



## **Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik**

Erster Teil, bis zum Abschluß der Untersekunda reichend und im Anschluß  
an die preußischen Lehrpläne von 1901 für die Oberreal- und Realschulen  
neu bearbeitet

**Holzmüller, Gustav**

**Leipzig und Berlin, 1904**

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-94706](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-94706)



Methodisches Lehrbuch  
der  
Elementar - Mathematik  
von  
Gustav Holzmüller.

—  
Erster Teil  
—

Vierte Auflage



Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin.

**Drei Bücher für die Jugend von Dr. K. Kraepelin:**

(Mit Zeichnungen von O. Schwindrazheim.)

## Naturstudien im Hause.

### Plaudereien i. d. Dämmerstunde. 2. Aufl. In Lw. geb. M. 3.20.

„Es ist eine Perle unter den Jugendschriften belehrenden Inhalts geworden und sollte in keiner Jugendbibliothek fehlen. Wir wünschen den Plaudereien des Dr. Erhardt mit seinen fröhlichen Jungen die weiteste Verbreitung, zumal sie sich auch äußerlich in einem so schmunzenden Gewande präsentieren.“  
(Hamburger Korrespondent, 10. September 1901.)

## Naturstudien im Garten.

### Plaudereien am Sonntag Nachmittag. In Lw. geb. M. 3.60.

„Möchte dieses wertvolle und gut ausgestattete Buch doch recht allgemein zur Belehrung der Jugend in Schule und Haus zur Verwendung kommen und auch eine recht große Zahl Erwachsener aus ihm noch zu lernen suchen; es würde dem Betreffenden nur zum Segen gereichen. Selten haben wir über die interessantesten Naturvorgänge und tierischen wie pflanzlichen Lebewesen, wie sie im freien, speziell im Garten, uns entgegenreten, in so anschaulicher, ansprechender und kenntnisreicher Weise plaudern hören dürfen, als es der Verfasser dieses Werkes versteht. . . . Reizende Zeichnungen tragen viel zur besseren Veranschaulichung des Buches bei, und würde dasselbe ein prächtiges Weihnachtsgeschenk abgeben.“

(Leipziger Zeitung 1900, Nr. 285.)

## Naturstudien in Wald und feld.

### Spaziergangs-Plaudereien. In Leinwand gebunden M. 3.60.

„... Alles in allem teilt das neue Buch in vollem Maße die Vorzüge der alten, wie diese kann es als ein Meisterwerk der belehrenden Jugendliteratur bezeichnet werden. Eltern, die Zeit genug finden, ein Kapitel des Buches zu lesen, werden zugleich lernen, in welcher Weise man mit Kindern über die Gegenstände und Erscheinungen der Natur spricht, weswegen wir recht sehr wünschen, es möge das Buch nicht nur von der Jugend, sondern auch von den Erwachsenen mit aller Aufmerksamkeit gelesen werden.“  
(Schule und Haus 1902, Nr. 1.)

## Naturstudien. Volksausgabe. Eine Auswahl aus den 3 vorstehenden Bänden. Veranstalet vom Hamburger Jugendschriften-Ausschuß. Mit Zeichnungen von O. Schwindrazheim. geb. M. 1.—

## Streifzüge durch Wald und flur.

Eine Anleitung zur Beobachtung der heimischen Natur in Monatsbildern. Für Haus und Schule bearbeitet von Professor Bernhard Landsberg. Dritte Auflage. Mit 84 Illustrationen nach Originalzeichnungen von Frau H. Landsberg. 1902. In Original-Leinwandband geb. M. 5.—

„Jeder Zeile des Buches merkt man es an, daß der Verfasser beseelt ist von einer glühenden Liebe zur Natur und daß er sich selbst mit vollster Hingabe der Beobachtung des pflanzlichen und tierischen Lebens widmet. Daß ein Unterricht in der Naturbeschreibung, wenn er im Sinne der „Streifzüge“ von einem für seine Aufgabe begeisterten Lehrer erteilt wird, ganz außerordentlich fruchtbringend sein muß, darf wohl als selbstverständlich hingestellt werden.“  
(Pädagogisches Archiv 1895, Heft 9.)



Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin.

