a$, dann ist $x = \log_c a$, daher

$$c^{\log_c a} = a; \log_c (c^n) = n; \log_c (c^{-n}) = -n$$

c heisst die Basis, a der Logarithmand, n der Logarithmus.

$$1. \log ab = \log a + \log b$$

$$2. \log \frac{a}{b} = \log a - \log b$$

$$3. \log a^n = n \log a$$

$$4. \log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log a$$

$$5. \log_c c = 1; \log_c 1 = 0; \log_c 0 = -\infty; \log_c \infty = \infty$$

6. die Basis der künstlichen, oder gemeinen, oder Briggschen Logarithmen ist 10; die Basis der natürlichen Logarithmen, welche mit $\log \text{ nat}$, oder $\log n$ oder l bezeichnet werden, ist $e = 2,71828 \dots$ (s. § 29)

$$7. \log_a a = \frac{\log_c a}{\log_c a}; \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

8. Umrechnung der gemeinen in natürliche Logarithmen:

$$a) l 10 = \log_e 10 = \frac{\log_{10} 10}{\log_{10} e} = \frac{1}{0,43429 \dots} = 2,30259 \dots$$

$$b) l a = \log a = \frac{\log a}{\log e} = \log a \cdot 2,30259 \dots$$

Weiteres über Logarithmen s. § 29.

§ 17. Kettenbrüche.

1. Verwandlung eines gewöhnlichen Bruches in einen Kettenbruch:

$$a) \frac{14}{47} = \frac{1}{\frac{47}{14}} = \frac{1}{3 + \frac{5}{14}} = \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{14}{5}}} = \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{4}{5}}} \\ = \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{5}{4}}}} = \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}}}$$

$$b) \begin{array}{r|l} 14 & 47 \\ \hline & 42 \\ \hline 5 & 14 \\ & 10 \\ \hline 4 & 5 \\ & 4 \\ \hline 1 & 4 \\ & 4 \end{array}$$

die Nenner sind 3, 2, 1, 4.

2. Statt eines Kettenbruches k kann man stets folgenden schreiben:

$$\frac{1}{0 + \frac{1}{0 + k}}, \text{ dessen erster Näherungswert } \frac{1}{0}, \text{ dessen zweiter } \frac{0}{1} \text{ ist.}$$

3. Verwandlung eines Kettenbruches in einen gewöhnlichen Bruch.

Sind $\frac{A_1}{B_1}, \frac{A_2}{B_2}$ u. s. f. die einzelnen Näherungswerte
des Kettenbruches $\frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$, so ist:

$$\frac{A_{r+1}}{B_{r+1}} = \frac{a_{r+1} A_r + A_{r-1}}{a_{r+1} B_r + B_{r-1}}; \frac{A_1}{B_1} = \frac{1}{a_1}; \frac{A_2}{B_2} = \frac{a_2}{a_2 a_1 + 1}$$

u. s. f.

Schema:

		a_1	a_2	a_3
$\frac{1}{0}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{a_1}$	$\frac{a_2}{a_2 a_1 + 1}$	$\frac{a_3 a_2 + 1}{a_3 (a_2 a_1 + 1) + a_1}$

		3	2	1	4
$\frac{1}{0}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{14}{47}$

4. $A_{r-1} \cdot B_r - A_r \cdot B_{r-1} = (-1)^r$

$$\frac{A_{r-1}}{B_{r-1}} - \frac{A_r}{B_r} = \frac{(-1)^r}{B_{r-1} \cdot B_r}$$

$$\frac{A_{r-1}}{B_{r-1}} - \frac{A_r}{B_r} < \frac{(-1)^r}{B_{r-1}^2}$$

5. Sätze:

1. Die aufeinanderfolgenden Näherungswerte (N.-W.) eines Kettenbruches sind abwechselnd grösser und kleiner als der wahre Wert derselben und zwar sind die ungeraden (der 1., 3. . . .) grösser, die geraden (der 2., 4. . . .) kleiner als der wahre Wert des Kettenbruches.
2. Jeder N.-W. liegt dem wahren Wert des K.-Br. näher als der vorhergehende.
3. Der Unterschied des wahren Wertes des K.-Br.

- und eines N.-W. ist kleiner als der reziproke Wert des Quadrates vom Nenner dieses N.-W.
4. Die N.-W. eines K.-Br. sind in den kleinsten Zahlen ausgedrückt, d. h. Zähler und Nenner sind relative Primzahlen.
 5. Kein Bruch, dessen Nenner kleiner ist als der Nenner eines N.-W., kommt dem wahren Wert des K.-Br. näher als dieser N.-W.

§ 18. Kombinationslehre.

I. Permutationen.

1. Die Permutationen aus n Elementen bestehen aus den Komplexionen, in denen sämtliche Elemente vorkommen; die Gruppen unterscheiden sich nur durch die Stellung der Elemente.

Die Permutationen von a, b, c, d sind:

$a b c d$	$b a c d$	$c a b d$	$d a b c$
$a b d c$	$b a d c$	$c a d b$	$d a c b$
$a c b d$	$b c a d$	$c b a d$	$d b a c$
$a c d b$	$b c d a$	$c b d a$	$d b c a$
$a d b c$	$b d a c$	$c d a b$	$d c a b$
$a d c b$	$b d c a$	$c d b a$	$d c b a$

2. Die Anzahl der Permutationen aus n verschiedenen Elementen ist:

$$P(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) \cdot n \\ = n! \text{ („n Fakultät“)}$$

3. Sind unter den n Elementen α unter sich gleiche Elemente, ebenso ferner β und γ je unter sich gleiche Elemente, so ist die Anzahl der Permutationen:

$$P(n) = \frac{n!}{\alpha! \beta! \gamma!}$$

Bestehen die n Elemente aus 2 Gruppen von r und $n - r$ je unter sich gleichen Elementen, dann ist die Anzahl:

$$P(n) = \frac{n!}{r! (n-r)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!}$$

$$= \binom{n}{r}, \text{ vergl. § 21.}$$

4. Irgend zwei Elemente einer Komplexion bilden eine Nichtfolge (Inversion), wenn das erste Element höher ist als das zweite.

Durch Vertauschung zweier Elemente einer Komplexion ändert sich die Zahl der Nichtfolgen um eine ungerade Zahl.

II. Variationen.

5. Die Variationen aus n Elementen der r ten Klasse bestehen aus allen Komplexionen, die sich aus je r der n Elemente bilden lassen. Die Variationen zweiter Klasse der 4 Elemente $a b c d$ sind:

ohne Wiederholung			mit Wiederholung			
$a b$	$a c$	$a d$	$a a$	$a b$	$a c$	$a d$
$b a$	$b c$	$b d$	$b a$	$b b$	$b c$	$b d$
$c a$	$c b$	$c d$	$c a$	$c b$	$c c$	$c d$
$d a$	$d b$	$d c$	$d a$	$d b$	$d c$	$d d$

6. Die Anzahl der Variationen aus n Elementen zur r ten Klasse ist

$$V_r(n) = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1) = \binom{n}{r} \cdot r! \quad (\text{s. § 21})$$

$$V_n(n) = n(n-1)(n-2)\dots 1 = n! \quad (\text{Permutationen}).$$

7. Die Anzahl der Variationen mit Wiederholung ist: $V'_r(n) = nr$.

III. Kombinationen.

8. Die Kombinationen aus n Elementen zur r ten Klasse sind die Komplexionen, die sich aus je r der

n Elemente bilden lassen, wobei aber blosser Verstellung der Glieder keine neue Kombination ergibt.

Die Kombinationen der vier Elemente a, b, c, d zur zweiten Klasse sind:

ohne Wiederholung: ab, ac, ad, bc, bd, cd ;

mit „ aa, ab, ac, ad; bb, bc, bd; cc, cd; dd.

9. Die Anzahl der Kombinationen aus n Elementen zur r ten Klasse ist

$$K_r(n) = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Aus den Kombinationen ergeben sich die Variationen, wenn man die Elemente der einzelnen Kombinationen permutiert.

10. Die Anzahl der Kombinationen aus n Elementen zur r ten Klasse mit Wiederholung ist

$$K'_r(n) = \frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+r-1)}{r!} = \binom{n+r-1}{r}.$$

§ 19. Determinanten.

$$1. \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Unter der Determinante eines Systems von n^2 Elementen $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ versteht man die Summe $\Sigma(\pm a_1 b_2 c_3 \dots)$, in welcher jedes Glied alle Buchstaben und Indices ohne Wiederholung enthält und welche zugleich alle möglichen Produkte umfasst, die durch Permutation der Indices gebildet werden können. Jedes (alphabetisch geordnete) Glied ist

positiv oder negativ zu setzen, je nachdem die Anzahl der Nichtfolgen der Indices gerade oder ungerade ist.

2. Der Wert einer Determinante wird nicht geändert, wenn die Vertikal- als Horizontalreihen und umgekehrt geschrieben werden. Z. B.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

3. Werden irgend zwei Horizontal- oder zwei Vertikalreihen mit einander vertauscht, so ändert sich das Vorzeichen der Determinante.

4. Sind in einer Determinante zwei Horizontal- oder zwei Vertikalreihen völlig übereinstimmend, so ist der Wert der Determinante gleich Null.

5. Bezeichnet man in einer Determinante Δ den Faktor von a_r mit A_r (Unterdeterminante), den von b_r mit B_r , dann ist

$$\Delta = a_1 A_1 + a_2 A_2 + \dots + a_n A_n$$

$$= b_1 B_1 + b_2 B_2 + \dots + b_n B_n$$

$$= \dots, \text{ ferner ist}$$

$$b_1 A_1 + b_2 A_2 + \dots + b_n A_n = c_1 A_1 + c_2 A_2 + \dots + c_n A_n = 0.$$

6. Wenn alle Elemente einer Horizontal- oder einer Vertikalreihe mit demselben Faktor multipliziert sind, so ist die Determinante mit diesem Faktor multipliziert. Z. B.

$$\begin{vmatrix} ka_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & b_2 & c_2 \\ ka_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Sind alle Elemente einer Reihe 0, so ist die ganze Determinante gleich Null.

7. Wenn jedes Element einer Reihe eine Summe zweier Grössen ist, so ist die Determinante in die Summe zweier Determinanten zerlegbar; z. B.

$$\begin{vmatrix} a_1 + \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\text{oder: } (a_1 + \alpha_1)A_1 + (a_2 + \alpha_2)A_2 + (a_3 + \alpha_3)A_3 = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 + \alpha_1A_1 + \alpha_2A_2 + \alpha_3A_3.$$

Bestehen die Glieder einer Reihe aus m , die einer andern aus n und die einer dritten aus p Summanden, so ist die Determinante in $m \cdot n \cdot p$ Determinanten zerlegbar.

8. Der Wert einer Determinante bleibt unverändert, wenn man zu den Elementen einer Reihe beliebige, gleich vielfache der entsprechenden Elemente einer andern Reihe addiert; z. B.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 + ka_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 + ka_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 + ka_3 \end{vmatrix}$$

9. Wenn

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ und } \Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}, \text{ dann ist}$$

$$D \cdot \Delta = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1\gamma_1 & a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 + c_1\gamma_2 & a_1\alpha_3 + b_1\beta_3 + c_1\gamma_3 \\ a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 + c_2\gamma_1 & a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 + c_2\gamma_2 & a_2\alpha_3 + b_2\beta_3 + c_2\gamma_3 \\ a_3\alpha_1 + b_3\beta_1 + c_3\gamma_1 & a_3\alpha_2 + b_3\beta_2 + c_3\gamma_2 & a_3\alpha_3 + b_3\beta_3 + c_3\gamma_3 \end{vmatrix}$$

10. Wenn alle diejenigen Elemente einer Determinante verschwinden, welche m Vertikal- mit $n - m$ Horizontalreihen gemeinschaftlich haben, so lässt sich dieselbe in das Produkt zweier Determinanten zerlegen; z. B.:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ 0 & 0 & c_3 & d_3 & e_3 \\ 0 & 0 & c_4 & d_4 & e_4 \\ 0 & 0 & c_5 & d_5 & e_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_3 & d_3 & e_3 \\ c_4 & d_4 & e_4 \\ c_5 & d_5 & e_5 \end{vmatrix}$$

11. Jede Determinante kann auf folgende Weise erweitert werden:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ 0 & 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

§ 20. Wahrscheinlichkeitsrechnung.

1. Ist für ein Ereignis die Anzahl aller möglichen Fälle m , die der günstigen Fälle (Treffer) t , so ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen:

$$w = \frac{t}{m},$$

für das Nichteintreffen

$$u = \frac{m - t}{m} = 1 - w, \text{ also}$$

$$\text{I. } w + u = 1.$$

2. Ist bei m möglichen Fällen $w_1 = \frac{t_1}{m}$ die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des Ereignisses E_1 und $w_2 = \frac{t_2}{m}$ diejenige für das Eintreffen von E_2 , so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass entweder E_1 oder E_2 eintritt:

$$\text{II. } W = w_1 + w_2.$$

3. Die Wahrscheinlichkeit, dass mehrere Ereignisse $E_1, E_2, E_3 \dots$ gleichzeitig (oder nacheinander) eintreffen, ist:

$$\text{III. } W = w_1 \cdot w_2 \cdot w_3 \dots$$

4. Die Wahrscheinlichkeit, dass von zwei Ereignissen E_1 und E_2 das erste eintrifft, ist

$$\text{IV. } W = \frac{w_1}{w_1 + w_2}.$$

5. Soll von zwei Ereignissen E_1 und E_2 eintreten:

1. E_1 und E_2 , so ist $W = w_1 \cdot w_2$;

2. E_1 , aber nicht E_2 , so ist $W = w_1 (1 - w_2)$;

3. E_1 nicht, aber E_2 , so ist $W = (1 - w_1) \cdot w_2$;

4. Eines, aber nicht beide, so ist $W = w_1 (1 - w_2) + (1 - w_1) \cdot w_2$;

5. Höchstens eines von beiden, so ist

$$W = 1 - w_1 w_2;$$

6. Wenigstens eines von beiden, so ist

$$W = w_1 + w_2 - w_1 w_2;$$

7. Beide oder keines, so ist $W = 1 - w_1 (1 - w_2) - (1 - w_1) w_2$;

8. E_1 n mal, E_2 m mal in bestimmter Reihenfolge, dann ist $W = w_1^n \cdot w_2^m$; ist die Reihenfolge beliebig, dann ist

$$W = \frac{(n + m)!}{n! m!} w_1^n \cdot w_2^m.$$

§ 21. Binomialkoeffizienten.

1. Der Bruch $\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!} = \binom{n}{r}$,

gelesen „ n über r “, heisst Binomialkoeffizient.

2. Ist n positiv und ganz, so wird $\binom{n}{r} = 0$, wenn

Arithmetik, Algebra und niedere Analysis.

I. Abschnitt.

Grundoperationen und Kombinatorik.

§ 1. Benennungen.

Summe: $a + b$; a und b Summanden.

Differenz: $a - b$; a Minuend, b Subtrahend.

Produkt: $a \cdot b$; a und b Faktoren (a Multiplikator, b Multiplikand).

Quotient: $a : b$; a Dividend, b Divisor.

§ 2. Addition.

1. $a + b = b + a.$

2. $a + (b + c) = a + b + c$

$$= a + c + b = b + a + c = b + c + a$$

$$= c + a + b = c + b + a$$

2.' $a + (b + c + d + \dots) = a + b + c + d + \dots$

$$= b + a + c + d + \dots = \dots$$

3. $a + 0 = 0$; $0 + a = a$; $0 + 0 = 0.$

§ 3. Subtraktion.

1. Erklärung: $(a - b) + b = a.$

2. $a + b - b = a.$

3. $a - a = 0$; $a - 0 = a$; $0 - 0 = 0.$

$r > n$; ist aber n gebrochen oder negativ, so wird $\binom{n}{r}$ für keinen Wert von r Null.

$$\binom{n}{1} = n; \quad \binom{n}{n} = 1; \quad \binom{n}{0} = 1.$$

$$3. \quad \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} = \frac{n!}{(n-r)! r!}.$$

$$4. \quad \binom{n+1}{r} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1}.$$

$$5. \quad \binom{n+1}{r+1} = \binom{n}{r} + \binom{n-1}{r} + \binom{n-2}{r} + \dots + \binom{r}{r}.$$

$$6. \quad \binom{m+n}{r} = \binom{m}{r} \binom{n}{0} + \binom{m}{r-1} \binom{n}{1} + \binom{m}{r-2} \binom{n}{2} \\ + \dots + \binom{m}{1} \binom{n}{r-1} + \binom{m}{0} \binom{n}{r}.$$

II. Abschnitt.

Reihen.

A. Endliche Reihen.

§ 22. Arithmetische Reihen erster Ordnung.

Reihe: $a, a + d, a + 2d, \dots, a + (n-1)d.$

$$1. \quad z = a + (n-1)d.$$

$$2. \quad s = \frac{(a + z) \cdot n}{2} = \frac{(2a + (n-1)d) \cdot n}{2}.$$

§ 23. Geometrische Reihen.

Reihe: $a, aq, aq^2, aq^3, \dots, aq^{n-1}.$

$$1. \quad z = aq^{n-1}.$$

$$2. \quad s = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{qz - a}{q - 1}.$$

3. Ist $n = \infty$ und $0 < q < 1$, dann ist $s = \frac{a}{1-q}$.

$$4. \left. \begin{aligned} 1 + x + x^2 + x^3 + \dots &= \frac{1}{1-x} \\ 1 - x + x^2 - x^3 + \dots &= \frac{1}{1+x} \end{aligned} \right\} 0 < x < 1.$$

§ 24. Zinseszins- und Rentenrechnung.

Zinsfuß p %, Zinsfaktor $q \left(= 1 + \frac{p}{100} \right)$, ursprüngliches Kapital a , angewachsenes b , Zahl der Zinsperioden (Jahre) n , Rente r .

1. $b = a q^n$ (Zinseszinsformel).

2. $b = a q^n \pm \frac{r(q^n - 1)}{q - 1}$ (erste Rentenformel).

3. $b = \frac{r(q^n - 1)}{q - 1}$ (zweite Rentenformel).

4. $b = \frac{r q (q^n - 1)}{q - 1}$ (dritte Rentenformel).

5. $a = r \cdot \frac{q^n - 1}{(q - 1) \cdot q^n} = \frac{r}{q - 1} \left(1 - \frac{1}{q^n} \right).$

5'. $a = \frac{r}{q - 1}$ ($n = \infty$).

6. $b q^n = b \frac{p_1}{100} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$

1. Gibt den Endwert an, auf den das Kapital a in n Jahren durch Zinseszins anwächst.

2. Gibt den Endwert an, den a durch Zinseszins erreicht, wenn dasselbe am Ende jedes Jahres noch um r vermehrt oder vermindert wird; wird a in n Jahren aufgezehrt, so ist $b = 0$.

3. Gibt die Summe an, welche bis zum Ende des

nten Jahres erreicht ist, durch eine am Ende jedes Jahres erfolgende Zahlung r .

4. Stellt denselben Wert dar wie 3, wofern die Zahlung r am Jahresanfang geleistet wird.

5. a ist das Ablösungskapital (Mise) einer n mal am Jahresende wiederkehrenden Rente.

5'. a Ablösungskapital einer immerwährenden Rente.

6. Amortisation. Die Gleichung giebt die Bedingung an, unter der ein Kapital b in n Jahren durch Verzinsung mit p_1 ‰ getilgt werden kann, wenn der Zinsfaktor (bei dem üblichen Zinsfuss p) q ist.

§ 25. Arithmetische Reihen höherer Ordnung.

$$\begin{array}{ll}
 1. & \text{Reihe: } y_0 \quad y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4 \dots y_n \\
 & \text{erste Differenzenreihe: } \Delta y_0 \quad \Delta y_1 \quad \Delta y_2 \quad \Delta y_3 \dots \\
 & \text{zweite } \quad \quad \quad \Delta^2 y_0 \quad \Delta^2 y_1 \quad \Delta^2 y_2 \dots \\
 & \text{dritte } \quad \quad \quad \Delta^3 y_0 \quad \Delta^3 y_1 \dots \\
 & \Delta^{r+1} y_m = \Delta^r y_{m+1} - \Delta^r y_m.
 \end{array}$$

Ist die r te Differenzenreihe konstant, so ist die Reihe von der r ten Ordnung.

$$\begin{aligned}
 2. \quad y_n &= y_0 + \binom{n}{1} \Delta y_0 + \binom{n}{2} \Delta^2 y_0 + \binom{n}{3} \Delta^3 y_0 \\
 &+ \dots + \binom{n}{r} \Delta^r y_0.
 \end{aligned}$$

Sätze: 1. Das Glied y_n einer Reihe r ter Ordnung ist eine ganze Funktion r ten Grades von n .

2. Ist $y_n = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \dots + a_r n^r$ also eine ganze Funktion r ten Grades von n , so ist die Reihe, welche man erhält, indem man $n = 0, 1, 2, \dots$ setzt, von r ter Ordnung.

Wenn die Reihe mit y_1 anfängt, dann ist:

$$y_n = y_1 + \binom{n-1}{1} \Delta y_1 + \binom{n-1}{2} \Delta^2 y_1 + \binom{n-1}{3} \Delta^3 y_1 \\ + \dots + \binom{n-1}{r} \Delta^r y_1.$$

$$3. s_n = \binom{n+1}{1} y_0 + \binom{n+1}{2} \Delta y_0 + \binom{n+1}{3} \Delta^2 y_0 \\ + \dots + \binom{n+1}{r+1} \Delta^r y_0$$

oder bei der zweiten Bezeichnung:

$$s_n = \binom{n}{1} y_1 + \binom{n}{2} \Delta y_1 + \binom{n}{3} \Delta^2 y_1 + \dots + \binom{n}{r+1} \Delta^r y_1.$$

$$4. 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6} (2n+1)(n+1) \cdot n;$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4} (n+1)^2 \cdot n^2.$$

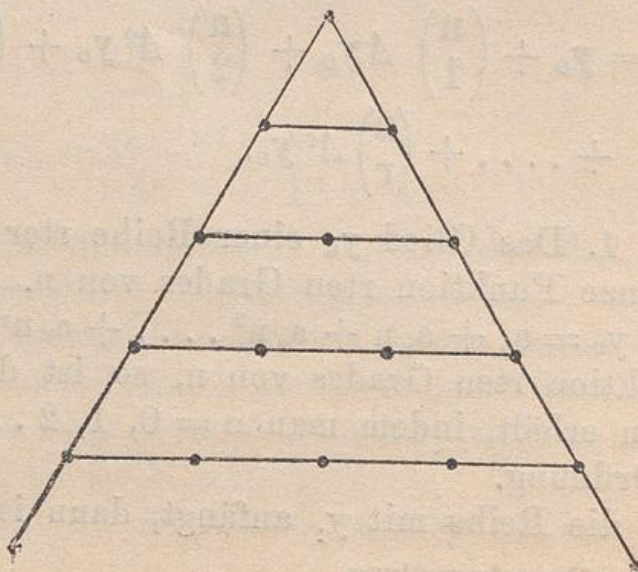
5. Figurierte Zahlen.

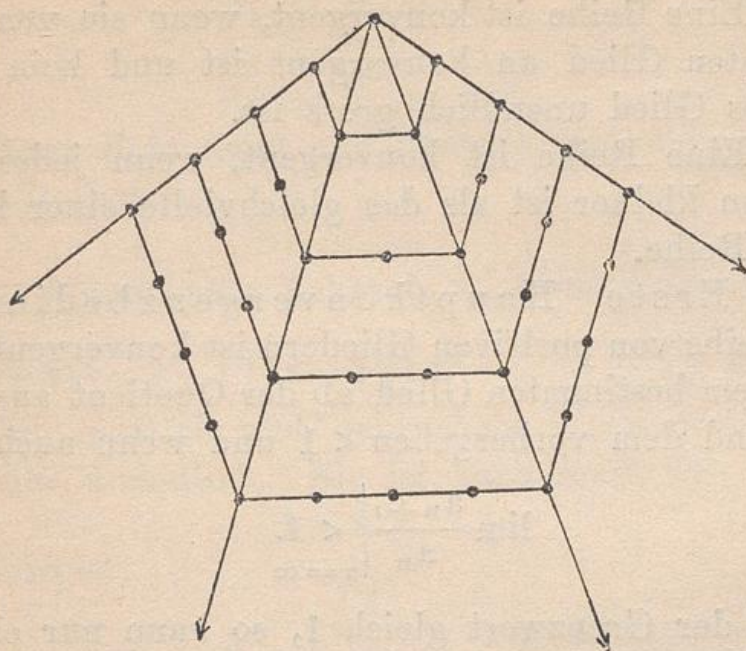
a. Polygonalzahlen:

Dreieckszahlen: 1 3 6 10 15 21 ..., $\binom{n+1}{2}$.

Viereckszahlen: 1 4 9 16 25 ..., n^2 ,

Fünfeckszahlen: 1 5 12 22 35 ..., $\frac{3n^2 - n}{2}$.





b) Pyramidalzahlen.

dreieckige: 1 4 10 20 35 ..., $\binom{n+1}{2} + 1 \cdot \binom{n+1}{3}$
 $= \binom{n+2}{3},$

viereckige; 1 5 14 30 55 ..., $\binom{n+1}{2} + 2 \binom{n+1}{3},$

fünfeckige: 1 6 18 40 75 ..., $\binom{n+1}{2} + 3 \binom{n+1}{3}.$

B. Unendliche Reihen.

§ 26. Konvergenzbedingungen.

1. Eine Reihe $s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$ heisst konvergent, wenn die Grenze von s_n bei unbegrenzt wachsendem n eine endliche Zahl ist.

2. die abnehmende geometrische Reihe ist konvergent, also $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ ist konv., wenn der absolute Betrag von $x < 1$.

3. Eine Reihe ist konvergent, wenn sie von einem bestimmten Glied an konvergent ist und kein vorangehendes Glied unendlich gross ist.

4. Eine Reihe ist konvergent, wenn jedes Glied derselben kleiner ist als das gleichvielte einer konvergenten Reihe.

5. Erste Hauptkonvergenzbedingung: Eine Reihe von positiven Gliedern ist konvergent, wenn von einem bestimmten Glied ab der Quotient aus einem Glied und dem vorhergehenden < 1 und wenn auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1.$$

Ist der Grenzwert gleich 1, so kann nur eine besondere Untersuchung über Konvergenz oder Divergenz entscheiden.

6. Zweite Hauptkonvergenzbedingung: Eine Reihe mit abwechselnden Zeichen konvergiert, wenn die Glieder von einer bestimmten Stelle an abnehmen und $\lim a_n = 0$

(Bei einer Reihe mit gleichen Zeichen ist diese Bedingung notwendig, aber nicht hinreichend.)

7. Jede Reihe mit negativen oder abwechselnden Gliedern ist konvergent, wenn sie konvergiert, falls man alle Glieder positiv setzt.

8. Eine Reihe heisst divergent, wenn $\lim s_n$ nicht endlich ist. Dies ist der Fall, wenn $\lim a_n$ nicht 0 ist.

§ 27. Satz von der Koeffizientenvergleichung.

Ist

$$A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \dots = B_0 + B_1x + B_2x^2 + B_3x^3 + \dots$$

und sind beide Reihen konvergent, so ist

$$\begin{aligned} A_0 &= B_0 \\ A_1 &= B_1 \\ A_2 &= B_2 \text{ u. s. f.} \end{aligned}$$

Dieser Satz dient zur Entwicklung von Funktionen in Reihen.

§ 28. Binomischer Lehrsatz — Newtonsche Reihe.

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{r}x^r + \dots$$

Für negative und gebrochene Werte von n wird die Reihe unendlich. Sie ist konvergent für

$$1 > x > -1.$$

Beispiel:

$$\sqrt{a^2 + b^2} = a \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right)^{\frac{1}{2}} = a \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2}{a^2} + \left(\frac{1}{2} \right) \frac{b^4}{a^4} + \dots \right)$$

Ist b gegen a sehr klein, dann ist

$$\sqrt{a^2 \pm b} = a \pm \frac{b}{2a} \quad (\text{Näherungsformel.})$$

$$\sqrt[3]{a^3 \pm b} = a \pm \frac{b}{3a^2} \quad "$$

§ 29. Exponentialreihe, logarithmische, trigonometrische und cyklometrische Reihen.

$$1. e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\begin{aligned} e &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = \lim \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \infty \\ &= 2,7182818284 \dots \end{aligned}$$

$$2. a^x = e^{x \ln a} = 1 + \frac{x \ln a}{1!} + \frac{(x \ln a)^2}{2!} + \frac{(x \ln a)^3}{3!} + \dots$$

$$3. \ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad 1 \geq x > -1$$

$$4. \quad l(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots \quad 1 > x > -1$$

$$5. \quad \begin{cases} l \frac{1+x}{1-x} = 2 \left\{ x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right\} & 1 > x > -1 \text{ oder} \\ lz = 2 \left\{ \frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^5 + \dots \right\} \end{cases}$$

$$6. \quad \begin{cases} l(a+h) - la = 2 \left\{ \frac{h}{2a+h} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{h}{2a+h} \right)^3 + \dots \right\} \\ \log(a+h) = \log a + 2M \left\{ \frac{h}{2a+h} + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{2a+h} \right)^3 + \dots \right\} \end{cases}$$

7. Uebergang vom natürlichen zum Briggschen System:

$$10^{\log z} = z$$

$$\log z \cdot l 10 = lz$$

$$\log z = \frac{lz}{l 10} = M_{10} \cdot lz$$

$$M_{10} = \text{Modulus des Briggschen Systems} = \frac{1}{l 10} \\ = 0,4342945 \dots \text{ (s. auch § 168).}$$

$$8. \quad \begin{cases} \sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots & x = \text{arc } x^0 \\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \end{cases}$$

$$9. \quad \cos x + i \sin x = e^{ix}$$

$$\cos x - i \sin x = e^{-ix}$$

$$\begin{cases} \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{cases}$$

2. Ein freier Summand der einen Seite kann auf die andere Seite als Subtrahend gesetzt werden und umgekehrt.

3. Eine Zahl, welche Faktor der gesamten einen Seite ist, kann auf die andere Seite als Divisor derselben gesetzt werden und umgekehrt.

4. Eine Zahl, welche Potenzexponent der gesamten einen Seite ist, kann auf die andere Seite als Wurzel-exponent derselben gesetzt werden und umgekehrt.

b) Gleichungen mit einer Unbekannten.

$$5. \text{ Aus } \begin{cases} x + a = b & \text{folgt } x = b - a \\ x - a = b & \text{,, } x = b + a. \\ \begin{cases} ax = b & \text{,, } x = \frac{b}{a} \\ \frac{x}{a} = b & \text{,, } x = ab \end{cases} \\ \begin{cases} x^n = a & \text{,, } x = \sqrt[n]{a} \\ \sqrt[n]{x} = a & \text{,, } x = a^n. \end{cases} \end{cases}$$

$$6. \text{ Aus } \begin{cases} ax = 0 & \text{folgt } x = 0 \\ a(x - b) = 0 & \text{folgt } x - b = 0 \\ (x - a)(x - b) = 0 & \text{folgt } x - a = 0 \text{ u. } x - b = 0 \\ \begin{cases} ax + bx = cx & \text{folgt } x = 0 \\ a(x - b) + c(x - b) = d(x - b) & \text{folgt } x - b = 0. \end{cases} \end{cases}$$

Ist die linke Seite einer auf null gebrachten Gleichung ein Produkt, das x oder Ausdrücke in x als Faktoren enthält, so ist jeder dieser Faktoren gleich null zu setzen.

Kann eine Gleichung mit x oder einem Ausdruck, der x enthält, durchdividiert werden, so ist x , bzw. dieser Ausdruck, gleich null zu setzen.

c) Gleichungen mit zwei und mehr Unbekannten.

7. Aus $\begin{cases} ax + by = c \\ a_1x + b_1y = c_1, \text{ folgt} \end{cases}$

$$y = \frac{c - ax}{b},$$

$$y = \frac{c_1 - a_1x}{b_1}, \text{ daher}$$

I. $\frac{c - ax}{b} = \frac{c_1 - a_1x}{b_1} \quad (\text{Gleichsetzungsmethode}),$

II. $ax + b \cdot \frac{c_1 - a_1x}{b_1} = c \quad (\text{Einsetzungsmethode}),$

III.
$$\begin{aligned} ab_1x + bb_1y &= cb_1 \\ a_1bx + bb_1y &= c_1b \\ \hline x(ab_1 - a_1b) &= cb_1 - c_1b \\ x &= \frac{cb_1 - c_1b}{ab_1 - a_1b} \\ &(\text{Kombinationsmethode}), \end{aligned}$$

IV. 1) $ax + by = c \quad | \cdot m$
 2) $a_1x + b_1y = c_1 \quad | \cdot m$
 3) $(am + a_1)x + (bm + b_1)y = cm + c_1,$

setze $bm + b_1 = 0$, so ist $m = -\frac{b_1}{b},$

dies in 3) eingesetzt giebt

$$\left(-\frac{ab_1}{b} + a_1\right)x = -\frac{cb_1}{b} + c_1, \text{ oder}$$

$$(-ab_1 + a_1b)x = -cb_1 + c_1b$$

$$x = \frac{cb_1 - c_1b}{ab_1 - a_1b};$$

ebenso wird y bestimmt.

(Methode der unbest. Koeffizienten von Bézout.)

8. Hat man drei Gleichungen mit drei Unbekannten:

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}$$

so stellt man durch zweimalige Elimination derselben Unbekannten, z. B. von z , zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten und dann hieraus eine Gleichung mit einer Unbekannten her. — Bei vier Gleichungen mit vier Unbekannten eliminiert man dieselbe Unbekannte dreimal und erhält dadurch drei Gleichungen mit drei Unbekannten u. s. f.

9. Lösung durch Determinanten:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{matrix}$$

Durch Multiplikation mit den angeschriebenen Unterdeterminanten und Addition folgt:

$$(a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3)x = d_1A_1 + d_2A_2 + d_3A_3, \text{ also } x = \frac{d_1A_1 + d_2A_2 + d_3A_3}{a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3}.$$

Der Nenner ist die Determinante Δ des Systems der linken Seiten. — Für y und z folgt ebenso:

$$y = \frac{d_1B_1 + d_2B_2 + d_3B_3}{\Delta}$$

$$z = \frac{d_1C_1 + d_2C_2 + d_3C_3}{\Delta}.$$

10. Die Bedingung für das gleichzeitige Bestehen von n homogenen Gleichungen, z. B. von

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases} \text{ ist } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

§ 31. Gleichungen zweiten Grades und Exponentialgleichungen.

a) Mit einer Unbekannten.

1. $x^2 = a$

$$x = \pm \sqrt{a}$$

2. $x^2 + bx + c = 0$ (1. Normalform.)

$$x^2 + bx + \frac{b^2}{4} = -c + \frac{b^2}{4}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

3. $ax^2 + bx + c = 0$ (2. Normalform.)

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Die Gleichung liefert:

2 verschiedene reelle Werte }
 2 gleiche " " } je nachdem $b^2 - 4ac \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0$.
 2 verschiedene imag. " }
 $b^2 - 4ac$ heisst Diskriminante der Gleichung.

4. $(x - \alpha)(x - \beta) = 0$ (3. Normalform.)

$$\begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \beta. \end{cases}$$

Aus $\begin{cases} x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0 \\ x^2 + bx + c = 0 \end{cases}$ folgt $\begin{cases} x_1 + x_2 = -b \\ x_1 \cdot x_2 = c. \end{cases}$

5. Die Gleichung

$$x + \frac{1}{x} = a + \frac{1}{a} \text{ hat die Wurzeln } x_1 = a, x_2 = \frac{1}{a}$$

$$x - \frac{1}{x} = a - \frac{1}{a} \quad " \quad " \quad " \quad x_1 = a, x_2 = -\frac{1}{a}$$

6. Gleichungen, die durch Einführung einer neuen Unbekannten oder durch Zerlegung auf quadratische zurückgeführt werden können:

1. $ax^4 + bx^2 + c = 0$, setze $x^2 = y$
2. $ax^6 + bx^3 + c = 0$, „ $x^3 = y$
3. $ax^{2m} + bx^m + c = 0$, „ $x^m = y$
4. $ax + b\sqrt{x} + c = 0$, „ $\sqrt{x} = y$
5. $a\sqrt[3]{x^8} + b\sqrt[3]{x^4} + c = 0$, „ $\sqrt[3]{x^4} = y$
6. $au^{2x} + bu^x + c = 0$, „ $u^x = y$ (§ 31c.)
7. $(x^2 + ax)^2 + b(x^2 + ax) + c = 0$, „ $x^2 + ax = y$
8. $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^2 + \frac{ax+b}{cx+d} + e = 0$, „ $\frac{ax+b}{cx+d} = y$.

7. Symmetrische Gleichungen:

1. $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$, $a(x^3 + 1) + bx(x + 1) = 0$, zerfällt in
I. $x + 1 = 0$ und II. $a(x^2 - x + 1) + bx = 0$.
2. $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$, Division mit x^2 ,

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0;$$

$$\text{setze } x + \frac{1}{x} = y, \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2.$$

3. $ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0$,
 $a(x^5 + 1) + bx(x^3 + 1) + cx^2(x + 1) = 0$

Abspaltung von $x + 1 = 0$, Restgleichung symmetrisch vom vierten Grad.

b) Mit zwei Unbekannten.

Für die Auflösung quadratischer Gleichungen mit zwei Unbekannten kann keine allgemeine, einfache Methode angegeben werden, da die Elimination einer der Unbekannten im allgemeinen auf eine Gleichung vierten Grades führt. Es ergibt sich jedoch in vielen Fällen, in welchen die eine der Gleichungen oder beide nicht alle möglichen Glieder enthalten, die Schlussgleichung als quadratische oder sonst lösbare. In jedem einzelnen Fall ist nach Massgabe der Eigenschaften der vorliegen-

den Gleichungen zu verfahren. Die wichtigsten Fälle sind:

1. Die eine der beiden Gleichungen ist vom ersten Grad; man drücke eine Unbekannte aus und setze sie in die andere Gleichung ein.

2. Durch Elimination der quadratischen Glieder entsteht eine Gleichung ersten Grades.

3. Es lässt sich eine Vereinfachung durch Absonderung eines Faktors erzielen.

4. Die Einführung einer neuen Unbekannten in die eine Gleichung bewirkt, dass dieselbe nur noch diese Unbekannte enthält, oder es wird das ganze System durch Einführung neuer Unbekannten vereinfacht.

5. Durch Addition und Subtraktion, Multiplikation oder Division der beiden gegebenen Gleichungen, oder auch durch korrespondierende Addition und Subtraktion bei einer derselben, entsteht eine Gleichung, in der für $x + y$, $x - y$, xy oder $\frac{x}{y}$ oder einen sonstigen Ausdruck in x und y eine neue Unbekannte eingeführt werden kann.

6. Die Gleichung ist homogen; man dividiert mit y^2 durch und bestimmt $\frac{x}{y}$.

7. Es kommen ausser dem Absolutglied in jeder Gleichung nur quadratische Glieder vor; man eliminiert die Absolutglieder, so erhält man eine homogene Gleichung. Oder: Man bringt die quadratischen Glieder nach links, dividiert die eine Gleichung durch die andere, dividiert dann Zähler und Nenner durch y^2 , setzt $\frac{x}{y} = t$ und bestimmt t .

8. Man kann z. B. aus $x^2 + y^2 = a$
 $2xy = b$

durch Addition und Subtraktion der zweiten $(x + y)^2$ und $(x - y)^2$ bilden und hieraus $x + y$ und $x - y$ bestimmen.

c) Exponentialgleichungen (logarithmische Gleichungen).

1. Grundaufgabe:

$$a^x = b;$$

$$x \log a = \log b, \quad x = \frac{\log b}{\log a}.$$

2. Besondere Fälle:

1. $a^x = a^r; \quad x = r.$

2. $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \left(\frac{b}{a}\right)^m; \quad x = -m.$

3. $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{c}{d}; \quad x = \frac{\log c - \log d}{\log a - \log b}.$

4. $(ab)^{\frac{m+x}{n}} = a \cdot b^{\frac{n+x}{r}}.$

Logarithmiere, sammle die Glieder mit x nach links, die ohne x nach rechts, und löse nach x auf.

5. $ab^x + c(d + b^{-x}) = e; \quad$ setze und bestimme zunächst $y = b^x.$

6. $a^x + p + a^x + q = b^x + m + b^x + n;$

$$a^x (a^p + a^q) = b^x (b^m + b^n)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{b^m + b^n}{a^p + a^q}; \quad \text{hieraus folgt } x.$$

7. $x^r x^{\log x} = b;$

$r \log x + \log x \cdot \log x = \log b$, setze und bestimme $y = \log x$ u. s. f.

8. $\log(ax + b) + \log(cx + d) = m;$

es ist $\log((ax + b)(cx + d)) = m$, also

$$(ax + b)(cx + d) = 10^m$$

woraus x folgt.

9. $a^x b^y = p$

$c^x d^y = q;$

logarithmiere und bestimme aus den erhaltenen Gleichungen $\log x$ und $\log y$.

§ 32. Diophantische Gleichungen ersten Grades.

a) Mit zwei Unbekannten.