## Heimatklänge aus deutschen Gauen.

Für jung und alt ausgewählt von **Oskar Dähnhardt**.  
Mit Buchschmuck von **Robert Engels**. I. Aus Marsch  
und Heide. Niederdeutsche Gedichte und Erzählungen. II. Aus  
Rebenflur und Waldesgrund. Mitteldeutsche Gedichte und Er-  
zählungen. III. Aus Hochland und Schneegebirg. Oberdeutsche  
Gedichte und Erzählungen. In geschmackvollem künstlerischem  
Umschlag geh. je M. 2.—, geb. je M. 2.60.

„Es ist ein richtiges Volksbuch und kann und wird mithelfen, ein neues Band her-  
zustellen zwischen den oft noch durch die Eigenart getrennten Stämmen Germaniens; die Eigen-  
art soll bleiben; sie verleiht der Gesamtheit eine unberechenbare Stärke; aber die räumlich  
Geschiedenen erfahren hier voneinander, wie sie im Denken und Empfinden doch zusammen-  
gehören als Kinder einer Mutter. Es ist meist „hausbackene“, „bäuerliche“ Poesie, die uns  
hier geboten wird, aber „ferngesund“, in den Kreisen entstanden, die unsere „Altadonkerer“  
und „Scharfschützen“ stellen und die — das nicht zu vergessen — auch in die Reihen der „Ritter  
vom Geiste“ immer wieder frisches Blut bringen.“ (Sächs. Schulztg., Elter. Beil. v. 6. Dez. 1901.)

„Es ist von fesselndem Reize, in diesen „Heimatklingen“, in Inhalt und Ausdruck, die Ver-  
schiedenheit an den mächtigen Verzweigungen des germanischen Stammes neben dem durchlaufenden  
Grundzuge seines tiefen Gemütszustandes zu beobachten.“ (Wiener Abendpost, 31. Dez. 1901.)

## Deutsche Götter- und Heldensagen.

Von Dr. **Adolf Lange**, Direktor des Gymnasiums und der  
Realschule zu Höchst a. M. Nach den besten Quellen für  
Haus und Schule dargestellt. Mit zwölf Originallithographien  
von **Robert Engels**. Zweite, verbesserte Auflage. In künst-  
lerischem Originalleinenband M. 6.—. Auch getrennt in  
3 Teilen geb. je M. 2.40.

„... Auch die schöne Ausstattung wird dazu beitragen, dem Buche Freunde zu gewinnen:  
die Lithographien, mit denen Engels es geschmückt hat, verdienen es; sie sind in ihrer eindrucksvol-  
len Größe in hohem Maße geeignet, auf die Jugend zu wirken. ... Langes Buch sollte ein  
Hausbuch für die Familie werden, um sie mit der Sagenwelt unserer Vorfahren, ihren Sitten  
und Anschauungen vertraut zu machen; es wird gewiß Teilnahme und Freude an der Sache  
erwecken und durch die lebendige Veranschaulichung der Götter- und Heldensagen die Jugend auf  
die deutsche Geschichte vorbereiten.“ (Zeitschr. f. lateinl. höh. Schulen. XIV. Jahrg. Heft 11/12.)

## Deutsche Heldensagen.

Dem deutschen Volke und seiner Jugend wiedererzählt von  
**Karl Heinr. Keck**. Zweite, vollständig umgearbeitete Auflage,  
besorgt von Dr. **Bruno Busse**. I. Bd. Gudrun und Nibe-  
langen. II. Bd. Dietrich von Bern. Mit Originallitho-  
graphien von **Robert Engels**. In geschmackvollem Leinen-  
band mit Zeichnung von **Robert Engels** je M. 3.—

„Die alten Sagen unseres Volkes in neuer Form, aber altem Geist zu erzählen, war die  
Absicht des Verfassers bzw. Bearbeiters des Buches, und er hat es vortrefflich verstanden, die  
alte Sagenwelt unserer Heldenvorzeit zu lebendiger, anschaulicher Darstellung zu bringen und  
zu zeigen, daß der Zauber, den sie zu ihrer Zeit ausgeübt, noch nicht an Kraft verloren hat.  
Mit Recht betont er, daß in seiner Heldensage das deutsche Volk des Mittelalters sein Hoffen  
und Lieben am klarsten ausgeprägt hat, daß in ihr sich der Geist deutscher Vorzeit noch heute  
am deutlichsten offenbart. ... Auch die schöne Ausstattung wird dazu beitragen, dem Buche Freunde  
zu gewinnen; die Lithographien, mit denen Engels es geschmückt hat, verdienen es; sie sind in  
ihrer eindrucksvollen Größe in hohem Maße geeignet, auf die Jugend zu wirken.“

(Zeitschr. f. lateinl. höh. Schulen. XIV. Jahrg. Heft 11/12.)



# Künstlerischer Wandschmuck

für Schule und Haus

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin.

Die Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Leipzig und Berlin hat es sich zur Aufgabe gestellt, große, ursprüngliche, farbenfrohe Kunst zu billigen Preisen zu bieten. Im Gegensatz zu Reproduktionen, bei denen auch das Beste durch handwerksmäßige oder mechanische Vervielfältigung an künstlerischem Werte verliert und die vor allem meist die Farbe vermissen lassen, stellen die Blätter dieses Unternehmens vielfarbige künstlerische Originalarbeiten dar, die, vom Künstler selbst auf den Stein entworfen und im Druck überwacht, bis in alle Einzelheiten sein eigenes Werk sind.

Solche Bilder aber sind vor allem auch geeignet, in unserer Jugend das Gefühl für das Schöne zu wecken und zu erziehen, sie durch ihre stille Gegenwart an eine künstlerische Umgebung zu gewöhnen. Sie dürfen darum ganz besonders zur Anschaffung wie für die Schule so für das Haus empfohlen werden.

## Bisher erschienen u. a. folgende Blätter:

Die mit \* versehenen Bilder sind 100×70, die mit † 75×55, die anderen 60×50 cm groß.

|                                                                         | i. Rahm.: |      |                                                                       | i. Rahm.: |      |
|-------------------------------------------------------------------------|-----------|------|-----------------------------------------------------------------------|-----------|------|
|                                                                         | Mk.       | Mk.  |                                                                       | Mk.       | Mk.  |
| K. Bauer, Goethe. (Nr. 30.)                                             | 3.—       | 12.— | *F. Kallmorgen, Lokomotiven-<br>Werstätte. (Nr. 18.)                  | 6.—       | 19.— |
| K. Bauer, Schiller. (Nr. 31.)                                           | 3.—       | 12.— | U. Kampf, Kaiser Wilhelm II.<br>(Nr. 29.)                             | 3.—       | 12.— |
| K. Bauer, Luther. . . . .                                               | 3.—       | 12.— | *G. Kampmann, Mondaufgang.<br>(Nr. 6.)                                | 6.—       | 19.— |
| *J. Bergmann, Seerosen. (Nr. 13.)                                       | 6.—       | 19.— | †G. Kampmann, Bergland im<br>Schnee. (Nr. 26.)                        | 5.—       | 15.— |
| *K. Biese, Hünengrab. (Nr. 1.)                                          | 6.—       | 19.— | †G. Kampmann, Abendrot. . . . .                                       | 5.—       | 18.— |
| *K. Biese, Im Stahlwerk bei<br>Krupp. (Nr. 12.)                         | 6.—       | 19.— | *E. Kanoldt, Eichen. (Nr. 34.)                                        | 6.—       | 19.— |
| *L. Du Bois-Reymond, Attische<br>Landschaft (Akropolis) (Nr.<br>32.)    | 6.—       | 19.— | †E. Knuthan, Stille Nacht,<br>heilige Nacht. (Nr. 28.)                | 5.—       | 15.— |
| *W. Conz, Schwarzwaldtanne.<br>(Nr. 14.)                                | 6.—       | 19.— | †V. Leiber, Sonntagsstille. (Nr.<br>45.)                              | 5.—       | 15.— |
| *E. Dettmann, Vulkan-Werk-<br>stätten bei Stettin. (Nr. 24.)            | 6.—       | 19.— | *S. Key, Fingerhut im Walde.<br>(Nr. 19.)                             | 6.—       | 19.— |
| †H. Eichrodt, Droben steht die<br>Kapelle. (Nr. 9.)                     | 5.—       | 18.— | †E. Liebermann, Wenn Gott<br>will rechte Günst erweisen.<br>(Nr. 35.) | 5.—       | 18.— |
| †H. Eichrodt, Säemann (Nr. 43.)                                         | 5.—       | 15.— | †E. Orlik, Räbezahl (Nr. 21.)                                         | 5.—       | 15.— |