1. Euler'sche Methode. (Absonderung der grössten Ganzen.) Beispiel:

$$61x + 7y = 1000$$

$$y = \frac{1000 - 61x}{7} = 143 - 9x + \frac{2x - 1}{7} (= u)$$

$$x = \frac{7u + 1}{2} = 3u + \frac{u + 1}{2} (= v)$$

$$u = 2v - 1, \text{ also}$$

$$x = \frac{14v - 7 + 1}{2} = 7v - 3$$

$$y = \frac{1000 - 61(7v - 3)}{7} = 169 - 61v.$$

v	x	y
0	-3	169
1	4	108
2	11	47
3	18	-14

$\begin{cases} 4 \\ 108 \end{cases} \begin{cases} 11 \\ 47 \end{cases}$
 sind also die brauchbaren
 Werte für die Unbekannten.

2. Kettenbruchmethode von Lagrange:

Ist 1. $ax + by = c$ gegeben, so setze man

2. $a_1 x + b_1 y = t$. dann folgt:

$$3. \quad x = \frac{b_1 c - b t}{a b_1 - a_1 b},$$

$$y = \frac{a t - a_1 c}{a b_1 - a_1 b},$$

x und y sind dann ganze Zahlen, wenn $a b_1 - a_1 b = \pm 1$.
Dies ist der Fall, wenn $\frac{a_1}{b_1}$ vorletzter Näherungswert
des in einen Kettenbruch verwandelten Bruches $\frac{a}{b}$ ist
(s. § 174).

Beispiel: 1. $61x + 7y = 1000$
Näherungswerte des in einen Kettenbruch verwandelten
Bruches $\frac{7}{61}$ sind: $\frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{3}{26}, \frac{7}{61}$, also

$$2. 26x + 3y = t$$

$$3. \quad x = 3000 - 7t = 7(429 - t) - 3 \\ = 7v - 3$$

$$4. \quad y = \frac{t - 26x}{3} = \frac{429 - v - 182v + 78}{3} \\ = 169 - 61v.$$

v	0	1	2	3
x	-3	4	11	18
y	169	108	47	-14

Res.: $\begin{cases} 4 \\ 108 \end{cases}, \begin{cases} 11 \\ 47 \end{cases}$

b) Mit drei Unbekannten.

3. Man eliminiere aus den zwei gegebenen Gleichungen eine der drei Unbekannten, z. B. z , dann löse man die erhaltene Gleichung nach a) auf und berechne z vermittelt der erhaltenen Werte von x und y aus einer der gegebenen Gleichungen.

§ 33. Allgemeine Sätze über höhere Gleichungen.

1. Hat $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = 0$
die Wurzel $x = \alpha$, so ist $f(x)$ durch $x - \alpha$ ohne Rest
teilbar.

2. Eine Gleichung n ten Grades hat n , aber auch nur n Wurzeln.

3. Sind $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ die Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$, so ist

$$f(x) = a_0 (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n) \text{ und}$$

4. Symmetrische Funktionen:

$$\frac{a_1}{a_0} = -\Sigma K_1(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n) = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n);$$

$$\frac{a_2}{a_0} = \Sigma K_2(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n) = \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \dots + \alpha_2 \alpha_3 + \dots + \alpha_{n-1} \alpha_n;$$

$$\frac{a_3}{a_0} = -\Sigma K_3(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n) = -(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_2 \alpha_4 + \dots + \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 + \dots + \alpha_{n-2} \alpha_{n-1} \alpha_n \dots)$$

$$\frac{a_n}{a_0} = (-1)^n \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \dots \alpha_n.$$

5. Eine Gleichung hat höchstens soviel reelle positive Wurzeln als Zeichenwechsel und höchstens soviel reelle negative Wurzeln als Zeichenfolgen (die fehlenden Glieder sind mit ± 0 zu ergänzen).

6. Ist $p + qi$ eine Wurzel einer Gleichung mit reellen Koeffizienten, so ist auch $p - qi$ eine Wurzel. Die Gleichung hat, wenn sie imaginäre Wurzeln hat, stets eine gerade Anzahl derselben. Eine Gleichung von ungeradem Grad hat daher zum wenigsten eine reelle Wurzel.

7. Wird $f(x)$ für $x=p$ negativ und für $x=q$ positiv, so liegt mindestens eine Wurzel der Gleichung $f(x)=0$ zwischen p und q .

8. Sind die Koeffizienten der r niedersten Potenzen von x (x^0 eingeschlossen) gleich null, so hat die Gleichung

chung r mal die Wurzel null; sind die der r höchsten Potenzen 0, so hat sie r mal die Wurzel ∞ .

9. Ist α eine Wurzel der Gleichung 1., so ergibt sich aus derselben durch Division mit $x - \alpha$ die Gleichung $n - 1$ ten Grades

$$\frac{f(x)}{x - \alpha} = b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \dots + b_{n-2} x + b_{n-1} = 0,$$

dann ist $b_r = b_{r-1} \cdot \alpha + a_r$.

Beispiel $3x^5 - 7x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 7x - 2 = 0$
soll durch $x - 2$ dividiert werden.

	3	-7	+2	+4	-7	-2
2	3	-1	0	4	+1	0

Res.: $3x^4 - x^3 + 4x + 1 = 0$.

Durch diese Division wird festgestellt, ob $x = 2 (= \alpha)$ eine Wurzel der ursprünglichen Gleichung ist.

Um die ganzen rationalen Wurzeln einer Gleichung aufzufinden, zerlege man a_n in Faktoren $p_1, p_2, \dots$ und versuche, ob $x - p_1, x - p_2, \dots$ ohne Rest in die Gleichung aufgeht. s. auch § 37_{a, 1}.

10. Wurzelverkleinerung. Soll die Gleichung

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

in die Gleichung

$$\varphi(x) = p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \dots + p_{n-1} x + p_n = 0$$

umgewandelt werden, so dass die Wurzeln der letzteren Gleichung um k kleiner sind als die der gegebenen, so muss $f(x) = \varphi(x - k)$, also

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = p_0 (x - k)^n + p_1 (x - k)^{n-1} + \dots + p_{n-1} (x - k) + p_n$$

sein und es sind daher $p_n, p_{n-1}, \dots, p_0$ die Reste, die sich ergeben, wenn man $f(x)$ fortlaufend mit $x - k$ dividiert.

Beispiel: $x^4 - 4x^3 - 39x^2 + 46x + 80 = 0$

$$4) \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & -39 & -110 & -360 & = p_n \end{array}$$

$$4) \begin{array}{cccccc} 1 & 4 & -23 & -202 & & = p_{n-1} \end{array}$$

$$4) \begin{array}{cccccc} 1 & 8 & +9 & & & = p_{n-2} \end{array}$$

$$4) \begin{array}{cccccc} 1 & 12 & & & & = p_1 \end{array}$$

$$4) \begin{array}{cccccc} 1 & & & & & = p_0 \end{array}$$

die gesuchte Gleichung ist:

$$x^4 + 12x^3 + 9x^2 - 202x - 360 = 0.$$

11. Wurzelreduktion (= Transformation).

Soll die Gleichung $f(x) = 0$ so umgeformt werden, dass das zweite Glied der neuen Gleichung 0 ist, so ist, da $p_1 = a_1 + nka_0 = 0$,

$$k = -\frac{a_1}{na_0}.$$

Beispiel: $x^3 - 18x^2 + 105x - 196 = 0$; $k = -\frac{-18}{3} = +6$;

$$6) \begin{array}{cccccc} 1 & -12 & +33 & +2 & & y = x - 6; \end{array}$$

$$6) \begin{array}{cccccc} 1 & -6 & -3 & & & \end{array}$$

$$6) \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & & & & \text{Res.: } y^3 - 3y + 2 = 0. \end{array}$$

§ 34. Binomische Gleichungen.

$$1. x^n = +1 = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi;$$

$$x = \sqrt[n]{+1} = (+1)^{\frac{1}{n}} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}.$$

wobei k alle ganzen Werte von 0 bis n erhält.

$$2. x^n = -1 = \cos (2k+1)\pi + i \sin (2k+1)\pi;$$

$$x = \sqrt[n]{-1} = \cos \frac{2k+1}{n}\pi + i \sin \frac{2k+1}{n}\pi.$$

3. Beispiele.

$$1. x^3 = 1;$$

$$\begin{aligned} \text{mit } k=0 \dots\dots\dots & \left\{ \begin{array}{l} x=1, \\ \text{mit } k=\begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases} \dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{l} x=\cos 120^\circ \pm i \sin 120^\circ = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \\ \\ = \begin{cases} \alpha \\ \beta. \end{cases} \end{array} \right. \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$2. \quad x^3 = -1;$$

$$\begin{aligned} \text{mit } k=\begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases} \dots\dots\dots & \left\{ \begin{array}{l} x=\cos 60^\circ \pm i \sin 60^\circ = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} = \begin{cases} -\beta \\ -\alpha, \end{cases} \\ \text{mit } k=1 \dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{l} x=-1. \end{array} \right. \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$3. \quad x^4 = 1;$$

$$\begin{aligned} \text{mit } k=0 \dots\dots\dots & \left\{ \begin{array}{l} x=1, \\ \text{mit } k=\begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases} \dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{l} x=\cos 90^\circ \pm i \sin 90^\circ = \pm i, \\ \text{mit } k=2 \dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{l} x=-1. \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$4. \quad x^4 = -1;$$

$$\begin{aligned} \text{mit } k=\begin{cases} 0 \\ 3 \end{cases} \dots\dots\dots & \left\{ \begin{array}{l} x=\cos 45^\circ \pm i \sin 45^\circ. \\ \text{mit } k=\begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases} \dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{l} x=\cos 135^\circ \pm i \sin 135^\circ. \end{array} \right. \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$5. \quad x^5 = 1;$$

$$\begin{aligned} \text{mit } k=0 \dots\dots\dots & \left\{ \begin{array}{l} x=1, \\ \text{mit } k=\begin{cases} 1 \\ 4 \end{cases} \dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{l} x=\cos 72^\circ \pm i \sin 72^\circ, \\ \text{mit } k=\begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases} \dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{l} x=\cos 144^\circ \pm i \sin 144^\circ. \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$6. \quad x^5 = -1;$$

$$\begin{aligned} \text{mit } k=\begin{cases} 0 \\ 4 \end{cases} \dots\dots\dots & \left\{ \begin{array}{l} x=\cos 36^\circ \pm i \sin 36^\circ, \\ \text{mit } k=\begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases} \dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{l} x=\cos 108^\circ \pm i \sin 108^\circ, \\ \text{mit } k=2 \dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{l} x=-1. \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$4. \quad x^n = a \quad \left| \quad x^n = -a \right.$$

$$x = (\sqrt[n]{a}) \cdot \sqrt[n]{+1} \quad \left| \quad x = (\sqrt[n]{a}) \cdot \sqrt[n]{-1} \right.$$

wobei $(\sqrt[n]{a})$ den absoluten, reellen Wert von $\sqrt[n]{a}$ bedeutet, welchen man durch direkte Wurzelausziehung oder logarithmische Berechnung erhält, während $\sqrt[n]{+1}$ und $\sqrt[n]{-1}$ jeden der durch 1. und 2. bestimmten Werte darstellen.

§ 35. Kubische Gleichungen.

$$1. \quad x^3 - a = 0 \quad \left| \quad x^3 + a = 0 \right.$$

$$x = \sqrt[3]{a} = \begin{cases} (\sqrt[3]{a}) \\ (\sqrt[3]{a}) \cdot \alpha \\ (\sqrt[3]{a}) \cdot \beta \end{cases} \quad \left| \quad x = \sqrt[3]{-a} = \begin{cases} -(\sqrt[3]{a}) \\ -(\sqrt[3]{a}) \cdot \alpha \\ -(\sqrt[3]{a}) \cdot \beta \end{cases}$$

s. § 34, 3_{1,2}.

$$2. \quad x^3 + a x^2 + b x + c = 0$$

Transformiere die Gleichung (durch Wurzelverkleinerung um $\frac{a}{3}$ oder Substitution von $y = x - \frac{a}{3}$, s. § 33₁₀) auf die Form

$$y^3 + 3 p y + 2 q = 0$$

und setze $y = u + v$ und $u^3 + v^3 + 2 q = 0$,

dann ist

$$\begin{cases} u = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} \\ v = \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = u + v \\ y_2 = -\frac{u+v}{2} + \frac{i}{2} \sqrt{3}(u-v) \\ y_3 = -\frac{u+v}{2} - \frac{i}{2} \sqrt{3}(u-v) \end{cases} \quad \text{(Cardan'schen Formeln)}$$

Die Cardanschen Formeln führen zu einer Lösung nur so lange $q^2 + p^3 > 0$; sie liefern dann 1 reelle und 2 imaginäre Wurzeln.

3. Fall der 3 reellen Wurzeln (casus irreducibilis). Ist $q^2 + p^3 < 0$, so hat die Gleichung 3 reelle Wurzeln, aber diese können nicht mit den genannten Formeln bestimmt werden; dann

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \varphi = \frac{-q}{\sqrt[3]{-p^3}} \\ y_1 = 2\sqrt[3]{-p} \cdot \cos \frac{\varphi}{3} \\ y_2 = -2\sqrt[3]{-p} \cdot \cos \left(\frac{\varphi}{3} + 60^\circ \right) \\ y_3 = -2\sqrt[3]{-p} \cdot \cos \left(\frac{\varphi}{3} - 60^\circ \right). \end{array} \right.$$

4. Trigonometrische Auflösung für Fall 2:
 $q^2 + p^3 > 0$.

1. $p > 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt[3]{p^3}}{q} ; \sqrt[3]{\frac{\operatorname{tg} \varphi}{2}} = \operatorname{tg} \psi \\ y_1 = \pm 2\sqrt[3]{p} \cdot \operatorname{ctg} 2\psi \\ y_2 = \pm \sqrt[3]{p} \left(\operatorname{ctg} 2\psi + \frac{i\sqrt{3}}{\sin 2\psi} \right) \\ y_3 = \pm \sqrt[3]{p} \left(\operatorname{ctg} 2\psi - \frac{i\sqrt{3}}{\sin 2\psi} \right); \end{array} \right.$$

hiebei sind die oberen oder unteren Zeichen zu nehmen, je nachdem $q \gtrless 0$.

2. $p < 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \varphi = \frac{(-p)^{\frac{3}{2}}}{+q}; \quad \operatorname{tg} \sqrt[3]{\frac{q}{2}} = \operatorname{tg} \psi \\ y_1 = \mp 2 \sqrt{-p} \cdot \frac{1}{\sin 2\psi} \\ y_2 = \pm \sqrt{-p} \left(\frac{1}{\sin 2\psi} + i \sqrt{3} \operatorname{ctg} 2\psi \right) \\ y_3 = \pm \sqrt{-p} \left(\frac{1}{\sin 2\psi} - i \sqrt{3} \operatorname{ctg} 2\psi \right). \end{array} \right.$$

Zeichen wie oben bei 1. zu nehmen.

§ 36. Biquadratische Gleichungen.

1. Besondere Fälle s. § 31, 6₁, 7₂.

2. Methode der Zerlegung. Man reduziere die gegebene Gleichung auf die Form:

$$x^4 + a x^2 + b x + c = 0 \text{ und setze}$$

$$x^4 + a x^2 + b x + c = (x^2 + \alpha x + \beta)(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1);$$

hieraus durch Koeffizientenvergleichung

$$1. \left\{ \begin{array}{l} \alpha = -\alpha_1 \\ \beta + \beta_1 - \alpha^2 = a \\ \alpha(\beta_1 - \beta) = b \\ \beta \beta_1 = c \end{array} \right.$$

Durch Elimination von β und β_1 ergibt sich:

$$2. \alpha^6 + 2a\alpha^4 + (a^2 - 4c)\alpha^2 - b^2 = 0$$

3. Transformation und Lösung dieser (nach α^2) kubischen Resolvente. (Ein Wert von α genügt; die andern liefern die x nur in anderer Reihenfolge.)4. Berechnung von β und β_1 aus 1.

$$5. \text{Lösung der Gleichungen: } \begin{cases} x^2 + \alpha x + \beta = 0 \\ x^2 - \alpha x + \beta_1 = 0 \end{cases}$$

3. Euler'sche Methode.

1. Transformierung der Gleichung auf die Form

$$x^4 + a x^2 + b x + c = 0$$

2. Bildung der Resolvente

$$y^3 + \frac{a}{2} y^2 + \frac{a^2 - 4c}{16} y - \frac{b^2}{64} = 0$$

Sind die Wurzeln dieser Gleichung y_1, y_2, y_3 , dann ist

$$\begin{cases} x_1 = \pm (\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} - \sqrt{y_3}) \\ x_2 = \pm (\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}) \\ x_3 = \pm (-\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}) \\ x_4 = \pm (-\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} - \sqrt{y_3}), \end{cases}$$

wobei die Vorzeichen so zu wählen sind, dass

$$\sqrt{y_1} \cdot \sqrt{y_2} \cdot \sqrt{y_3} = -\frac{b}{8}$$

§ 37a. Höhere Numerische Gleichungen. — Näherungsmethoden.

1. Rationale Wurzeln, Zerlegung des Absolutgliedes. — Man bestimmt alle Faktoren $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ des Absolutgliedes und stellt durch Einsetzung derselben in die gegebene Gleichung fest, ob sie derselben genügen.

Ist die Zahl der Faktoren eine sehr grosse, so stellt man mit der Substitution $x = y + 1$ eine neue Gleichung her und bestimmt wiederum die Faktoren des Absolutgliedes. Es können dann nur diejenigen Faktoren des Absolutgliedes der gegebenen Gleichung Wurzeln derselben sein, welche um 1 grösser sind als die entsprechenden Faktoren der zweiten Gleichung.

2. Newtons Methode. Hat man durch Versuche (oder durch Aufzeichnung der Kurve) gefunden, dass α annähernd eine Wurzel der Gleichung

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

ist, so ist an α noch eine Korrektur anzubringen, um den wirklichen Wert zu erhalten. Die erste Korrektur p ergibt sich aus (Taylors Satz s. § 95)

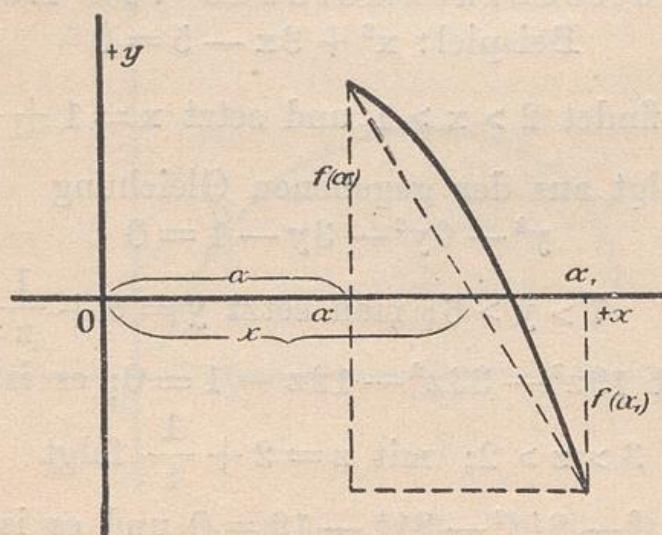
$$p = \frac{-(a_0 \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \dots + a_n)}{n a_0 \alpha^{n-1} + (n-1) a_1 \alpha^{n-2} + \dots + a_{n-1}} = -\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}.$$

Setzt man nun $\alpha + p$ an Stelle von α , so erhält hiemit aus der angegebenen Beziehung eine weitere Korrektur p_1 u. s. f.

3. Regula falsi (indische Methode). Hat die Gleichung $f(x) = 0$ eine Wurzel zwischen α und α_1 ($f(\alpha)$ und $f(\alpha_1)$ haben also entgegengesetzte Vorzeichen), so erhält man einen angenäherten Wert für die Wurzel, wenn man an Stelle des Schnittpunktes der Kurve mit der X-Achse, den der Sehne setzt, welche die zu den Abscissen α und α_1 gehörigen Kurvenpunkte verbindet; man hat dann:

$$\frac{x - \alpha}{f(\alpha)} = \frac{x - \alpha_1}{f(\alpha_1)}, \text{ somit}$$

$$x = \alpha + \frac{(\alpha_1 - \alpha) f(\alpha)}{f(\alpha) - f(\alpha_1)}.$$



Mit dem neuen Wert und einem benachbarten, kann das Verfahren wiederholt werden u. s. f. — Dieses Verfahren ist insbesondere bei transcendenten Gleichungen anwendbar. Beispiel:

$$x^x = 100, \text{ also}$$

$$x \log x = 2 \text{ oder } x \log x - 2 = 0.$$

Ausrechnung:

x	$f(x) = x \log x - 2$
1	- 2
2	- 1,4
3	- 0,5687
4	+ 0,4084
$x = 3 + \frac{1 \cdot 0,57}{0,98} = 3,58$	

3,58	+ 0,0171
3,60	- 0,0027
$x = 3,58 + \frac{0,02 \cdot 0,0171}{0,0198}$	

$$= 3,58 + 0,01727 = 3,59727 \text{ u. s. f.}$$

(die richtige Wurzel liegt zwischen 3,59728 und 3,59729).

4) Kettenbruchmethode von Lagrange.

Beispiel: $x^3 + 3x - 5 = 0$

Man findet $2 > x > 1$ und setzt $x = 1 + \frac{1}{y}$;

hiermit folgt aus der gegebenen Gleichung

$$y^3 - 6y^2 - 3y - 1 = 0$$

nun ist $7 > y > 6$; man setzt $y = 6 + \frac{1}{z}$

und erhält $19z^3 - 33z^2 - 12z - 1 = 0$; es ist

$3 > z > 2$; mit $z = 2 + \frac{1}{t}$ folgt

$$5t^3 - 84t^2 - 81t - 19 = 0 \text{ und es ist}$$

$$18 > t > 17 \text{ u. s. f.}$$

$$\text{Es ist nun: } x = 1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{2 + \frac{1}{17 + \dots}}} = 1,15416$$

$$\text{oder } x = 1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{2 + \frac{1}{18}}} = 1,15418$$

§ 37b. Grösste und kleinste Werte.

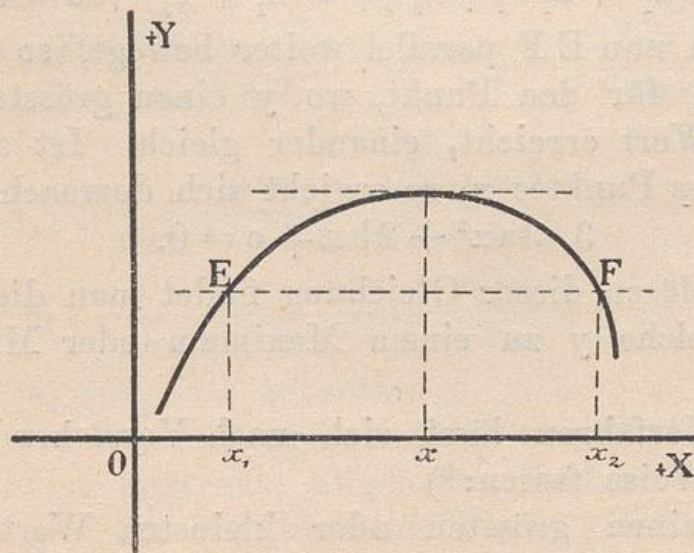
(Elementare Behandlung.)

Ist y eine Funktion von x , also eine von x abhängige Grösse, und z. B.

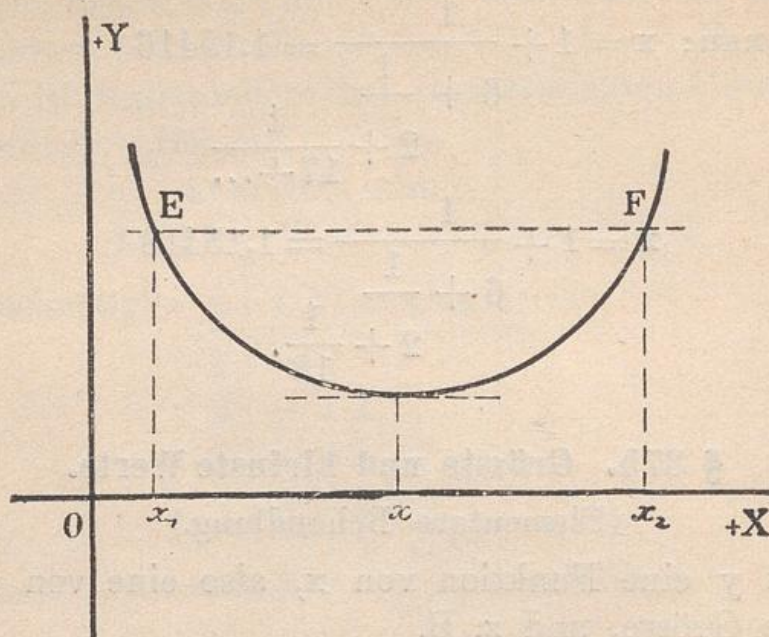
$$1. y = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

so können hiebei die verschiedenen Werte von x als Abscissen, die von y als Ordinaten einer Kurve betrachtet werden.

Zieht man eine Parallele $E F$ zur X axe, welche die



betreffende Funktionskurve in den Punkten E, F , deren Abscissen x_1 und x_2 sind, schneidet, so hat y in diesen



Punkten E und F die gleichen Werte, es ist also für obiges Beispiel 1.

$ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d = ax_2^3 + bx_2^2 + cx_2 + d$, woraus $a(x_1^3 - x_2^3) + b(x_1^2 - x_2^2) + c(x_1 - x_2) = 0$, folglich nach Division mit $x_1 - x_2$.

$$2. a(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + b(x_1 + x_2) + c = 0.$$

Wenn sich nun EF parallel weiter bewegt, so werden x_1 und x_2 für den Punkt, wo y einen grössten oder kleinsten Wert erreicht, einander gleich. Ist die Abscisse dieses Punktes x, so ergibt sich demnach aus 2.

$$3. 3ax^2 + 2bx + c = 0.$$

Durch Auflösen dieser Gleichung findet man die Werte von x, welche y zu einem Maximum oder Minimum machen.

Das Verfahren lässt sich nach Vorstehendem in folgender Weise fassen:*)

Um einen grössten oder kleinsten Wert (oder mehrere) einer abhängigen Grösse zu finden, muss man:

*) Vergl. hierzu: Martus, Maxima und Minima, Berlin 1861.

1. Die Funktion in einer unabhängigen veränderlichen Grösse x ausdrücken;

2. in diesen Ausdruck x_1 und dann x_2 einsetzen und die sich ergebenden Ausdrücke einander gleich setzen;

3. die gleich hohen Glieder zusammenfassen, so dass sich mit dem Faktor $x_1 - x_2$ durchdividieren lässt;

4. nachdem mit $x_1 - x_2$ durchdividiert ist, hat man in der hiedurch erhaltenen Gleichung $x_1 = x_2 = x$ zu setzen und die Gleichung aufzulösen. Für die gefundenen Werte von x erreicht y ein Maximum oder Minimum.

5. Ob ein grösster oder kleinster Wert vorliegt, ergibt sich aus der Natur der Aufgabe oder durch Berechnung der Werte von y für solche Werte von x , die dem gefundenen benachbart sind.

Bemerkungen: 1. Bei Funktionen, in denen eine Quadratwurzel vorkommt, muss vor dem Dividieren mit $x_1 - x_2$ in der Regel noch umgeformt werden.

Beispiel:

$$mx_1 + n + \sqrt{ax_1^2 + bx_1 + c} = mx_2 + n + \sqrt{ax_2^2 + bx_2 + c},$$

$$m(x_1 - x_2) + \sqrt{ax_1^2 + bx_1 + c} - \sqrt{ax_2^2 + bx_2 + c} = 0,$$

woraus

$$m(x_1 - x_2) + \frac{a(x_1^2 - x_2^2) + b(x_1 - x_2)}{\sqrt{ax_1^2 + bx_1 + c} + \sqrt{ax_2^2 + bx_2 + c}} = 0,$$

$$\text{folglich } m + \frac{a(x_1 + x_2) + b}{\sqrt{ax_1^2 + bx_1 + c} + \sqrt{ax_2^2 + bx_2 + c}} = 0.$$

Nun ist $x_1 = x_2 = x$ zu setzen u. s. f.

2) Das Anwendungsgebiet der obigen, elementaren Methode ist begrenzt; allgemeine Verfahren für Auffindung grösster und kleinster Werte giebt die höhere Analysis (s. § 97).

Ebene Geometrie.

§ 38. Winkelsätze (von Parallelen, vom Dreieck und Vieleck).

1. Nebenwinkel betragen zusammen 2 R.
2. Scheitelwinkel sind einander gleich.
3. a) Werden zwei Parallelen von einer dritten geschnitten, so sind:

- | | |
|---------------------------------|----------------------|
| 1. je zwei entsprechende Winkel | } einander
gleich |
| 2. " " innere Wechselwinkel | |
| 3. " " äussere " " | |

und es betragen

- | | |
|--------------------------------|--------------------|
| 1. je zwei innere Gegenwinkel | } zusammen
2 R. |
| 2. " " äussere " " | |
| 3. " " gemischte Wechselwinkel | |

- b) Werden zwei gerade Linien von einer dritten geschnitten und sind

- | | |
|-----------------------------------|----------------------|
| 1. zwei entsprechende Winkel oder | } einander
gleich |
| 2. " innere Wechselwinkel " | |
| 3. " äussere " " | |

oder betragen

- | | |
|---------------------------------|--------------------|
| 1. zwei innere Gegenwinkel oder | } zusammen
2 R, |
| 2. " äussere " " | |
| 3. " gemischte Wechselwinkel | |

so sind die Geraden parallel.

Zusätze: a) Lote zu derselben Geraden sind parallel;

- b) eine Gerade, welche zu einer von zwei Parallelen senkrecht ist, ist auch Lot zur andern.

4. Jeder Aussenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der beiden ihm nicht anliegenden Dreieckswinkel.

5. Die Winkelsumme ist im Dreieck $2R$, im Viereck $4R$, im n -Eck $2n - 4R$.

6. Die Anzahl der Diagonalen, die von einer Ecke eines n -Ecks ausgehen, ist $n - 3$, die Anzahl sämtlicher Diagonalen $\frac{n(n-3)}{2}$.

§ 39. Kongruenzsätze und Längenbeziehungen.

A) Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn

1. Zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gleich,
2. Eine Seite und zwei gleichliegende Winkel gleich,
3. Die drei Seiten gleich,
4. Zwei Seiten und der Gegenwinkel des einen Paares gleich und die des andern Paares gleichartig (beide $\geq R$ oder $< R$) sind.

(Besonders zu merken: Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie zwei Seiten und den Gegenwinkel der grösseren gleich haben.)

B) Zwei n -Ecke sind kongruent, wenn sie alle Seiten bis auf eine und alle entsprechenden Winkel bis auf die an der letzten Seite liegenden gleich haben; ($2n - 3$ unabhängige Stücke.)

C) Inkongruenz.

1. Haben zwei Dreiecke zwei Seiten gleich, die eingeschlossenem Winkel aber ungleich, so sind auch die dritten Seiten ungleich und zwar liegt dem grösseren der beiden Winkel die grössere Seite gegenüber.

2. Haben zwei Dreiecke zwei Seiten gleich, die

dritten Seiten aber ungleich, so sind auch die Gegenwinkel der letzteren ungleich und zwar liegt der grösseren Seite der grössere Winkel gegenüber.

D) 1. In jedem Dreieck

- a) liegt der grösseren von zwei Seiten der grössere Winkel gegenüber,
- b) liegt dem grösseren von zwei Winkeln die grössere Seite gegenüber
- c) ist die Summe zweier Seiten grösser als die dritte,
- d) ist die Differenz zweier Seiten kleiner als die dritte.

2. Unter allen Verbindungen zwischen zwei Punkten ist die gerade die kürzeste.

3. Unter allen Strecken zwischen einem Punkt und einer Geraden ist das Lot die kürzeste.

§ 40. Sätze vom Parallelogramm und Trapez. (Winkel, Seiten, Diagonalen).

Im Trapez sind nur zwei, im Parallelogramm je zwei Gegenseiten parallel.

1. Im Parallelogramm

- a) sind je zwei aufeinanderfolgende Winkel zusammen $2 R$;
- b) sind je zwei gegenüberliegende Winkel einander gleich;
- c) sind je zwei gegenüberliegende Seiten einander gleich;
- d) halbieren sich die Diagonalen gegenseitig

2. Ein Viereck ist ein Parallelogramm:

- a) Wenn je zwei Gegenseiten gleich;
- b) " " " Gegenwinkel " ;
- c) " ein Paar Gegenseiten gleich und parallel;

d) Wenn sich die Diagonalen gegenseitig halbieren.

3) Ein Viereck ist

a) ein rechtwinkliges Parallelogramm, wenn drei Winkel rechte sind;

b) ein gleichseitiges Parallelogramm, wenn alle Seiten einander gleich sind.

4. Im rechtwinkligen Parallelogramm sind die Diagonalen einander gleich.

5. Im gleichseitigen Parallelogramm

a) halbiert jede Diagonale die Winkel, durch die sie geht;

b) stehen die Diagonalen aufeinander senkrecht.

6. Ein Parallelogramm ist rechtwinklig:

a) Wenn ein Winkel ein R ;

b) Wenn zwei aufeinander folgende Winkel einander gleich sind;

c) Wenn die Diagonalen einander gleich sind.

7. Ein Parallelogramm ist gleichseitig:

a) Wenn zwei aufeinander folgende Seiten einander gleich sind;

b) Wenn eine Diagonale einen Winkel desselben halbiert:

c) Wenn die Diagonalen senkrecht aufeinander stehen.

8. Im gleichschenkligen Trapez sind

a) Die Winkel an derselben Grundlinie einander gleich,

b) Die Diagonalen einander gleich.

9. Ein Trapez ist gleichschenklilig:

a) Wenn zwei Winkel an derselben Grundlinie einander gleich sind;

b) Wenn die Diagonalen einander gleich sind.

10. Die Parallele durch die Mitte

- a) einer Dreiecksseite zu einer zweiten halbiert die dritte und ist gleich der Hälfte der zweiten,
- b) einer nicht parallelen Seite eines Trapezes zu einer Grundlinie halbiert die andere nicht parallele Seite und ist gleich der halben Grundliniensumme.

11. Die Verbindungslinie der Mitten

- a) zweier Dreiecksseiten ist parallel und gleich der Hälfte der dritten.
- b) der nicht parallelen Seiten eines Trapezes ist parallel den Grundlinien und gleich der halben Summe derselben.

§ 41. Gerade Linien und Winkel am Kreis; regelmässiges Vieleck.

1. Ein Punkt liegt innerhalb, auf oder ausserhalb einer Kreislinie, je nachdem sein Mittelpunktsabstand $\begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix}$ als der Halbmesser ist,

2. Eine Gerade hat mit einem Kreis zwei, einen oder keinen Punkt gemeinschaftlich, d. h. sie schneidet, berührt oder trifft nicht, je nachdem ihr Mittelpunktsabstand $\begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix}$ als der Halbmesser ist.

3. a) Gleiche Sehnen haben gleiche Mittelpunktsabstände und umgekehrt.

b) Von zwei ungleichen Sehnen hat die grössere den kleineren Mittelpunktsabstand und umgekehrt.

4. Zu gleichen Zentriwinkeln in gleichen Kreisen oder in demselben Kreis gehören gleiche Bögen, Sehnen, Aus- und Abschnitte und umgekehrt.

5. Ein Peripheriewinkel ist die Hälfte des zugehörigen Zentriwinkels,

6. Alle Peripheriewinkel über demselben Bogen sind einander gleich.

Datum a, r, α .

7. Der Tangentensehnenwinkel ist gleich dem Peripheriewinkel im nicht eingeschlossenen Bogen.

8. a) Im Kreisviereck ist die Summe zweier Gegenwinkel gleich der Summe der zwei andern, d. h. $2R$.

b) Wenn in einem Viereck die Summe zweier Gegenwinkel $2R$ ist, so ist es ein Kreisviereck.

9. a) Im Tangentviereck ist die Summe zweier Gegenseiten gleich der Summe der zwei andern.

b) Wenn in einem Viereck die Summe zweier Gegenseiten gleich der Summe der zwei andern ist, so ist das Viereck ein Tangentviereck.

10. Tangentenabschnitte beim Dreieck

an den Inkreis,

an den Ankr. d. Gegens.

$$\text{von der Ecke A} \quad \frac{b+c-a}{2} (=s-a), \quad \frac{b+c+a}{2} = s$$

$$\text{" " " B} \quad \frac{c+a-b}{2} (=s-b), \quad \text{"}$$

$$\text{" " " C} \quad \frac{a+b-c}{2} (=s-c), \quad \text{"}$$

Datum s, ϱ, α .

11. Zwei Kreise K und K_1

a) berühren sich, wenn sie einen Punkt der Zentrale gemeinschaftlich haben,

b) haben einen Punkt der Zentrale gemeinschaftlich, wenn sie sich berühren.

c) K und K_1 berühren sich, wenn $z = r \pm \varrho$

" " " schneiden " " $\begin{cases} z < r + \varrho \text{ u.} \\ z > r - \varrho \end{cases}$

K liegt innerhalb K_1 , wenn $z < r - \varrho$
 K „ ausserhalb „ „ $z > r + \varrho$,
 z Zentrale, r der grössere, ϱ der kleinere
 Halbmesser.

12. Kreisteilung. Zu einem Zentriwinkel von $\frac{4}{n}R$
 — oder einem Peripheriewinkel von $\frac{2}{n}R$ — gehört der
 nte Teil der Kreislinie.

13. Regelmässiges Vieleck.

Eckenzahl:	3	4	5	6	...	n
Zentriwinkel:	$\frac{4}{3}R$	$1R$	$\frac{4}{5}R$	$\frac{2}{3}R$	...	$\frac{4}{n}R$
Polygonwinkel:	$\frac{2}{3}R$	$1R$	$\frac{6}{5}R$	$\frac{4}{3}R$	...	$\frac{2n-4}{n}R$.

§ 42. Proportionalität von Strecken, Aehnlichkeit.

1. Werden die Schenkel eines Winkels oder zweier Scheitelwinkel von zwei Parallelen geschnitten, so sind die Abschnitte auf dem einen Schenkel proportional den entsprechenden auf dem andern und die Parallelen verhalten sich wie die zugehörigen Scheitelabschnitte desselben Schenkels. — Umkehrung.

2. Die Halbierungslinie eines Winkels im Dreieck teilt die Gegenseite innerlich im Verhältnis der Anseiten; die Halbierungslinie des Aussenwinkels teilt sie äusserlich in demselben Verhältnis. — Umkehrung.

3. Werden die Schenkel eines Winkels oder zweier Scheitelwinkel von zwei Parallelen geschnitten, so sind die abgeschnittenen Dreiecke einander ähnlich.

4. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn

a) zwei Seiten proportional und der eingeschlossene Winkel gleich,

- b) zwei Winkel gleich,
- c) die 3 Seiten proportional,
- d) zwei Seiten proportional der Gegenwinkel des einen Paares gleich und die Gegenwinkel des andern Paares gleichartig sind. — (Besonderer Fall: Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie zwei Seiten proportional und den Gegenwinkel der grösseren gleich haben.)

5. Zwei Höhen eines Dreiecks verhalten sich umgekehrt wie die zugehörigen Seiten, oder wie die reciproken Werte der Seiten und umgekehrt; also

$$h:h':h'' = \frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c} = bc:ac:ab$$

- 6 a) Zieht man von zwei ähnlich liegenden Punkten bei zwei ähnlichen Vielecken Strahlen nach allen entsprechenden Ecken, so entstehen paarweis ähnliche Dreiecke.

Besonderer Fall: Durch die Diagonalen aus zwei entsprechenden Ecken werden zwei ähnliche Vielecke in paarweis ähnliche Dreiecke zerlegt.

- b) Entstehen durch Strahlen, die man von zwei Punkten nach den Ecken zweier Vielecke zieht, paarweis ähnliche, in gleicher Reihenfolge liegende Dreiecke, so sind die Vielecke ähnlich und die beiden Punkten ähnlich liegend.

Besondere Fälle: 1. Werden zwei Vielecke durch die Diagonalen aus zwei Ecken in paarweis ähnliche in gleicher Reihenfolge liegende Dreiecke zerlegt, so sind die Vielecke ähnlich.

2. Zwei Parallelogramme sind ähnlich, wenn sie einen Winkel gleich und die einschliessenden Seiten proportional haben.

7. Regelmässige Vielecke von gleicher Seitenzahl sind ähnlich.

8. In ähnlichen Vielecken sind entsprechende Winkel einander gleich und entsprechende Längen proportional; die Umfänge ähnlicher Vielecke verhalten sich daher wie entsprechende Seiten.

9. a) Sind zwei Vielecke in perspektivischer Lage und $n-1$ Seitenpaare (worunter keines, das mit einem Strahl zusammenfällt) parallel, so ist auch das n te Paar parallel und die Vielecke sind ähnlich.

b) Sind zwei Vielecke ähnlich und zwei Seitenpaare parallel, so sind auch die übrigen parallel und die Vielecke sind in perspektivischer Lage.

10. a) Die Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist mittlere Proportionale zwischen der Hypotenuse und dem anliegenden Hypotenusenabschnitt.

b) Die Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks ist mittlere Proportionale zu den Hypotenusenabschnitten.