| *A. Engels, Gudrun am Meere.<br>(Nr. 27.)                               | 6.—       | 19.— | †E. Orlik, Hänsel und Gretel<br>(Nr. 41.)                             | 5.—       | 15.— |
| †J. Fikentscher, Malven. (Nr. 20.)                                      | 5.—       | 15.— | *M. Roman, Römische Cam-<br>pagna. (Nr. 7.)                           | 6.—       | 19.— |
| †O. Fikentscher, Krähen im<br>Schnee. (Nr. 4.)                          | 4.—       | 14.— | *M. Roman, Paestum (Nr. 25.)                                          | 6.—       | 19.— |
| *O. Fikentscher, Fuchs im Ried.<br>(Nr. 5.)                             | 5.—       | 18.— | *W. Strich-Chapell, Lieb Hei-<br>matland ade. . . . .                 | 6.—       | 19.— |
| †O. Fikentscher, Eichhörnchen.<br>(Nr. 15.)                             | 5.—       | 15.— | *W. Strich-Chapell, Herbst im<br>Land. (Nr. 23.)                      | 6.—       | 19.— |
| *A. Frieze, Springender Löwe. . .                                       | 6.—       | 19.— | †W. Trübner, Alt-Heidelberg.<br>(Nr. 33.)                             | 5.—       | 15.— |
| *W. Georgi, Pflügender Bauer.<br>(Nr. 11.)                              | 6.—       | 19.— | *H. v. Vollmann, Die Sonn-<br>erwacht. (Nr. 2.)                       | 6.—       | 19.— |
| *A. Hauelsen, Der Köhler (Nr. 16.)                                      | 6.—       | 19.— | *H. v. Vollmann, Wogendes<br>Kornfeld. (Nr. 22.)                      | 6.—       | 19.— |
| *F. Hein, Am Webstuhl. (Nr. 17.)                                        | 6.—       | 19.— | †B. Welte, Junge Tannen.<br>(Nr. 42.)                                 | 5.—       | 15.— |
| †F. Hoch, Morgen im Hoch-<br>gebirge. (Nr. 10.)                         | 4.—       | 14.— |                                                                       |           |      |
| *F. Hoch, Fischerboote. (Nr. 3.)                                        | 6.—       | 19.— |                                                                       |           |      |
| *F. Hoch, Kiefern. (Nr. 36.)                                            | 6.—       | 19.— |                                                                       |           |      |
| *F. Kallmorgen, Südamerikas-<br>dampfer im Hamburger<br>Hafen. (Nr. 8.) | 6.—       | 19.— |                                                                       |           |      |

## Kleine Wandbilder für das deutsche Haus

Künstler-Steinzeichnungen

Preis eines jeden Blattes 2 Mark 50 Pfennig.

Bildgröße 41×30 cm, mit Papierrand 57×44 cm.

|                                               |                                                |                                             |
|-----------------------------------------------|------------------------------------------------|---------------------------------------------|
| 201. Lutz, Altes Städtchen.                   | 207. Lieber, Heiderot.                         | 212. Hein, Das Tal.                         |
| 202. Biese, Christmarkt.                      | 208. Biese, Einsamer Hof.                      | 213. Orlik, Herbststille.                   |
| 203. Hauelsen, Ruhe.                          | 209. Käß, Hühner.                              | 214. Peget, Am Stadtor.                     |
| 204. Hoff, Dachauerin.                        | 210. Fikentscher, Maimorgen.                   | 215. Strich-Chapell, Blühende<br>Kastanien. |
| 205. von Vollmann, Frühling<br>auf der Weide. | 211. Du Bois-Reymond, Am<br>Tempel von Aegina. | 216. von Vollmann, Herbst in<br>der Eifel.  |
| 206. von Vollmann, Abend-<br>wolken.          |                                                |                                             |

Leinwandmappe mit 10 Blättern in künstlerischer Ausführung zum Preise von Mk. 28.—,  
Kartonmappe mit 5 Blättern für Mk. 12.— eignen sich vorzüglich zu Geschenken.

Ausführliche illustrierte Kataloge unentgeltlich und postfrei  
von der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Leipzig.



Methodisches Lehrbuch  
der Elementar-Mathematik

von

Prof. Dr. Gustav Holzmüller,

Direktor a. D. der jetzigen Oberrealschule  
und der jetzigen Königl. Höheren Maschinenbauschule zu Hagen i. W.,  
Mitglied der Kaiserlichen Leopoldinisch-Karolinischen Akademie der Naturforscher.

---

Erster Teil,

bis zum Abschluß der Untersekunda reichend und im Anschluß an die  
preussischen Lehrpläne von 1901 für die Oberreal- und Realschulen  
neu bearbeitet.

---

Vierte Doppel-Auflage.

Mit 192 Figuren im Text.

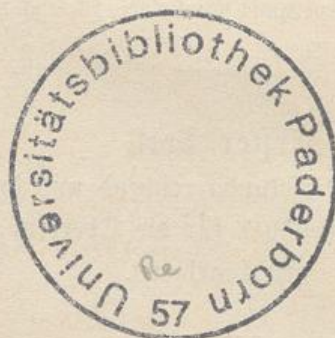


Leipzig und Berlin,

Druck und Verlag von B. G. Teubner.

1904.





03

M

70790

25/4244

TMP

Alle Rechte, einschließlich des Übersetzungsrechts, vorbehalten.



## Vorwort.

Zum vierten Male tritt das methodische Lehrbuch in Erscheinung und zwar im Hinblick auf die preußischen Lehrpläne von 1901 nach teilweiser Umarbeitung. Ohne die neuen Verfügungen würde die alte Gestalt geblieben sein, in der es auch im Auslande Anerkennung gefunden hat. Vom Universitätsprofessor E. Lagina in Buenos Aires wurde es in die spanische Sprache übersetzt und als „Tratado metódico de matemáticas elementales“ in verschiedenen Schulen Südamerikas dem Unterrichte zugrunde gelegt. Auch für eine geplante Übersetzung ins Ungarische wurde die Erlaubnis vom Verlage und vom Verfasser gern erteilt.

Die Einführung des propädeutischen Vorkurses für die Quinta der Lateinlosen und die Cuarta der Lateintreibenden Schulen veranlaßte mich, die bisherigen Vorbemerkungen aus dem Lehrbuche auszuschneiden und sie eingehender bearbeitet als eine „Vorbereitende Einführung in die Raumlehre“ erscheinen lassen. Diese stellt den Unterrichtsstoff zur freien Auswahl und ist mit Anleitungen zur Herstellung von Unterrichtsmodellen versehen. Am selbstangefertigten Modelle soll der Schüler in die wichtigsten Begriffe der Raumlehre eingeführt werden.

Das eigentliche Lehrbuch beginnt mit einer übersichtlichen Zusammenstellung der planimetrischen Ergebnisse des Vorkurses unter gleichzeitiger Ergänzung. Es wird also angenommen, daß der Vorkurs sich wenigstens in der Hand des Lehrers befinde.

Ein Punkt wurde besonderer Erwägung unterzogen: Die Ansichten von Gauß, Lobatschewskij, Bolhai und Riemann über die Grundlagen der Raumlehre haben seit längerer Zeit die mathematische Welt in eine tiefgehende Bewegung versetzt, in der Lie, F. Klein, Clifford, Helmholtz, Killing, G. Veronese, Hilbert, in neuester Zeit auch Poincaré als Wortführer auftraten. Letzterer hat soeben in einem von Prof. F. Lindemann ins Deutsche übertragenen Buche „Wissenschaft und Hypothese“ das Gesamtergebnis dieser Kämpfe in geistvoller Weise zusammengefaßt. Die verschiedenen Formen nichteuklidischer Raumauffassung werden von der Wissenschaft