11. Ist in einem gleichschenkligen Dreieck die Basis gleich dem grösseren Abschnitt des stetig getheilten Schenkels, so ist der Winkel an der Spitze $\frac{2}{5}R$ und umgekehrt. (Bestimmungsdreieck des regelmässigen Zehnecks).

12. a) Sekantensatz. Werden die Schenkel eines Winkels oder zweier Scheitelwinkel von einem Kreis geschnitten, so sind die Scheitelabschnitte des einen Schenkels innere, die des andern äussere Glieder einer Proportion, d. h. das Produkt der Scheitelabschnitte ist konstant. (Potenz eines Punktes in Beziehung auf einen Kreis $= PO^2 - r^2$.)

Besonderer Fall: Wird der eine

Schenkel eines Winkels von einem Kreis geschnitten, der andere berührt, so ist das Quadrat des Tangentenabschnitts gleich dem Produkt der Scheitelabschnitte der Sekante.

- b) Sind auf jedem Schenkel eines Winkels oder zweier Scheitelwinkel vom Scheitel aus je zwei Stücke abgetragen und ist das Produkt der Abschnitte des einen Schenkels gleich dem Produkt der Abschnitte des andern, so liegen die vier Endpunkte der Abschnitte auf einem Kreis.

Besonderer Fall: Sind auf dem einem Schenkel eines Winkels zwei Abschnitte auf dem andern ein Abschnitt vom Scheitel aus abgetragen und ist das Produkt der Abschnitte des ersten Schenkels gleich dem Quadrat des Abschnitts auf dem zweiten Schenkel, so berührt der durch die Endpunkte der drei Abschnitte gelegte Kreis den zweiten Schenkel.

§ 43. Flächenvergleichung, Inhaltsbeziehungen.

1. Parallelogramme — Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe sind gleich.

2. Ein Dreieck ist halb so gross als ein Parallelogramm von gleicher Grundlinie und Höhe.

3. Ein Trapez ist inhaltsgleich mit einem Parallelogramm, wenn beide gleiche Höhe haben und wenn die Grundlinie des Parallelogrammes gleich der Mittellinie des Trapezes ist. Trapeze sind gleich, wenn sie gleiche Höhe und gleiche Mittellinie haben.

4. Datum für Parallelogramm und Dreieck: a, h, f^2 , für das Trapez: $b + d, h, f^2$.

5. Ein Kreis ist gleich einem Dreieck, dessen

Grundlinie gleich dem Umfang und dessen Höhe gleich dem Halbmesser ist.

6. Parallelogramme — Dreiecke, die einen Winkel gleich haben, verhalten sich wie die Produkte der den gleichen Winkel einschliessenden Seiten.

Datum α , (bc) , f^2 .

7. Aehnliche Vielecke verhalten sich dem Inhalt nach wie die Quadrate entsprechender Längen.

8. Das Quadrat über einer Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich dem Rechteck aus der Hypotenuse und dem anliegenden Hypotenusenabschnitt.

9. Das Quadrat über der Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich dem Rechteck aus den Hypotenusenabschnitten.

10. Pythagoräischer Lehrsatz:

a) Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate über den Katheten.

b) Allgemeiner Pythagoräischer Lehrsatz: Konstruiert man über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks ähnliche Figuren, so ist die Figur über der Hypotenuse gleich der Summe der Figuren über den Katheten.

c) Pythagoräischer Lehrsatz für das schiefwinklige Dreieck: Das Quadrat über einer Dreiecksseite ist gleich der Summe der Quadrate der andern Dreiecksseiten vermehrt oder vermindert um das doppelte Rechteck aus einer dieser Seiten und der Projektion der andern auf sie, je nachdem der Gegenwinkel der ersten Seite stumpf oder spitz ist (vgl. § 58,6).

§ 44. Längen- und Flächenberechnungen.

- | | |
|------------------------------|-------------|
| 1. Inhalt des Rechtecks: | $a \cdot b$ |
| 2. " " Quadrats: | a^2 |

3. Inhalt des Parallelogramms: ah

4. „ „ Dreiecks:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a \cdot h}{2}, \\ \varrho \cdot \frac{a+b+c}{2} = \varrho \cdot s, \\ \varrho_1 \cdot \frac{b+c-a}{2} = \varrho_1(s-a) = \varrho_2(s-b) = \varrho_3(s-c), \\ \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \end{array} \right.$$

5. Inhalt des Trapezes: $\frac{h(b+d)}{2}$,6. „ „ regelmässigen n Ecks: $\frac{n \cdot a \cdot \varrho}{2}$,7. Umfang des Kreises: $2r\pi = d\pi$; $\left(\pi = 3,1416; = \frac{22}{7}\right)$,8. Inhalt „ „ : $r^2\pi = \frac{d^2}{4}\pi$,9. Bogen : $2r\pi = \alpha^\circ : 360^\circ$; Bogen = $\frac{\alpha r \pi}{180}$,10. Sektor : $r^2\pi = \alpha^\circ : 360^\circ$; Sektor = $\frac{\alpha r^2 \pi}{360} = \frac{br}{2}$,

11. Bogenlänge im Kreis vom Halbmesser 1:

$$\text{arc } \alpha^\circ = \frac{\alpha \pi}{180} = \frac{\alpha^\circ}{\frac{180^\circ}{\pi}}$$

Regelmässige Vielecke:

12. Dreieck.

$$h = \frac{a}{2} \sqrt{3} = \frac{3r}{2} = 3\varrho$$

$$r = \frac{2}{3} h = \frac{a}{3} \sqrt{3} = 2\varrho$$

$$\varrho = \frac{h}{3} = \frac{a}{6} \sqrt{3} = \frac{r}{2}$$

$$J = \frac{a^2}{4} \sqrt{3} = \frac{h^2}{3} \sqrt{3} = \frac{3r^2}{4} \sqrt{3} = 3 \varrho^2 \sqrt{3}$$

13. Sechseck.

$$r = a = \frac{2}{3} \varrho \sqrt{3}$$

$$\varrho = \frac{a}{2} \sqrt{3} = \frac{r}{2} \sqrt{3}$$

$$\text{Diagonale } d_1 = a \sqrt{3} = r \sqrt{3} = 2 \varrho$$

$$,, \quad d_2 = 2a = 2r = \frac{4}{3} \varrho \sqrt{3}$$

$$J = \frac{3a^2}{2} \sqrt{3} = \frac{3r^2}{2} \sqrt{3} = 2 \varrho^2 \sqrt{3}$$

14. Quadrat.

$$r = \frac{a}{2} \sqrt{2} = \varrho \sqrt{2}$$

$$\varrho = \frac{a}{2} = \frac{r}{2} \sqrt{2}$$

$$J = a^2 = 2r^2 = 4\varrho^2$$

15. Achteck.

$$r = \frac{a}{2} \sqrt{4 + 2\sqrt{2}} = \varrho \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$$

$$\varrho = \frac{a}{2} (\sqrt{2} + 1) = \frac{r}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

$$a = r \sqrt{2 - \sqrt{2}} = 2\varrho (\sqrt{2} - 1)$$

$$d_1 = a \sqrt{2 + \sqrt{2}} = r \sqrt{2} = 2\varrho \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$d_2 = a (\sqrt{2} + 1) = r \sqrt{2 + \sqrt{2}} = 2\varrho$$

$$d_3 = a \sqrt{4 + 2\sqrt{2}} = 2r = 2\varrho \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$$

$$J = 2a^2 (\sqrt{2} + 1) = 2r^2 \sqrt{2} = 8\varrho^2 (\sqrt{2} - 1)$$

16. Fünfeck.

$$r = \frac{a}{10} \sqrt{50 + 10\sqrt{5}} = \varrho (\sqrt{5} - 1)$$

$$\varrho = \frac{a}{10} \sqrt{25 + 10\sqrt{5}} = \frac{r}{4} (\sqrt{5} + 1)$$

$$a = \frac{r}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = 2\varrho \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$$

$$d = \frac{a}{2} (\sqrt{5} + 1) = \frac{r}{2} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} = \varrho \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

$$J = \frac{a^2}{4} \sqrt{25 + 10\sqrt{5}} = \frac{5r^2}{8} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

$$= 5\varrho^2 \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$$

17. Zehneck.

$$r = \frac{a}{2} (\sqrt{5} + 1) = \frac{\varrho}{5} \sqrt{50 - 10\sqrt{5}}$$

$$\varrho = \frac{a}{2} \sqrt{5 + 2\sqrt{5}} = \frac{r}{4} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

$$a = \frac{r}{2} (\sqrt{5} - 1) = \frac{2\varrho}{5} \sqrt{25 - 10\sqrt{5}}$$

$$d_1 = \frac{a}{2} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} = \frac{r}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = \varrho (\sqrt{5} - 1)$$

$$d_2 = \frac{a}{2} (3 + \sqrt{5}) = \frac{r}{2} (\sqrt{5} + 1) = \frac{\varrho}{5} \sqrt{50 + 10\sqrt{5}}$$

$$d_3 = a \sqrt{5 + 2\sqrt{5}} = \frac{r}{2} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} = 2\varrho$$

$$d_4 = a (\sqrt{5} + 1) = 2r = \frac{2\varrho}{5} \sqrt{50 - 10\sqrt{5}}$$

$$J = \frac{5a^2}{2} \sqrt{5 + 2\sqrt{5}} = \frac{5r^2}{4} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = 2\varrho^2 \sqrt{25 - 10\sqrt{5}}.$$

§ 45. Zusammenstellung von Daten; weitere Formeln.

A) Datumsbeziehungen. Wo nichts bemerkt ist, beziehen sie sich auf das Dreieck.

$$1. h, m, (\beta - \gamma).$$

$$2. \begin{cases} h + h', a + b, \gamma \\ h - h', b - a, \gamma. \end{cases}$$

$$3. a, r, \alpha.$$

$$4. \begin{cases} s - a, \varrho, \alpha. \\ s, \varrho_1, \alpha. \end{cases}$$

$$5. a, h, f^2.$$

$$\text{Trapez: } b + d, h, f^2.$$

$$6. \begin{cases} s, \varrho, f^2 \\ s - a, \varrho_1, f^2. \end{cases}$$

$$\text{Tangentenviereck: } a + b + c + d, \varrho, f^2.$$

$$7. (bc), \alpha, f^2.$$

$$8. b^2 - c^2, (p + q), (p - q) \text{ s. } C_{17} \text{ dieses } \S.$$

B) Beziehungen am rechtwinkligen Dreieck.

$$9. b^2 = ap, c^2 = aq, (a \text{ Hyp., } p \text{ und } q \text{ Abschn. derselben}).$$

$$10. h^2 = pq.$$

$$11. a^2 = b^2 + c^2; a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$12. bc = ah.$$

13. Rationale rechtwinklige Dreiecke sind bestimmt durch

$$a = u^2 + v^2$$

$$b = u^2 - v^2$$

$$c = 2uv.$$

u	v	$u^2 + v^2$ a	$u^2 - v^2$ b	$2uv$ c
2	1	5	3	4
3	1	10	8	6
3	2	13	5	12
4	1	17	15	8
4	2	20	12	16
4	3	25	7	24
5	1	26	24	10
5	2	29	21	20

C) Beziehungen am schiefwinkligen Dreieck.

14. $bp = cq$ (p Projekt. von c auf b, q Projekt. von b auf c).

15. $a^2 = b^2 + c^2 \mp 2cq$ (Pyth. Lehrsatz für das schiefwinklige Δ), (q Projekt. von b auf c). $\alpha \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} R$.

16. $bc = 2rh$.

17. $b^2 - c^2 = p_1^2 - q_1^2$ (p_1 und q_1 Projekt. von b und c auf a).

$$18. \begin{cases} a^2 + 4t^2 = 2(b^2 + c^2) \\ 4(t^2 + t'^2 + t''^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2) \\ a^2 = \frac{4}{9}(2t'^2 + 2t''^2 - t^2). \end{cases}$$

19. $m^2 = bc - vw$ (v und w Abschnitte der Seite a, erzeugt durch Winkelhalbierende m).

$$20. \begin{cases} \text{Dreiecksinhalt } J = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ J = \frac{ah}{2} \\ J = \frac{abc}{4r}. \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} \varrho \cdot \varrho_1 \cdot \varrho_2 \cdot \varrho_3 = J^2 \\ \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3} = \frac{1}{\varrho}. \end{cases}$$

22. Kreisviereck (Ptolemäischer Lehrsatz)

$$ee_1 = ac + bd$$

Inhalt des Kreisvierecks:

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

$$\text{wobei } s = \frac{a+b+c+d}{2}.$$

§ 46. Geometrische Oerter.

A. Der geometrische Ort für einen Punkt, der

1. von einem Punkt A die Entfernung r hat, ist die Kreislinie um A mit r ;2. von einer Geraden L auf bestimmter Seite derselben die Entfernung h hat, ist die Parallele zu L auf jener Seite im Abstand h ;

3. von zwei Punkten A und B gleiche Entfernung hat, ist das Mittellot zu AB;

4. von den Schenkeln eines Winkels gleichen Abstand hat, ist die Halbierungslinie des Winkels;

5. von zwei Parallelen gleichen Abstand hat, ist die Parallele im mittleren Abstand.

B. Der geometrische Ort für den Mittelpunkt eines Kreises, der

6. den Halbmesser r hat und durch Punkt A geht, ist die Kreislinie um A mit r ;7. den Halbmesser r hat und die Gerade L auf bestimmter Seite berührt, ist die Parallele im Abstand r auf jener Seite;

8. durch die Punkte A und B gehen soll, ist das Mittellot zu AB;

9. die Schenkel eines Winkels berühren soll, ist die Halbierungslinie des Winkels;

10. zwei Parallelen berührt, ist die mittlere Parallele;

11. eine Gerade L im Punkte A berührt, ist das Lot zu L in A ;

12. eine Kreislinie im Punkte A berührt, ist die Verbindungslinie des Mittelpunkts mit A ;

13. den Halbmesser ϱ hat und eine Kreislinie K vom Halbmesser r von aussen oder innen berührt, ist ein zu K konzentrischer Kreis mit dem Halbmesser $r + \varrho$ oder $r - \varrho$, bzw. $\varrho - r$.

C. Der geometrische Ort für die Spitzen aller Dreiecke auf derselben Seite über der gemeinsamen Grundlinie a mit

14. demselben Winkel α an der Spitze, ist der Kreisbogen über a , welcher den Winkel α fasst;

15. dem gleichen Inhalt, ist eine Parallele zur Grundlinie;

16. demselben Verhältnis $m:n$ für die Seiten b und c ist ein Halbkreis über der Strecke zwischen den beiden Punkten, welche a innerlich und äusserlich im Verhältnis $m:n$ teilen (Satz des Apollonius).

§ 47. Besondere Linien und Punkte am Dreieck.

In einem Dreieck schneiden sich

1. die Mittellote zu den Seiten in einem Punkt, der von den Ecken gleiche Entfernungen hat (Umkreismittelpunkt O);

2. die Halbierungslinien der Winkel in einem Punkt, der von den Seiten gleiche Entfernungen hat (Inkreismittelpunkt M); desgleichen die Halbierungslinie eines Winkels und die der beiden Aussenwinkel an der Gegenseite (Ankreismittelpunkte M_1, M_2, M_3);

3. die Schwerlinien (seitenhalbierende Trans-

versalen) in einem Punkt und teilen sich gegenseitig im Verhältnis $2:1$ (Schwerpunkt S);

4. die Höhen in einem Punkt (Höhenschnittpunkt H).

In einem Dreieck liegen:

5. Der Höhengschnittpunkt, der Schwerpunkt und der Umkreismittelpunkt in gerader Linie, und es ist hiebei $HS:SO=2:1$;

6. die drei Fusspunkte der Höhen, die drei Halbierungspunkte der Seiten und die drei Halbierungspunkte der oberen Höhenabschnitte auf einem Kreis (Feuerbachscher Kreis).

§ 48. Harmonische Teilung.

1. Wenn die Strecke AB durch die Punkte P und Q innerlich bzw. äusserlich nach demselben Verhältnis geteilt ist, dann heissen A, B, P, Q harmonische Punkte; A und B , ebenso P und Q heissen zugeordnet. — PQ wird ebenfalls durch A und B in gleichem Verhältnis geteilt.

2. Gehen die Strahlen eines Büschels durch vier harmonische Punkte, so heisst dasselbe ein harmonisches Büschel; je zwei Strahlen, welche durch zwei zugeordnete Punkte gehen, heissen selbst zugeordnet.

3. Zu einem Teilpunkt einer Strecke giebt es nur einen harmonisch zugeordneten Punkt; zu einem Teilstrahl eines Winkels giebt es nur einen harmonisch zugeordneten Strahl.

4. Der zum Halbierungspunkt einer Strecke (in Bezug auf die Endpunkte) harmonisch zugeordnete Punkt ist der unendlich ferne Punkt; der zur Halbierungslinie eines Winkels in Bezug auf die Schenkel harmonisch zugeordnete Strahl ist das Lot zur Halbierungslinie.

5. a) Wenn man zu einem Strahl eines harmonischen Büschels eine Parallele zieht, so wird das Stück derselben zwischen dem andern Paar zugeordneter Strahlen von dem zum ersten zugeordneten Strahl halbiert. (Bestimmung des 4. harmonischen Elementes zu 3 gegebenen.)

b) Umgekehrt: Werden durch drei Strahlen eines Büschels auf einer Geraden gleiche Strecken abgeschnitten und ist der 4. Strahl dieser Geraden parallel, so bilden die vier Strahlen ein harmonisches Büschel.

6. Jede Gerade schneidet ein harmonisches Büschel in harmonischen Punkten.

7. In einer Nebenecke eines vollständigen Vierecks wird der Winkel zweier Gegenseiten durch die Strahlen nach den andern Nebenecken harmonisch geteilt.

8. Auf einer Nebenseite eines vollständigen Vierseits wird der Abstand zweier Gegenecken durch die andern Nebenseiten harmonisch geteilt.

9. Harmonische Proportion, harmonisches Mittel s. § 11 10, 11.

10. Ist M Halbierungspunkt der durch P und Q harmonisch geteilten Strecke AB, so ist:

$$AM^2 = MP \cdot MQ.$$

§ 49. Kreispolaren.

1. Sind A, B, P, Q vier harmonische Punkte und beschreibt man über der Entfernung AB des einen zugeordneten Paares als Durchmesser einen Kreis und errichtet in P ein Lot auf AB, so heisst dieses Lot

die Polare von Q in Beziehung auf den Kreis. — Ebenso ist das Lot in Q die Polare von P ; P und Q heissen zugeordnete Pole.

2. Die Berührungssehne der von einem Punkt an einen Kreis gezogenen Tangenten ist Polare jenes Punktes. — Eine Tangente ist Polare ihres Berührungspunktes. — Die Polare des Mittelpunktes ist die unendlich ferne Gerade und der Pol eines Durchmessers ist ein unendlich ferner Punkt.

3. Die Polaren aller Punkte einer Geraden schneiden sich in einem Punkt, dem Pole dieser Geraden.

4. Die Pole aller durch einen Punkt gehenden Geraden liegen auf einer Geraden, der Polaren dieses Punktes.

5. Die Polare des Schnittpunktes zweier Geraden ist die Verbindungslinie der Pole derselben.

6. Der Pol der Verbindungslinie zweier Punkte ist der Schnittpunkt der Polaren derselben.

7. Jede durch einen Punkt gehende Sekante wird durch diesen, durch seine Polare und die Kreislinie harmonisch geteilt.

8. In jedem Sehnenviereck ist eine Nebenecke der Pol zur Verbindungslinie der beiden andern Nebenecken.

9. In jedem Tangentenvierseit ist eine Nebenseite die Polare zum Schnittpunkt der beiden andern Nebenseiten.

§ 50. Ceva-, Menelaos-, Pascal-, Brianchon-Satz.

1. Satz des Ceva: Schneiden sich drei Ecktransversalen eines Dreiecks in einem Punkt innerhalb oder ausserhalb eines Dreiecks, so ist das Produkt dreier

nicht aneinanderliegender Seitenabschnitte gleich dem Produkt der drei andern. — (Umkehrung.)

2. Satz des Menelaos: Schneidet eine Transversale eines Dreiecks die drei Seiten oder ihre Verlängerungen, so ist das Produkt dreier nicht aneinanderliegender Seitenabschnitte gleich dem Produkt der drei andern. — (Umkehrung.)

3. Satz des Pascal: Die drei Schnittpunkte je zweier Gegenseiten eines Sehnensechsecks liegen in einer Geraden.

4. Satz des Brianchon: Die drei Verbindungslinien je zweier Gegenecken eines Tangentensechsecks schneiden sich in einem Punkt.

§ 51. Aehnlichkeitspunkte, Potenzlinien (Chordalen).

1. Zieht man in zwei Kreisen zwei gegenläufige oder gleichläufige parallele Halbmesser, so geht die Verbindungslinie der Endpunkte jedes Paares stets für sich durch denselben festen Punkt. Diese beiden Punkte teilen die Centrale innerlich und äusserlich im Verhältnis der Halbmesser; sie heissen innerer bzw. äusserer Aehnlichkeitspunkt.

2. Satz des Monge: Die drei äusseren Aehnlichkeitspunkte dreier Kreise, ebenso je zwei innere und ein äusserer liegen auf einer Geraden (Aehnlichkeitsachse.)

3. Die Potenzlinie zweier Kreise (d. h. die gerade Linie deren sämtliche Punkte in Bezug auf zwei Kreise gleiche Potenz haben, s. § 42, 12a.) steht senkrecht auf der Centrale. Wenn gemeinschaftliche, gleichartige Tangenten vorhanden sind, halbiert sie dieselben; schneiden oder berühren sich die Kreise, so ist die Potenz-

linie gemeinschaftliche Sekante oder Tangente im Berührungspunkt; sind die Kreise konzentrisch, so liegt sie in unendlicher Entfernung. Die von einem Punkt der Potenzlinie an die beiden Kreise gezogenen Tangenten sind einander gleich.

4. Die Potenzlinien je zweier von drei gegebenen Kreisen schneiden sich in einem Punkt, dem Potenz- oder Chordalpunkt derselben, oder sie sind parallel.

Stereometrie.

§ 52. Gerade Linien und Ebenen.

1. a) Eine Gerade ist einer Ebene parallel, wenn sie einer in der Ebene liegenden Geraden parallel ist.
b) Ist eine Gerade einer Ebene parallel, so schneidet jede durch die Gerade gelegte Ebene die erste Ebene in einer parallelen Geraden.
c) Ist eine Gerade einer Ebene parallel und zieht man durch einen Punkt der Ebene eine Parallele zu der Geraden, so fällt die Gerade ganz in die Ebene hinein.
2. a) Legt man durch jede von zwei Parallelen eine Ebene, welche die andere schneidet, so ist die Schnittlinie der beiden Ebenen den beiden Geraden parallel.
b) Sind zwei Geraden einer dritten parallel, so sind sie einander selbst parallel.
3. Werden zwei parallele Ebenen von einer dritten geschnitten, so sind die Schnittlinien parallel.
4. Sind die Schenkel zweier Winkel parallel, so sind auch ihre Ebenen parallel.
5. Sind die Schenkel zweier Winkel parallel und beide Paare gleichläufig oder beide gegenläufig, so sind die Winkel gleich; ist das eine Schenkelpaar gleich, das andere gegenläufig, so sind die Winkel supplementär.
6. Sind zwei Ebenen einer dritten parallel, so sind sie einander selbst parallel.

7. a) Steht eine Gerade zu zwei Geraden einer Ebene senkrecht, so steht sie auf allen in der Ebene liegenden Geraden senkrecht, d. h. sie ist senkrecht zur Ebene.
b) Alle Geraden, welche in demselben Punkt zu einer Geraden senkrecht sind, liegen in einer Ebene, die senkrecht ist zu der Geraden.
8. Zu einer Ebene lässt sich durch einen Punkt auf oder ausserhalb derselben nur ein Lot ziehen.
9. Zu einer Geraden lässt sich durch einen auf oder ausserhalb derselben gelegenen Punkt nur eine senkrechte Ebene legen.
10. a) Jede Ebene durch ein Lot zu einer Ebene ist zu dieser Ebene senkrecht.
b) Eine Gerade, welche innerhalb einer von zwei zu einander senkrechten Ebenen senkrecht zu deren Schnittlinie ist, ist auch senkrecht zur andern Ebene.
c) Eine Gerade, welche senkrecht zu einer von zwei senkrechten Ebenen ist, fällt ganz in die andere oder ist ihr parallel.
d) Sind zwei sich schneidende Ebenen senkrecht zu einer dritten, so ist auch ihre Schnittlinie senkrecht zur dritten.
11. Ist ein Winkel, dessen einer Schenkel in der Projektionsebene liegt ein R, so ist auch der Winkel selbst ein R; umgekehrt ist die Projektion ein R, so ist der Winkel selbst ein R.
12. a) Stehen zwei Geraden auf derselben Ebene senkrecht, so sind sie parallel.
b) Ist die eine von zwei parallelen Geraden senkrecht zu einer Ebene, so ist es auch die andere.

13. a) Stehen zwei Ebenen auf derselben Geraden senkrecht, so sind sie parallel.

b) Ist die eine von zwei parallelen Ebenen zu einer Geraden senkrecht, so ist es auch die andere.

14. Das Lot von einem Punkt auf eine Ebene ist die kürzeste Strecke zwischen Punkt und Ebene und umgekehrt.

15. Diejenigen Strecken zwischen einer Ebene und einem Punkt ausserhalb derselben sind einander gleich, deren Endpunkte von der Projektion des ersten Punktes gleichweit entfernt sind und umgekehrt.

Die gleichen Strecken machen mit der Ebene gleiche Winkel und umgekehrt.

16. Von zwei von einem Punkt nach einer Ebene gezogenen Strecken ist diejenige die kleinere, deren Endpunkt näher bei der Projektion jenes Punktes liegt und umgekehrt.

Die kleinere der Strecken macht mit der Ebene den grösseren Winkel und umgekehrt.

17. Der Neigungswinkel einer Geraden gegen eine Ebene ist kleiner als der Winkel der Geraden mit irgend einer Geraden in der Ebene.

18. Alle parallelen Strecken zwischen zwei parallelen Ebenen sind gleich und machen mit derselben Ebene gleiche Winkel.

19. Die kürzeste Strecke zwischen zwei windschiefen Geraden ist diejenige, die auf beiden Geraden senkrecht steht.

20. Werden zwei parallele Ebenen von einer dritten geschnitten, so sind:

- | | |
|------------------------|--------------------|
| a) entsprechende Keile | } einander gleich, |
| b) innere Wechselkeile | |
| c) äussere „ | |

und d) innere Gegenkeile
 e) äussere " } betragen zusammen
 f) gemischte Wechselkeile } 2 rechte Keile.

Jeder der sechs Sätze ist umkehrbar.

§ 53. Kugel-, Cylinder-, Kegelfläche.

A. Lagebeziehungen.

1. Ein Punkt liegt innerhalb, auf, ausserhalb einer Kugel, eine Gerade und ebenso eine Ebene schneidet, berührt, liegt ganz ausserhalb der Kugel, je nachdem der Mittelpunktsabstand $\begin{matrix} \leq \\ > \end{matrix}$ r ist: (r Halbm.)

2. Ein Punkt und ebenso eine zur Achse parallele Gerade liegt innerhalb, auf, ausserhalb einer Cylinderfläche, eine zur Achse nicht parallele Gerade und eine zur Achse parallele Ebene schneidet, berührt sie, trifft sie nicht, je nach dem der Abstand von der Achse $\begin{matrix} \leq \\ > \end{matrix}$ r ist. (r Grundkreishalbm.)

3. Eine durch die Spitze eines Kegels gehende Gerade liegt innerhalb, auf, ausserhalb einer Kegelfläche, eine durch die Spitze gehende Ebene schneidet, berührt sie, trifft sie nicht, je nachdem der Winkel der Geraden oder der Ebene mit der Achse $\begin{matrix} \leq \\ > \end{matrix}$ der erzeugende Winkel α ist.

4. Eine Ebene welche eine Kugel schneidet, schneidet sie in einer Kreislinie. — Eine zur Achse parallele Schnittebene einer Cylinderfläche schneidet diese in zwei zur Achse parallelen Mantellinien. — Eine durch die Spitze eines Kegels gehende Schnittebene schneidet die Kegelfläche in zwei Mantellinien.

5. Eine Berührungsebene an eine Kugel ist (u. a.) bestimmt durch zwei Tangenten, eine Berührungsebene

an eine Cylinder- und ebenso an eine Kegelfläche ist bestimmt durch Berührungsmantellinie und Grundkreistangente.

6. Das Lot vom Kugelmittelpunkt auf eine Kreisebene, Berührungsebene, Sehne der Kugel geht bezw. durch den Kreismittelpunkt, Berührungspunkt, Halbierungspunkt derselben.

Umkehrungen.

7. Zwei Kugeln berühren sich, wenn sie einen Punkt der Centrale gemeinschaftlich haben und umgekehrt.

Die Centrale zweier sich berührender Kugeln ist gleich der Summe oder gleich der Differenz der Halbmesser.

8. Ein Punkt der Kugelfläche ist Pol eines Kugelkreises, wenn er von drei Punkten desselben gleiche sphärische Entfernungen hat; er ist Pol eines Grosskreises, wenn er von zwei Punkten desselben sphärische Entfernungen von 90° hat.

B. Grössenbeziehungen.

9. Der Grosskreisbogen ist die kürzeste Linie zwischen zwei Punkten auf der Kugelfläche.

10. Ist ein sphärisches Dreieck Polardreieck zu einem zweiten, so ist auch das zweite Polardreieck zum ersten.

11. Die Bogengrade der Seiten eines sphärischen Dreiecks ergänzen die Winkelgrade der entsprechenden Winkel des Polardreiecks und die Winkelgrade des sphärischen Dreiecks ergänzen die Bogengrade der entsprechenden Seiten des Polardreiecks zu 180° .

(Nr. 10 und 11 gelten ebenso für Dreikant und Polardreikant.)

12. Zwei sphärische Dreiecke gleicher Kugeln oder zwei Dreikante sind entsprechend gleich, wenn

- a) zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel,
- b) eine Seite und zwei anliegende Winkel,
- c) die drei Seiten,
- d) die drei Winkel,
- e) zwei Seiten und der Gegenwinkel der einen gleich sind und der Gegenwinkel der andern in beiden zugleich $\begin{smallmatrix} \leq \\ > \end{smallmatrix} 90^\circ$ ist,
- f) zwei Winkel und die Gegenseite des einen gleich sind und die Gegenseite des andern in beiden zugleich $\begin{smallmatrix} \leq \\ > \end{smallmatrix} 90^\circ$ ist.

13. In jedem sphärischen Dreieck und jedem Dreikant

- a) liegen gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber und umgekehrt,
- b) liegt dem grösseren Winkel die grössere Seite gegenüber und umgekehrt,
- c) sind zwei Seiten zusammen grösser als die dritte,
- d) sind zwei Winkel zusammen kleiner als der um $2 R$ vermehrte dritte,
- e) ist, wenn die Summe zweier Seiten $\begin{smallmatrix} > \\ < \end{smallmatrix} 180^\circ$, auch die Summe der Gegenwinkel $\begin{smallmatrix} > \\ < \end{smallmatrix} 180^\circ$ und umgekehrt.

14. Ein sphärisches Zweieck verhält sich zur Kugeloberfläche wie sein Winkel zu $4 R$; oder

$$\text{sphär. Zweieck} = 2 R^2 \text{arc } \alpha$$

15. Der Inhalt des sphärischen Dreiecks verhält sich zur Kugeloberfläche wie der sphärische Exzess zu $8 R$; oder

$$\text{sphär. Dreieck} = R^2 \text{arc } (\alpha + \beta + \gamma - 2 R)$$

16. In einem sphärischen Dreieck liegt
- a) die Summe der Winkel zwischen $2R$ und $6R$
 - b) „ „ „ Seiten „ „ 0 und $4R$.

§ 54. Geometrische Oerter.

1. Eine um Punkt A mit dem Halbmesser r beschriebene Kugel ist geometrischer Ort
 - a) für jeden Punkt, der von A den Abstand r hat,
 - b) „ jede Gerade, die „ „ „ „ „ „
 - c) „ „ Ebene, „ „ „ „ „ „
 - d) „ den Mittelpunkt jeder Kugel vom Halbmesser r , die durch A geht.
2. Eine um die Gerade L als Achse mit dem Grundkreishalbmesser r beschriebene Cylinderfläche ist geometrischer Ort
 - a) für jeden Punkt, der von L den Abstand r hat,
 - b) „ jede Gerade, die „ „ „ „ „ „
 - c) „ „ Ebene, „ „ „ „ „ „
 - d) „ den Mittelpunkt jeder Kugel vom Halbmesser r , die L berührt.
3. Eine Kegelfläche mit der Achse L , der Spitze A und dem erzeugenden Winkel α ist geometrischer Ort
 - a) für jede durch A gehende Gerade, welche mit L den Winkel α bildet,
 - b) für jede durch A gehende Ebene, welche mit L den Winkel α bildet,
 - c) für jede durch A gehende Ebene, welche mit einer zu L senkrechten Ebene den Winkel $R - \alpha$ bildet.
4. Eine zu einer Ebene E im Abstand r auf einer Seite derselben parallel gelegte Ebene ist geometrischer Ort

- a) für jeden Punkt auf dieser Seite, der von E den Abstand r hat,
 - b) für jede parallele Gerade auf dieser Seite, die von E den Abstand r hat,
 - c) für den Mittelpunkt jeder Kugel auf dieser Seite, die E berührt und den Halbmesser r hat,
 - d) für die Achse jedes Cylinders auf dieser Seite, der den Grundkreishalbmesser r hat und E berührt.
5. Die Mittellotebene zu einer Strecke AB ist geometrischer Ort
- a) für jeden Punkt, der von A und B gleiche Entfernungen hat,
 - b) für jede Gerade, die von A und B gleiche Entfernungen hat und mit AB einen rechten Winkel bildet,
 - c) den Mittelpunkt jeder Kugel die durch A und B geht.
6. Die Mittellotebene zu einem Winkel ABC ist geometrischer Ort
- a) für jeden Punkt, der von den Schenkeln gleichen Abstand hat,
 - b) für jede durch B gehende Gerade, die mit den Schenkeln gleichen Winkel bildet,
 - c) für den Mittelpunkt jeder Kugel, welche beide Schenkel berührt.
7. Die Halbierungsebene eines Keils (MQ) ist geometrischer Ort
- a) für jeden Punkt, der von M und Q gleichen Abstand hat,
 - b) für den Mittelpunkt jeder Kugel, welche M und Q berührt.
8. Das Lot zur Ebene eines Dreiecks ABC im

Umkreismittelpunkt O desselben ist geometrischer Ort

- a) für jeden Punkt, der von A , B und C gleiche Abstände hat,
- b) für den Mittelpunkt jeder Kugel, die durch A , B und C geht.

9. Das Lot zur Ebene eines Dreiecks ABC im Inkreismittelpunkt oder einem Ankreismittelpunkt desselben ist geometrischer Ort

- a) für jeden Punkt, der von den drei Seiten gleiche Entfernungen hat,
- b) für den Mittelpunkt jeder Kugel, welche die drei Seiten berührt.

10. Die Schnittlinie der drei Mittellotebenen der Seiten eines Dreikants ist geometrischer Ort

- a) für jeden Punkt, der von den drei Kanten gleiche Abstände hat,
- b) für den Mittelpunkt jeder Kugel, welche die drei Kanten berührt. Die Schnittlinie ist Achse des dem Dreikant umbeschriebenen Kegels.

11. Die Schnittlinie der Halbierungsebenen der drei Keile eines Dreikants ist geometrischer Ort

- a) für jeden Punkt, der von den drei Seitenflächen gleichen Abstand hat,
- b) für den Mittelpunkt jeder Kugel, welche die drei Seitenflächen berührt.

Die Schnittlinie ist Achse des dem Dreikant eingeschriebenen Kegels.

§ 55. Sätze über Polyeder. Formeln für Oberflächen, Rauminhalt.

A. Allgemeine Sätze.

1. Eulers Satz: Bei jedem Vielflächner ist die Summe der Anzahl der Ecken und Flächen um 2 grösser als die Zahl der Kanten,

$$E + F = K + 2.$$

2. Die Anzahl der Kanten ist halb so gross als die der Winkel,

$$K = \frac{1}{2} W.$$

3. Ein Parallelschnitt einer Pyramide ist ein der Grundfläche ähnliches Vieleck und es verhält sich der Inhalt des Parallelschnittes zu dem der Grundfläche wie die Quadrate ihrer Entfernungen oder derjenigen entsprechender Ecken von der Spitze der Pyramide.

4. Satz des Cavalieri: Haben zwei Körper gleiche Höhe und gleiche Grundflächen und sind alle Parallelschnitte, die in denselben Entfernungen von den entsprechenden Grundflächen gelegt sind, einander gleich, so sind die Körper selbst inhaltsgleich.

5. Aehnliche Körper verhalten sich der Oberfläche nach wie die Quadrate, dem Inhalt nach wie die Kuben entsprechender Längen.

B. Berechnungen.

M Mantel, O Oberfläche, G Grundfläche, Q Querschnitt, h Höhe, r Grundkreishalbmesser, R Kugelhalmesser, a, b, c Kanten, s Mantellinie, S Mittelschnitt, V Rauminhalt.

• 6. Quader. $O = 2(ab + bc + ca)$

$$V = 3abc$$

7. Prisma. $V = G \cdot h = Qs$

8. Pyramide. $V = G \cdot \frac{h}{3}$

9. Cylinder. $M = 2r\pi h$
 $O = 2r\pi(h + r)$
 $V = r^2\pi h.$

Für den Hohlcyylinder

$$V = (r^2 - r_1^2)\pi h$$

10. Kegel. $M = r\pi s$
 $O = r\pi(s + r)$
 $s = \sqrt{r^2 + h^2}$
 $V = \frac{1}{3} r^2\pi h$

11. Pyramidenrumpf.

$$V = \frac{h}{3} (G + \sqrt{GG_1} + G_1)$$

12. Kegelrumpf.

$$M = (r + r_1)\pi s = 2p\pi h$$

(p Mittellot zur Mantellinie bis zur Achse.)

$$V = \frac{\pi h}{3} (r^2 + rr_1 + r_1^2)$$

13. Prismaetoid.

$$V = \frac{h}{6} (G + G_1 + 4S)$$

14. Schiefabgeschnittenes dreiseit. Prisma.

$$V = Q \cdot \frac{a + b + c}{3}$$

15. Kugel.

$$O = 4R^2\pi$$

$$V = \frac{4R^3\pi}{3}$$

Kugelzone. $O = 2R\pi h$

$$V = \frac{\pi h}{6} (3r^2 + 3r_1^2 + h^2)$$

Kugelabschnitt.

$$O = 2 R \pi h = (r^2 + h^2) \pi$$

$$V = \frac{\pi h}{6} (3 r^2 + h^2) = \frac{\pi h^2}{3} (3 R - h)$$

Kugelausschnitt.

$$V = \frac{2}{3} R^2 \pi h$$

Kugelkeil. $V = \frac{\pi R^3 \alpha}{270}$

16. Guldins Sätze. a) Die Oberfläche einer Drehfläche ist gleich dem Produkt aus der Länge der erzeugenden Linie und dem Wege des Schwerpunkts derselben.

Besteht die Erzeugende aus den Teilen $l_1, l_2, l_3, \dots$, deren Schwerpunkte die Abstände $s_1, s_2, s_3, \dots$ von der Achse haben, während der Abstand des Gesamtschwerpunktes der Erzeugenden s ist, so ist

$$s(l_1 + l_2 + l_3 + \dots) = s_1 l_1 + s_2 l_2 + s_3 l_3 + \dots$$

b) Der Inhalt eines Drehkörpers ist gleich dem Produkt aus dem Inhalt der erzeugenden Fläche und dem Weg des Schwerpunktes derselben.

Zerlegt man die erzeugende Fläche i in die Teile $i_1, i_2, i_3, \dots$ und sind die Achsenabstände der Schwerpunkte der ganzen Fläche und der Teile $s, s_1, s_2, s_3, \dots$, so ist

$$s i = s_1 i_1 + s_2 i_2 + s_3 i_3 + \dots$$

17. Regelmässige Körper. R Halbmesser der umbeschriebenen, r derjenige der einbeschriebenen Kugel, a Kante.

Tetraeder. $R = \frac{a}{4} \sqrt{6}; \quad r = \frac{a}{12} \sqrt{6};$

$$O = a^2 \sqrt{3}; \quad V = \frac{a^3}{12} \sqrt{2}.$$

Würfel. $R = \frac{a}{2}\sqrt{3}; \quad r = \frac{a}{2};$

$$O = 6a^2; \quad V = a^3.$$

Oktaeder. $R = \frac{a}{2}\sqrt{2}; \quad r = \frac{a}{6}\sqrt{6};$

$$O = 2a^2\sqrt{3}; \quad V = \frac{a^3}{3}\sqrt{2}.$$

Dodekaeder. $R = \frac{a}{4}(1 + \sqrt{5})\sqrt{3};$

$$r = \frac{a}{4}\sqrt{\frac{50 + 22\sqrt{5}}{5}} = a \operatorname{ctg} 36^\circ \cos 36^\circ;$$

$$O = 3a^2\sqrt{5(5 + 2\sqrt{5})};$$

$$V = \frac{12 F \cdot r}{3} = 4 F \cdot r \quad (F \text{ Seitenfläche})$$

$$= \frac{a^3}{4}(15 + 7\sqrt{5}) = 5a^3 \operatorname{ctg}^2 36^\circ \cos 36^\circ.$$

Isokaeder. $R = \frac{a}{4}\sqrt{2(5 + \sqrt{5})};$

$$r = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{7 + 3\sqrt{5}}{6}} = \frac{a}{4} \cdot \frac{3 + \sqrt{5}}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2a \cos^2 36^\circ}{\sqrt{3}};$$

$$O = 5a^2\sqrt{3};$$

$$V = \frac{20 \cdot F \cdot r}{3} = \frac{5a^3}{12}(3 + \sqrt{5});$$

$$= \frac{10a^3}{3} \cos^2 36^\circ.$$

Ebene Trigonometrie.

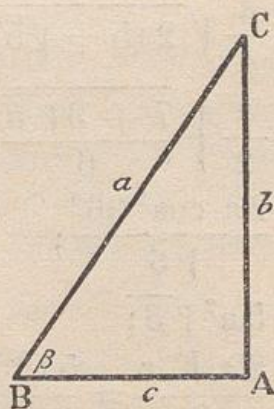
I. Goniometrie.

§ 56. Funktionen einfacher Winkel.

1. Erklärung der Funktionen.

- a) Am rechtwinkligen Dreieck (a Hypotenuse, b und c Katheten.)

$$\begin{cases} \sin \beta = \frac{b}{a}; & \operatorname{tg} \beta = \frac{b}{c}; & \operatorname{cosec} \beta = \frac{a}{b}; \\ \cos \beta = \frac{c}{a}; & \operatorname{ctg} \beta = \frac{c}{b}; & \sec \beta = \frac{a}{c}. \end{cases}$$



- b) Am Koordinatensystem (r Fahrstrahl, x und y Abscisse und Ordinate.)

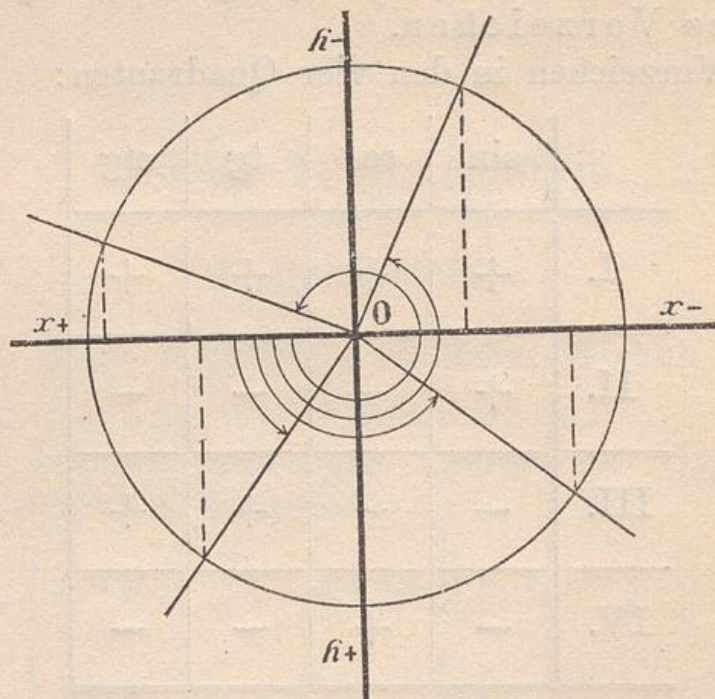
$$\begin{cases} \sin \alpha = \frac{y}{r}; & \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}; \\ \cos \alpha = \frac{x}{r}; & \operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}. \end{cases}$$

Der $\sin$ hat das Vorzeichen der Ordinate, der $\cos$ das der Abscisse, tg und ctg haben gleiches Vorzeichen.

c) Vorzeichen in den vier Quadranten:

	$\sin$	$\cos$	tg	ctg
I.	+	+	+	+
II.	+	—	—	—
III.	—	—	+	+
IV.	—	+	—	—

2.	$-\alpha$	$R - \alpha$	$R + \alpha$	$2R - \alpha$	$2R + \alpha$
$\sin$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$
$\cos$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$
tg	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$+\operatorname{tg} \alpha$
ctg	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$+\operatorname{ctg} \alpha$
	$3R - \alpha$	$3R + \alpha$	$4nR + \alpha$		
$\sin$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$\sin (\pm \alpha)$		
$\cos$	$-\sin \alpha$	$+\sin \alpha$	$\cos (\pm \alpha)$		
tg	$+\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} (\pm \alpha)$		
ctg	$+\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} (\pm \alpha)$		



3. Grenzwerte und besondere Werte:

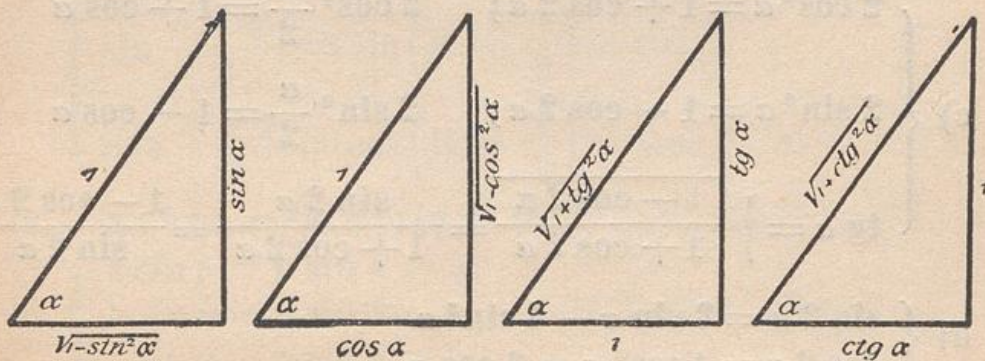
	0° 360°	90°	180°	270°	45°	30°	60°
sin	0	1	0	-1	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
cos	1	0	-1	0	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
tg	0	∞	0	$-\infty$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
ctg	∞	0	$-\infty$	0	1	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$

4. Zusammenhang der Funktionen:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha} \\ \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \\ \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1 \\ 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \end{array} \right.$$

	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
$\sin \alpha =$		$\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$	$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}$
$\cos \alpha =$	$\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$		$\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$	$\frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}$
$\operatorname{tg} \alpha =$	$\frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$	$\frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$		$\frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}$
$\operatorname{ctg} \alpha =$	$\frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}$	$\frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$	



§ 57. Funktionen zusammengesetzter Winkel.

$$1. \begin{cases} \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} \operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \\ \operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \mp 1}{\operatorname{ctg} \beta \pm \operatorname{ctg} \alpha} \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha; & \sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \\ \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha; & \cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \\ \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}; & \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \\ \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}; & \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1}{2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}} \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha; & 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos \alpha \\ 2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha; & 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos \alpha \\ \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}} = \frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \\ \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha. \end{cases}$$

2. Umformung von Summen und Differenzen.

$$a) \begin{cases} \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{2} \cdot \sin (45^\circ + \alpha) \\ \cos \alpha - \sin \alpha = \sqrt{2} \cdot \cos (45^\circ + \alpha) \\ \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{tg} (45^\circ + \alpha) \\ \frac{\operatorname{ctg} \alpha + 1}{\operatorname{ctg} \alpha - 1} = \operatorname{ctg} (45^\circ - \alpha) \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha} \\ \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha = 2 \operatorname{ctg} 2\alpha. \end{cases}$$

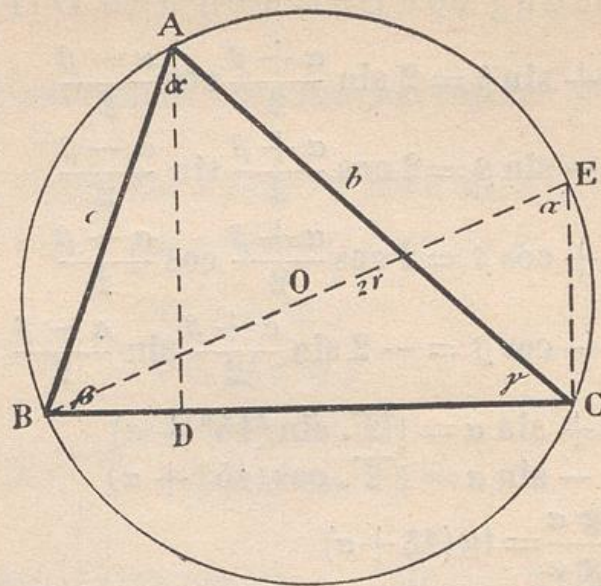
II. Das Dreieck etc.

§ 58. Formeln über das schiefwinklige Dreieck.

$$1. \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 2R; \quad \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = R \\ \sin (\beta + \gamma) = \sin (2R - \alpha) = \sin \alpha \\ \cos (\beta + \gamma) = \cos (2R - \alpha) = -\cos \alpha \\ \sin \frac{\beta + \gamma}{2} = \sin \left(R - \frac{\alpha}{2} \right) = \cos \frac{\alpha}{2} \\ \cos \frac{\beta + \gamma}{2} = \cos \left(R - \frac{\alpha}{2} \right) = \sin \frac{\alpha}{2}. \end{cases}$$

$$2. \quad a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma. \quad (\text{Sinussatz.})$$

$$\begin{cases} a \sin \beta = b \sin \alpha = h'' \\ b \sin \gamma = c \sin \beta = h \\ c \sin \alpha = a \sin \gamma = h'. \end{cases} \quad (\text{Höhenformel.})$$



$$\begin{cases} \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2r \\ a = 2r \sin \alpha \\ b = 2r \sin \beta \\ c = 2r \sin \gamma. \end{cases} \quad (\text{Sehnenformel.})$$

$$3. \begin{cases} a = b \cos \gamma + c \cos \beta \\ b = c \cos \alpha + a \cos \gamma \\ c = a \cos \beta + b \cos \alpha. \end{cases} \quad (\text{Projektionssatz.})$$

$$4. \begin{cases} \frac{b+c}{b-c} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\beta+\gamma}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta-\gamma}{2}} \\ \frac{c+a}{c-a} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\gamma+\alpha}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\gamma-\alpha}{2}} \\ \frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2}} \end{cases} \quad (\text{Neper'sche Gleichgn.})$$

$$5. \left\{ \begin{array}{l} (b+c) \sin \frac{\alpha}{2} = a \cos \frac{\beta-\gamma}{2} \\ (c+a) \sin \frac{\beta}{2} = b \cos \frac{\gamma-\alpha}{2} \\ (a+b) \sin \frac{\gamma}{2} = c \cos \frac{\alpha-\beta}{2} \\ (b-c) \cos \frac{\alpha}{2} = a \sin \frac{\beta-\gamma}{2} \\ (c-a) \cos \frac{\beta}{2} = b \sin \frac{\gamma-\alpha}{2} \\ (a-b) \cos \frac{\gamma}{2} = c \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \end{array} \right. \quad (\text{Mollweide'sche Gleichgn.})$$

6. Pythagoräischer Lehrsatz für das schiefwinklige Dreieck.

$$1. \left\{ \begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos \beta \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma. \end{array} \right.$$

Folgerungen:

$$2. a^2 = \left\{ \begin{array}{l} (b+c)^2 - 4bc \cos^2 \frac{\alpha}{2} \\ (b-c)^2 + 4bc \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l|l} a+b+c=2s & a-b+c=2(s-b) \\ -a+b+c=2(s-a) & a+b-c=2(s-c). \end{array}$$

$$3. \left\{ \begin{array}{l} \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}; \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}; \\ \sin \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}; \quad \cos \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}; \\ \sin \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}; \quad \cos \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}. \end{array} \right.$$

$$4. \begin{cases} \sin \alpha = \frac{2}{bc} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ \sin \beta = \frac{2}{ca} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ \sin \gamma = \frac{2}{ab} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} = \frac{\varrho}{s-a} \\ \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}} = \frac{\varrho}{s-b} \\ \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}} = \frac{\varrho}{s-c}. \end{cases}$$

7. Inhalt, In- und Ankreishalbmesser.

$$1. \quad 2J = ab \sin \gamma = bc \sin \alpha = ca \sin \beta.$$

$$2. \quad J = \begin{cases} 2r^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \\ \frac{abc}{4r}. \end{cases}$$

$$3. \quad J = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ = \varrho \cdot s = \varrho_1(s-a) = \varrho_2(s-b) = \varrho_3(s-c).$$

$$4. \quad \varrho \cdot \varrho_1 \cdot \varrho_2 \cdot \varrho_3 = J^2.$$

$$5. \begin{cases} \varrho = (s-a) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = (s-b) \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = (s-c) \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \\ \varrho_1 = s \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}; \quad \varrho_2 = s \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}; \quad \varrho_3 = s \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \varrho = 4r \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \\ s = 4r \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}. \end{cases}$$

§ 59. Berechnungen.

I. Das rechtwinklige Dreieck,

a Hypotenuse.

1. Gegeben a, β .

$$b = a \sin \beta; \quad c = a \cos \beta.$$

2. Gegeben b, β .

$$a = \frac{b}{\sin \beta}, \quad c = b \operatorname{ctg} \beta.$$

3. Gegeben a, b .

$$\sin \beta = \frac{b}{a}, \quad c = a \cos \beta = b \operatorname{ctg} \beta; \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

4. Gegeben b, c .

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{c}; \quad a = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\cos \beta}; \quad a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$2J = bc = ab \cos \beta = ab \sin \gamma = b^2 \operatorname{tg} \gamma.$$

II. Das gleichschenklige Dreieck.

1. Gegeben b, β .

$$a = 2b \cos \beta; \quad h = b \sin \beta.$$

2. Gegeben a, α .

$$b = \frac{a}{2 \cos \beta}; \quad h = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \beta.$$

3. Gegeben a und b .

$$\cos \beta = \frac{a}{2b}; \quad h = b \sin \beta = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \beta = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$$

$$2J = b^2 \sin \alpha = \frac{a^2}{4} \operatorname{tg} \beta.$$

III. Das regelmässige Vieleck.

1. Gegeben a .

$$r = \frac{a}{2} : \sin \frac{180^\circ}{n}$$

$$\varrho = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n}$$

$$J = \frac{na^2}{4} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n}.$$

2. Gegeben r .

$$a = 2r \sin \frac{180^\circ}{n}$$

$$\varrho = r \cos \frac{180^\circ}{n}$$

$$J = \frac{nr^2}{2} \sin \frac{360^\circ}{n}.$$

3. Gegeben ϱ .

$$r = \varrho : \cos \frac{180^\circ}{n}$$

$$a = 2\varrho \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$$

$$J = n\varrho^2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}.$$

IV. Segment.

$$\text{Sektor} = \frac{r^2 \pi \alpha^\circ}{360^\circ} = \frac{r^2}{2} \operatorname{arc} \alpha.$$

$$\Delta = \frac{r^2}{2} \sin \alpha$$

$$\text{Segment} = \frac{r^2}{2} \left(\frac{\pi \alpha^\circ}{180^\circ} - \sin \alpha \right) = \frac{r^2}{2} (\operatorname{arc} \alpha - \sin \alpha).$$

V. Das schiefwinklige Dreieck.

1. Gegeben a, β, γ .

$$\alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma); \quad b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}; \quad c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}.$$

2. Gegeben, b, c, α .

$$\frac{\beta + \gamma}{2} = R - \frac{\alpha}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\beta - \gamma}{2} = \frac{b - c}{b + c} \operatorname{tg} \frac{\beta + \gamma}{2}$$

$$\begin{cases} \beta = \frac{\beta + \gamma}{2} + \frac{\beta - \gamma}{2} \\ \gamma = \frac{\beta + \gamma}{2} - \frac{\beta - \gamma}{2} \end{cases}$$

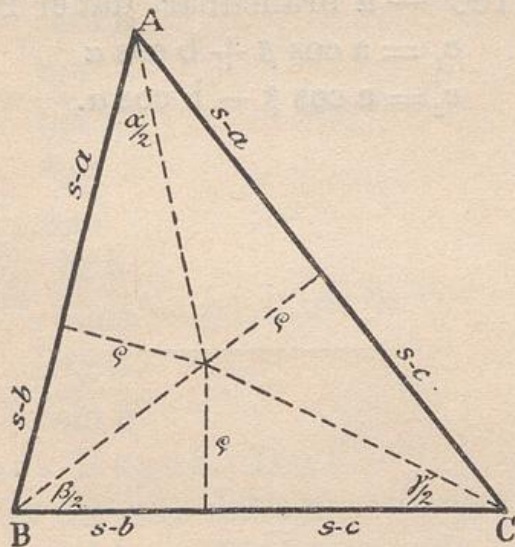
$$a = \frac{b \sin \alpha}{\sin \beta}$$

$$(= \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha})$$

oder:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b \sin \alpha}{c - b \cos \alpha}$$

$$a = \frac{b \sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c - b \cos \alpha}{\cos \beta}$$

3. Gegeben a, b, c .

$$1. J = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

$$2. \rho = \frac{J}{s}. \quad (2s = a + b + c).$$

$$3. \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\rho}{s-a}; \quad \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{\rho}{s-b}; \quad \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{\rho}{s-c}.$$

$$\text{Proben: } 1. (s-a) + (s-b) + (s-c) = s.$$

$$2. \quad s \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \varrho.$$

$$3. \quad \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90^\circ.$$

4. Gegeben a, b, β .

a) $b > a$.

$$1. \quad \sin \alpha = \frac{a \sin \beta}{b}; \quad \alpha < 90^\circ$$

$$2. \quad \gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta).$$

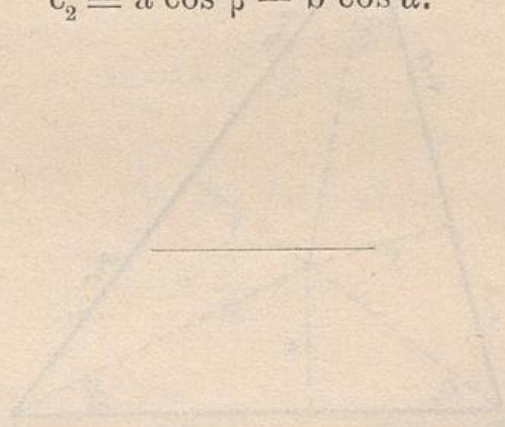
$$3. \quad c = \frac{b \sin \gamma}{\sin \beta} = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}.$$

$$b) \quad b < a; \quad \sin \alpha = \frac{a \sin \beta}{b};$$

hiebei α und $180^\circ - \alpha$ brauchbar, daher 2 Werte für c :

$$c_1 = a \cos \beta + b \cos \alpha$$

$$c_2 = a \cos \beta - b \cos \alpha.$$



Sphärische Trigonometrie.

§ 60. Das rechtwinklige sphärische Dreieck.

I. Formeln (a Hypotenuse).

$$1. \cos a = \cos b \cos c \quad (a, b, c).$$

$$2. \cos a = \operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \gamma \quad (a, \beta, \gamma).$$

$$3. \cos \beta = \sin \gamma \cos b \quad (\beta, \gamma, b).$$

$$\cos \gamma = \sin \beta \cos c.$$

$$4. \sin \beta = \frac{\sin b}{\sin a} \quad (\beta, b, a).$$

$$\sin \gamma = \frac{\sin c}{\sin a}.$$

$$5. \cos \beta = \frac{\operatorname{tgc}}{\operatorname{tga}} \quad (\beta, c, a).$$

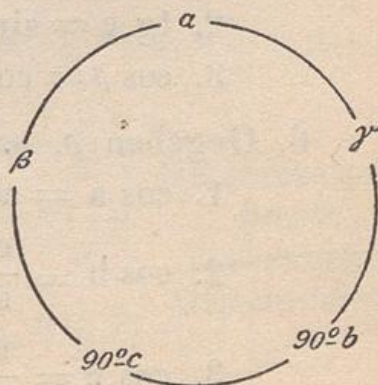
$$\cos \gamma = \frac{\operatorname{tgb}}{\operatorname{tga}}.$$

$$6. \operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} b}{\sin c} \quad (\beta, b, c).$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\operatorname{tg} c}{\sin b}.$$

7. Napiers Regel. Der $\cos$ irgend eines der wie nebenstehend angeschriebenen Stücke ist gleich dem Produkt der $\sin$ der getrennten und gleich dem Produkt der ctg der anliegenden Stücke.

Hiedurch können die Formeln 1—6 mechanisch abgeleitet werden.



II. Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks.

1. Gegeben a, b .

$$1. \cos c = \frac{\cos a}{\cos b}.$$

$$2. \operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} b}{\sin c}; \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{\operatorname{tg} c}{\sin b}.$$

2. Gegeben b, c .

$$\cos a = \cos b \cos c.$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} b}{\sin c}; \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{\operatorname{tg} c}{\sin b}.$$

3. Gegeben a, β .

$$1. \operatorname{ctg} \gamma = \cos a \operatorname{tg} \beta.$$

$$2. \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \cos \beta; \quad \operatorname{tg} b = \operatorname{tg} a \cos \gamma.$$

4. Gegeben b, β .

$$1. \sin a = \frac{\sin b}{\sin \beta} \text{ (zwei Werte für } a \text{).}$$

$$2. \operatorname{ctg} \gamma = \cos a \operatorname{tg} \beta.$$

$$3. \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \cos \beta.$$

5. Gegeben b, γ .

$$1. \operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{tg} b}{\cos \gamma}.$$

$$2. \operatorname{tg} c = \sin b \operatorname{tg} \gamma.$$

$$3. \cos \beta = \cos b \sin \gamma.$$

6. Gegeben β, γ .

$$1. \cos a = \operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \gamma.$$

$$2. \cos b = \frac{\cos \beta}{\sin \gamma}.$$

$$3. \cos c = \frac{\cos \gamma}{\sin \beta}.$$

Determ. Sind β und γ gleichartig, so muss $\beta + \gamma > 90^\circ$ und $< 270^\circ$ sein; sind β und γ ungleichartig, so muss $\beta - \gamma$ oder $\gamma - \beta < 90^\circ$ sein (s. 53, 13_c, a).

§ 61. Das schiefwinklige Dreieck.

A. Formeln.

$$\text{I. } \begin{cases} \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha \\ \cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos \beta \\ \cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma \end{cases} \quad \begin{matrix} a, b, c, \alpha \\ \text{Cosinussatz.} \end{matrix}$$

$$\text{II. } \begin{cases} \sin a : \sin b : \sin c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma; \\ \sin a \sin \beta = \sin b \sin \alpha = h'' \\ \sin b \sin \gamma = \sin c \sin \beta = h \\ \sin c \sin \alpha = \sin a \sin \gamma = h' \end{cases} \quad \begin{matrix} a, b, \alpha, \beta; \\ \text{Sinussatz.} \end{matrix}$$

$$\text{III. } \begin{cases} \sin a \cos \beta = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos \alpha; \\ \sin a \cos \gamma = \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos \alpha; \\ \sin b \cos \gamma = \cos c \sin a - \sin c \cos a \cos \beta; \\ \sin b \cos \alpha = \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos \beta; \\ \sin c \cos \alpha = \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos \gamma; \\ \sin c \cos \beta = \cos b \sin a - \sin b \cos a \cos \gamma. \end{cases} \quad a, b, c, \alpha, \beta;$$

$$\text{IV. } \begin{cases} \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{b+c}{2} = \sin \frac{a}{2} \cos \frac{\beta-\gamma}{2}; \\ \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{b+c}{2} = \cos \frac{a}{2} \cos \frac{\beta+\gamma}{2} \\ \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{b-c}{2} = \sin \frac{a}{2} \sin \frac{\beta-\gamma}{2} \\ \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{b-c}{2} = \cos \frac{a}{2} \sin \frac{\beta+\gamma}{2} \end{cases} \quad \begin{matrix} a, b \pm c, \beta \pm \gamma; \\ \text{Delambre'sche} \\ \text{bezw.} \\ \text{Gauss'sche} \\ \text{Gleichungen} \end{matrix}$$

$$\text{V.} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{tg } \frac{b+c}{2} = \text{tg } \frac{a}{2} \cdot \frac{\cos \frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos \frac{\beta+\gamma}{2}} \quad \left| \begin{array}{l} a, b \pm c, \beta + \gamma, \beta - \gamma \\ a, \beta \pm \gamma, b + c, b - c \end{array} \right. \\ \text{tg } \frac{b-c}{2} = \text{tg } \frac{a}{2} \cdot \frac{\sin \frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin \frac{\beta+\gamma}{2}} \\ \text{tg } \frac{\beta+\gamma}{2} = \text{ctg } \frac{a}{2} \cdot \frac{\cos \frac{b-c}{2}}{\cos \frac{b+c}{2}} \\ \text{tg } \frac{\beta-\gamma}{2} = \text{ctg } \frac{a}{2} \cdot \frac{\sin \frac{b-c}{2}}{\sin \frac{b+c}{2}} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \\ \\ \text{Nepersche} \\ \text{Gleichungen.} \end{array}$$

VI.

$$a + b + c = 2s.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b) \sin(s-c)}{\sin b \sin c}}; \quad \alpha, a, b, c \\ \sin \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-c) \sin(s-a)}{\sin c \sin a}}; \\ \sin \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-a) \sin(s-b)}{\sin a \sin b}}; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \cdot \sin(s-a)}{\sin b \sin c}}; \\ \cos \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-b)}{\sin c \sin a}}; \\ \cos \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-c)}{\sin a \sin b}}. \end{array} \right.$$

$$\text{VII.} \quad \begin{cases} S = \sqrt{\sin s \cdot \sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)} \\ \sin \alpha = \frac{2S}{\sin b \sin c} \quad \alpha, a, b, c \\ \sin \beta = \frac{2S}{\sin c \sin a}; \quad \sin \gamma = \frac{2S}{\sin a \sin b} \end{cases}$$

(S Eckensinus.)

$$\text{VIII.} \quad \begin{cases} k = \sqrt{\frac{\sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)}{\sin s}} \\ \text{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin(s-a)}{k} \quad \alpha, a, b, c \\ \text{ctg} \frac{\beta}{2} = \frac{\sin(s-b)}{k}; \quad \text{ctg} \frac{\gamma}{2} = \frac{\sin(s-c)}{k} \end{cases}$$

$$\text{IX.} \quad \begin{cases} \varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - 180^\circ \quad (\text{sph. Exzess}) \\ \text{tg} \frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\text{tg} \frac{s}{2} \text{tg} \frac{s-a}{2} \text{tg} \frac{s-b}{2} \text{tg} \frac{s-c}{2}} \\ \text{tg} \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\varepsilon}{4} \right) = \sqrt{\frac{\text{tg} \frac{s-b}{2} \text{tg} \frac{s-c}{2}}{\text{tg} \frac{s}{2} \text{tg} \frac{s-a}{2}}} \end{cases}$$

(L'Huilier'sche Gleichung.)

Polarformeln.

$$\text{Ib)} \quad \begin{cases} \cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a; \quad a, \alpha, \beta, \gamma. \\ \cos \beta = -\cos \gamma \cos \alpha + \sin \gamma \sin \alpha \cos b \\ \cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c. \end{cases}$$

$$\text{IIIb)} \quad \begin{cases} \sin \alpha \cos b = \cos \beta \sin \gamma + \sin \beta \cos \gamma \cos a; \quad a, b, \alpha, \beta, \gamma \\ \sin \alpha \cos c = \cos \gamma \sin \beta + \sin \gamma \cos \beta \cos a \\ \sin \beta \cos c = \cos \gamma \sin \alpha + \sin \gamma \cos \alpha \cos b \\ \sin \beta \cos a = \cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \cos \gamma \cos b \\ \sin \gamma \cos a = \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta \cos c \\ \sin \gamma \cos b = \cos \beta \sin \alpha + \sin \beta \cos \alpha \cos c. \end{cases}$$

$$\text{VII b) } \left\{ \begin{array}{l} \alpha + \beta + \gamma = 2\sigma; \\ \Sigma = \sqrt{-\cos \sigma \cos(\sigma - \alpha) \cos(\sigma - \beta) \cos(\sigma - \gamma)}; \\ \sin a = \frac{2\Sigma}{\sin \beta \sin \gamma}; \\ \sin b = \frac{2\Sigma}{\sin \gamma \sin \alpha}; \sin c = \frac{2\Sigma}{\sin \alpha \sin \beta}. \end{array} \right.$$

$$\text{VIII b) } \left\{ \begin{array}{l} k' = \sqrt{\frac{\cos(\sigma - \alpha) \cos(\sigma - \beta) \cos(\sigma - \gamma)}{-\cos \sigma}} \\ \operatorname{tg} \frac{a}{2} = \frac{\cos(\sigma - \alpha)}{k'} \\ \operatorname{tg} \frac{b}{2} = \frac{\cos(\sigma - \beta)}{k'}; \operatorname{tg} \frac{c}{2} = \frac{\cos(\sigma - \gamma)}{k'}. \end{array} \right.$$

$$\text{IX b) } \left\{ \begin{array}{l} d = 360^\circ - (a + b + c) \text{ (sph. Defekt)} \\ \operatorname{tg} \frac{d}{4} = \\ \sqrt{-\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\sigma}{2}\right) \operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\sigma - \alpha}{2}\right) \operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\sigma - \beta}{2}\right) \operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\sigma - \gamma}{2}\right)} \\ \operatorname{tg}\left(\frac{a}{2} - \frac{d}{4}\right) = \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \frac{\sigma - \beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\sigma - \gamma}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\sigma}{2} \operatorname{tg} \frac{\sigma - \alpha}{2}}} \end{array} \right.$$

X. Sphärischer Umkreishalbmesser R.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma} = 2 \operatorname{tg} R \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2} \\ \operatorname{ctg} R = \sqrt{\frac{\cos(\sigma - \alpha) \cos(\sigma - \beta) \cos(\sigma - \gamma)}{-\cos \sigma}} = k' \end{array} \right.$$

XI. Sphärischer Inkreishalbmesser ϱ .

$$\operatorname{tg} \varrho = \sqrt{\frac{\sin(s - a) \sin(s - b) \sin(s - c)}{\sin s}} = k$$

XII. Inhalt des sphär. Dreiecks s. § 53₁₅.

B. Berechnungen.

1. Gegeben a, b, c .

1. $a+b+c=2s, s-a=..., s-b=..., s-c=...$

2.
$$k = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}}$$

3.
$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin(s-a)}{k}; \quad \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} = \frac{\sin(s-b)}{k};$$
$$\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} = \frac{\sin(s-c)}{k}.$$

Proben: 1. $(s-a)+(s-b)+(s-c)=s$

2.
$$\frac{1}{\sin s} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{k}$$

2. Gegeben α, β, γ .

1. $2\sigma = \alpha + \beta + \gamma; \sigma - \alpha = ..., \sigma - \beta = ..., \sigma - \gamma = ...$

2. $k' = s$. VIII b,

3. $\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \frac{\cos(\sigma - \alpha)}{k'}$, u. s. w. s. VIII b.

Proben: 1. $(\sigma - \alpha) + (\sigma - \beta) + (\sigma - \gamma) = \sigma$

2.
$$-\frac{1}{\cos \sigma} \cdot \operatorname{tg} \frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{b}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{c}{2} = \frac{1}{k'}.$$

3. Gegeben b, c, α .

1.
$$\operatorname{tg} \frac{\beta + \gamma}{2} = \frac{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{b-c}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{b+c}{2}} = \frac{Z}{N} \quad (\text{s. V.})$$

2.
$$\operatorname{tg} \frac{\beta - \gamma}{2} = \frac{\cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{b-c}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{b+c}{2}} = \frac{Z'}{N'} \quad "$$

3.
$$\begin{cases} \beta = \frac{\beta + \gamma}{2} + \frac{\beta - \gamma}{2} \\ \gamma = \frac{\beta + \gamma}{2} - \frac{\beta - \gamma}{2} \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \cos \frac{a}{2} = \frac{Z}{\sin \frac{\beta+\gamma}{2}} = \frac{N}{\cos \frac{\beta+\gamma}{2}}, & (\text{s. IV.}), \text{ oder} \\ \sin \frac{a}{2} = \frac{Z'}{\sin \frac{\beta-\gamma}{2}} = \frac{N'}{\cos \frac{\beta-\gamma}{2}} \end{cases}$$

Ist nur a verlangt, dann dies aus I.

4. Gegeben β, γ, a .

$$1. \operatorname{tg} \frac{b+c}{2} = \frac{\sin \frac{a}{2} \cos \frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos \frac{a}{2} \cos \frac{\beta+\gamma}{2}} = \frac{Z}{N} \quad (\text{s. V}).$$

$$2. \operatorname{tg} \frac{b-c}{2} = \frac{\sin \frac{a}{2} \sin \frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos \frac{a}{2} \sin \frac{\beta+\gamma}{2}} = \frac{Z'}{N'}.$$

$$3. \begin{cases} b = \frac{b+c}{2} + \frac{b-c}{2} \\ c = \frac{b+c}{2} - \frac{b-c}{2}. \end{cases}$$

$$4. \begin{aligned} \sin \frac{\alpha}{2} &= \frac{Z}{\sin \frac{b+c}{2}} \text{ oder } = \frac{N}{\cos \frac{b+c}{2}} \quad \text{s. IV, oder} \\ \cos \frac{\alpha}{2} &= \frac{Z'}{\sin \frac{b-c}{2}} = \frac{N'}{\cos \frac{b-c}{2}}. \end{aligned}$$

Ist nur α verlangt, dann dieses aus Ib.

5. Gegeben a, b, α .

$$1. \sin \beta = \frac{\sin b \sin \alpha}{\sin a}.$$

$$2. \operatorname{tg} \frac{c}{2} = \operatorname{tg} \frac{a+b}{2} \cdot \frac{\cos \frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha-\beta}{2}} \quad \text{oder}$$

$$= \operatorname{tg} \frac{a-b}{2} \cdot \frac{\sin \frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin \frac{\alpha-\beta}{2}} \quad (\text{s. V}).$$

$$\begin{aligned} 3. \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} &= \operatorname{ctg} \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{a+b}{2}} \\ &= \operatorname{ctg} \frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \frac{\sin \frac{a-b}{2}}{\sin \frac{a+b}{2}}. \end{aligned}$$

Determination. Für β ergeben sich aus 1. im allgemeinen zwei Werte. Bei der Bestimmung ist zu berücksichtigen, dass

$$\text{wenn } a \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} b, \text{ dann } \alpha \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} \beta$$

$$\text{und } a+b \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 180^\circ, \text{ dann } \alpha+\beta \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 180^\circ$$

(s. § 53, 13 b und e).

6. Gegeben α, β, a .

$$1. \sin b = \frac{\sin a \sin \beta}{\sin \alpha}.$$

$$2. \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \text{s. 5,3.}$$

$$3. \operatorname{tg} \frac{c}{2} = \text{s. 5,2.}$$

Determination s. ebenfalls vorige Aufgabe.

Anmerkung. Die Aufgaben 2, 4, 6 sind die Polarfälle zu den Aufgaben 1, 3, 5; ihre Lösung kann daher durch Uebergang auf das Polardreieck auf die Lösung der Aufgaben 1, 3, 5 zurückgeführt werden.

Mathematische Geographie.

I. Beobachtungsmittel.

§ 62. Koordinatensysteme.

A) Zenitlinie, Horizont.

1. Zenitlinie = Vertikallinie durch den Beobachtungsort; ihre Schnittpunkte mit der Himmelskugel heissen Zenit (Scheitelpunkt) und Nadir (Fusspunkt).

2. Horizont (wahrer Horizont), die durch den Erdmittelpunkt senkrecht zur Zenitlinie gelegte Ebene; scheinbarer Horizont = Berührungsebene an die Erdkugel im Beobachtungsort; scheinbarer Horizont parallel dem wahren. — (Horizontalkreise senkrecht zur Zenitlinie.

3) Ost- und Westpunkt, Schnittpunkte des Horizonts mit dem Himmelsäquator (s. B); Süd- und Nordpunkt je um 90° vom Ost- und Westpunkt abstehend, Mittagslinie verbindet diese beiden.

4. Vertikalkreise (Höhenkreise), Schnittkreise der durch die Zenitlinie gelegten Ebenen mit der Himmelskugel, sie sind senkrecht zum Horizont; erster Vertikal geht durch Ost- und Westpunkt.

B) Weltaxe, Aequator.

5. Weltaxe, verlängerte Erdaxe, Drehungsaxe der Himmelskugel; Weltpole (Nordpol, Südpol) Schnittpunkte der Weltaxe mit der Himmelskugel.

6. Aequatorebene durch den Erdmittelpunkt senkrecht zur Weltaxe.

7. Meridiane oder Deklinationskreise, Grosskreise durch die Weltpole, senkrecht zum Aequator; Hauptmeridian durch Zenit, durch Süd- und Nordpunkt.

8. Polhöhe = Neigungswinkel der Weltaxe gegen den Horizont. Aequatorhöhe = Neigungswinkel der Aequatorebene gegen den Horizont.

a) Polhöhe = geographischer Breite.

Die Polhöhe h_p wird bestimmt durch Beobachtung der Aequatorhöhe h_a zur Aequinoktialzeit, $h_p = R - h_a$ oder oder als arithmetisches Mittel aus oberer und unterer Kulminationshöhe eines Circumpolarsternes. — Aus der Polhöhe erhält man die geographische Breite.

9. Sichtbare Sterne für einen Ort von der geographischen Breite φ sind diejenigen, deren Abstand vom sichtbaren Pol $< 180^\circ - \varphi$, vom unsichtbaren $< \varphi$ ist.

10. Circumpolarsterne, Abstand vom sichtbaren Pol $\leq \varphi$.

C) Ekliptik, Axe der Ekliptik.

11. Ekliptik = scheinbare jährliche Bahn der Sonne, Ebene der Erdbahn.

12. Schiefe der Ekliptik = Neigung der Ekliptik gegen den Aequator, $= 23\frac{1}{2}^\circ$, genau $23^\circ 27' 13''$.

13. Axe der Ekliptik = Lot im Erdmittelpunkt auf der Ekliptik; Endpunkte dieser Axe Pole der Ekliptik.

14. Tag- und Nachtgleichpunkte = Schnittpunkte der Ekliptik mit dem Aequator, Frühlingsäquinoktium (Frühlings- oder Widderpunkt ∇) und Herbstäquinoktium; Sonnenwendepunkte oder Solstitien stehen von den vorigen je um 90° ab.

15. Breitenkreise, Grosskreise durch die Ekliptikpole, $\perp$ zur Sonnenbahn.

§ 63. Lagebestimmung.

1. System A. — Grundkreise: Hauptmeridian und Horizont.

Höhe h gezählt auf dem Vertikalkreise vom Aequator aus $0^\circ - 90^\circ$ nördl. oder südl.

Azimuth a (A) gezählt auf dem Horizont vom Südpunkt aus über W, N, O von $0^\circ - 360^\circ$. Ermittlung dieser Koordinaten durch den Theodolit, Höhe auch durch den Sextanten und annähernd durch Schattenlänge ($\operatorname{tg} h = \frac{l}{s}$).

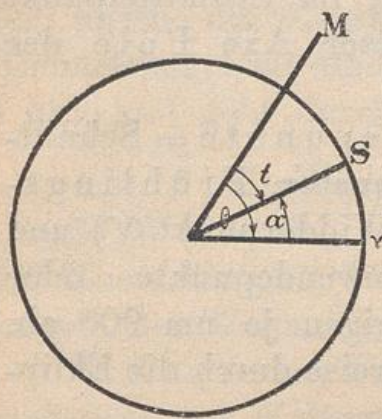
2. System B.

a) Deklination δ , nördlich (+) oder südlich (—), sphärischer Abstand des Sterns vom Aequator; Pol-distanz $90^\circ - \delta$.

Stundenwinkel t = Aequatorialbogen zwischen Meridian des Beobachtungsortes und Meridian des Sterns, gezählt von dem ersteren aus von $0^\circ - 360^\circ$ über W und N (wie das Azimut); statt Gradzählung auch Stundenzählung ($15^\circ = 1$ St.) ringsherum $0 - 24^h$, oder nach beiden Seiten.

Messung durch Aequatoreal.

b) Deklination δ , wie in a, und



Rektascension α (A. R.), gezählt im Aequator vom Frühlingspunkt (γ) aus, entgegengesetzt dem Sinn der täglichen Bewegung der Sonne von $0^\circ - 360^\circ$.

Sternzeit θ = Stundenwinkel des Frühlingspunktes, z. B. 1^h Sternzeit, wenn Stundenwinkel des Frühlingspunktes 15° . $\theta - t = \alpha$.

Messung mit Passage-Instrument und Uhr nach Sternzeit.

3. System C.

Breite β nördlicher oder südlicher Abstand des Sterns von der Ekliptik, gezählt vom Aequator.

Länge λ , Bogen der Ekliptik zwischen Frühlingspunkt und Breitenkreis, gezählt vom Frühlingspunkt aus im Sinn von α von 0° — 360° .

Diese Koordinaten sind nicht mehr gebräuchlich.

4. Sternbilder.

Die zwölf Sternbilder des Tierkreises sind:

Widder	Υ	Löwe	$\mathcal{Q}$	Schütze	$\nearrow$
Stier	$\mathcal{T}$	Jungfrau	$\mathfrak{M}$	Steinbock	$\mathcal{Z}$
Zwillinge	Π	Wage	$\equiv$	Wassermann	$\approx$
Krebs	$\odot$	Skorpion	$\mathfrak{M}$	Fische	$\mathcal{H}$

§ 64. Die Zeit.