in ihrer logischen Berechtigung vollkommen anerkannt. Die Auffassung des Euklid ist nur eine besondere unter den verschiedenen Möglichkeiten, aber, wie betont werden soll, diejenige, die der Sinnesorganisation des Menschen am besten entspricht, während die übrigen Formen anders organisierten Geschöpfen bequemer liegen mögen. Bei der kritischen Untersuchung der Axiome zeigte sich nun, daß die wenigen von Euklid ausgesprochenen Axiome für dessen Geometrie nicht ausreichen, daß er selbst eine ganze Reihe von anderen stillschweigend angenommen hat. Diese Grundlagen sind jetzt vervollständigt worden. Neuere italienische Elementarbücher — ich nenne nur die Namen Veronese, Gazzaniga, Faifofer — haben dies berücksichtigt und Prof. F. Klein hat auf der Düsseldorfer Mathematiker-Versammlung (1902) auf diesen rühmlichen Vorgang besonders aufmerksam gemacht. Sollen nun die höheren Schulen Deutschlands auf diesem Wege folgen? Diese schwerwiegende Frage ist zu einer brennenden geworden.

Leicht sind die Fragen über die Axiome nicht zu beantworten. An der Frage, ob das Parallelenaxiom des Euklid wirklich ein Axiom oder ein aus den übrigen Axiomen ableitbarer, d. h. beweisbarer Satz sei, haben sich zwei Jahrtausende lang selbst hervorragende Mathematiker, wie z. B. Legendre, vergeblich abgemüht. Erst von den zuerst genannten vier Mathematikern ist die Frage dahin entschieden worden, daß es sich wirklich um ein Axiom handelt. Bei solchen Schwierigkeiten dürfte anzuraten sein, in den Unterklassen von eingehenden Erörterungen über die Angelegenheit der Axiome ganz abzusehen und höchstens in den obersten Klassen aus Gründen streng logischer Durchbildung beiläufig darauf einzugehen.

Bei einem Lehrbuche kommt es darauf an, ob es ein systematisches und streng wissenschaftliches sein soll, oder ob es „nur“ ein methodisches, propädeutisch einführendes sein will.

Im ersteren Falle sind die Axiome an die Spitze zu stellen. Dabei ist zu zeigen, daß jedes von den übrigen unabhängig ist, daß sie einander nicht widersprechen, und daß sie ausreichend sind, die beabsichtigte Geometrie, z. B. die des Euklid, vollständig zu begründen. Auf dem System der Axiome ist dann das wissenschaftliche Lehrgebäude durch streng logische Schlußfolgerungen aufzubauen, und es muß zu erkennen sein, von welchen Axiomen die einzelnen Sätze abhängig, von welchen Axiomen sie unabhängig sind. Ein allseitig als klassisch anerkanntes Lehrbuch dieser Art liegt bis jetzt noch nicht vor, auch nicht für die Geometrie des Euklid. Als Schulbuch würde es schwerlich zu gebrauchen sein, dagegen würde es dem denkenden Lehrer bald unentbehrlich werden. —



Im letzteren Falle aber darf und muß von so strengen Forderungen abgesehen werden, denn das methodische Lehrbuch hat vor allem die Pflicht, sich der Fassungskraft des Schülers anzupassen und erst mit zunehmender Ausbildung seiner Vorstellungsfähigkeit und seiner logischen Kraft und Abstraktionsfähigkeit höhere Anforderungen an ihn zu stellen. Gerade darin hat sich die Kunst des Unterrichtens zu bewähren, gerade darin zeigt sich der pädagogische Takt. Hinsichtlich der Axiome ist also Vorsicht am Plage. Verhältnismäßig früh ist aber darauf aufmerksam zu machen, inwiefern sich der mathematische Körper vom physischen Körper unterscheidet. Da ferner die mathematischen Körper lediglich Teile des Raumes sind, muß notwendig auch dieser Raum als ein mathematischer, vom realen oder physischen Raum scharf zu unterscheidender aufgefaßt werden. Allmählich wird es dem Schüler zum Bewußtsein kommen, daß der außerhalb der sichtbaren Fixsternwelt liegende Teil des realen Weltraumes uns nicht sinnlich wahrnehmbar ist, daß wir über dessen dortiges Verhalten also gar nichts wissen, folglich zu Urteilen darüber gar nicht befugt sind. Dem mathematischen Raume aber kann man Vorschriften machen, wie er sich z. B. im Unendlichen verhalten soll, und diese Vorschriften sind eben Axiome, wie z. B. die des Euklid. Jahre aber werden bei jedem Schüler vergehen, ehe der letzte Satz sich ihm als richtig aufdrängen wird. Bei der hier nur angedeuteten Auffassung sind übrigens gewisse Streitfragen ganz von selbst erledigt.