1. Sterntag à 24 Sternstunden = Zeit zwischen 2 oberen Kulminationen eines Sterns, = Zeit einer vollständigen Umdrehung der Erde. 0^h Sternzeit, wenn der Frühlingspunkt im Meridian; Dauer eines Sterntags $23,935^h = 23^h 56^m 4^s$ m. Z.

2. Mittlerer Sonnentag = bürgerlicher Tag, = Zeit zwischen 2 Kulminationen der gedachten, im Aequator mit gleichförmiger Geschwindigkeit laufenden Sonne.

3. Zeitgleichung = Differenz zwischen wahren und mittlerem Mittag (Kulminationen der wahren und der gedachten Sonne).

4. Tropisches Jahr = scheinbare Umlaufszeit der Sonne, von Υ Punkt zu Υ Punkt = 365,2422 m. T. = 365 T. $5^h 48^m 46^s$ m. Z. = 366,2422 Sterntage.

5. Siderisches Jahr = wirkliche Umlaufszeit

der Erde von Fixstern zu Fixstern = 365,2564 mittl. Tage = 365 T. 6^h 9^m 11^s m. Z. = 366,2564 Sterntage.

6. Siderischer Monat = Umlauf von Fixstern zu Fixstern = 27,32 Tg.

7. Synodischer Monat = Zeit von Neumond zu Neumond (d. h. von Sonne zu Sonne) 29,53 Tg.

8. Astronomische Jahreszeiten.

Beginn des Frühlings am 21. März, Sonne im Aequator, im γ Punkt, Tag- und Nachtgleiche.

Beginn des Sommers am 21. Juni, Sonne im Wendekreis des Krebses, längster Tag (Sommersolstitium).

Beginn des Herbstes am 23. September, Sonne im Aequator, Tag- und Nachtgleiche.

Beginn des Winters am 21. Dezember, Sonne im Wendekreis des Steinbocks, kürzester Tag (Wintersolstitium).

II. Das Sonnensystem.

§ 65. Die Erde.

A) Gründe für die Kugelgestalt.

1. Erscheinungen infolge der Ortsveränderungen auf einem Meridian oder einem Parallelkreis.
2. Schattenform bei Mondfinsternissen und die Gestalt der andern Himmelskörper.
3. Depression des Horizonts.
4. Umschiffungen der Erde in verschiedenen Richtungen.
5. Ergebnisse der Gradmessungen.

B) Gründe für die Rotation.

1. Ablenkung der Luftströmungen.
2. Oestliche Abweichung fallender Körper.
3. Foucault'scher Pendelversuch.
4. Rotation anderer Weltkörper.
5. Abplattung der Erde ($\frac{1}{296}$ bis $\frac{1}{300}$).

§ 66. Planeten, Sonne und Mond.

	Aequatorial halbmesser	Mittlere Entfernung von der Sonne	Dichte	Masse	Rotations- dauer	Umlaufzeit	Anzahl der Tra- banten
Merkur ☿	0,38	0,39	1—2	0,06	88 T.	88 T.	—
Venus ♀	0,99	0,72	0,83	0,81	$224\frac{2}{3}$ T.	$224\frac{2}{3}$ T.	—
Erde ♂	1 (= 6377,4 km)	1*)	1	1**)	24 h	$365\frac{1}{4}$ T.	1
Mars ♂	0,53	1,52	0,72	0,105	$24\frac{1}{2}$ h	1 J. 322 T.	2
Planetoiden		2,2—4,3				3—9 J.	—
Jupiter ♃	11,06	5,20	0,24	311	10 h	11 J. 315 T.	5
Saturn ♄	9,26	9,54	0,13	93,4	$10\frac{1}{4}$ h	29 J. 167 T.	8
Uranus ♅	3,93	19,19	0,27	14,4	12 h?	84 J. 7 T.	4
Neptun ♆	4,35	30,11	0,21	16,7		164 J. 280 T.	1
Sonne	108,5	—	0,25	326800	$25\frac{1}{2}$ T.		
Mond	0,272	60,3 Erd- halbm.	0,60	0,012	$29\frac{1}{2}$ T.		

*) 148,7 Millionen km = 20 Millionen Meilen.

**) Auf Wasser = 1 bezogen ist die Dichte der Erde 5,6.

§ 67. Weltsysteme.

1. Ptolemäisches System. Die Erde ist Mittelpunkt des Weltalls, um sie bewegen sich Mond, Merkur, Venus, Sonne, Mars, Jupiter, Saturn. Unregelmässigkeiten in der Bewegung werden durch Epicykeln erklärt.

2. Copernicanisches System. Die Sonne steht still, um sie bewegen sich Merkur, Venus, Erde, Mars, Jupiter, Saturn in kreisförmigen, exzentrischen Bahnen.

3. Keplers Gesetze.

1. Die Bahnen der Planeten sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

2. Der Planet bewegt sich so, dass der Leitstrahl in gleichen Zeiten gleiche Flächen beschreibt.

3. Die Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie die dritten Potenzen der grossen Achsen.

4. Titiuszahlen. Entfernungen

Merkur	von der Sonne = 4			
Venus	"	"	"	= 4 + 3
Erde	"	"	"	= 4 + 3 . 2
Mars	"	"	"	= 4 + 3 . 2 ²
Planetoiden	"	"	"	= 4 + 3 . 2 ³
Jupiter	"	"	"	= 4 + 3 . 2 ⁴
Saturn	"	"	"	= 4 + 3 . 2 ⁵
Uranus	"	"	"	= 4 + 3 . 2 ⁶
Neptun	"	"	"	= 4 + 3 . 2 ⁷
wirkliche Entfernung	7,8 Mill. Meilen			
"	"	14,5	"	"
"	"	20,1	"	"
"	"	30,6	"	"
"	"	56	"	"
"	"	104,7	"	"
"	"	190	"	"
"	"	386	"	"
"	"	605	"	"

§ 68. Berechnungsaufgaben.

1. Flächeninhalt J einer Zone zwischen den geographischen Breiten φ_1 und φ_2

$$J = 2 r \pi h = 2 r \pi (r \sin \varphi_1 - r \sin \varphi_2) \\ = 4 r^2 \pi \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \sin \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}$$

der Teil dieser Zone, der von den Meridianen zur Länge λ_1 und λ_2 begrenzt wird, ist

$$J = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^0}{360^0} 4 r^2 \pi \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \sin \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}.$$

(Berechnung des Inhalts von Kartenblättern.)

Kimm und Kimmtiefe. — Kimm = Kreis, welcher den scheinbaren Horizont begrenzt (Halbmesser a = Sehne = Bogen); Kimmtiefe (α'') = Winkel zwischen dem Sehstrahl nach der Kimm und der Horizontalen, Höhe des Beobachtungspunktes h

$$1. a = \sqrt{2 r h}$$

$$2. \alpha'' : \frac{180.60.60''}{\pi} = a : r \text{ oder } \alpha'' = \sqrt{\frac{2 h}{r}} \cdot 206\,265'',$$

hiebei ist von der Strahlenbrechung, welche a vergrößert und α verkleinert abgesehen.

3. Beziehungen zwischen den Koordinaten der Systeme A und B (s. § 61). In dem Dreieck Zenit-Pol-Stern sind die Seiten $ZP = 90^0 - \varphi$, $ZS = 90^0 - h$, $PS = 90^0 - \delta$; die ZS und PS gegenüberliegenden Winkel sind t (bezw. $360^0 - t$) und $180^0 - a$. Aus den Formeln I—III des § 62 folgt, wenn

1. a und h gegeben, t und δ gesucht (φ ist als bekannt vorausgesetzt):

$$\begin{cases} \sin \delta = \sin h \sin \varphi - \cos h \cos \varphi \cos a \\ \cos \delta \sin t = \cos h \sin a \\ (\cos \delta \cos t = \sin h \cos \varphi + \cos h \sin \varphi \cos a). \end{cases}$$

2. t und δ gegeben, gesucht a und h .

$$\begin{cases} \sin h = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos t \\ \cos h \sin a = \cos \delta \sin t \\ (\cos h \cos a = -\sin \delta \cos \varphi + \cos \delta \sin \varphi \cos t). \end{cases}$$

4. Parallaxe; Entfernung eines Gestirns.

a) Höhenparallaxe p = Winkel, unter welchem vom Gestirn aus der zum Beobachtungsort gehörige Erdhalbmesser r erscheint, = Unterschied der Höhenwinkel über dem wahren und über dem scheinbaren Horizont

$$p = h' - h;$$

die Entfernung R des Gestirns ist dann

$$R = \frac{r \cos h}{\sin p}.$$

b) Ist das Gestirn im Horizont, dann heisst p die Horizontparallaxe (π),

$$R = \frac{r}{\sin \pi}.$$

Ist der in Frage kommende Halbmesser ein Aequatorhalbmesser, so heisst p die Aequatorial-Horizontalparallaxe.

c) Bei Fixsternen ist die Parallaxe des Erdhalbmessers (tägl. Parallaxe) verschwindend; man benützt für sie die Parallaxe des Erdbahnhalmessers, die jährliche Parallaxe; sie ist bei keinem Fixstern über $1''$.

d) Die Parallaxe des Mondes kann aus direkter Beobachtung ermittelt werden; die Horizontalparallaxe beträgt für denselben $53\frac{1}{2}'$ — $61\frac{1}{2}'$, im Mittel $57\frac{1}{2}'$.

e) Die Parallaxe der Sonne ist zur Bestimmung durch direkte Beobachtung zu klein; sie kann gefunden werden aus den Marsoppositionen und dem dritten Keplerschen Gesetz (aus der Parallaxe des Mars zunächst seine Entfernung $d = R_1 - R$ von der Erde, dann folgt aus

$R_1^3 : R^3 = t_1^2 : t^2$, $(R_1 - R) : R = \left(\sqrt[3]{t_1^2} - \sqrt[3]{t^2} \right) : \sqrt[3]{t^2}$, oder durch die Methode der Venusdurchgänge, oder aus der Messung der Parallaxe eines Planetoiden (z. B. Flora); ihr Wert ist etwa $8,85''$.

f) Ausser vermittelt der Parallaxe kann die Entfernung der Sonne noch durch andere Mittel gefunden werden, insbesondere aus der Geschwindigkeit des Lichts und der Zeit, welche dasselbe braucht, um von der Sonne zur Erde zu gelangen (Verfinsterung der Jupiterstrabanten).

5. Auf- und Untergang der Gestirne, Tageslänge. Aus § 683,2 folgt für $h = 0$

$$\cos t_0 = -\operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} \varphi.$$

Die Tageslänge ist gleich dem doppelten Stundenwinkel t_0 (für $h = 0$) der Sonne. Ergiebt sich aus δ und φ z. B. $t_0 = 120^\circ = 8^h$, so ist die Tageslänge 16^h .

Für Morgen- und Abendweite w (Bogen zwischen Ost- und Aufgangspunkt, bzw. zwischen West- und Untergangspunkt) ist

$$\sin w = \frac{\sin \delta}{\cos \varphi}.$$

Für das Azimut a_0 des Aufgangspunktes ist

$$\cos a_0 = -\frac{\sin \delta}{\cos \varphi}.$$

6. Entfernung e zweier Punkte $(\lambda_1, \varphi_1; \lambda_2, \varphi_2)$ auf der Erdoberfläche

$$\cos e = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos (\lambda_1 - \lambda_2).$$

Liegen beide auf demselben Meridian, dann ist $e = \varphi_1 - \varphi_2$.

Liegen sie auf demselben Parallelkreis, dann ist $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ und daher

$$\sin \frac{e}{2} = \cos \varphi \sin \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}.$$

Analytische Geometrie.

I. Geometrie der Ebene.

§ 69. Aenderung des Koordinatensystemes.

x, y Koordinaten, OX, OY Axen des ursprünglichen Systems, x', y' Koordinaten, OX', OY' Axen des neuen Systems, a, b Koordinaten des neuen Ursprungs.

1. Parallele Verschiebung der Axen:

$$\begin{cases} x = a + x' \\ y = b + y' \end{cases}$$

2. Drehung eines rechtwinkligen Systems um den Ursprung um den Winkel φ :

$$\begin{cases} x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi \\ y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi. \end{cases}$$

3. Verschiebung und Drehung jeder Axe (Aenderung des Winkels zwischen den Axen):

$$\begin{cases} x = a + \frac{x' \sin (X'Y) + y' \sin (Y'Y)}{\sin (XY)} \\ y = b + \frac{x' \sin (X'X) + y' \sin (Y'X)}{\sin (YX)}. \end{cases}$$

§ 70. Allgemeine Sätze.

1. Der Grad einer Gleichung wird durch Verwandlung des Koordinaten-Systems nicht geändert.

2. Die Bedingung dafür, dass der Punkt mit den Koordinaten x_1, y_1 auf der Linie liegt, deren Gleichung $F(x, y) = 0$, ist $F(x_1, y_1) = 0$.

3. Die aus den beiden Gleichungen $F(x, y) = 0$ und $f(x, y) = 0$ sich ergebenden Werte von x und y sind die Koordinaten der Schnittpunkte der beiden durch jene Gleichungen dargestellten Linien.

Setzt man in $F(x, y) = 0$ für y den Wert null, so ergeben sich aus der erhaltenen Gleichung die Abscissen der Schnittpunkte der betreffenden Linie mit der Xaxe; aus $x = 0$ ergeben sich die Ordinaten der Schnittpunkte mit der Yaxe.

4. Ist λ ein Zahlenfaktor, so stellt

$$F(x, y) + \lambda f(x, y) = 0$$

die Gleichung einer Linie dar, welche durch die Schnittpunkte der durch $F(x, y) = 0$ und $f(x, y) = 0$ dargestellten Linien geht.

Linie erster Ordnung, gerade Linie.

§ 71. Gleichungsformen. Lagebeziehungen.

Es seien a und b die Abschnitte der Geraden auf den Axen (Koordinaten der Schnittpunkte mit den Axen), φ der Winkel der Geraden mit der + Xaxe, p die Länge des Lotes vom Ursprung auf die Gerade, α der Winkel, den p mit der + Xaxe bildet.

1. Gleichung der Geraden:*)

erste allgem. Form $Ax + By + C = 0$,

zweite " $y = mx + b$

dritte " $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$

vierte " $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$ (Normalform.)

*) Wenn sich eine der Gleichungen oder Formeln auf ein schiefwinkliges System beziehen soll, ist dies besonders bemerkt.

Symbolische Abkürzung der Gleichung

für die allgemeine Form $L=0$,

" " Normalform $l=0$.

Axenabschnitte: $a = -\frac{C}{A} = -\frac{b}{m}$

$$b = -\frac{C}{B}$$

Winkel mit der Xaxe bestimmt durch

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{A}{B} = m = -\frac{b}{a} = -\operatorname{ctg} \alpha$$

2. Besondere Fälle:

$$\left\{ \begin{array}{ll} x=a & \text{Gleichg. einer Geraden} \parallel \text{ zur Yaxe} \\ y=b & \text{" " " " " X " "} \\ Ax+By=0 & \text{" " " durch den Ursprung} \\ y=mx & \\ y=0 & \text{" der Xaxe} \\ x=0 & \text{" " Y " "} \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y + C=0 & \text{" " } \infty \text{ fernen Geraden.} \end{array} \right.$$

3. Gerade durch Punkt (x_1, y_1)

$$A(x-x_1) + B(y-y_1) = 0, \text{ oder}$$

$$y-y_1 = m(x-x_1), \text{ oder}$$

$$(x-x_1) \cos \alpha + (y-y_1) \sin \alpha = 0$$

(durch ein veränderliches m , bzw. α erhält man ein Strahlenbüschel.)

4. Gerade durch zwei Punkte $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$

$$y-y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} (x-x_1) \text{ oder } \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

$$\text{oder } (y_2-y_1)x + (x_1-x_2)y = x_1y_2 - x_2y_1, \text{ oder}$$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad \begin{array}{l} \text{(Zugleich Bedingung da-} \\ \text{für, dass 3 Punkte in ger.} \\ \text{Linie liegen.)} \end{array}$$

Gerade durch den Ursprung und Punkt (x_1, y_1)

$$x_1 y - y_1 x = 0$$

5. Zwei parallele Gerade

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \text{ oder } \begin{cases} y = mx + b \\ y = mx + b_1, \text{ oder} \end{cases} \\ Ax + By + C_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0 \\ x \cos \alpha + y \sin \alpha - p_1 = 0 \end{cases}$$

Zwei gerade Linien $Ax + By + C = 0$ und $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ sind parallel, wenn $AB_1 - A_1B = 0$

6. Gerade durch Punkt (x_1, y_1) parallel zu einer gegebenen Geraden.

Gegebene Gleichung:

$$Ax + By + C = 0 \quad \text{oder} \quad y = mx + b$$

gesuchte Gleichung:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0 \quad \text{„} \quad y - y_1 = m(x - x_1)$$

7. Zwei senkrechte Gerade:

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \text{ oder } \begin{cases} y = mx + b \\ y = -\frac{1}{m}x + b_1. \end{cases} \\ Bx - Ay + C_1 = 0 \quad \text{„} \end{cases}$$

Die Geraden

$$Ax + By + C = 0 \quad \begin{cases} \text{oder} \\ \text{u. } A_1x + B_1y + C_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = mx + b \text{ u.} \\ y = m_1x + b_1 \end{cases}$$

sind senkrecht, wenn

$$AA_1 + BB_1 = 0 \quad \text{oder} \quad mm_1 + 1 = 0$$

Gleichung einer Geraden, welche durch Punkt (x_1, y_1) geht und senkrecht zu der Geraden $Ax + By + C = 0$ ist:

$$B(x - x_1) - A(y - y_1) = 0$$

8. Drei Gerade $Ax + By + C = 0$, $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ gehen durch einen Punkt, oder eine Gerade geht durch den Schnittpunkt der beiden andern, wenn

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0,$$

d. h. wenn

$A(B_1 C_2 - B_2 C_1) + B(C_1 A_2 - C_2 A_1) + C(A_1 B_2 - A_2 B_1) = 0$
 oder wenn die Zahlfactoren $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ sich so bestimmen lassen, dass

$$\lambda(Ax + By + C) + \lambda_1(A_1x + B_1y + C_1) + \lambda_2(A_2x + B_2y + C_2) = 0.$$

§ 72. Grössenbestimmungen und -Beziehungen.

1. Koordinaten (x, y) des Teilpunktes einer Strecke, Endpunkte $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$:
 für den Halbierungspunkt

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2};$$

Teilung im Verhältniss $m:n$

$$x = \frac{m x_2 \pm n x_1}{m \pm n}, \quad y = \frac{m y_2 \pm n y_1}{m \pm n}$$

Das Zeichen $+$ gilt für den inneren, $-$ für den äusseren Teilpunkt.

2. Beziehungen zwischen den Koordinaten von 4 harmonischen Punkten $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2)$

$$2(x_1 x_2 + \xi_1 \xi_2) = (x_1 + x_2)(\xi_1 + \xi_2)$$

$$2(y_1 y_2 + \eta_1 \eta_2) = (y_1 + y_2)(\eta_1 + \eta_2)$$

3. Vier durch den Ursprung gehende Gerade

$$y = m_1 x \quad y = n_1 x$$

$$y = m_2 x \quad y = n_2 x$$

bilden ein harmonisches Büschel, wenn

$$2(m_1 m_2 + n_1 n_2) = (m_1 + m_2)(n_1 + n_2).$$

4. Entfernung zweier Punkte $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$

$$e = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Im schiefwinkligen System mit Achsenwinkel ω

$$e = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\cos\omega}.$$

5. Gerade durch Punkt (x_1, y_1) , welche mit der Xaxe den $\angle \varphi$ bildet:

$$y - y_1 = (x - x_1) \operatorname{tg} \varphi$$

6. Winkel φ zwischen zwei Geraden bestimmt durch

$$\operatorname{tg} \varphi = \pm \frac{A B_1 - A_1 B}{A A_1 + B B_1} = \pm \frac{m_1 - m}{m m_1 + 1} \quad (\text{vgl. § 71}_5 \text{ und } 7)$$

7. Gerade, welche mit $y = mx + b$ den $\angle \varphi$ bildet und durch Punkt (x_1, y_1) geht

$$y - y_1 = \frac{m + \operatorname{tg} \varphi}{1 - m \operatorname{tg} \varphi} (x - x_1)$$

8. Abstand p des Ursprungs von der Geraden $Ax + By + C = 0$, oder $y = mx + b$

$$p = \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{b}{\pm \sqrt{m^2 + 1}};$$

das Zeichen wird so gewählt, dass p positiv wird.

9. Abstand e des Punktes (x_1, y_1) von der Geraden $Ax + By + C = 0$, oder $y = mx + b$, oder $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$

$$e = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{y_1 - mx_1 - b}{\pm \sqrt{m^2 + 1}} \\ = x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p.$$

Das Vorzeichen der Wurzel wird so gewählt, dass für einen Punkt, der mit dem Ursprung auf derselben Seite der Geraden liegt, e positiv wird.

10. Entfernung e zweier paralleler Geraden (s. § 71₅)

$$e = \frac{C - C_1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{C - C_1}{\pm \sqrt{m^2 + 1}} = p - p_1.$$

11. Halbierungslinie des Winkels zweier Geraden

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \pm \frac{A_1 x + B_1 y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} \quad \text{oder}$$

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = \pm (x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1).$$

Sind die Geraden gegeben durch die symbolischen

Gleichungen $l=0$, $l_1=0$ dann ist die Gleichung der Winkelhalbierenden

$$l \mp l_1 = 0.$$

12. Inhalt J eines Dreiecks, aus den Ecken (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3)

$$\pm J = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2)).$$

Liegen die drei Punkte in gerader Linie, so ist $J=0$, vergl. § 71₄. Fällt (x_3, y_3) in den Ursprung, so ist

$$\pm J = \frac{1}{2} (x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

13. Inhalt J eines Dreiecks aus den Gleichungen der drei Seiten (Bez. s. § 19₁)

$$\pm 2J = \frac{(\Sigma \pm AB_1 C_2)^2}{(AB_1 - A_1 B)(A_1 B_2 - A_2 B_1)(A_2 B - AB_2)}.$$

Gehen die Geraden durch einen Punkt, so ist $2J=0$, vergl. § 71₈, sind irgend zwei parallel, so ist $2J=\infty$, vergl. § 71₅.

14. Inhalt eines Vielecks aus den Koordinaten der Ecken

$$\pm 2J = x_1 (y_2 - y_n) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_4 - y_2) + \dots + x_n (y_1 - y_{n-1}).$$

§ 73. Polargleichung der Geraden.

r Fahrstrahl, φ Azimut, p Lot vom Pol auf die Gerade, α Winkel zwischen p und der Polaraxe.

1. Lot zur Polaraxe:

$$r \cos \varphi = c$$

2) Parallele zur Polaraxe:

$$r \sin \varphi = c.$$

3. Gleichung der Geraden:

$$r \cos (\varphi - \alpha) = p$$

4. Zwei parallele Gerade

$$\begin{cases} r \cos(\varphi - \alpha) = p \\ r \cos(\varphi - \alpha) = p_1. \end{cases}$$

5. Zwei Gerade sind senkrecht, wenn

$$\alpha_1 - \alpha = R.$$

6. Entfernung e zweier Punkte $(\varphi_1, r_1), (\varphi_2, r_2)$

$$e = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

7. Inhalt des Dreiecks CP_1P_2

$$J = \pm \frac{1}{2} r_1 r_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1).$$

8. Inhalt des Dreiecks $P_1P_2P_3$

$$J = \pm \frac{1}{2} \left\{ r_1 r_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + r_2 r_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2) + r_3 r_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_3) \right\}.$$

9. Bedingung dafür, dass drei Punkte in gerader Linie liegen

$$r_1 r_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + r_2 r_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2) + r_3 r_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_3) = 0.$$

10. Gleichung der Verbindungslinie der beiden Punkte

$(\varphi_1, r_1), (\varphi_2, r_2)$

$$r_1 r_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + r_2 r \sin(\varphi - \varphi_2) + r r_1 \sin(\varphi_1 - \varphi) = 0.$$

§ 74. Strahlbüschel, Doppelverhältnis, projektivische Strahlbüschel.

(Abgekürzte Bezeichnung der Gleichung der Geraden.)

1. Strahlbüschel. Sind $l_1 = 0, l_2 = 0$ die Gleichungen zweier Geraden in Normalform, so ist die allgemeine Gleichung einer dritten Geraden (Teilstrahl), die durch den Schnittpunkt der beiden ersten geht,

$$l_1 - \lambda l_2 = 0.$$

λ ist das Verhältnis der von irgend einem Punkt des Teilstrahls l_3 auf l_1 und l_2 gefälltten Lote (Sinusteilverhältnis)

$$\lambda = \frac{\sin(l_1 l_3)}{\sin(l_3 l_2)}$$

Ist der Zahlenfaktor λ veränderlich, so ist durch die Gleichung ein Strahlbüschel dargestellt.

Sind die ersten Geraden durch ihre allgemeine Gleichung $L_1 = 0, L_2 = 0$ gegeben, so ist die Gleichung des Teilstrahls

$$L_1 - \lambda L_2 = 0.$$

λ unterscheidet sich von dem Verhältnis der Abstände durch einen konstanten Faktor.

2. Vier sich in einem Punkt schneidende Geraden können dargestellt werden durch die Gleichungen

$$\begin{cases} l_1 = 0 & l_1 - \lambda_1 l_2 = 0 \\ l_2 = 0 & l_1 - \lambda_2 l_2 = 0 \end{cases}$$

das Doppelverhältnis (anharmonisches Verhältnis) (a, b, c, d) der vier Strahlen a, b, c, d ist

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = (a, b, c, d) = \frac{\sin(ac)}{\sin(bc)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)}.$$

Satz: Wenn vier von einem Punkt ausgehende Strahlen a, b, c, d von einer beliebigen Geraden in den Punkten A, B, C, D geschnitten werden, so ist das Doppelverhältnis der vier Schnittpunkte konstant und gleich dem Doppelverhältnis des Büschels d. h.

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{\sin(ac)}{\sin(bc)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)}.$$

Für einen gegebenen Wert des Doppelverhältnisses ist zu drei Strahlen der vierte eindeutig bestimmt.

Das Doppelverhältnis des Büschels

$$\begin{cases} l_1 - \lambda_1 l_2 = 0 \\ l_1 - \lambda_2 l_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} l_1 - \lambda_3 l_2 = 0 \\ l_1 - \lambda_4 l_2 = 0 \end{cases} \text{ ist } \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4}.$$

3. Harmonisches Büschel. Ist das Doppelverhältnis der vier Strahlen $= -1$, so ist das Büschel ein harmonisches; es ist dargestellt durch

$$\begin{cases} l_1 = 0 \\ l_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} l_1 - \lambda_1 l_2 = 0 \\ l_1 + \lambda_1 l_2 = 0 \end{cases}.$$

Die Beziehungen in Nr. 2 und 3 gelten auch, wenn die Geraden durch Gleichungen von der Form $L_1 - \lambda_1 L_2 = 0$ u. s. w. gegeben sind.

4. Projektivische Strahlbüschel. Sind

$$\begin{aligned} L_1 - \lambda_1 L_2 = 0, \quad L_1 - \lambda_2 L_2 = 0 \text{ u. s. f.} \\ M_1 - \lambda_1 M_2 = 0, \quad M_1 - \lambda_2 M_2 = 0 \text{ u. s. f.} \end{aligned}$$

die Gleichungen der Strahlen zweier Büschel, so ist das Doppelverhältnis von vier Strahlen des einen Büschels gleich dem Doppelverhältnis der entsprechenden Strahlen des andern; solche Büschel heissen projektivisch.

Durch drei Paare entsprechender Strahlen sind die Büschel vollständig und eindeutig bestimmt.

§ 75. Homogene Gleichung der Geraden, trimetrische Punkt-Koordinaten.

Sind $l_1 = 0, l_2 = 0, l_3 = 0$ die Gleichungen dreier nicht durch einen Punkt gehenden Geraden, so kann die Gleichung jeder andern Geraden in die Form gebracht werden

$$\lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2 + \lambda_3 l_3 = 0.$$

Hiebei können l_1, l_2, l_3 auch aufgefasst werden als Grössen, die den Abständen eines Punktes der Geraden von den Seiten des Dreiecks, das von l_1, l_2, l_3 gebildet wird, proportional sind (Dreieckskoordinaten). Jeder Abstand ist positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem er gleich oder gegenläufig ist zu dem von einem Punkt im Innern des Dreiecks auf dieselbe Seite gefällten Lot.

§ 76. Linienkoordinaten; Gleichung des Punktes; Punktreihe; projektivische Punktreihen und Strahlbüschel.

1. Ist die Gleichung irgend einer Geraden

$$u x + v y + 1 = 0,$$

so ist die Lage der Geraden durch die Konstanten u und v gegeben; sie heissen daher die Koordinaten jener geraden Linie oder Linienkoordinaten. u und v sind die negativen reziproken Abschnitte, welche die Gerade auf den Koordinatenachsen macht.

2. Alle Geraden, deren Koordinaten einer Gleichung

$$(1) A u + B v + C = 0$$

genügen, gehen durch einen Punkt, dessen Koordinaten $x = \frac{A}{C}$ und $y = \frac{B}{C}$ sind; die Gleichung (1) heisst allgemeine Gleichung des Punktes. Die Gleichung

$$(2) a u + b v + 1 = 0$$

heisst die Normalform der Gleichung des Punktes.

3. Eine Gleichung n ten Grades in u und v stellt eine von Geraden eingehüllte Kurve dar; bestimmt man aus dieser Gleichung und der Gleichung eines Punktes die gemeinschaftlichen Werte von u und v , so ergeben sich aus denselben n Tangenten an die Kurve; diese heisst eine Linie n ter Klasse. Die Ordnungszahl giebt die Zahl der Schnittpunkte der Kurve mit einer Geraden an, die Klassenzahl die Anzahl der Tangenten der Kurve, die durch einen bestimmten Punkt gehen.

4. Sind $\mathcal{Z} = 0$ und $\mathcal{Z}_1 = 0$ die Gleichungen zweier Umhüllungslinien, so stellt $\mathcal{Z} + \lambda \mathcal{Z}_1 = 0$ eine Umhüllungslinie dar, welche alle gemeinschaftlichen Tangenten von $\mathcal{Z} = 0$ und $\mathcal{Z}_1 = 0$ berührt (vgl. § 70₄).

5. Sind $U_1 = 0$, $U_2 = 0$ die Gleichungen zweier Punkte P_1 und P_2 , so ist

$$U_1 - \lambda U_2 = 0$$

die Gleichung eines Punktes auf der Verbindungslinie von P_1 und P_2 ; ist λ veränderlich, so hat man die Gleichung einer Punktreihe.

6. Doppelverhältnis. Sind

$$\begin{cases} U_1 = 0 \\ U_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} U_1 - \lambda_1 U_2 = 0 \\ U_1 - \lambda_2 U_2 = 0 \end{cases}$$

vier Punkte auf einer Geraden, so ist das Doppelverhältnis derselben ausgedrückt durch $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$.

7. Harmonische Punkte. Wenn $\lambda_1 : \lambda_2 = -1$, so sind die vier Punkte (von Nr. 6) harmonische Punkte; sie sind also dargestellt durch

$$\begin{cases} U_1 = 0 \\ U_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} U_1 - \lambda U_2 = 0 \\ U_1 + \lambda U_2 = 0 \end{cases}$$

8. Projektivische Punktreihen. Zwei Punktreihen $U_1 - \lambda U_2 = 0$ und $V_1 - \lambda V_2 = 0$ sind projektivisch.

Eine Punktreihe $U_1 - \lambda U_2 = 0$ und ein Strahlbüschel $L_1 - \lambda L_2 = 0$ sind projektivisch.

§ 77. Homogene Gleichung des Punktes, trimetrische Linienkoordinaten.

Sind $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, $U_3 = 0$ die Gleichungen dreier nicht auf einer Geraden liegenden festen Punkte, so kann die Gleichung jedes anderen Punktes in die Form gebracht werden

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3 = 0.$$

Linien zweiter Ordnung (Kegelschnitte).

A. Der Kreis.

§ 78. Kurvengleichung; Sekante, Tangente, Polare etc.

Koordinaten des Mittelpunktes (a, b) , Halbmesser r .

1. Allgemeine Gleichung des Kreises

$$(1) x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0.$$

$$2. \quad (2) \quad (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

$$a = -\frac{A}{2}, \quad b = -\frac{B}{2}, \quad r = \frac{1}{2} \sqrt{A^2 + B^2 - 4C}.$$

Ist $A^2 = 4C$, oder $B^2 = 4C$, dann berührt der Kreis die X-, bzw. die Yaxe, ist $C = 0$, so geht der Kreis durch den Ursprung. — Für die Koordinaten der Schnittpunkte mit den Axen ist $x_1 + x_2 = 2a$, $y_1 + y_2 = 2b$.

3. Der Ursprung ist Mittelpunkt:

$$(3) \quad x^2 + y^2 = r^2 \quad (\text{Mittelpunktsgleichung}).$$

4. Mittelpunkt auf der Xaxe im Abstand r vom Ursprung:

$$y^2 = 2rx - x^2 \quad (\text{Scheitelgleichung}).$$

5. Gleichung für ein schiefwinkliges System:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + 2(x - a)(y - b) \cos \omega = r^2.$$

6. Sekante durch die Punkte (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , Mittelpunkt im Ursprung:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = -\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} \quad \text{oder} \quad y - y_1 = -\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} (x - x_1).$$

7. Tangente, Berührungspunkt (x_1, y_1) , Mittelpunkt $(0, 0)$:

$$(1) \quad x x_1 + y y_1 = r^2,$$

Mittelpunkt (a, b) :

$$(2) \quad (x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) = r^2.$$

Bezeichnet man den Winkel, den der Halbmesser zum Berührungspunkt mit der Xaxe macht mit α , so gehen die vorstehenden Gleichungen (1) und (2) über in

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = r$$

$$(x - a) \cos \alpha + (y - b) \sin \alpha = r.$$

Die Gerade $y = mx + b$ ist Tangente an den Kreis $x^2 + y^2 = r^2$, wenn

$$m = -\frac{x_1}{y_1}, \quad b = \frac{r^2}{y_1}.$$

Die Koordinaten des Berührungspunktes

(x_1, y_1) einer von dem Punkt (x', y') ausserhalb des Kreises gezogenen Tangente ergeben sich aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} x' x_1 + y' y_1 &= r^2 \\ x_1^2 + y_1^2 &= r^2. \end{aligned}$$

Die Gleichung dieser Tangente (zwei Lagen) ist

$$y - y' = \frac{-x' y' \pm r \sqrt{x'^2 + y'^2 - r^2}}{r^2 - x'^2} (x - x').$$

8. Polare (s. § 49) des Punktes (x_1, y_1) in Beziehung auf den Kreis $x^2 + y^2 = r^2$

$$x x_1 + y y_1 = r^2.$$

Die Koordinaten des Pols der Geraden $Ax + By + C = 0$ sind

$$x_1 = -\frac{Ar^2}{C}, \quad y_1 = -\frac{Br^2}{C}.$$

9. Kreis durch drei Punkte $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$; er ist bestimmt durch die vier Gleichungen

$$\begin{aligned} (x - a)^2 + (y - b)^2 &= r^2 \\ (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 &= r^2 \\ (x_2 - a)^2 + (y_2 - b)^2 &= r^2 \\ (x_3 - a)^2 + (y_3 - b)^2 &= r^2, \end{aligned}$$

seine Gleichung ist daher

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad \begin{array}{l} \text{(Zugleich Bedingung da-} \\ \text{für, dass vier Punkte auf} \\ \text{einem Kreis liegen.)} \end{array}$$

10. Zwei Kreise

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

$$x^2 + y^2 + A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$$

sind konzentrisch, wenn $A = A_1, B = B_1$.

11. Potenzlinie (s. § 51) zweier Kreise (s. Nr. 10):

$$(A - A_1)x + (B - B_1)y + C - C_1 = 0$$

(Differenz der Kreisgleichungen, vgl. § 51₃ und § 70₄).

§ 79. Polarkoordinaten.

Ist O der Pol (Anfangspunkt), M der Mittelpunkt, OX die Polaraxe, $\sphericalangle$ MOX = α , $\sphericalangle$ POX = φ , OP = ϱ , OM = d, so ist

1. die Gleichung des Kreises

$$(\varrho \cos \varphi - d \cos \alpha)^2 + (\varrho \sin \varphi - d \sin \alpha)^2 = r^2 \text{ oder } \varrho^2 - 2 \varrho d \cos(\varphi - \alpha) + d^2 = r^2.$$

Fällt OM mit OX zusammen (Mittelpunkt auf der Polaraxe), so ist die Gleichung des Kreises

$$\varrho^2 - 2 \varrho d \cos \varphi + d^2 = r^2.$$

Liegt ausserdem O auf dem Kreis, so ist

$$\varrho = 2 r \cos \varphi.$$

2. Hat der Leitstrahl für seine Schnittpunkte mit dem Kreis die Längen ϱ_1 und ϱ_2 , so ist

$$d \cos(\varphi - \alpha) = \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2}.$$

3. Für den berührenden Leitstrahl ist

$$d \sin(\varphi - \alpha) = r.$$

B. Parabel, Ellipse, Hyperbel.

§ 80. Kurvengleichungen; Sekante, Tangente, Polare etc.

1. Stücke und Bezeichnungen.

Grosse Axe 2 a }
kleine „ 2 b } bei Ellipse und Hyperbel

Parameter 2 p (= Sehne durch einen Brennpunkt parallel zu der Leitlinie); für Ellipse und Hyperbel ist

$$p = \frac{b^2}{a}.$$

Lineare Exzentrizität (Abstand des Brennpunktes vom Mittelpunkt) ist bei der

$$\text{Ellipse } f = \sqrt{a^2 - b^2};$$

Hyperbel $f = \sqrt{a^2 + b^2}$;

Parabel: Abstand des Brennpunktes vom Scheitel $\frac{p}{2}$;

Numerische Exzentrizität $\varepsilon = \frac{f}{a}$.

ε giebt zugleich das Verhältniß der Entfernung eines Kurvenpunktes vom Brennpunkt und seines Abstandes von der zugehörigen Leitlinie an. Es ist für die

Ellipse $\varepsilon < 1$,

Parabel $\varepsilon = 1$,

Hyperbel $\varepsilon > 1$.

Ferner ist $p = a(1 - \varepsilon^2)$; $b^2 = a \cdot p$; $b^2 = a^2(1 - \varepsilon^2)$

Abstand des Brennpunktes von der Leitlinie $= \frac{p}{\varepsilon}$.

2. Scheitelgleichung. Erste Form

$$\text{I. } y^2 = 2px - (1 - \varepsilon^2)x^2$$

(gemeinschaftliche Gleichung).

Diese Gleichung stellt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel dar, je nachdem $\varepsilon \leq 1$. $\varepsilon = 0$ giebt die Scheitelgleichung eines Kreises.

Zweite Form:

$$\text{II. } \begin{cases} y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2 & (\text{Ellipse}) \\ y^2 = 2px & (\text{Parabel}) \\ y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2 & (\text{Hyperbel}). \end{cases}$$

3. Mittelpunktsgleichung:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 & (\text{Ellipse}) \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 & (\text{Hyperbel}) \end{cases}$$

$$x^2 - y^2 = a^2 \quad (\text{Gleichseitige Hyperbel}).$$

4. Polargleichung.

1. Der Brennpunkt ist Pol, die Axe bzw. grosse Axe ist Polaraxe, φ ist von dem Scheitel aus gezählt, der dem Pol am nächsten liegt.

$$\varrho = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}.$$

Die Kurve ist eine Ellipse, Parabel, Hyperbel je nachdem $\varepsilon \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} 1$. Für die Parabel ist insbesondere

$$\varrho = \frac{p}{2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}}.$$

2. Der Mittelpunkt ist Pol, die grosse Axe Polaraxe

$$\varrho^2 = \frac{b^2}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi} \text{ (Ellipse);}$$

$$\varrho^2 = \frac{-b^2}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi} \text{ (Hyperbel).}$$

Die folgenden Gleichungen sind bei der Parabel auf die Scheitel-, bei Ellipse und Hyperbel auf die Mittelpunktsgleichung zu beziehen.

5. Sekante durch die beiden Punkte (x_1, y_1) , (x_2, y_2) der

1. Parabel:

$$(y_1 + y_2)y - y_1 y_2 = 2px \text{ oder} \\ y - y_1 = \frac{2p}{y_2 + y_1} (x - x_1).$$

2. Ellipse:

$$\frac{(x_1 + x_2)x}{a^2} + \frac{(y_1 + y_2)y}{b^2} = \frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{b^2} + 1, \text{ oder} \\ y - y_1 = -\frac{b^2(x_1 + x_2)}{a^2(y_1 + y_2)} (x - x_1).$$

3. Hyperbel:

$$\frac{(x_1 + x_2)x}{a^2} - \frac{(y_1 + y_2)y}{b^2} = \frac{x_1 x_2}{a^2} - \frac{y_1 y_2}{b^2} + 1, \text{ oder}$$

$$y - y_1 = \frac{b^2(x_1 + x_2)}{a^2(y_1 + y_2)}(x - x_1).$$

6. Tangente im Punkt (x_1, y_1) der

1. Parabel: $yy_1 = p(x + x_1).$

2. Ellipse: $\frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} = 1, \text{ oder}$

$$y - y_1 = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}(x - x_1).$$

3. Hyperbel: $\frac{x x_1}{a^2} - \frac{y y_1}{b^2} = 1, \text{ oder}$

$$y - y_1 = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}(x - x_1).$$

7. Asymptoten der Hyperbel

$$\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0.$$

Ist der Asymptotenwinkel 2φ , so ist $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$.

Bei der gleichseitigen Hyperbel stehen die Asymptoten auf einander senkrecht.

Ein Durchmesser $y = mx$ schneidet, berührt im unendlich fernen Punkt (ist also Asymptote), trifft die

Hyperbel nicht, je nachdem $m^2 \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} \frac{b^2}{a^2}$.

8. Normale im Punkt (x_1, y_1) der

1. Parabel: $p(y - y_1) + y_1(x - x_1) = 0, \text{ oder}$
 $xy_1 + py = y_1(x_1 + p).$

2. Ellipse: $\frac{a^2 x}{x_1} - \frac{b^2 y}{y_1} = a^2 - b^2, \text{ oder}$

$$y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1).$$

$$3. \text{ Hyperbel: } \frac{a^2 x}{x_1} + \frac{b^2 y}{y_1} = a^2 + b^2, \text{ oder}$$

$$y - y_1 = -\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} (x - x_1).$$

9. Bezeichnet man die Abscisse des Schnittpunktes der Tangente im Punkt (x_1, y_1) mit der Xaxe mit x_0 , die Subtangente (Projektion des Tangentenstückes zwischen Berührungspunkt und Xaxe auf die Xaxe) mit ST, die Subnormale mit SN, so ist

	x_0	ST	SN
1. für die Parabel:	$-\frac{x_1}{a^2}$	$\frac{2x_1}{a^2 - x_1^2}$	$\frac{p}{b^2 x_1}$
2. " " Ellipse	$\frac{x_1}{a^2}$	$\frac{x_1}{x_1^2 - a^2}$	$-\frac{b^2 x_1}{a^2}$
3. " " Hyperbel	$\frac{x_1}{a^2}$	$\frac{x_1^2 - a^2}{x_1}$	$\frac{b^2 x_1}{a^2}$

Aus dem Wert von x_0 ergibt sich für jede Kurve eine Konstruktion der Tangente im Punkte (x_1, y_1) .

10. Tangente vom Punkt (x_1, y_1) ausserhalb der

1. Parabel:

$$y - y_1 = \frac{y_1 \pm \sqrt{y_1^2 - 2p x_1}}{2x_1} (x - x_1).$$

2. Ellipse:

$$y - y_1 = \frac{x_1 y_1 \pm \sqrt{b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 - a^2 b^2}}{x_1^2 - a^2} (x - x_1).$$

3. Hyperbel:

$$y - y_1 = \frac{x_1 y_1 \pm \sqrt{a^2 b^2 - (b^2 x_1^2 - a^2 y_1^2)}}{x_1^2 - a^2} (x - x_1).$$

11. Allgemeine Gleichung der Tangente (Richtung gegeben) für die

$$1. \text{ Parabel: } y - mx = \frac{p}{2m}.$$

$$2. \text{ Ellipse: } y - mx = \pm \sqrt{m^2 a^2 + b^2}.$$

$$3. \text{ Hyperbel: } y - mx = \pm \sqrt{m^2 a^2 - b^2}.$$

12. Polare des Punktes (x_1, y_1) in Beziehung auf die

1. Parabel: $yy_1 = p(x + x_1).$

2. Ellipse: $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1.$

3. Hyperbel: $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1.$

Liegt Punkt (x_1, y_1) auf der Kurve, so ist seine Polare zugleich Tangente. Die Polare des Mittelpunkts ist die unendlich ferne Gerade; die Polare eines unendlich fernen Punktes ist ein Durchmesser.

13. Koordinaten des Pols der Geraden $Ax + By + C = 0$, für die

1. Parabel: $x_1 = +\frac{C}{A}, y_1 = -\frac{Bp}{A}.$

2. Ellipse: $x_1 = -\frac{a^2A}{C}, y_1 = -\frac{b^2B}{C}.$

3. Hyperbel: $x_1 = -\frac{a^2A}{C}, y_1 = \frac{b^2B}{C}.$

14. Zwei Geraden heissen konjugiert in Bezug auf einen Kegelschnitt, wenn jede durch den Pol der andern geht, die Koordinaten des Pols der einen müssen also die Gleichung der andern befriedigen.

1. Ist bei der Parabel ein unendlich ferner Punkt gegeben durch die Richtung $y = mx$, so ist der zugehörige Durchmesser

$$y = \frac{p}{m}.$$

2. Gleichungen für zwei konjugierte Durchmesser bei der

Ellipse: $Ax - By = 0$ und $\frac{Bx}{a^2} + \frac{Ay}{b^2} = 0.$

Hyperbel: $Ax + By = 0$ und $\frac{Bx}{a^2} + \frac{Ay}{b^2} = 0.$

Jede Asymptote der Hyperbel und ihr konjugierter Durchmesser fallen zusammen.

15. Gleichung in Beziehung auf zwei konjugierte Durchmesser $2a_1, 2b_1$

$$1. \text{ Ellipse: } \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1; \text{ Beziehung: } a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2$$

$$2. \text{ Hyperbel: } \frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{b_1^2} = 1; \quad \text{„} \quad a_1^2 - b_1^2 = a^2 - b^2$$

Sind φ und φ_1 die Winkel, welche zwei konjugierte Durchmesser mit der Hauptaxe bilden, so ist für die

$$3. \text{ Ellipse: } \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \varphi_1 = -\frac{b^2}{a^2}; \quad a_1 b_1 \sin(\varphi - \varphi_1) = ab \text{ (s. § 81}_{24}\text{)}$$

$$4. \text{ Hyperbel: } \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \varphi_1 = +\frac{b^2}{a^2}; \quad a_1 b_1 \sin(\varphi - \varphi_1) = ab \text{ (s. § 81}_{25}\text{)}$$

Gleichung der Hyperbel in Beziehung auf die beiden Asymptoten

$$x' y' = c^2 = \frac{f^2}{4} = \frac{a^2 + b^2}{4};$$

$$\text{gleichseitige Hyperbel } x' y' = \frac{1}{2} a^2$$

16. Leitlinie (Direktrix), d. h. Polare des Brennpunktes für die

$$1. \text{ Parabel: } x = -\frac{p}{2}; \text{ Brennpunkt } \left(\frac{p}{2}, 0\right)$$

$$2. \text{ Ellipse: } x = \frac{a^2}{f} = \frac{a}{e}; \text{ f. d. Brennpunkt } (f, 0)$$

$$3. \text{ Hyperbel: } x = \frac{a^2}{f} = \frac{a}{e}; \text{ „ „ „ } (f, 0)$$

17. Länge des Brennstrahls, bezw. der Brennstrahlen zu dem Punkt (x_1, y_1)

1. Parabel: $r = x_1 + \frac{p}{2}$

2. Ellipse: $r = a - x_1 \varepsilon$
 $r_1 = a + x_1 \varepsilon; \mathbf{r} + \mathbf{r}_1 = 2\mathbf{a}$

3. Hyperbel: $r = x_1 \varepsilon - a$
 $r_1 = x_1 \varepsilon + a; \mathbf{r}_1 - \mathbf{r} = 2\mathbf{a}$

18. Krümmungsmittelpunkt (x_0, y_0) und Krümmungshalbmesser ϱ für den Punkt (x_1, y_1) der

1. Parabel:
$$\begin{cases} x_0 = 3x_1 + p = \frac{3y_1^2 + 2p^2}{2p} \\ y_0 = -\frac{y_1^3}{p^2} = -\frac{2x_1 y_1}{p} \end{cases}$$

$$\varrho = \frac{(y_1^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2} = \frac{N_x^3}{p^2}; \text{ für den Scheitel } \varrho = p.$$

2. Ellipse:
$$\begin{cases} x_0 = \frac{f^2 x_1^3}{a^4} = \frac{\varepsilon^2 x_1^3}{a^2} \\ y_0 = -\frac{f^2 y_1^3}{b^4} = -\frac{\varepsilon^2 a^2 y_1^3}{b^4} \end{cases}$$

$$\varrho = \frac{(b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4} = \frac{(rr_1)^{\frac{3}{2}}}{ab} = \frac{N_x^3}{p^2}$$

N_x Normale vom Punkt (x_1, y_1) bis zur Xaxe.
 Für den Scheitel der grossen Axe ist

$$\varrho_2 = \frac{b^2}{a} = p, \text{ für den der kleinen}$$

$$\varrho_1 = \frac{a_2}{b}$$

3. Hyperbel:
$$\begin{cases} x_0 = \frac{f^2 x_1^3}{a^4} = \frac{\varepsilon^2 x_1^3}{a^2} \\ y_0 = -\frac{f^2 y_1^3}{b^4} = -\frac{a^2 \varepsilon^2 y_1^3}{f^4} \end{cases}$$

$$\varrho = \frac{(b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4} = \frac{(r r_1)^{\frac{3}{2}}}{ab} = \frac{N x^3}{p^2}$$

für den Scheitel ist

$$\varrho = \frac{b^2}{a} = p$$

19. Flächeninhalt

1. Parabelsegment S,

Sehne senkrecht zur Axe, (x_1, y_1) Koordinaten des einen Endpunkts:

$$S = \frac{4}{3} x_1 y_1.$$

Beliebiges Segment; $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ Koordinaten der Endpunkte

$$S = \frac{(y_1 - y_2)^3}{12 p} = \frac{x_1 - x_2}{6} \cdot \frac{(y_1 - y_2)^2}{y_1 + y_2}$$

2. Ellipsenzone zwischen der kleinen Axe und der im Abstand x_1 dazu parallelen Sehne

$$\frac{b}{a} \left(x_1 \sqrt{a^2 - x_1^2} + a^2 \arcsin \frac{x_1}{a} \right)$$

Gesamte Ellipsenfläche: $ab\pi$.

3. Hyperbelsegment, Sehne senkrecht zur Xaxe:

$$S = x_1 y_1 - ab \ln \left(\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b} \right)$$

20. Konfokale Kegelschnitte. — Eine Ellipse und eine Hyperbel, welche dieselben Brennpunkte haben, konfokal sind, haben folgende Gleichungen

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-\varepsilon^2)} = 1 \\ \frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{a_1^2(\varepsilon_1^2-1)} = 1 \end{cases}$$

wobei $a\varepsilon = a_1\varepsilon_1 = f$, $\varepsilon < 1$, $\varepsilon_1 > 1$. Die Gleichungen können demnach in folgende Form gebracht werden:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - f^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{f^2 - a_1^2} = 1$$

Diese beiden konfokalen Kegelschnitte schneiden sich rechtwinklig (elliptische Koordinaten).

Die Gleichungen aller konfokalen Kegelschnitte sind in der Form enthalten

$$\frac{x^2}{a^2 - k} + \frac{y^2}{b^2 - k} = 1;$$

sie stellt eine Ellipse, Hyperbel oder imaginäre Kurve dar, je nachdem $k < b^2 < a^2$, oder $b^2 < k < a^2$, oder $a^2 < k$.

§ 81. Sätze über Kegelschnitte.

A) Für jeden Kegelschnitt.

1. Die Polaren der sämtlichen Punkte einer Geraden gehen durch den Pol dieser Geraden, und die Pole sämtlicher Strahlen eines Büschels liegen auf der Polaren des Büschelmittelpunktes.

2. Die Halbierungspunkte paralleler Sehnen liegen auf einem Durchmesser.

3. Das Verhältnis der Entfernungen eines Punktes eines Kegelschnittes vom Brennpunkt und von der Leitlinie ist konstant und gleich der numerischen Exzentrizität ε . (Für die Ellipse ist $\varepsilon < 1$, für die Parabel $\varepsilon = 1$, für die Hyperbel $\varepsilon > 1$.)

4. Die Sehne, welche durch einen Brennpunkt geht und senkrecht zur grossen Axe ist, ist der Parameter.

5. Zieht man in den Endpunkten einer durch den Brennpunkt gehenden Sehne Tangenten, so schneiden sich diese auf der Leitlinie, und die Verbindungslinie des Schnittpunktes mit dem Brennpunkt steht senkrecht auf der Sehne.

6. Der Schnittpunkt zweier Tangenten liegt auf demjenigen Durchmesser, welcher der Sehne zwischen den Berührungspunkten konjugiert ist.

7. Sind in einer Ebene zwei Kurven zweiter Ordnung K und K_1 und bestimmt man zu jedem Punkt von K die Polare in Beziehung auf K_1 , so umhüllen diese Polaren eine dritte Kurve zweiter Ordnung.

8. Satz des Pascal: Bei jedem einem Kegelschnitt einbeschriebenen einfachen Sechseck schneiden sich die drei Paare Gegenseiten in drei Punkten einer Geraden. (Konstruktion eines Kegelschnittes aus 5 Punkten.)

9. Satz des Brianchon: Bei jedem einem Kegelschnitt umbeschriebenen Sechseck schneiden sich die drei Verbindungslinien von je zwei Gegenecken in einem Punkte. (Konstruktion eines Kegelschnittes aus 5 Tangenten.)

10. Der Krümmungshalbmesser im Scheitel der grossen Axe ist gleich dem halben Parameter.

B) Für die Parabel.

11. Die Durchmesser einer Parabel sind parallel zur Axe.

12. Der Fusspunkt des Lotes vom Brennpunkt auf eine Tangente liegt auf der Scheiteltangente. (Konstruktion der Parabel durch Umhüllung.)

13. Der Ort des Schnittpunkts zweier Parabeltangenten, die senkrecht auf einander stehen, ist die Leitlinie.

14. Die Entfernung des Berührungspunktes einer Tangente vom Brennpunkt ist gleich der Entfernung des letzteren vom Schnittpunkt der Tangente mit der Axe. (Konstruktion der Tangente.)

15. Die Tangente halbiert den Winkel zwischen dem Brennstrahl und dem durch den Berührungspunkt

gehenden Durchmesser (Konstruktion der Tangente und Normale).

16. Die Parabel kann als Ellipse betrachtet werden, deren zweiter Brennpunkt in unendlicher Entfernung liegt.

C) Für Ellipse und Hyperbel.

17. Hat man ein System von Ellipsen, bzw. Hyperbeln, welche die Scheitel und die grosse Axe gemeinschaftlich haben, so schneiden sich alle Tangenten, welche die nämliche Abscisse für den Berührungspunkt haben, in einem und demselben Punkt der grossen Axe. (Konstruktion der Tangente.)

18. Alle Sehnen, welche einem Durchmesser parallel gezogen sind, werden von seinem konjugierten halbiert. Die Tangente im Endpunkt eines Durchmessers ist parallel zum konjugierten Durchmesser.

19. In jedem einem Kegelschnitt umbeschriebenen Parallelogramm sind die Diagonalen konjugierte Durchmesser; in jedem einem Kegelschnitt eingeschriebenen Parallelogramm sind die Seiten zwei konjugierten Durchmessern parallel.

20. Das Produkt der Entfernungen der Brennpunkte von einer Tangente ist unveränderlich ($= b^2$) und die Fusspunkte der Lote liegen auf einem Kreis, der die grosse Axe zum Durchmesser hat. (Konstruktion des Kegelschnitts durch Umhüllung.)

21. Die Tangente und die Normale in einem Punkt der Ellipse oder Hyperbel halbieren die Winkel, welche die Brennstrahlen nach diesem Punkt mit einander bilden. (Konstruktion der Tangente und der Normale.)

Hieraus folgt: Eine Ellipse und eine zu ihr konfokale Hyperbel schneiden sich unter rechten Winkeln.

22. Bei der Ellipse ist die Summe, bei der Hyperbel die Differenz der Brennstrahlen nach einem Punkt der

Kurve unveränderlich und zwar gleich der grossen Axe.
(Faden-Konstruktion der Kurven.)

23. Auf jeder Sekante einer Hyperbel sind die beiden Abschnitte, welche zwischen der Kurve und ihren beiden Asymptoten liegen, einander gleich; der Abschnitt einer Tangente zwischen den Asymptoten wird durch den Berührungspunkt halbiert.

(Konstruktion der Hyperbel, wenn ein Punkt und die Asymptoten derselben gegeben sind.)

24. Der Inhalt eines Dreiecks, das zwischen zwei konjugierten Halbmessern einer Ellipse und der Verbindungslinie ihrer Endpunkte liegt, ist unveränderlich.

25. Der Inhalt eines Dreiecks, das von den Asymptoten und einer zwischen denselben liegenden Tangente einer Hyperbel eingeschlossen wird, ist unveränderlich.

26. Alle Parabeln sind einander ähnlich.

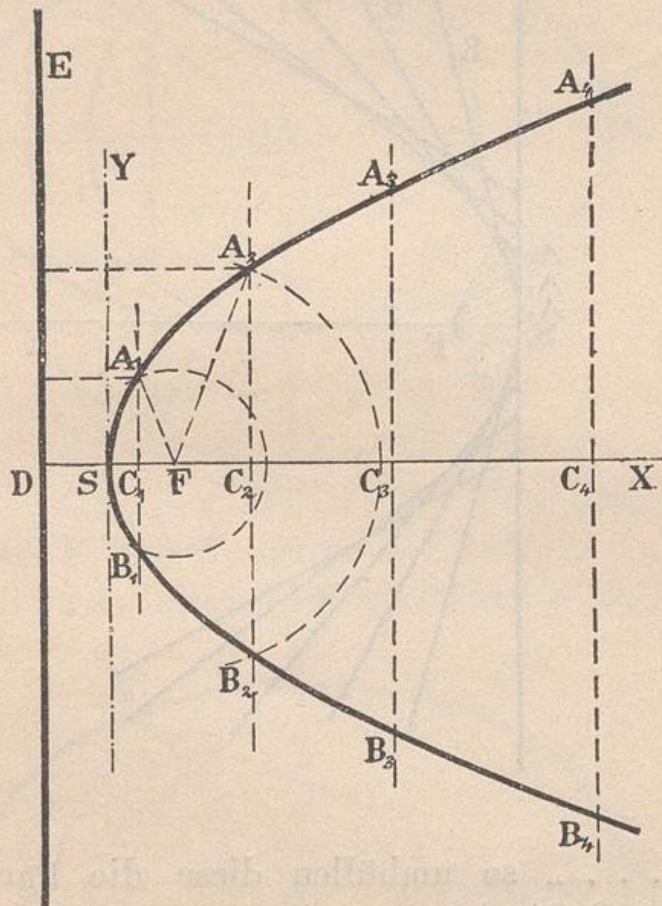
27. Zwei Ellipsen mit den Halbaxen (a, b) , (a_1, b_1) sind einander ähnlich, wenn $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}$; ebenso sind zwei Hyperbeln einander ähnlich, wenn $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}$, d. h., wenn sie gleiche Asymptotenwinkel haben.

§ 82. Konstruktion der Kegelschnitte.

1. Parabel.

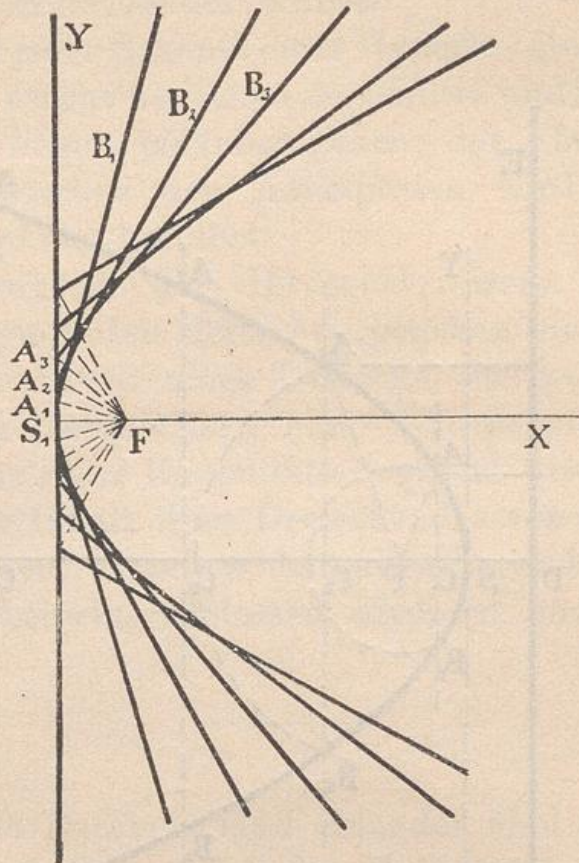
a) DX Achse, SY Scheiteltangente, DE Leitlinie, also $DS = SF = \frac{p}{2}$. — Ziehe in den beliebig, aber zweckmässig gewählten Punkten $C_1, C_2, C_3 \dots$ Lote zur

Axe und beschreibe um F mit DC_1 einen Bogen, der das zu C_1 gehörige Lot in A_1 und B_1 schneidet; ver-



fahre ebenso mit DC_2 u. s. w. $A_1, A_2, A_3 \dots$, $B_1, B_2, B_3 \dots$ sind Parabelpunkte. (Begründung: Jeder Punkt der Parabel hat vom Brennpunkt und der Leitlinie gleiche Abstände.)

b) Durch Umhüllung. — SX Axe, SY Scheiteltangente, F Brennpunkt. Ziehe von F nach SY die Strahlen $FA_1, FA_2, FA_3 \dots$ und errichte auf denselben in $A_1, A_2, A_3 \dots$ die Lote $A_1 B_1, A_2 B_2,$

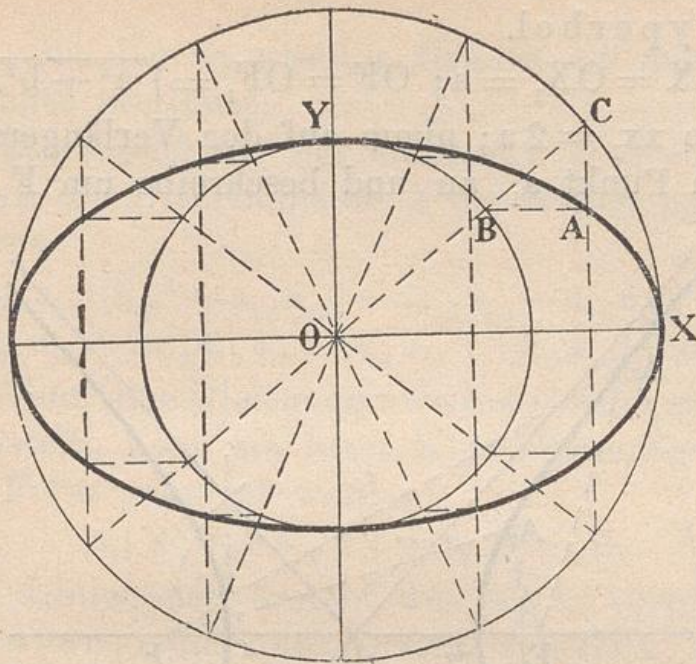


$A_3 B_3 \dots$, so umhüllen diese die Parabel. (Begründung § 81,12).

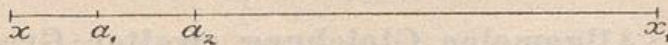
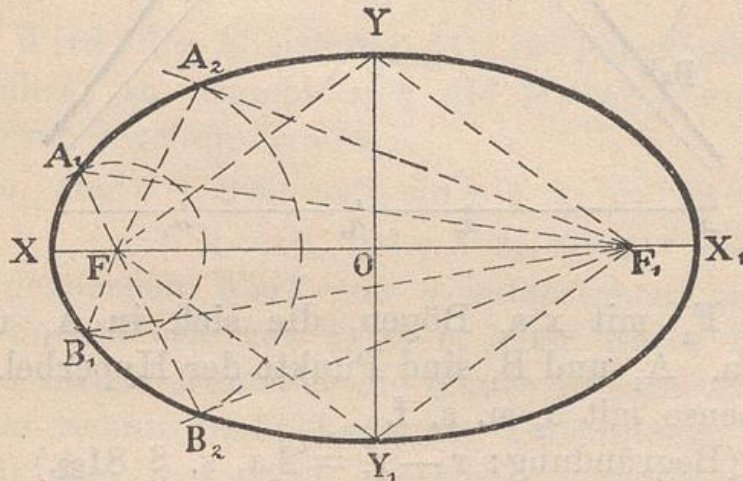
2. Ellipse.

a. $OX = a$, halbe grosse Axe, $OY = b$, halbe kleine Axe. Beschreibe um O mit a und b Kreise; ziehe durch O eine Gerade, welche die Kreise in B und C schneidet, ziehe $CA \perp OX$, $BA \parallel OX$, so ist A ein Punkt der Ellipse. Aehnlich weitere Punkte.

(Begründung: $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$).



b. $OX = OX_1 = a$, $OY = OY_1 = b$. Bestimme die Brennpunkte F und F_1 durch $FY = F_1Y = a$. Ziehe $xx_1 = XX_1 = 2a$; nimm darauf Punkt a beliebig an,



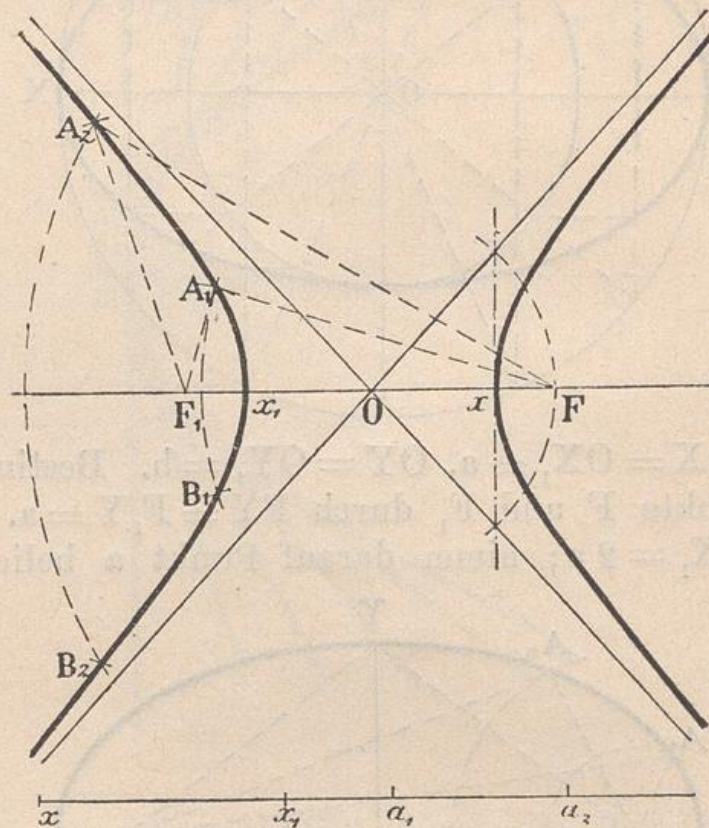
beschreibe um F mit xa_1 und um F_1 mit x_1a_1 Kreisbögen, die sich in A_1 und B_1 schneiden u. s. f. A_1 und B_1 sind Punkte der Ellipse.

(Begründung: $r + r_1 = 2a$, s. § 81₂₂.)

3. Hyperbel.

$$OX = OX_1 = a; OF = OF_1 = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Ziehe $xx_1 = 2a$; nimm auf der Verlängerung von xx_1 einen Punkt a_1 an und beschreibe um F mit xa_1



und um F_1 mit x_1a_1 Bögen, die sich in A_1 und B_1 schneiden. A_1 und B_1 sind Punkte der Hyperbel. Ver-
fahre ebenso mit a_2 u. s. f.

(Begründung: $r - r_1 = 2a$, s. § 8122.)

§ 83. Allgemeine Gleichung zweiten Grades.

$$(1) a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

1. Nach Division der Gleichung (1) mit a_{33} zeigt sich, dass die Gleichung fünf unabhängige Konstanten

enthält; eine Kurve zweiten Grades ist daher durch fünf Punkte bestimmt.

2. Die Gleichung (1) stellt ein Geradenpaar dar, wenn die Diskriminante Δ der Gleichung null ist, d. h. wenn

$$(a_{12}^2 - a_{11} a_{22})(a_{13}^2 - a_{11} a_{33}) - (a_{12} a_{13} - a_{11} a_{23})^2 = 0 \text{ oder } \Delta = a_{11} a_{22} a_{33} + 2a_{23} a_{13} a_{12} - a_{11} a_{23}^2 - a_{22} a_{13}^2 - a_{33} a_{12}^2 = 0.$$

3. Wenn eine Gleichung zweiten Grades ein Linienpaar darstellt, kann sie durch Koordinatenverwandlung auf die Form gebracht werden:

$$a_{11} x^2 + 2 a_{12} x y + a_{22} y^2 = 0.$$

Das Linienpaar besteht aus zwei (konjugierten) imaginären, oder aus zwei reellen aber zusammenfallenden, oder aus zwei reellen und verschiedenen Geraden, je nachdem

$$a_{12}^2 - a_{11} a_{22} \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} 0.$$

4. Wird die Gleichung (1) in Polarkoordinaten übergeführt, so ergibt sich als Polargleichung der Kurven zweiten Grades

$$(a_{11} \cos^2 \varphi + 2 a_{12} \cos \varphi \sin \varphi + a_{22} \sin^2 \varphi) r^2 + 2 (a_{13} \cos \varphi + a_{23} \sin \varphi) r + a_{33} = 0.$$

Einem gegebenen Wert von φ entsprechen im allgemeinen zwei Werte von r , d. h. jeder durch den Pol gezogene Strahl schneidet die Kurve in zwei Punkten. Der eine Schnittpunkt kann im Unendlichen liegen, wenn für den bestimmten Wert von φ der Koeffizient von r^2 zu null wird, d. h. wenn

$$a_{11} \cos^2 \varphi + 2 a_{12} \cos \varphi \sin \varphi + a_{22} \sin^2 \varphi = 0, \text{ oder wenn } a_{11} + 2 a_{12} \operatorname{tg} \varphi + a_{22} \operatorname{tg}^2 \varphi = 0.$$

Es giebt demnach im allgemeinen zwei solche Werte von φ und also zwei Richtungen, für welche der Strahl die Kurve im Unendlichen schneiden kann; diese beiden

Richtungen sind imaginär, reell aber zusammenfallend, reell und verschieden, d. h. die unendlich ferne Gerade hat mit der Kurve keinen Punkt, zwei zusammenfallende oder zwei verschiedene Punkte gemeinschaftlich, je nachdem

$$a_{12}^2 - a_{11} a_{22} \begin{matrix} \leq \\ > \end{matrix} 0.$$

5. Die allgemeine Gleichung zweiten Grades stellt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel dar, je nachdem

$$a_{12}^2 - a_{11} a_{22} \begin{matrix} \leq \\ > \end{matrix} 0.$$

Sie stellt einen Kreis dar, wenn $a_{12} = 0$ und $a_{11} = a_{22}$.

6. Durch jeden Punkt kann im allgemeinen eine Sehne so gezogen werden, dass sie in ihm halbiert wird; ist die Kurve zweiten Grades durch die allgemeine Polargleichung gegeben, so hat eine Sehne vom Neigungswinkel φ den Pol zur Mitte, wenn die beiden Wurzeln von r von entgegengesetztem Vorzeichen und gleich sind. Dies ist der Fall, wenn

$$a_{13} \cos \varphi + a_{23} \sin \varphi = 0$$

oder in rechtwinkligen Koordinaten, wenn

$$a_{13} x + a_{23} y = 0.$$

Giebt man nach einer Koordinatenverwandlung (Parallelverschiebung) den Koeffizienten a_{13}' und a_{23}' den Wert null, so ergeben sich daraus die Bestimmungsstücke des Mittelpunktes.

Die rechtwinkligen Koordinaten (x_0, y_0) des Mittelpunktes ergeben sich aus

$$\begin{aligned} a_{11} x_0 + a_{12} y_0 + a_{13} &= 0 \\ a_{12} x_0 + a_{22} y_0 + a_{23} &= 0, \end{aligned}$$

daher besitzt eine Linie zweiten Grades nicht mehr als einen Mittelpunkt. Seine Koordinaten sind

$$\begin{cases} x_0 = \frac{a_{22} a_{13} - a_{12} a_{23}}{a_{12}^2 - a_{11} a_{22}} \\ y_0 = \frac{a_{11} a_{23} - a_{12} a_{13}}{a_{12}^2 - a_{11} a_{22}}. \end{cases}$$

Für die Parabel ist $a_{12}^2 - a_{11} a_{22} = 0$, sie hat daher keinen Mittelpunkt.

§ 84. Gleichungen weiterer Kurven.

A. Algebraische Kurven.

1. Neilsche Parabel $y = ax^{\frac{3}{2}}$.
2. Lemniskate $(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0$ oder $r^2(r^2 - a^2 \cos 2\varphi) = 0$
3. Conchoide $x^2 y^2 = (b + y)^2(a^2 - y^2)$ oder $(x^2 + y^2)(y - b)^2 = a^2 y^2$ oder $r = a + \frac{b}{\cos \varphi}$.
4. Cissoide $y^2(a - x) = x^3$.
5. Descartes'sches Blatt $x^3 + y^3 = 3axy$.
6. Cassinische Kurve $(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = b^4 - a^4$.
7. Cardioide $(y^2 + x^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)$ oder $r = a(1 + \cos \varphi)$.

B. Transcendente Kurven.

1. Logarithmische Linie $y = me^{\frac{x}{a}}$.
2. Kettenlinie $y = \frac{m}{2} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$.

3. Cykloide, beschrieben von einem bestimmten Punkt P auf dem Halbmesser eines Kreises, der auf einer Geraden rollt, (a Halbmesser des rollenden Kreises, a_1 Mittelpunktsabstand von P, $\varphi = \text{arc } \sphericalangle POX$, X Berührungspunkt)

$$\begin{cases} x = a\varphi - a_1 \sin \varphi \\ y = a - a_1 \cos \varphi \end{cases}$$

4. Epicycloide, beschrieben von dem Punkt P (s. Nr. 3), wenn der Kreis auf der Aussenseite eines Kreises (Halbmesser b), rollt

$$\begin{cases} x = (a + b) \sin \frac{a\varphi}{b} - a_1 \sin \frac{a + b}{b} \varphi \\ y = (a + b) \cos \frac{a\varphi}{b} - a_1 \cos \frac{a + b}{b} \varphi. \end{cases}$$

5. Hypocykloide, beschrieben von dem Punkt P (s. Nr. 3), wenn der Kreis auf der Innenseite eines Kreises (Halbmesser b) rollt

$$\begin{cases} x = (b - a) \sin \frac{a\varphi}{b} - a_1 \sin \frac{b - a}{b} \varphi \\ y = (b - a) \cos \frac{a\varphi}{b} + a_1 \cos \frac{b - a}{b} \varphi. \end{cases}$$

Die Cykloide, ebenso die Epi- und Hypocykloide ist die gestreckte, gemeine oder verschlungene, je nachdem $a_1 \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} a$.

6. Spirale des Archimedes (lineare Spirale) $r = a\varphi$.

7. Parabolische Spirale $r^2 = 2p\varphi$.

8. Hyperbolische Spirale $r = \frac{a}{\varphi}$.

9. Logarithmische Spirale $r = m e^{a\varphi}$.

10. Kreisevolvente (Tangente = dem Bogen zwischen einem festen Punkt des Kreises und dem Berührungspunkt): $r = a \sqrt{1 + \varphi^2}$, $\psi = \varphi - a \operatorname{arctg} \varphi$.

II. Geometrie des Raums.

§ 85. Koordinaten-*) und Grössenbeziehungen.

O Ursprung, P ein Punkt im Raum, $OP = r$;
 α, β, γ Winkel der OP mit den positiven Teilen der
 Koordinatenachsen; x, y, z die Koordinaten von P.

1. Ein Punkt. Die Koordinaten des Punktes P
 sind die Projektionen von OP auf die Axen:

$$x = r \cos \alpha, y = r \cos \beta, z = r \cos \gamma,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

2. Zwei Punkte. (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) .

$$OP_1 = r_1, OP_2 = r_2;$$

$$\cos(r_1, r_2) = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2$$

$$= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{r_1 r_2}.$$

Stehen r_1 und r_2 senkrecht aufeinander, so ist

$$\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 = 0.$$

Entfernung $e = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$.

Für Punkt (x, y, z) , der $P_1 P_2$ im Verhältnis $m : n$
 teilt ($P_1 P : P P_2 = m : n$), ist

$$x = \frac{n x_1 + m x_2}{m + n}; y = \frac{n y_1 + m y_2}{m + n}; z = \frac{n z_1 + m z_2}{m + n}.$$

3. Projektionen. Ist l eine Strecke, f eine
 Fläche, sind ferner l_1, l_2, l_3 , bzw. f_1, f_2, f_3 ihre Pro-
 jektionen auf die Koordinatenebenen, so ist

$$1. l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 2 l^2.$$

$$2. f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = f^2.$$

$f_1 = f \cos \alpha, f_2 = f \cos \beta, f_3 = f \cos \gamma$; α, β, γ Neigungs-
 winkel der f gegen die Koordinatenebenen.

*) Es sind stets, wofern nichts anders bemerkt ist, rechtwinklige
 Koordinaten vorausgesetzt.

4. Inhalt V der dreiseitigen Pyramide.

1. Eine Ecke im Ursprung, die drei andern Ecken sind (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) , (x_3, y_3, z_3) .

$$V = \frac{1}{6} [x_1(y_2 z_3 - y_3 z_2) + x_2(y_3 z_1 - y_1 z_3) + x_3(y_1 z_2 - y_2 z_1)]$$

$$= \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

2. Liegt die erste Ecke nicht im Ursprung, sondern im Punkt (x, y, z) , so ergibt sich V , indem man das Koordinatensystem parallel verschiebt, so dass der Ursprung mit (x, y, z) zusammenfällt; man hat alsdann im vorigen Ausdruck

statt x_1, y_1, z_1 zu setzen $x_1 - x, y_1 - y, z_1 - z$

Liegt (x, y, z) in derselben Ebene* mit den drei übrigen Punkten, so ist $V = 0$; dies ist die Gleichung der Ebene durch jene drei Punkte.

§ 86. Aenderung des Koordinatensystemes.

1. Parallele Verschiebung der Axen; a, b, c Koordinaten des neuen Ursprungs.

$$x = a + x', \quad y = b + y', \quad z = c + z'.$$

2. Drehung um den Ursprung.

OX' bilde mit OX, OY, OZ die Winkel $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$,
 OY' " " " " " " " $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$,
 OZ' " " " " " " " $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$.

Schreibt man der Kürze halber die Buchstaben der Winkel für ihre Cosinus, so ist:

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z' & x' &= \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z \\ y &= \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z' & y' &= \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z \\ z &= \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z' & z' &= \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z. \end{aligned}$$

Zwischen den Cosinus bestehen die Beziehungen

$$\begin{array}{ll}
\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1 & \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1 \\
\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1 & \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1 \\
\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 & \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 = 1 \\
\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\gamma_3 = 0 & \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0 \\
\beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3 = 0 & \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 = 0 \\
\gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 + \gamma_3\alpha_3 = 0 & \alpha_3\alpha_1 + \beta_3\beta_1 + \gamma_3\gamma_1 = 0.
\end{array}$$

3. Polarkoordinaten. $OP = r$, φ Winkel zwischen OP und der XY -Ebene, gezählt von der letzteren gegen die $+Z$ -Axe hin (von -90° bis $+90^\circ$); ψ ist der Winkel, den die Ebene ZOP mit der Ebene ZOX bildet, gezählt von der $+X$ -Axe aus im positiven Drehungssinn von $0^\circ - 360^\circ$.

Uebergang von rechtwinkligen Koordinaten zu Polarkoordinaten und umgekehrt:

$$1. \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \sin \varphi = \frac{z}{r}, \quad \cos \psi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\sin \psi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$$2. \quad \begin{cases} x = r \cos \varphi \cos \psi \\ y = r \cos \varphi \sin \psi \\ z = r \sin \varphi. \end{cases}$$

§ 87. Allgemeine Sätze.

1. Eine Fläche ist durch eine Gleichung zwischen x , y und z bestimmt. Die Bedingung dafür, dass der Punkt (x_1, y_1, z_1) auf der Fläche liegt, deren Gleichung $F(x, y, z) = 0$ ist, ist $F(x_1, y_1, z_1) = 0$.

2. Eine Linie ist durch zwei Gleichungen in x , y und z bestimmt; die Linie ist die Schnittlinie der durch jene zwei Gleichungen dargestellten Flächen. Jeder Punkt, dessen Koordinaten die beiden Gleichungen $F(x, y, z) = 0$ und $f(x, y, z) = 0$ befriedigen, liegt auf der Schnittlinie der durch die beiden Gleichungen dargestellten Flächen.

3. Setzt man in der Gleichung $F(x, y, z) = 0$ eine der Koordinaten, z. B. z , gleich null, so erhält man die Gleichung der Schnittlinie der Fläche mit der Ebene der andern Koordinaten, z. B. der XY -Ebene.

4. Eliminiert man aus den Gleichungen zweier Flächen eine Koordinate, so erhält man die Gleichung der Projektion der Schnittlinie beider Flächen auf die Ebene der beiden andern Koordinaten. Bestimmt man aus den Gleichungen dreier Flächen die gemeinschaftlichen Werte von x, y, z , so stellen diese die Koordinaten der Schnittpunkte der drei Flächen dar.

5. $F(x, y, z) + \lambda f(x, y, z) = 0$ giebt die Gleichung einer Fläche an, welche durch die Schnittlinie oder die gemeinschaftlichen Punkte der beiden Flächen $F(x, y, z) = 0$ und $f(x, y, z) = 0$ geht.

§ 88. Die Ebene.

a, b, c Abschnitte der Ebene auf den Koordinatenachsen; α, β, γ die Winkel, welche das Lot vom Ursprung auf die Ebene mit den Axen bildet, p die Länge dieses Lotes.

1. Gleichungsformen für die Ebene:

1. allgemeine Form $Ax + By + Cz + D = 0$ (E)

2. " $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0$

3. " $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$
(Normalform N)

Spur in der XY -Ebene $Ax + By + D = 0$

" " " YZ " $By + Cz + D = 0$

" " " ZX " $Ax + Cz + D = 0$

Axenabschnitte:

$$a = -\frac{D}{A}, \quad b = -\frac{D}{B}, \quad c = -\frac{D}{C}.$$

Lot vom Ursprung:

$$p = a \cos \alpha = b \cos \beta = c \cos \gamma = \frac{D}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

(Das Vorzeichen der Wurzel wird so gewählt, dass p positiv wird.)

Winkel des Lotes p mit den Axen aus:

$$\cos \alpha = \frac{p}{a} = -\frac{Ap}{D} = -\frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \text{ u. s. f.}$$

2. Besondere Fälle:

$$1. \begin{cases} x=a & \text{Ebene parallel zur } YZ\text{-Ebene,} \\ y=b & \text{" " " } ZX \text{ " } \\ z=c & \text{" " " } XY \text{ " } \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} Ax + By + D = 0 & \text{Ebene parallel zur } Z\text{-Achse} \\ Ax + Cz + D = 0 & \text{" " " } Y \text{ " } \\ By + Cz + D = 0 & \text{" " " } X \text{ " } \end{cases}$$

$$3. Ax + By + Cz = 0 \quad \text{" durch den Ursprung}$$

$$4. \begin{cases} Ax + By = 0 & \text{" " die } Z\text{-Achse} \\ Ax + Cz = 0 & \text{" " " } Y \text{ " } \\ By + Cz = 0 & \text{" " " } X \text{ " } \end{cases}$$

3. Ebene durch den Punkt (x_1, y_1, z_1)

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$$

4. Ebene durch drei Punkte $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2),$

(x_3, y_3, z_3)

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0, \text{ wobei}$$

$$A = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}, C = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

(s. auch § 854.)

5. Abstand e eines Punktes (x_1, y_1, z_1) von der Ebene E oder N (s. 1.):

$$e = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = x_1 \cos \alpha + y_1 \cos \beta + z_1 \cos \gamma - p$$

6. Zwei Ebenen $Ax + By + Cz + D = 0$ und $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$;

1. sie sind parallel, wenn $\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1}$,
also Gleichungen zweier paralleler Ebenen

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \end{cases} \text{ oder}$$

$$\begin{cases} x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0 \\ x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p_1 = 0 \end{cases}$$

2. Abstand zweier paralleler Ebenen

$$\pm \frac{D - D_1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = p - p_1$$

3. Winkel φ zweier Ebenen

$$\cos \varphi = \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{\pm \sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2)}}$$

4. Sie sind senkrecht, wenn $\cos \varphi = 0$, d. h. wenn $AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0$

7. Ebenenbüschel. Sind $A_1 = 0$, $A_2 = 0$ die Gleichungen zweier Ebenen (1) u. (2) in Normalform, so ist die Gleichung einer dritten Ebene (3) die durch die Schnittlinie der beiden ersten geht

$$A_1 - \lambda A_2 = 0.$$

Sind (3, 1), (3, 2) die Neigungswinkel zwischen (3) und den beiden gegebenen Ebenen, so ist

$$\lambda = \frac{\sin(3, 1)}{\sin(3, 2)}.$$

Die Halbierungsebenen der von den beiden Ebenen gebildeten Keile haben daher die Gleichung

$$A_1 \mp A_2 = 0$$

8. Drei Ebenen durch eine Gerade.

Damit drei Ebenen $E_1 = 0$, $E_2 = 0$, $E_3 = 0$ sich in derselben Geraden schneiden ist notwendig und hin-

reichend, dass es drei Zahlfactoren $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ giebt, für welche die Identität besteht

$$\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \lambda_3 E_3 = 0$$

9. Vier Ebenen durch einen Punkt. Damit vier Ebenen $E_1 = 0, E_2 = 0, E_3 = 0, E_4 = 0$ durch einen und denselben Punkt gehen, ist notwendig und hinreichend, dass die Identität besteht

$$\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \lambda_3 E_3 + \lambda_4 E_4 = 0.$$

§ 89. Gerade Linie; gerade Linie und Ebene.

1. Jede Gerade ist durch zwei unabhängige Gleichungen ersten Grades zwischen x, y und z bestimmt.

Allgemeine Gleichungsformen:

$$(1) \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} y = m x + b \\ z = n x + c. \end{cases}$$

Die Koordinaten der Spuren in der XY-, YZ-, XZebene ergeben sich aus bezw. $z = 0, x = 0, y = 0$.

2. Besondere Fälle.

$$1. \begin{cases} y = m x + b \\ z = c \end{cases} \quad \text{Gerade parallel zur XYebene.}$$

$$\begin{cases} y = b \\ z = n x + c \end{cases} \quad \text{Gerade parallel zur XZebene.}$$

$$\begin{cases} z = p y + q \\ x = a \end{cases} \quad \text{Gerade parallel zur YZebene.}$$

$$2. \begin{cases} y = b \\ z = c \end{cases} \quad \text{Gerade parallel zur Xaxe;}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{Xaxe.}$$

$$\begin{cases} z = c \\ x = a \end{cases} \quad \text{Gerade parallel zur Yaxe;}$$

$$\begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{ Yaxe.}$$

$$\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases} \quad \text{Gerade parallel zur Zaxe;}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ Zaxe.}$$

$$3. \begin{cases} y = mx \\ z = nx \end{cases} \quad \text{Gerade durch den Ursprung.}$$

3. Winkel mit den Axen, α , β , γ . Wenn die Gleichungen der Geraden sind

$y = mx + b$, $z = nx + c$, so ist

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + m^2 + n^2}}, \quad \cos \beta = \frac{m}{\sqrt{1 + m^2 + n^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{n}{\sqrt{1 + m^2 + n^2}}.$$

4. Gerade bestimmt durch einen Punkt (x_1, y_1, z_1) und Richtung (α, β, γ)

$$\frac{x - x_1}{\cos \alpha} = \frac{y - y_1}{\cos \beta} = \frac{z - z_1}{\cos \gamma}.$$

5. Gerade durch zwei Punkte (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2)

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

6. Zwei gerade Linien.

$$\begin{cases} y = mx + b \\ z = nx + c \end{cases} \quad \begin{cases} y = m_1 x + b_1 \\ z = n_1 x + c_1 \end{cases}.$$

1. Die Geraden schneiden sich, wenn

$$(b - b_1)(n - n_1) = (c - c_1)(m - m_1) \quad (\text{s. u. 5}).$$

2. Sie sind parallel, wenn $m_1 = m$, $n_1 = n$.

3. Der Winkel φ der Geraden ergibt sich aus

$$\cos \varphi = \frac{1 + m m_1 + n n_1}{\sqrt{(1 + m^2 + n^2)(1 + m_1^2 + n_1^2)}}.$$

4. Sie sind senkrecht, wenn $\cos \varphi = 0$, also wenn $1 + m m_1 + n n_1 = 0$.

5. Kürzester Abstand zweier Geraden

$$e = \frac{(b - b_1)(n - n_1) - (c - c_1)(m - m_1)}{\sqrt{(m n_1 - m_1 n)^2 + (m - m_1)^2 + (n - n_1)^2}}, \text{ (s. o. 1.)}.$$

6. Abstand e zweier paralleler Geraden

$$\begin{cases} y = m x + b & y = m x + b_1 \\ z = n x + c & z = n x + c_1. \end{cases}$$

$$e = \frac{\sqrt{F^2 + G^2 + H^2}}{1 + m^2 + n^2}, \text{ wobei}$$

$$F = (b - b_1)m + (c - c_1)n$$

$$G = (c - c_1)m n - (b - b_1)(1 + n^2)$$

$$H = (b - b_1)m n - (c - c_1)(1 + m^2).$$

7. Gerade und Ebene.

$$\begin{cases} y = m x + b \\ z = n x + c \end{cases} \text{ und } A x + B y + C z + D = 0.$$

1. Die Gerade liegt in der Ebene, wenn $A + B m + C n = 0$ und $B b + C c + D = 0$.

2. Die Gerade ist parallel der Ebene, wenn $A + B m + C n = 0$.

3. Winkel ω zwischen der Geraden und der Ebene aus

$$\sin \omega = \frac{A + B m + C n}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)(1 + m^2 + n^2)}}.$$

4. Die Gerade ist senkrecht zur Ebene, wenn

$$\frac{B}{A} = m, \quad \frac{C}{A} = n.$$

8. Ebene durch Punkt (x_1, y_1, z_1) senkrecht zur Geraden

$$y = mx + b, \quad z = nx + c$$

$$(x - x_1) + m(y - y_1) + n(z - z_1) = 0.$$

9. Gerade durch Punkt (x_1, y_1, z_1) senkrecht zur Ebene $Ax + By + Cz + D = 0$

$$\begin{cases} y - y_1 = \frac{B}{A}(x - x_1) \\ z - z_1 = \frac{C}{A}(x - x_1) \end{cases}$$

10. Ebene durch zwei sich schneidende gerade Linien (s. Nr. 6₁)

$$\begin{cases} y = mx + b \\ z = nx + c \end{cases} \quad \begin{cases} y = m_1 x + b_1 \\ z = n_1 x + c_1 \end{cases}$$

$$[m(c - c_1) - n(b - b_1)]x - (c - c_1)y + (b - b_1)z = bc_1 - b_1 c$$

$$\text{oder} \quad \frac{y - mx - b}{z - nx - c} = \frac{b - b_1}{c - c_1} \quad \text{oder} \quad = \frac{m - m_1}{n - n_1}.$$

Ebene durch zwei parallele Gerade

$$\frac{y - mx - b}{z - nx - c} = \frac{b - b_1}{c - c_1}.$$

11. Ebene durch eine Gerade $y = mx + b, z = nx + c$ parallel zu einer 2. Geraden $y = m_1 x + b_1, z = n_1 x + c_1$
 $(mn_1 - m_1 n)x + (n - n_1)y - (m - m_1)z = b_1(n - n_1) - c_1(m - m_1).$

12. Ebene durch einen Punkt (x_1, y_1, z_1) parallel zu zwei Geraden

$$(mn_1 - m_1 n)(x - x_1) + (n - n_1)(y - y_1) - (m - m_1)(z - z_1) = 0.$$

§ 90. Krumme Flächen.

1. Cylinderflächen.

1. Die Leitlinie ist einfach gekrümmt, sie liegt in der XY -Ebene, ihre Gleichung ist

$$1. F(x_0, y_0) = 0.$$

Die Gleichungen der erzeugenden Mantellinie sind

$$2. y = mz + y_0, \quad x = pz + x_0,$$

dann ist die Gleichung der Cylinderfläche das Eliminationsresultat von x_0 und y_0 aus 1. und 2., also

$$3. F(x - pz, y - mz) = 0.$$

2. Die Leitlinie sei eine doppelt gekrümmte Kurve, ihre Gleichungen

$$(1) \begin{cases} \varphi(x, z) = 0 \\ \psi(y, z) = 0, \end{cases}$$

die Gleichungen der erzeugenden Mantellinie seien

$$\begin{cases} y = mz + y_0 \\ x = pz + x_0. \end{cases}$$

Ist (x_1, y_1, z_1) der Schnittpunkt der Mantellinie mit der Leitlinie, so ist

$$\begin{cases} \varphi(x_1, z_1) = 0 \\ \psi(y_1, z_1) = 0 \end{cases} \quad \text{u.} \quad \begin{cases} y_1 = mz_1 + y_0 \\ x_1 = pz_1 + x_0. \end{cases}$$

Die Elimination von (x_1, y_1, z_1) aus diesen vier Gleichungen liefert die Gleichung $F(x_0, y_0) = 0$ der XY Spur der Fläche, aus ihr folgt

$$F(x - pz, y - mz)$$

als Gleichung der Zylinderfläche.

2. Kegelflächen.

1. Die Leitlinie liege in der XY Ebene, ihre Gleichung sei $F(x, y) = 0$, (x_0, y_0) ein Punkt derselben, (f, g, h) die Spitze des Kegels, dann folgt aus den Gleichungen einer Mantellinie

$$(1) \frac{y - g}{y_0 - g} = -\frac{z - h}{h}, \quad \frac{x - f}{x_0 - f} = -\frac{z - h}{h}, \quad \text{und aus} \\ (2) F(x_0, y_0) = 0.$$

Durch Elimination von x_0 und y_0 als Gleichung der Kegelfläche

$$F\left(\frac{fz - hx}{z - h}, \frac{gz - hy}{z - h}\right) = 0.$$

2. Ist die Leitlinie doppelt gekrümmt, (x_1, y_1, z_1) ein Punkt derselben und sind $\varphi(x, z) = 0$ und $\psi(y, z) = 0$ ihre Gleichungen, so erhält man aus den Gleichungen der Verbindungslinie der Spitze (f, g, h) mit (x_1, y_1, z_1)

$$\frac{y - g}{y_1 - g} = \frac{z - h}{z_1 - h}, \quad \frac{x - f}{x_1 - f} = \frac{z - h}{z_1 - h}$$

und aus den Gleichungen $\varphi(x_1, y_1) = 0$, $\psi(x_1, y_1) = 0$ Durch Elimination von (x_1, y_1, z_1) die Gleichung der Fläche; sie hat die Form

$$F\left(\frac{fz - hx}{z - h}, \frac{gz - hy}{z - h}\right) = 0.$$

Legt man die Zaxe durch die Spitze, dann geht die Gleichung über in

$$F\left(\frac{hx}{h - z}, \frac{hy}{h - z}\right) = 0,$$

legt man den Ursprung in die Spitze, so erhält man, z für $h - z$ setzend,

$$F\left(\frac{hx}{z}, \frac{hy}{z}\right) = 0.$$

Schiefer Kreiskegel. Spitze im Ursprung, Leitlinie im Abstand h parallel zur XY -Ebene, (a, b, h) Koordinaten des Kreismittelpunktes, r Halbmesser

$$\left(\frac{hx}{z} - a\right)^2 + \left(\frac{hy}{z} - b\right)^2 = r^2.$$

3. Drehflächen (Rotationsflächen).

1. Die Drehaxe liege in der Zaxe, die Gleichung des in der XZ -Ebene liegenden Meridians sei $x = f(z)$, dann ist die Gleichung der Drehfläche

$$\sqrt{x^2 + y^2} = f(z).$$

2. Gerader Kreiskegel, Zaxe Drehaxe, Spitze im Ursprung

$$x^2 + y^2 = p^2 z^2.$$

3. Drehungshyperboloid:

Einschaliges, erzeugt durch Drehung der

Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{c^2} (z^2 + c^2) \text{ oder}$$

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Zweischaliges, erzeugt durch Drehung der

Hyperbel $\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ um die Zaxe

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{c^2} (z^2 - c^2) \text{ oder}$$

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0.$$

Ist $a = c$, so heissen die Hyperboloide gleichseitig. Der zugehörige Asymptotenkegel hat in beiden Fällen die Gleichung

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2 z^2}{c^2}.$$

4. Drehungsparaboloid, erzeugt durch Drehung der Parabel $x^2 = 2p z$

$$x^2 + y^2 = 2p z.$$

4. Schraubenlinie mit Axe in der Zaxe, h Ganghöhe

$$\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \\ z = \frac{ht}{2\pi} = \arct \end{cases}$$

und Schraubenfläche, ein die Zaxe schneidender und zu dieser senkrechter Strahl gleitet der Schraubenlinie entlang,

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{2\pi z}{h}.$$

§ 91. Flächen zweiten Grades.

1. Ellipsoid: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$

Kugel, Koordinaten des Mittelpunktes a, b, c
 $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2.$

Mittelpunkt im Ursprung

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

2. Einschaliges Hyperboloid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

3. Zweischaliges Hyperboloid

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

4. Elliptisches Paraboloid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2z}{c} = 0.$$

5. Hyperbolisches Paraboloid

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{2z}{c} = 0.$$

6. Kegel

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

7. Elliptischer Cylinder

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

8. Hyperbolischer Cylinder

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

9. Parabolischer Cylinder

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{2z}{c} = 0.$$

10. Das System von zwei Ebenen

$$(Ax + By + Cz + D)(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) = 0.$$

11. Jede Gleichung von der Form

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

stellt eine Kugel dar.

12. Jede Gleichung von der Form

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz = 0$$

stellt einen Kegel dar.

Höhere Analysis.

A. Differentialrechnung.

§ 92. Funktion; unendlich kleine Grössen; Differentialquotient.

Funktionen.

1. Eine Zahl von unveränderlichem Wert 3, 5, a, $3a - b \dots$) heisst eine Konstante; eine Zahl, welche alle Werte der Zahlenreihe annehmen kann, heisst eine Veränderliche (in der Regel bezeichnet mit t, x, y, z).

2. Eine Zahl, welche von einer oder mehreren Veränderlichen abhängt, heisst eine Funktion derselben. Der Inhalt eines Kreises, einer Kugel ist eine Funktion des Halbmessers; derjenige eines Rechtecks, eines Quaders ist eine Funktion von Länge und Breite, bezw. Länge, Breite und Höhe. Mit dem Wert der unabhängigen Veränderlichen ändert sich der Wert der Funktion, der abhängigen Veränderlichen.

Bezeichnung der Funktion: $f(x)$, $F(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ und dergleichen,

$y = f(x)$ ist eine Funktion von einer unabhängigen Veränderlichen x ,

$z = f(x, y)$ ist eine Funktion von zwei unabhängigen Veränderlichen, x und y ,

$u = f(x, y, z)$ ist eine Funktion von drei unabhängigen Veränderlichen, x , y und z .

3. $y = f(x)$, $z = f(x, y)$ u. s. f. heissen entwickelte (explizite) Funktionen.

$F(x, y) = 0$, $F(x, y, z) = 0$ u. s. f. heissen unentwickelte (implizite) Funktionen.

4. Kommt jede unabhängige Veränderliche nur als Summand, Subtrahend, Faktor, Divisor oder als Basis einer ganzen oder gebrochenen Potenz vor, so heisst die Funktion algebraisch. Es ist z. B. y eine algebraische Funktion von x , wenn es gleich $a \pm x$, ax , $\frac{a}{x}$, x^a , $\sqrt[a]{x}$, $a + bx + cx^2$, $\sqrt{a^2 - x^2}$ u. s. f. ist. In allen übrigen Fällen heisst die Funktion transcendent; z. B. $y = a^x$, $y = \log x$, $y = \sin x$ u. s. f. sind transcendente Funktionen.

5. Eine Funktion heisst stetig zwischen x_0 und x_1 , wenn für alle Werte zwischen x_0 und x_1 einem unendlich kleinen Wachstum von x auch ein unendlich kleines Wachstum von $f(x)$ entspricht.

Unendlich kleine Grössen und Grenzwerte.

6. Wenn eine veränderliche Grösse sich der Null nähert und dabei einen Wert annimmt, der kleiner ist als jede angebbare Grösse, so nennt man sie unendlich klein.

7. Zwei unendlich kleine Grössen heissen von derselben Ordnung, wenn ihr Quotient gegen einen von null verschiedenen, endlichen Grenzwert konvergiert. Ist a eine endliche, γ eine unendlich kleine Grösse, so ist $a\gamma$ von derselben Ordnung wie γ .

8. Ist δ von der ersten Ordnung, so ist γ von der n ten Ordnung, wenn der Quotient $\frac{\gamma}{\delta^n}$ gegen einen endlichen, von null verschiedenen Wert konvergiert, also wenn

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\gamma}{\delta^n} = q.$$

9. Ist eine endliche Grösse Γ gleich der Summe von unendlich vielen, unendlich kleinen Grössen $\gamma_1, \gamma_2, \dots$, so bleibt Γ unverändert, wenn jede Grösse γ um ein Unendlich kleines ε von höherer Ordnung vermehrt wird. Ist also

$$\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots = \lim \Sigma \gamma, \text{ so ist auch } \Gamma = (\gamma_1 + \varepsilon_1) + (\gamma_2 + \varepsilon_2) + \dots = \lim \Sigma (\gamma + \varepsilon).$$

10. Es ist

$$1. \lim_{\delta \rightarrow 0} (1 + \delta)^{\frac{1}{\delta}} = e, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e;$$

$$2. \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{a^\delta - 1}{\delta} = \frac{\log a}{\log e}.$$

$$3. \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\sin \delta}{\delta} = 1; \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \delta}{\delta} = 1.$$

$$4. \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = e^x.$$

11. Differential und Differentialquotient.

$$\begin{aligned} y &= f(x) \\ y + \Delta y &= f(x + \Delta x) \\ \Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) \\ \lim_{\Delta x} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = y' = \frac{df(x)}{dx} \\ &= f'(x) = Df(x). \end{aligned}$$

dx heisst das Differential von x , $df(x) = f'(x) dx$ das Differential von $f(x)$. $\frac{df(x)}{dx}$ oder $f'(x)$ heisst die erste Ableitung oder der erste Differentialquotient von $f(x)$.

Ist C eine von x unabhängige Konstante, so ist $\frac{dC}{dx} = 0$.

Die Ableitung des ersten Differentialquotienten giebt den zweiten u. s. f.; es ist also

$\frac{df'(x)}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2} = y'' = f''(x) = D^2 f(x)$ die zweite Ableitung von $f(x)$.

§ 93. Allgemeine Formeln über Differentiation.

Es seien u, v, w Funktionen von x , A, B, C Konstanten.

$$1. \frac{df(u)}{dx} = \frac{df(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$2. \begin{aligned} d(Au + Bv + Cw) &= A du + B dv + C dw \\ \frac{d(Au + Bv + Cw)}{dx} &= A \frac{du}{dx} + B \frac{dv}{dx} + C \frac{dw}{dx} \\ &= Au' + Bv' + Cw' \end{aligned}$$

$$3. d(uv) = v du + u dv; \quad d(uvw) = vw du + uw dv + uv dw$$

$$\frac{d(uv)}{dx} = u'v + uv' = uv \left(\frac{1}{u} \cdot u' + \frac{1}{v} v' \right)$$

$$\frac{d(uvw \dots)}{dx} = uvw \dots \left(\frac{1}{u} u' + \frac{1}{v} v' + \frac{1}{w} w' + \dots \right)$$

$$4. d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}$$

$$\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

5. Bezeichnet man die n te Ableitung von u mit $u^{(n)}$ so ist:

$$\frac{d^n(Au + Bv)}{dx^n} = A u^{(n)} + B v^{(n)}$$

$$\begin{aligned} (uv)^{(n)} &= u^{(n)}v + \binom{n}{1} u^{(n-1)}v^{(1)} + \binom{n}{2} u^{(n-2)}v^{(2)} + \dots \\ &\quad + \binom{n}{1} u^{(1)}v^{(n-1)} + u v^{(n)} \end{aligned}$$

6. Ist $u = f(z)$, $z = \varphi(y)$, $y = \psi(x)$, dann ist

$$\frac{du}{dx} = \frac{dfz}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

7. Sind x und y Funktionen von t , so ist:

$$1. \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} = y' : x'$$

$$2. \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} \right) : \left(\frac{dx}{dt} \right)^3 = \frac{x'y'' - y'x''}{(x')^3}$$

8. Betrachtet man bei einer Funktion mehrerer unabhängiger Veränderlicher $u = f(x, y, z)$ irgend eine derselben, z. B. x , als veränderlich, die übrigen als konstant, so heisst die Ableitung der Funktion nach dieser Veränderlichen die partielle Ableitung nach x , sie wird mit $\frac{\delta u}{\delta x}$ bezeichnet.

Das totale Differential von u ist gleich der Summe der partiellen Differentiale nach sämtlichen Veränderlichen:

$$du = \frac{\delta u}{\delta x} dx + \frac{\delta u}{\delta y} dy + \frac{\delta u}{\delta z} dz$$

9. Sind x, y, z Funktionen von t , dann ist

$$\frac{df(x, y, z)}{dt} = \frac{\delta f}{\delta x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\delta f}{\delta y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\delta f}{\delta z} \cdot \frac{dz}{dt}$$

10. Es ist

$$\frac{\delta}{\delta x} \frac{\delta u}{\delta x} = \frac{\delta^2 u}{\delta x^2}; \quad \frac{\delta}{\delta y} \frac{\delta u}{\delta x} = \frac{\delta^2 u}{\delta x \delta y}; \quad \frac{\delta}{\delta x} \frac{\delta u}{\delta y} = \frac{\delta^2 u}{\delta y \delta x};$$

$$\frac{\delta^2 u}{\delta x \delta y} = \frac{\delta^2 u}{\delta y \delta x}$$

$$11. d^2 u = \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} dx^2 + \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} dy^2 + \frac{\delta^2 u}{\delta z^2} dz^2$$

$$+ 2 \frac{\delta^2 u}{\delta x \delta y} dx dy + 2 \frac{\delta^2 u}{\delta x \delta z} dx dz + 2 \frac{\delta^2 u}{\delta y \delta z} dy dz$$

symbolisch:

$$d^2 u = \left(\frac{\delta u}{\delta x} dx + \frac{\delta u}{\delta y} dy + \frac{\delta u}{\delta z} dz \right)^{(2)},$$

wofern im Zähler jedes Gliedes δu durch $\delta^2 u$ ersetzt wird. — Der Satz gilt ebenso auch für das Differential nter Ordnung.

12. Unentwickelte (implizite) Funktionen.

Ist $f(x, y) = 0$, so ist

$$1) \frac{\delta f}{\delta x} + \frac{\delta f}{\delta y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0, \text{ daher}$$

$$2) \frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\delta f}{\delta x}}{\frac{\delta f}{\delta y}}$$

Durch Differenzieren von 1) erhält man eine Gleichung, aus der sich $\frac{d^2 y}{dx^2}$ bestimmt:

$$3) \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} + 2 \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\delta^2 f}{\delta y^2} \cdot \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \frac{\delta f}{\delta y} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$

13. Ist $f(x, y, z) = 0$, so kann z als Funktion von x und y betrachtet werden, dann ist

$$1) \frac{\delta f}{\delta x} + \frac{\delta f}{\delta z} \cdot \frac{\delta z}{\delta x} = 0, \text{ hieraus folgt } \frac{\delta z}{\delta x};$$

$$2) \frac{\delta f}{\delta y} + \frac{\delta f}{\delta z} \cdot \frac{\delta z}{\delta y} = 0, \quad " \quad " \quad \frac{\delta z}{\delta y}.$$

Differenziert man Gleichung 1) nach x , dann auch nach y , ferner Gleichung 2) nach y , so ergeben sich Gleichungen, aus welchen man $\frac{\delta^2 z}{\delta x^2}$, $\frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y}$, $\frac{\delta^2 z}{\delta y^2}$ erhält.

14. Vertauschung der unabhängigen Veränderlichen.

$$\frac{dy}{dx} = 1 : \frac{dx}{dy}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{d^2x}{dy^2} : \left(\frac{dx}{dy}\right)^3$$

§ 94. Spezielle Formeln.

1. Das Differential und der Differentialquotient einer Konstanten ist null.

$$2. \frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$$

$$3. \frac{d^r(x^n)}{dx^r} = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)x^{n-r}, r \leq n$$

$$4. \frac{da^x}{dx} = a^x la; \quad \frac{da^{mx}}{dx} = a^{mx} m la; \quad \frac{de^x}{dx} = e^x$$

$$5. \frac{d^r(a^x)}{dx^r} = a^x (la)^r$$

$$6. \frac{d \log_a x}{dx} = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{la} = \frac{M}{x} \quad (\text{s. § 297.})$$

$$\frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$7. \frac{d^r(\log x)}{dx^r} = (-1)^{r-1} (r-1)! \frac{\log e}{x^r}$$

$$8. \frac{d \sin x}{dx} = \cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$9. \frac{d^r \sin x}{dx^r} = \sin \left(x + \frac{r\pi}{2} \right)$$

$$10. \frac{d \cos x}{dx} = -\sin x = \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$11. \frac{d^r \cos x}{dx^r} = \cos \left(x + \frac{r\pi}{2} \right)$$

$$12. \frac{d \operatorname{tg} x}{d x} = \frac{1}{\cos^2 x} (= \sec^2 x)$$

(Für höhere Ableitungen kein einfaches Bildungsgesetz.)

$$13. \frac{d \operatorname{ctg} x}{d x} = - \frac{1}{\sin^2 x} (= - \operatorname{cosec}^2 x).$$

$$14. \frac{d \operatorname{arc} \sin x}{d x} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$15. \frac{d \operatorname{arc} \cos x}{d x} = - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$16. \frac{d \operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{d x} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$17. \frac{d \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x}{d x} = - \frac{1}{1+x^2}$$

$$18. \frac{d \operatorname{arc} \sec x}{d x} = \frac{1}{x \sqrt{x^2-1}}$$

$$19. \frac{d \operatorname{arc} \operatorname{cosec} x}{d x} = - \frac{1}{x \sqrt{x^2-1}}$$

§ 95. Die Taylor'sche und die Mac Laurin'sche Reihe.

1. Taylor'sche Reihe:

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) \\ + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x + \mu h),$$

wofern μ positiv und < 1 , $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ endliche und bestimmte Werte haben und wofern $f^{(n+1)}(x)$ endlich und stetig für alle Werte zwischen x und $x+h$.

Andere Formen des Restgliedes:

$$\frac{h^{n+1}(1-\Theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(x + \Theta h), \quad \Theta \text{ echter Bruch;}$$

$$\frac{h^n}{n!} [f^{(n)}(x + \Theta h) - f^{(n)}(x)]$$

Für $x=a$ und $h=a-x$ ergibt sich:

$$2. f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) \\ + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \mu(x-a)).$$

Hiebei muss $f^{(n+1)}(x')$ für alle Werte von x' zwischen a und x endlich und stetig bleiben.

Für $a=0$ ergibt sich:

3. Mac Laurin'sche Reihe:

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) \\ + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\mu x),$$

wofern $f(x)$ und seine Ableitungen für $x=0$ endlich und stetig bleiben.

Andere Form des Restgliedes:

$$\frac{x^{n+1}(1-\Theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(\Theta x).$$

Wird $f(x)$ oder eine seiner Ableitungen für $x=0$ unendlich oder unstetig, so kann $f(x)$ nicht mehr vermittelst der Mac Laurin'schen Reihe entwickelt werden. In diesem Fall ist 2. anzuwenden.

4. Taylor's Reihe für zwei Veränderliche.

$$x+ht=p, y+kt=q, f(p,q)=U, f(x,y)=u,$$

$$f(x+h, y+k) = u + \frac{\partial u}{\partial x} h + \frac{\partial u}{\partial y} k + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial u}{\partial x} h + \frac{\partial u}{\partial y} k \right)^{(2)} \\ + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial u}{\partial x} h + \frac{\partial u}{\partial y} k \right)^{(3)} + \dots + \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial u}{\partial x} h + \frac{\partial u}{\partial y} k \right)^{(n)} + R. \\ (s. § 93_{11}.)$$

$$R = \frac{1}{n!} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial p} h + \frac{\partial U}{\partial q} k \right)^{(n)} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} h + \frac{\partial u}{\partial y} k \right)^{(n)} \right], \\ (p=x+\Theta h, q=y+\Theta k).$$

§ 96. Werte unbestimmter Ausdrücke.

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty, \infty - \infty.$$

1. Nimmt $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ für $x = a$ den Wert $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ an,

so ist
$$\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)};$$

wird auch $\frac{f'(a)}{\varphi'(a)} = \frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$, so wird das Verfahren wiederholt und es ist, wenn $f^{(n+1)}(a)$ und $\varphi^{(n+1)}(a)$ diejenigen Ableitungen sind, welche zuerst nicht gleichzeitig zu 0 oder zu ∞ werden:

$$\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f^{(n+1)}(a)}{\varphi^{(n+1)}(a)}$$

2. Ist $f(x) \cdot \varphi(x) = 0 \cdot \infty$ für $x = a$, so ist:

$$f(x) \cdot \varphi(x) = f(x) : \frac{1}{\varphi(x)}.$$

Dieser letztere Ausdruck nimmt für $x = a$, die Form $\frac{0}{0}$ an, sein Wert ergibt sich nach 1.

3. Nimmt der Ausdruck $(f(x))^{\varphi(x)}$ für $x = a$ eine der Formen 0^0 , ∞^0 , 1^∞ an, so setzt man $(f(x))^{\varphi(x)} = e^{\varphi(x) \cdot \ln f(x)}$ und untersucht nach 1. oder 2. den Ausdruck $\varphi(x) \cdot \ln f(x)$.

4. Führen die angegebenen Mittel stets wieder zu demselben unbestimmten Ausdruck, so muss man zu besonderen Hilfsmitteln greifen. Man kann dann für x zunächst $a + h$ setzen, den Ausdruck umformen und wenn möglich, vereinfachen, worauf sich für $h = 0$ der gesuchte Wert ergeben kann.

5. Wenn $f(x) - \varphi(x)$ für $x = a$ die unbestimmte

Form $\infty - \infty$ annimmt, so suche man den Ausdruck in ein Produkt oder in einen Bruch zu verwandeln, was z. B. folgendermassen geschehen kann:

$$f(x) - \varphi(x) = \frac{\frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{\varphi(x)}}$$

Der Wert hiefür wird nach dem Vorausgegangenen ermittelt.

§ 97. Grösste und kleinste Werte von Funktionen.

1. Die Funktion $y = f(x)$ erreicht für $x = a$ ein Maximum, wenn $f(a \pm h) - f(a) < 0$,
 „ Minimum, „ $f(a \pm h) - f(a) > 0$,
 wobei h sich der Null unbegrenzt nähert.
2. Bei zunehmendem x ist
 $f(x)$ wachsend, wenn $f'(x) > 0$,
 $f(x)$ abnehmend, „ $f'(x) < 0$.
3. $y = f(x)$ erreicht für $x = a$
 ein Maximum, wenn $f'(a) = 0$ und $f''(a) < 0$,
 „ Minimum, „ $f'(a) = 0$ und $f''(a) > 0$;
 allgemein: die Funktion $y = f(x)$ erreicht für $x = a$ ein Maximum, wenn die niederste für $x = a$ nicht verschwindende Ableitung von $f(x)$ von gerader Ordnung und negativ, ein Minimum, wenn dieselbe positiv ist.
 Ist die niederste für $x = a$ nicht verschwindende Ableitung von ungerader Ordnung (z. B. von erster), so ist $f(a)$ weder ein Maximum noch ein Minimum.
 Um die Stelle und den Wert des Maximums oder Minimums zu finden, wird y' gebildet, gleich null gesetzt und nach x aufgelöst. Nun wird y'' gebildet, es werden die gefundenen Werte von x eingesetzt und aus dem negativen oder positiven Ergebnis bestimmt, ob

ein Maximum oder Minimum vorliegt. Durch Einsetzen der gefundenen Werte von x in $y = f(x)$ ergibt sich der Wert des Maximums oder Minimums selbst.

4. Funktion zweier unabhängigen Veränderlichen, $z = f(x, y)$.

Man bestimme x und y aus

$$1. \quad \frac{\delta f}{\delta x} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\delta f}{\delta y} = 0.$$

Die erhaltenen Werte müssen der Gleichung genügen:

$$2. \quad \left(\frac{\delta f}{\delta x \delta y} \right)^2 - \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} \cdot \frac{\delta^2 f}{\delta y^2} < 0.$$

Es findet dann Maximum oder Minimum statt, je nachdem

$$3. \quad \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} \quad \text{und} \quad \frac{\delta^2 f}{\delta y^2}$$

für jene Werte von x und y beide gleichzeitig < 0 oder > 0 sind.

B. Integralrechnung.

§ 98. Bezeichnung und Erklärung.

$F(x)$ heisst das Integral von $f(x) dx$, geschrieben $\int f(x) dx$, wenn

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x);$$

es ist also dann $\int f(x) dx = F(x) + C$,

wobei C eine unbestimmte Konstante bedeutet; ferner ist

$$\frac{d \int f(x) dx}{dx} = f(x).$$

§ 99. Integration einfacher Funktionen; Grundformeln.

Bei sämtlichen nachstehenden Formeln ist rechts die unbestimmte Konstante zu ergänzen.

$$1. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \text{ für } n > -1$$

$$\int (a + bx)^n = \frac{(a + bx)^{n+1}}{(n+1) \cdot b}.$$

$$2. \int \frac{dx}{x} = l x.$$

$$3. \int a^x dx = \frac{a^x}{l a}; \int e^x dx = e^x.$$

$$4. \int \cos x dx = \sin x.$$

$$5. \int \sin x dx = -\cos x.$$

$$6. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x.$$

$$7. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x.$$

$$8. \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{\cos x} (= \sec x).$$

$$9. \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = -\frac{1}{\sin x} (= -\operatorname{cosec} x).$$

$$10. \int \sin x \cos x dx = \frac{\sin^2 x}{2}.$$

$$11. \int \operatorname{tg} x dx = -l \cos x.$$

$$12. \int \operatorname{ctg} x dx = l \sin x.$$

$$13. \int \frac{dx}{\sin x \cos x} = l \operatorname{tg} x; \int \frac{dx}{\sin x} = l \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

$$14. \int \frac{dx}{\cos x} = l \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right).$$

$$15. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x = -\arccos x + \frac{\pi}{2}.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-b^2x^2}} = \frac{1}{b} \arcsin \frac{bx}{a}.$$

$$16. \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x = -\operatorname{arccot} x + \frac{\pi}{2}.$$

$$\int \frac{dx}{a^2+b^2x^2} = \frac{1}{ab} \arctan \frac{bx}{a}.$$

$$17. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcsec} x$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{b^2x^2-a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \frac{bx}{a}.$$

$$18. \int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = -\arcsin(1-x).$$

§ 100. Allgemeine Formeln; Integrationsweisen entwickelter Funktionen.

Es seien $u, v, w, \dots$ Funktionen von x ; $A, B, \dots$ konstante Faktoren.

1. Integration einer Summe.

$$\int (Au + Bv + Cw + \dots) dx = A \int u dx + B \int v dx + C \int w dx + \dots$$

2. Teilweise Integration.

$$uv = \int u dv + \int v du \text{ und}$$

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Beispiel:

$$\int x^2 \cos x dx = \int x^2 d \sin x = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x dx$$

$$\int x \sin x dx = - \int x d \cos x = -x \cos x + \int \cos x dx$$

$$= -x \cos x + \sin x + C, \text{ also}$$

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C.$$

3. Integration durch Substitution. Es sei $x = \varphi(z)$, dann ist $dx = \varphi'(z) dz$,

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(z)] \varphi'(z) dz.$$

Beispiel: $\int \frac{dx}{x^m (a + bx)^n}$. Man setzt $\frac{a}{x} + b = z$, dann ergibt sich

$$= \frac{1}{a^{m+n-1}} \int \frac{(z-b)^{m+n-2}}{z^n} dz;$$

nun entwickelt man nach dem binomischen Lehrsatz und integriert die einzelnen Summanden.

Die häufigsten Substitutionen sind:

$$z = a + bx; \quad z = a + bx^2; \quad z = \frac{a}{x} + b.$$

$$z = \frac{a + bx}{a - bx}, \quad \text{oder} \quad x = \frac{a}{b} \cdot \frac{z-1}{z+1};$$

$$\sqrt[m]{a + bx} = z, \quad \text{oder} \quad x = \frac{z^m - a}{b} \quad x dx = \frac{m}{b} \cdot z^{m-1} dz;$$

$$\sin x = z \quad \text{und} \quad dx = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

4. Integration durch Zerlegung in Teilbrüche.

Jede unecht gebrochene, rationale Funktion $\frac{\psi(x)}{F(x)}$ lässt sich in eine ganze Funktion $\varphi(x)$ und eine echt gebrochene, rationale Funktion $\frac{f(x)}{F(x)}$ umformen. Diese letztere lässt sich in eine Summe von Teilbrüchen zerlegen.

1. Die Wurzeln der Gleichung $F(x) = 0$ seien sämtlich reell und untereinander verschieden, es sei

$$F(x) = (x-a)(x-b)(x-c) \dots = 0,$$

dann ist

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \dots$$

hiebei ist

$$A = \frac{f(a)}{F'(a)}, \quad B = \frac{f(b)}{F'(b)}, \dots$$

2. $F(x) = 0$ hat auch komplexe Wurzeln, z. B. $p + qi$ und $p - qi$, dann ist

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_1}{x - p - qi} + \frac{A_2}{x - p + qi} + \frac{\varphi(x)}{\Phi(x)},$$

hiebei ist

$$A_1 = \frac{f(p + qi)}{F'(p + qi)}, \quad A_2 = \frac{f(p - qi)}{F'(p - qi)}.$$

Fasst man nach der Bestimmung von A_1 und A_2 die beiden ersten Brüche zusammen, so geben sie einen reellen Bruch mit dem Nenner $(x - p)^2 + q^2$.

3. Mehrfache Wurzeln. Es sei

$F(x) = 0 = (x - a)^\alpha (x - b)^\beta (x - c)^\gamma \dots$, dann ist

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{F(x)} &= \frac{A}{(x - a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x - a)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_{\alpha-1}}{x - a} \\ &+ \frac{B}{(x - b)^\beta} + \frac{B_1}{(x - b)^{\beta-1}} + \dots + \frac{B_{\beta-1}}{x - b} \\ &+ \dots \end{aligned}$$

Setzt man $F(x) = (x - a)^\alpha \cdot \varphi(x)$, so ist

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{(x - a)^\alpha} + \frac{f_1(x)}{(x - a)^{\alpha-1} \varphi(x)}, \text{ woraus}$$

$$A = \frac{f(a)}{\varphi(a)};$$

durch Anwendung desselben Verfahrens auf den Bruch

$$\frac{f_1(x)}{(x - a)^{\alpha-1} \varphi(x)} \text{ erhält man } A_1 \text{ u. s. f.}$$

Das Integral der ursprünglichen, gebrochenen Funktion ergibt sich nun durch die Integration der einzelnen Teile.

5. Integration durch unendliche Reihen.

1. Wenn $f(x) = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$ eine Reihe ist, deren Glieder stetige Funktionen einer Veränderlichen x sind, wenn ferner diese Reihe für a und b und alle Werte zwischen a und b konvergent ist und wenn $f(x)$ die Grenze ist, gegen die sie konvergiert, so ist (s. § 101,1)

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b u_1 dx + \int_a^b u_2 dx + \int_a^b u_3 dx + \dots$$

2. Liefert die Mac Laurinsche Reihe für $f(x)$ eine konvergente Reihe

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots,$$

so ist

$$\int f(x) dx = C + x f(0) + \frac{x^2}{2!} f'(0) + \frac{x^3}{3!} f''(0) + \dots$$

Die Integration durch unendliche Reihen besteht also darin, dass man den betreffenden Ausdruck (z. B. durch den binomischen Lehrsatz, die logarithmische Reihe u. a.) in eine unendliche Reihe verwandelt und, nach Untersuchung der Konvergenzverhältnisse, die einzelnen Glieder derselben integriert.

§ 101. Bestimmte Integrale.

1. Ist $f(x) dx$ das Differential von $\varphi(x)$, so ist $\varphi(x) + C$ das unbestimmte Integral von $f(x) dx$; dagegen heisst

$$\int_a^b f(x) dx = \varphi(b) - \varphi(a)$$

das bestimmte Integral genommen zwischen den Grenzen a und b , d. h. für $x=a$ und $x=b$. Das bestimmte Integral $\int_a^b f(x) dx$ ist die Grenze der Summe der

unendlich kleinen Werte des Differentials $f(x) dx$, wenn x durch unendlich kleine Aenderungen h von a in b übergeht; daher auch

$$\int_a^b f(x) dx = \lim \{ f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \dots \} \cdot h.$$

$$2. \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

$$3. \int_a^b [f(x) dx \pm \varphi(x) dx] = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b \varphi(x) dx.$$

$$4. \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx,$$

c und d Werte zwischen a und b .

5. Angenäherte Berechnung eines bestimmten Integrals $\int_a^b f(x) dx$. — Es sei für jeden Wert von x zwischen a und b für eine Funktion $\varphi(x)$

$$\varphi(x) < f(x), \text{ desgleichen für eine zweite } \psi(x)$$

$$\psi(x) > f(x), \text{ dann ist}$$

$$\int_a^b \varphi(x) dx < \int_a^b f(x) dx < \int_a^b \psi(x) dx.$$

Simpsonsche Regel. Um einen Näherungswert von $\int_{x_0}^{x_{2n}} f(x) dx$ zu finden, teile man die Strecke zwischen x_0 und x_{2n} in $2n$ gleiche Teile von der Länge h , und bestimme die zu den Teilpunkten gehörigen Ordinaten $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{2n}$, dann ist annähernd

$$\int_{x_0}^{x_{2n}} f(x) dx = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + y_{2n})$$

(s. auch § 102₁₀).

6. Summierung von Reihen durch bestimmte Integrale.

Wird $f(x, m) dx$ zwischen zwei Grenzen a und b , die von m unabhängig sind integriert, so ist das Ergebnis im allgemeinen wieder eine Funktion von m , so dass also

$$\int_a^b f(x, m) dx = \varphi(m), \text{ daher}$$

$$\int_a^b [f(x, 0) + f(x, 1) + f(x, 2) + \dots + f(x, n-1)] dx \\ = \varphi(0) + \varphi(1) + \varphi(2) + \dots + \varphi(n-1).$$

Lässt sich die unter dem Integralzeichen stehende Reihe leicht summieren, so erhält man die Summe der rechts stehenden Reihe in Form eines bestimmten Integrals.*)

7. Besondere bestimmte Integrale

$$1. \int_0^\infty \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{ab}}$$

$$2. \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \pi$$

$$3. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}; \quad \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = 1$$

$$4. \int_0^1 \frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots 2n} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx = \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots 2n} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x dx; \quad 2n > 0$$

$$5. \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{2.4.6 \dots 2n}{1.3.5 \dots (2n+1)}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx = \frac{2.4.6 \dots 2n}{1.3 \dots (2n+1)}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x dx; \quad 2n+1 > 1$$

$$6. \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x} dx = \frac{\pi}{2}; \quad a > 0$$

*) Siehe Schloemilch, Uebgsbch. z. St. d. höh. An. 2. Teil, S. 168.

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{x} dx = \infty$$

$$7. \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1; \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

$$8. \int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}} \quad (a > 0, n \text{ ganze Zahl.})$$

C. Anwendung der Infinitesimalrechnung auf Geometrie.

§ 102. Ebene Kurven.

1. Ist $y = f(x)$ die Gleichung einer Kurve, τ der Winkel der Tangente mit der Xaxe, dann ist (ds s. § 102⁴):

$$\sin \tau = \frac{dy}{ds}, \quad \cos \tau = \frac{dx}{ds}, \quad \operatorname{tg} \tau = \frac{dy}{dx} = y'.$$

Wenn $y' = 0$, dann ist die Tangente parallel der Xaxe, ist $y' = \infty$, so ist sie parallel der Yaxe.

2. Verlauf. Die Kurve steigt (d. h. y wächst) bei zunehmendem x , wenn $y' > 0$, sie fällt, wenn $y' < 0$.

Die Kurve ist in irgend einem Punkt erhaben (konvex) gegen die Xaxe, wenn y und y'' für diesen Punkt gleiche Zeichen haben; im andern Fall ist sie hohl (konkav) gegen die Xaxe (s. § 97₃).

3. Besondere Punkte. Die Kurve hat in einem bestimmten Punkt einen Wendepunkt, wenn für denselben y' ein Maximum oder Minimum erreicht, also wenn $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$, während $\frac{d^3 y}{dx^3} < 0$.

Ein Punkt ist ein vielfacher Punkt, wenn sich mehrere Kurvenzweige in ihm schneiden, es müssen sich also mehrere Werte von y' ergeben $\left(\frac{\delta F}{\delta x} = 0, \frac{\delta F}{\delta y} = 0 \right)$.

Werden dieselben imaginär, so ist der Punkt ein isolierter Punkt; giebt es für y' zusammenfallende Werte, so ist der Punkt ein Rückkehrpunkt. In zweifelhaften Fällen ist eine Untersuchung der Kurve in der Nähe des Punktes nötig.

4. Längen.

Bogenelement $ds = \pm \sqrt{dx^2 + dy^2} = \pm \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx$.

ds muss bei der Bestimmung von $\sin \tau$ und $\cos \tau$ (s. 1.) mit dem Zeichen genommen werden, das dem für $\operatorname{tg} \tau$ entspricht.

Die Tangente und Normale in Punkt P schneiden die Xaxe in T , bezw. in U , dann ist:

$$\text{Tangente } PT = \frac{y}{y'} \cdot \sqrt{1 + y'^2}$$

$$\text{Subtangente} = \frac{y}{y'}$$

$$\text{Normale } PU = y \sqrt{1 + y'^2}$$

$$\text{Subnormale} = yy'.$$

5. Gleichung der

Tangente im Punkt (x, y) , (ξ, η) die laufenden Koordinaten der Tangente,

$$\eta - y = y'(\xi - x), \text{ oder } \frac{\delta F}{\delta x}(\xi - x) + \frac{\delta F}{\delta y}(\eta - y) = 0.$$

Normale

$$\eta - y = -\frac{1}{y'}(\xi - x), \text{ oder } \frac{\delta F}{\delta y}(\xi - x) - \frac{\delta F}{\delta x}(\eta - y) = 0.$$

Asymptote

$$y = mx + b, \text{ wobei}$$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{dy}{dx} = \lim_{x \rightarrow \infty} y'$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - xy')$$

6. Berührung von Kurven. Zwei Kurven $y = f(x)$ und $y = \varphi(x)$ haben in einem bestimmten, gemeinschaftlichen Punkte eine Berührung n ter Ordnung,

wenn sie in diesem Punkte $n+1$ zusammenfallende (unendlich nahe) Punkte gemeinschaftlich haben, dies ist der Fall, wenn für denselben alle Ableitungen von $f(x)$ und $\varphi(x)$ bis zur n ten einschl. einander gleich sind. Eine Gerade bildet mit einer Kurve $y=f(x)$ eine Berührung n ter Ordnung, wenn für den gemeinschaftlichen Punkt alle Ableitungen von $f''(x)$ bis zur n ten verschwinden und $f'(x) = \varphi'(x)$ (Wendepunkt, wenn n gerade, Flachpunkt, wenn n ungerade ist). Das Berühren ist mit oder ohne Schneiden im Berührungspunkt verbunden, je nachdem die Berührung von gerader oder ungerader Ordnung ist.

7. Krümmungskreis. Er ist derjenige Kreis, der mit einer Kurve drei unendlich nahe Punkte gemeinschaftlich, also eine Berührung zweiter Ordnung im Punkt (x, y) hat, der Mittelpunkt desselben, der Krümmungsmittelpunkt ist der Schnittpunkt zweier unendlich naher (zusammenfallender) Normalen. Der Krümmungshalbmesser ρ und die Koordinaten (ξ, η) des Krümmungsmittelpunktes sind bestimmt durch die drei Gleichungen

$$1. (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = \rho^2$$

$$2. (x - \xi) + (y - \eta) \cdot y' = 0$$

$$3. 1 + y'^2 + (y - \eta)y'' = 0, \text{ hieraus ergibt sich}$$

$$\text{Krümmungshalbmesser } \rho = \pm (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} : y''$$

$$(\pm \text{ je nachdem } y'' \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0)$$

$$\begin{cases} \xi = x - (1 + y'^2) : y' : y'' \\ \eta = y + (1 + y'^2) : y'' \end{cases}$$

Ist die Kurve gegeben durch die Gleichungen $x = \varphi(t)$ und $y = \psi(t)$, so ist

$$\begin{cases} \rho = (x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}} : (x' y'' - x'' y') \\ \xi = x - y' (x'^2 + y'^2) : (x' y'' - x'' y') \\ \eta = y + x' (x'^2 + y'^2) : (x' y'' - x'' y'). \end{cases}$$

8. Die *Evolute* einer Kurve ist der geometrische Ort des Krümmungsmittelpunktes. Ihre Gleichung wird erhalten, indem man aus den Gleichungen für ξ und η in Nr. 7 unter Benützung der Kurvengleichung x und y eliminiert. Die gegebene Kurve heisst *Evolvente*. Jeder Krümmungshalbmesser ist Normale zur Evolvente, Tangente an die Evolute. Differenz zweier Krümmungshalbmesser gleich dem dazwischen liegenden Bogen der Evolute. Wird ein um die Evolute gelegter, biegsamer und unausdehnbarer Faden in straffer Spannung abgelöst, so beschreibt der Anfangspunkt des Fadens die Evolvente.

9. *Hüllkurven*. Die Gleichung $F(x, y, p) = 0$, worin p ein veränderlicher Parameter ist, stellt eine Kurvenschar dar, welche eine Kurve umhüllt; die Gleichung der umhüllten Kurve ergibt sich durch Elimination von p aus den Gleichungen

$$1. F(x, y, p) = 0 \text{ und}$$

$$2. \frac{\delta F}{\delta p} = 0.$$

10. *Flächeninhalt* (Quadratur). Der Inhalt der Fläche, welche zwischen der Kurve, der Xaxe und den zu den Abscissen x_0 und x_1 gehörigen Ordinaten eingeschlossen ist, ergibt sich aus

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx.$$

Simpsonsche Regel. Ist $f(x)$ höchstens vom 3. Grade, y_m die Ordinate in der Mitte zwischen x_0 und x_1 dann ist

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \frac{1}{6} (x_1 - x_0) (y_0 + 4y_m + y_1).$$

(s. auch § 101_b).

Kurvenlänge (Rektifikation). Die Länge s eines

Kurventeils, welcher zwischen den Abscissen x_0 und x_1 liegt, ist

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

11. Polarkoordinaten. Gleichung der Kurve:

$$F(r, \varphi) = 0 \text{ oder } r = f(\varphi).$$

Winkel ψ der Tangente (Richtung im Sinn des wachsenden φ) mit dem Strahl r :

$$\sin \psi = \frac{r d\varphi}{ds} = \frac{r}{s'}, \quad \cos \psi = \frac{dr}{ds} = \frac{r'}{s'}, \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{r d\varphi}{dr} = \frac{r}{r'}.$$

Bogenelement:

$$ds = \pm \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2} = \pm \sqrt{r'^2 + r^2} d\varphi.$$

(ds ist bei der Bestimmung von $\sin \psi$ und $\cos \psi$ mit dem $\operatorname{tg} \psi$ entsprechenden Vorzeichen zu nehmen.)

Krümmungshalbmesser:

$$\rho = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 - r r'' + 2r'^2}.$$

Fläche zwischen der Kurve und den zu φ_0 und φ_1 gehörigen Strahlen

$$\frac{1}{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} r^2 d\varphi.$$

Kurvenlänge:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r'^2 + r^2} d\varphi = \int_{r_0}^{r_1} \sqrt{1 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)^2} dr.$$

§ 103. Raumkurven (doppelt gekrümmte Kurven).

1. Eine Raumkurve ist gegeben durch die Gleichungen

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t) \end{cases} \quad \text{oder} \quad \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ F(x, y, z) = 0. \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(Schnittlinie der} \\ \text{Flächen.)} \end{array}$$

$$\text{oder} \quad \begin{cases} y = \varphi_1(x) \\ z = \varphi_2(x). \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(Projektionen} \\ \text{der Kurve.)} \end{array}$$

2. Bogenelement

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} \cdot dx.$$

3. Gleichungen der Tangente im Punkt (x, y, z)

$$\frac{\xi - x}{dx} = \frac{\eta - y}{dy} = \frac{\zeta - z}{dz}, \text{ oder}$$

$$\frac{\xi - \varphi(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\eta - \psi(t)}{\psi'(t)} = \frac{\zeta - x(t)}{x'(t)}, \text{ oder}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(\eta - y) + \frac{\partial f}{\partial z}(\zeta - z) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(\eta - y) + \frac{\partial F}{\partial z}(\zeta - z) = 0. \end{cases}$$

Winkel α, β, γ der Tangente mit den Axen bestimmt durch

$$\cos \alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos \beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos \gamma = \frac{dz}{ds}.$$

4. Gleichung der Normalebene im Punkt (x, y, z)

$$(\xi - x)dx + (\eta - y)dy + (\zeta - z)dz = 0, \text{ oder}$$

$$[\xi - \varphi(t)]\varphi'(t) + [\eta - \psi(t)]\psi'(t) + [\zeta - x(t)]x'(t) = 0.$$

5. Gleichung der Schmiegungebene (= Krümmungsebene = Oskulationsebene = Ebene durch Punkt (x, y, z) und zwei unendlich nahe Punkte)

$$A(\xi - x) + B(\eta - y) + C(\zeta - z) = 0, \text{ wobei}$$

$$A = dy d^2z - d^2y dz, \quad B = dz d^2x - d^2z dx, \quad C = dx d^2y - d^2x dy.$$

Normale zur Schmiegungebene:

$$\frac{\xi - x}{A} = \frac{\eta - y}{B} = \frac{\zeta - z}{C}.$$

Die Winkel λ, μ, ν dieser Normalen mit den Axen sind bestimmt durch

$$\cos \lambda = \frac{A}{D}, \quad \cos \mu = \frac{B}{D}, \quad \cos \nu = \frac{C}{D}, \text{ wobei}$$

$$D = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Die Hauptnormale ist die Schnittlinie der Normalebene mit der Schmiegungeebene; die Gleichungen der Hauptnormalen sind:

$$\frac{\xi - x}{\frac{d}{ds} \frac{dx}{ds}} = \frac{\eta - y}{\frac{d}{ds} \frac{dy}{ds}} = \frac{\zeta - z}{\frac{d}{ds} \frac{dz}{ds}}.$$

6. Kontingenzwinkel $d\tau$, d. h. Winkel zwischen zwei unendlich nahen Tangenten

$$d\tau = \frac{D}{ds^2}.$$

Erster Krümmungshalbmesser

$$\varrho_1 = \frac{ds}{d\tau} = \frac{ds^3}{D}.$$

Der Krümmungsmittelpunkt liegt in der Schmiegungeebene, auf der Hauptnormalen und kann als Schnitt der Hauptnormalen mit einer unendlich nahen Normalebene betrachtet werden.

Die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes sind

$$\xi = x + \varrho_1^2 \frac{d}{ds} \frac{dx}{ds}, \quad \eta = y + \varrho_1^2 \frac{d}{ds} \frac{dy}{ds}, \quad \zeta = z + \varrho_1^2 \frac{d}{ds} \frac{dz}{ds}.$$

Unter der (ersten) Krümmung versteht man

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{\varrho_1}.$$

7. Torsionswinkel $d\vartheta$, d. h. Winkel zweier unendlich naher Schmiegungeebenen

$$d\vartheta = \sqrt{(d\cos\lambda)^2 + (d\cos\mu)^2 + (d\cos\nu)^2}.$$

Zweite Krümmung oder Drehung der Kurve

$$\frac{d\vartheta}{ds} = \frac{1}{\varrho_2}.$$

Zweiter Krümmungshalbmesser (Halbm. der Drehung)

$$\varrho_2 = \frac{ds}{d\vartheta}.$$

§ 104. Krumme Flächen.

1. Eine Fläche ist gegeben durch die Gleichung
 $F(x, y, z) = 0$, oder entwickelt
 $z = f(x, y).$

Bezeichnungen:

$$\frac{\delta z}{\delta x} = p, \quad \frac{\delta z}{\delta y} = q; \quad \frac{\delta^2 z}{\delta x^2} = r, \quad \frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y} = s, \quad \frac{\delta^2 z}{\delta y^2} = t.$$

2. Gleichung der Berührungsebene im Punkt
 (x, y, z)

$$(\xi - x) \frac{\delta F}{\delta x} + (\eta - y) \frac{\delta F}{\delta y} + (\zeta - z) \frac{\delta F}{\delta z} = 0, \text{ oder}$$

$$p(\xi - x) + q(\eta - y) - (\zeta - z) = 0.$$

3. Gleichungen der Normalen im Punkt (x, y, z)

$$\frac{\xi - x}{\frac{\delta F}{\delta x}} = \frac{\eta - y}{\frac{\delta F}{\delta y}} = \frac{\zeta - z}{\frac{\delta F}{\delta z}} \text{ oder}$$

$$\frac{\xi - x}{p} = \frac{\eta - y}{q} = -(\zeta - z).$$

Winkel λ, μ, ν der Normalen mit den Axen bestimmt durch

$$\cos \lambda = \frac{\frac{\delta F}{\delta x}}{N}, \quad \cos \mu = \frac{\frac{\delta F}{\delta y}}{N}, \quad \cos \nu = \frac{\frac{\delta F}{\delta z}}{N}, \text{ bzw.}$$

$$\cos \lambda = \frac{p}{n}, \quad \cos \mu = \frac{q}{n}, \quad \cos \nu = -\frac{1}{n}, \text{ wobei}$$

$$N^2 = \left(\frac{\delta F}{\delta x} \right)^2 + \left(\frac{\delta F}{\delta y} \right)^2 + \left(\frac{\delta F}{\delta z} \right)^2 \text{ und}$$

$$n^2 = p^2 + q^2 + 1.$$

4. Die Schnittlinie irgend einer durch die Normale gehenden Ebene mit der Fläche heisst Normalschnitt. Es sei ϱ der Krümmungshalbmesser eines Normalschnittes im Punkt P, α , β , γ die Winkel, welche die Tangente des Normalschnittes in P mit den Axen bildet, dann ist

$$\varrho = \frac{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{r \cos^2 \alpha + 2 s \cos \alpha \cos \beta + t \cos^2 \beta}.$$

Satz von Meunier. Geht eine Ebene durch die Tangente eines Normalschnittes (im Fusspunkt P der Normalen), so ist der Krümmungshalbmesser ϱ' dieses schiefen Schnittes im Punkt P

$$\varrho' = \varrho \cos(\varrho \varrho') \text{ oder}$$

der Krümmungshalbmesser des schiefen Schnittes wird erhalten, indem man den Krümmungshalbmesser des Normalschnittes auf die Ebene des ersteren projiziert.

5. Die beiden (aufeinander senkrechten) Ebenen, für welche ϱ einen grössten und einen kleinsten Wert erreicht, heissen Hauptnormalschnitte, die Krümmungshalbmesser ϱ_1 und ϱ_2 derselben bestimmen sich aus den Gleichungen

$$\begin{cases} \varrho_1 + \varrho_2 = \frac{(1 + q^2)r - 2 p q s + (1 + p^2)t}{r t - s^2} \cdot n \\ \varrho_1 \varrho_2 = \frac{n^4}{r t - s^2} \text{ oder als Wurzeln der Gleichung} \end{cases}$$

$$(r t - s^2) \varrho^2 - [(1 + q^2)r - 2 p q s + (1 + p^2)t] n \varrho + n^4 = 0.$$

6. Satz von Euler. Für irgend einen Normalschnitt, dessen Ebene mit der Ebene des zu ϱ_1 gehörigen Hauptnormalschnittes den Winkel φ bildet, ist

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos^2 \varphi}{\varrho_1} + \frac{\sin^2 \varphi}{\varrho_2}.$$

Der Ausdruck

$$\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2}$$

heisst das Mass der Krümmung für den betreffenden Punkt.

7. Sind ϱ' und ϱ'' die Krümmungshalbmesser zweier auf einander senkrechten Normalschnitte, so ist

$$\frac{1}{\varrho'} + \frac{1}{\varrho''} = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}$$

d. h. für denselben Punkt einer Fläche ist die Summe der Krümmungen konstant.

8. Krümmungslinie heisst der Ort des Punktes einer Fläche, für welchen die unendlich nahen Normalen zur Fläche sich schneiden; die Normalen gehören daher einer abwickelbaren Fläche an. Durch jeden Punkt einer Oberfläche gehen zwei Krümmungslinien, die auf einander senkrecht sind und die Tangenten der Hauptnormalschnitte berühren. Sie sind dargestellt durch die Gleichung

$$[1 + q^2)s - pqt] \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + [(1 + q^2)r - (1 + p^2)t] \left(\frac{dy}{dx} \right) + [pqr - (1 + p^2)s] = 0$$

und durch die Gleichung der Fläche.

9. Eine auf einer Fläche liegende Linie heisst geodätische Linie, wenn ihre Schmiegungebenen zugleich Normalebenen zur Fläche sind. Ihre Gleichungen sind

$$\frac{\delta F}{\delta x} = \frac{\delta F}{\delta y} = \frac{\delta F}{\delta z}$$

$$\frac{1}{d \cos \alpha} = \frac{1}{d \cos \beta} = \frac{1}{d \cos \gamma}$$

Die kürzeste Verbindung zweier Punkte auf einer Fläche gehört einer geodätischen Linie an.

10. Hüllfläche. Die Gleichung

$$F(x, y, z, p) = 0,$$

worin p ein veränderlicher Parameter ist, stellt eine Flächenschar dar, welche eine Fläche umhüllt. Die

Gleichung der Hüllfläche ergibt sich durch Elimination von p aus

$$\begin{cases} F(x, y, z, p) = 0 \text{ und} \\ \frac{\delta F(x, y, z, p)}{\delta p} = 0 \end{cases}$$

11. Quadratur (Komplanation) der Flächen.
Das Differential der Fläche ist

$$dF = \sqrt{1+p^2+q^2} \cdot dx dy$$

$$\text{daher } F = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} \sqrt{1+p^2+q^2} dy,$$

y_0 und y_1 sind die der Abscisse x entsprechenden Ordinaten der Projektion des Umrisses der Fläche auf die XY -Ebene, x_0 und x_1 sind die Abscissen zu den Ordinaten, welche jene Projektion begrenzen.

Bei Drehflächen ergibt sich (— X -axe ist Drehaxe —):

$$F = 2\pi \int y \sqrt{1+y'^2} dx = 2\pi \int y ds$$

Bei Polarkoordinaten hat man:

$$F = \iint \sqrt{\left(r^2 + \frac{dr}{d\varphi}\right)^2 \cos^2 \varphi + \left(\frac{dr}{d\psi}\right)^2} \cdot r d\varphi d\psi$$

(s. § 86,3)

12. Kubatur.

1. Bei Drehflächen (— Ox Drehaxe —); die gedrehte Fläche ist begrenzt vom gedrehten Kurvenbogen, den zu den Endpunkten desselben gehörigen Ordinaten und der X -axe.

$$V = \pi \int y^2 dx$$

2. Die gedrehte Fläche ist begrenzt von zwei

Ordinaten und zwei Kurven $y = f(x)$ und $y_1 = f_1(x)$,

$$V = \pi \int (y^2 - y_1^2) dx$$

3. Es sei u der Inhalt eines parallel zur Ebene YOZ geführten Schnittes, dann ist der Inhalt des Körpers, der zwischen zwei parallel zu YOZ geführten Schnitten mit den Abscissen x_0 und x_1 liegt,

$$V = \int_{x_0}^{x_1} u dx \quad (u \text{ abhängig von } x)$$

4. Allgemeine Formel:

$$V = \iiint dx dy dz.$$

5. Für Polarkoordinaten (Bezeichn. s. § 86₃) ergibt sich

$$V = \frac{1}{3} \iiint r^3 \cos \varphi d\varphi d\psi.$$

§ 105. Viel gebrauchte Zahlenwerte.

Zahlenwert	Logarithmus	Zahlenwert	Logarithmus
$\sqrt{2} = 1,4142$	0,15 052	$\sqrt[3]{2} = 1,2599$	0,10 034
$\sqrt{3} = 1,73205$	0,23 856	$\sqrt[3]{3} = 1,4422$	0,15 903
$\sqrt{5} = 2,2361$	0,34 948	$\sqrt[3]{5} = 1,7100$	0,23 300
$\sqrt{6} = 2,4495$	0,38 908	$\sqrt[3]{6} = 1,8171$	0,25 937
$\sqrt{10} = 3,16225$	0,50 000	$\sqrt[3]{10} = 2,1544$	0,33 333

Zahlenwert	Logarithmus	Zahlenwert	Logarithmus
$\pi = 3,1416$	0,49 715	$\pi^2 = 9,8696$	0,99 430
$2\pi = 6,2832$	0,79 818	$\sqrt{\pi} = 1,7725$	0,24 857
$4\pi = 12,5664$	1,09 921	$\sqrt[3]{\pi} = 1,4646$	0,16 572
$\frac{\pi}{2} = 1,5708$	0,19 612	$\frac{1}{\pi} = 0,31831$	0,50 285—1
$\frac{\pi}{3} = 1,0472$	0,02 003	$\frac{1}{\pi^2} = 0,10132$	0,00 570—1
$\frac{\pi}{4} = 0,7854$	0,89 509—1	$\frac{1}{\sqrt{\pi}} = 0,56419$	0,75 143—1
$\frac{\pi}{6} = 0,5236$	0,71 900—1	$\frac{1}{\sqrt[3]{\pi}} = 0,68278$	0,83 428—1
$\frac{4}{3}\pi = 4,1888$	0,62 209	$\frac{180}{\pi} = 57,29578$	1,75 812
$g = 9,81$	0,99 167	$e = 2,7183$	0,43 429
$\frac{g}{2} = 4,905$	0,69 064	$e^2 = 7,3891$	0,86 859
$\frac{1}{g} = 0,1019$	0,00 833—1	$e^3 = 20,086$	1,30 288
$\sqrt{g} = 3,1321$	0,49 583	$\sqrt{e} = 1,6487$	0,21 715
$\frac{\pi}{\sqrt{g}} = 1,0030$	0,00 132	$\sqrt[3]{e} = 1,3956$	0,14 476

Druckfehler.

- S. 2, Z. 16 v. o. lies: Fort u. Schlömilch, Lehrb. etc.
- „ 7, „ 5 „ u. „ $a + 0 = a$.
- „ 10, „ 10 „ o. „ $-ab^3 + b^4$ statt $-ab^3 + b^5$.
- „ 21, „ 3 „ o. „ $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n$ statt $(\cos \varphi + \sin \varphi)^n$.
- „ 27, „ 13 „ o. „ null statt Null.
- „ 45, „ 4 „ o. ist „sie“ zu streichen.
- „ 53, „ 9 „ u. lies: $x = y - \frac{a}{3}$ statt $y = x - \frac{a}{3}$.
- „ 53, „ 2 „ u. „ Cardan'sche Formeln.
- „ 71, „ 13 „ o. „ einen statt einem.
- „ 86, „ 7-8 „ u. „ „die Projektion“ statt „der Winkel selbst“.
- „ 100, die Fig. ist um 180° zu drehen.
- „ 121, Z. 18 v. u. lies: vom unsichtbaren $> \varphi$ statt $< \varphi$.
- „ 125, lies: Dichte des Merkur „1?“ statt „1-2“.
- „ 127, Z. 10 v. o. lies: 2. Kimm.
- „ 139, „ 3 „ u. „ gleich- oder gegenläufig.
- „ 150, „ 7 „ o. „ Hyperbel: $\frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{b_1^2} = 1$;
- „ 151, „ 1 „ u. „ $-\frac{a^2 \varepsilon^2 y_1^3}{b^4}$.
- „ 152, „ 4 „ u. „ $= 1$ statt $+ 1$.
- „ 156, „ 3 „ u. „ Axe statt Achse.
- „ 163, „ 6 „ u. „ $y = \frac{m}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$.
- „ 165, „ 11 „ u. „ e^2 statt e .
- „ 194, „ 12 „ u. „ $x = \frac{z^m - a}{b}$; $dx = \text{etc.}$
- „ 203, „ 3 „ u. „ $X(t)$ statt $x(t)$.
- „ 209, „ 4 „ u. „ zu den Endpunkten.
- „ 209, „ 9 „ u. „ $\iint \sqrt{\left[r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi} \right)^2 \right] \cos^2 \varphi + \left(\frac{\partial r}{\partial \psi} \right)^2} \cdot r d\varphi d\psi$.

ist der Preis (80 Pf. jedes Bändchen) so niedrig, daß schwerlich ein anderes Unternehmen mit der Götschen'schen Sammlung wetteifern kann. Ja, es ließe sich denken, daß sie, was den Preis betrifft, eine vollständige Umwälzung in der Schulbücherliteratur hervorrufen könnte.

Lehrer-Zeitung: Wenn eine kurzgebrängte physikalische Geographie aus der Feder eines so tüchtigen Fachmannes, wie es Prof. Günther in München ist, erscheint, so ist von vornherein zu erwarten, daß das nur etwas Gutes sein kann. Jeder, der das Buch liest, wird sehen, daß er sich in dieser Erwartung nicht getäuscht hat.

Ausland: Kaum je ist mir ein Buch zu Gesicht gekommen, das wie Rebmann's „der menschliche Körper und Gesundheitslehre“ auf so kleinem Raum ein so klares Bild von dem Bau und den Thätigkeiten des menschlichen Körpers geboten hätte. Ich stehe nicht an, das Werkchen als ein für den Unterricht höchst brauchbares zu bezeichnen. Die Herren Naturwissenschaftler an Gymnasien und Realschulen mache ich auf das kleine Buch besonders aufmerksam.

Littbl. d. dtsh. Lehrerztg.: Die beiden Bändchen „Hartmann von Aue“ und „Walther von der Vogelweide“ geben eine Auswahl des Besten aus dem Besten unserer altklassischen deutschen Literatur im ursprünglichen Text und gewähren somit für ein Billiges einem jeden Gebildeten die Möglichkeit, die alten Perlen unserer Literatur in ihrer kernigen, kraftvollen Sprache selbst kennen zu lernen.

Allg. Zeitung (München): Ellinger bietet in „Kirchenlied und Volkslied, geistliche und weltliche Lyrik des 17. und 18. Jahrhunderts bis auf Klopstock“ den Schülern ein Handbuch, das den Verständigeren für den deutschen Unterricht gewiß hochwillkommen ist. Den beiden größeren Teilen des Buches sind gut orientierende Einleitungen vorangestellt; jedem Dichter ist eine kurze Notiz beigegeben, die über sein Leben und seine Bedeutung unterrichtet; Anmerkungen suchen sprachliche Schwierigkeiten zu lösen. Dem Büchlein, das seinem Zwecke völlig entspricht, sei der beste Erfolg gewünscht.

Berl. philolog. Wochenchrift: Stending, griechische und römische Mythologie. Die überaus schwierige Aufgabe, den wesentlichsten Inhalt auf nur 140 Kleinstabseiten übersichtlich und gemeinverständlich darzustellen, ist von dem Verfasser des vorstehenden, in der bekannten Art der „Sammlung Götschen“ ausgestatteten Büchleins in höchst anerkennenswerter Weise gelöst worden. Vor allem verdient die Gruppierung des überreichen Stoffes uneingeschränktes Lob. St. vertritt eine kerngesunde, von jeder Einseitigkeit freie mythologische Richtung und ist redlich beflissen gewesen, auch die Forschungsergebnisse der neuesten Zeit seinem Leitfaden einzuverleiben.

Zeitschr. f. dtsh. Unterricht: Die „Althochdeutsche Literatur“ Schöffers ist eine hoch erfreuliche Gabe; sie beruht überall auf den neuesten Forschungen und giebt im Anschluß an Braune, Sievers, Paul, Müllenhoff und Scherer u. a. überall das Wichtigste und Wissenswerteste in knappster Form. Es ist staunenswert, wie es der Verfasser

verstanden hat, eine Fülle von Stoff in übersichtlicher Anordnung auf einen geringen Raum zusammenzudrängen, ohne doch jemals dürftig oder bloß statistisch zu werden.

Natur: Es ist geradezu erstaunlich, wie es der rühmlichst bekannte Verlag ermöglicht, für so enorm billige Preise so vorzüglich ausgestattete Werkchen zu liefern. Das vorliegende Bändchen bringt in knapper und verständlicher Form das Wissenswerteste der Mineralogie zum Ausdruck. Saubere Abbildungen erleichtern dem Schüler, für den es in erster Linie bestimmt ist, das Verständnis.

Globus: Es ist erstaunlich, wieviel diese kleine Kartenkunde bringt, ohne an Klarheit zu verlieren, wobei noch zu berücksichtigen ist, daß viele Abbildungen den Raum stark beengen. Vortrefflich wird die Kartenprojektionslehre und die Topographie geschildert; dieselben finden sich in einer Darstellung, die für Anfänger sehr geeignet ist und dabei ist noch Platz für geschichtliche Erläuterungen vorhanden.

Nationalzeitg.: Es ist bis jetzt in der deutschen Litteratur wohl noch nicht dagewesen, daß ein Leinwandband von fast 300 Seiten in vorzüglicher Druck- und Papierausstattung zu einem Preis zu haben war, wie ihn die „Sammlung Götschen“ in ihrem neuesten Bande, *Max Koch's Geschichte der deutschen Litteratur* für den Betrag von sage achtzig Pfennige der deutschen Leservelt bietet.

Prakt. Schulmann: Ein Meisterstück kurzen und bündigen, und doch klaren und vielsagenden Ausdrucks wie die „Deutsche Litteraturgeschichte“ von Prof. M. Koch ist auch die vorliegende „Deutsche Geschichte im Mittelalter“. Dr. Kurze beherrscht ersichtlich die Ergebnisse der neuesten Forschungen, begnügt sich aber bei der ihm durch den Raum auferlegten kurzgedrängten Darstellung keineswegs damit, Thatfachen und Daten trocken aneinander zu reihen, sondern er weist überall den pragmatischen Zusammenhang nach und bietet von den geschichtlichen Persönlichkeiten treffende Charakteristiken.

Natur: Diese Sammlung ist unseren Lesern schon durch das Bändchen über Mineralogie bekannt, und wir wiederholen, daß wir kaum begreifen, wie der Verlag im Stande ist, so viel für so wenig Geld zu geben. Denn in der Chemie von Dr. Klein empfängt der Schüler fast mehr, wie er als Anfänger bedarf, mindestens aber so viel, daß er das Wissenswürdigste als unentbehrliche Grundlage zum Verständnisse der Chemie empfängt. . . Das ist sicher mehr, als man für 80 Pfg. erwarten konnte, und vertritt zugleich das schöne Prinzip der Engländer, durch wohlfeile kurz gefaßte kleine Leitfäden das Volk zu bilden.

Kunst f. Alle (München): In der Folge der mit so großem Beifall aufgenommenen „Sammlung Götschen“ ist soeben das 39. Bändchen erschienen, das, wie seine Vorgänger, weiteste Beachtung verdient. R. Kimmich behandelt in diesem Bändchen, „Zeichenschule“ benannt, in knapper, kerniger, sachlich-zielbewußter Form das weite Gebiet des bildmäßigen Zeichens und Malens. In der übermäßig fruchtbaren Produktion kunstgewerblicher Litteratur ist Kimmichs Zeichenschule

auf diesem Gebiet **weitaus das Beste**, das bisher geboten wurde. Gleich nutzbringend und in reichstem Maße bildend für Lehrer, Schüler und Liebhaberkünster, möchte ich das **wirklich vorzügliche Werk** mit warmen anerkennenden Worten der Einführung in Schule, Haus und Werkstatt zugänglich machen. Die Ausstattung ist dabei eine so vornehme, daß mir der Preis von 80 Pfennigen für das gebundene Werk von 138 Seiten kl. 8° **wirklich lächerlich billig** erscheint. Nicht weniger als 17 Tafeln in Ton-, Farben- und Golddruck, sowie 200 Voll- und Textbilder illustrieren den äußerst gesunden Lehrgang dieser Zeichenschule in feinführender Weise. Möge diese Zeichenschule ihrem vollen Wert nach erkannt werden und reichen Segen stiften, sie ist ein **Schatzkästlein** in der Flut der oberflächlichen Erscheinungen der neueren Fachliteratur.

Dtsch. Lyriker: Eine neue **Poetik**, die in engem Rahmen von großen Gesichtspunkten aus das weite Gebiet des poetischen Schaffens überblickt. In geistreicher, durchaus selbständiger Weise bietet das nicht genug zu empfehlende Buch, auf jeder Seite den mit seinem Stoff bis in die dem gewöhnlichen Blick sich entziehenden Feinheiten hinein vertrauten Forscher bekundend, eine Fülle neuer Resultate intimer Kunstbetrachtung und **übertrifft in dieser Hinsicht die Unzahl bündereicher ähnlicher Werke.**

Schwäb. Merkur: Prof. G. Mahler in Ulm legt uns eine Darstellung der **ebenen Geometrie** vor, die bis zur Ausmessung des Kreises einschließlich geht. Besondere Sorgfalt ist der Auswahl und Anordnung der Figuren zu teil geworden, deren saubere Ausführung in 2 Farben angenehm berührt.

Globus: Hoernes, Urgeschichte. Der bewährte Forscher auf **vorgeschichtlichem Gebiete** giebt hier in knappster Form die lehrreiche Zusammenstellung des Wissenswertesten der Urgeschichte. **Vortrefflich geeignet zur Einführung und zum Ueberblick.**

Preussische Schulztg.: Die Schrift von Hommel „Geschichte des alten Morgenlandes“ kann nur **warm empfohlen** werden, denn der Verfasser hat es verstanden, auf gedrängtem Raume einen auf den neuesten Forschungen beruhenden trefflichen Abriss der Geschichte der alten Kulturvölker Asiens und Aegyptens zu liefern.

Spzgr. Ztg. (Wissensch. Beil.): „Die Pflanze“ von Dr. C. Dennert können wir **bestens empfehlen.** In kürzester, knappester, **sehr klarer und verständlicher Form** weiß sein Verfasser alles Wissenswerteste über den inneren und äußeren Bau und über die Lebensverrichtungen der Pflanze zur Anschauung zu bringen, wozu seine **ganz vortrefflichen, selbstgezeichneten Textabbildungen** außerordentlich viel beitragen helfen.

Schwäb. Merkur: Die Römische Altertumskunde von Dr. Leo Bloch behandelt kurz und klar die Verfassungs- und Staatsgeschichte, die Staatsgewalten, Heerwesen, Rechtspflege, Finanzwesen, Kultus, das Haus, die Kleidung, die Bestattung und andere öffentliche und häusliche Einrichtungen der Römer. . . . Viele Gebildete, nicht bloß die Schüler im eigentlichen Sinne, werden es froh begrüßen, sich in diesem **vortrefflichen, mit Illustrationen versehenen Lehrmittel** mit leichter Mühe Rats erholen zu können.



03K3510

Mathematische Formelsammlung.

K
3510