Wenn Poincaré sagt, die Frage, ob die Raumauffassung des Euklid richtig oder falsch sei, wäre ebenso müßig, wie die Frage, ob das metrische System richtig oder falsch sei, so wird dies viel Widerspruch finden. Jedenfalls aber will der führende Mathematiker Frankreichs nur darauf hindeuten, es handle sich darum, ob die Raumauffassung des Euklid sich gerade mit der menschlichen Sinnesorganisation gut vertragen könne. Daß sie dies für den endlichen Bereich tut, ist allgemein anerkannt und liegt auf der Hand. Anders organisierte Wesen könnten allerdings eine andere Geometrie als die ihnen bequemere vorziehen, da sie gewissermaßen gewohnt wären, „mit anderem Maße zu messen“ als wir.

Ist es nun auch von Interesse, andere Geometrien auf irgend einem willkürlich gewählten Systeme von Axiomen streng logisch und widerspruchslös in sich aufzubauen, so hat doch ein methodisches Lehrbuch für höhere Schulen auf jede Behandlung solcher Lehrgebäude zu verzichten und sich auf die Raumauffassung des Euklid zu beschränken, die eben für uns Menschen die bequemste ist und sich für das endliche Gebiet mit den am Weltraum vorgenommenen Beobachtungen in



durchaus befriedigender Weise deckt. Würde auf einer Oberprima philosophische Propädeutik betrieben, so wäre es eine vorzügliche Aufgabe, die Grundlagen der Euklidischen Raumauffassung im Sinne der neueren Forschungen dort kritisch zu untersuchen. Aber für die unteren Klassen ist der Gegenstand viel zu schwierig. Ein methodisches Lehrbuch kann also nur da, wo sich gerade das Bedürfnis geltend macht, auf diese oder jene die Axiome betreffende Frage in propädeutischer Weise eingehen und auf die betreffenden Schwierigkeiten aufmerksam machen. Daß es gut ist, sich auf den Unterklassen mit einer vorläufigen Behandlung zu begnügen, damit werden sich auch die Schüler recht gern zufrieden geben, denn das Verlangen nach solcher Kost ist kein allzugroßes.

Ob nun mein Lehrbuch in dieser Beziehung den richtigen pädagogischen Takt zeigt, darüber mögen andere urtheilen. Der Kenner wird, wie ich hoffe, hier und da zwischen den Zeilen lesen und erkennen, inwiefern die Ausdrucksweise mit Rücksicht auf die neueren Forschungen gewählt ist. —

Die Anzahl der planimetrischen Übungsaufgaben ist auf den Wunsch einiger Fachlehrer, die das Buch benutzen, erheblich vergrößert worden. Dabei wurden Aufgaben aus solchen Gebieten gewählt, die in den üblichen Aufgabensammlungen etwas stiefmütterlich behandelt sind. Hinsichtlich der Anordnung kam es mir darauf an, die Übungen, namentlich die Konstruktionsübungen, von vornherein so mannigfaltig und damit so anregend wie nur möglich zu machen. Dazu war es stellenweise nötig, von der systematischen Anordnung abzugehen und aus methodischen Gründen manches früher zu bringen. Dies ist z. B. hinsichtlich der gesetzmäßigen Vergrößerung nach einfachem Maßstabsverhältnis geschehen, die dem Schüler schon aus dem Zeichenunterricht geläufig ist, wenn dieser den neuesten Vorschriften folgt. Wer dergleichen erst später behandeln will, möge es tun. Der gegebene Übungsstoff ist so reichhaltig, daß dem Lehrer zur freien Auswahl ein großer Spielraum gelassen ist.

Soviel über den planimetrischen Teil. — In arithmetischer und trigonometrischer Hinsicht lag zu Änderungen kein Anlaß vor. Methodik und Systematik passen sich hier so aneinander an, daß jede der vorzüglichen Aufgabensammlungen, die wir besitzen, im Anschluß an das Lehrbuch benutzt werden kann. Eine Zusammenstellung solcher aufzunehmen, erschien also wiederum als überflüssig. Hinsichtlich der Stereometrie durfte den Vorschriften über das genaue stereometrische Zeichnen, welches unvermerkt in die darstellende Geometrie einführen soll, etwas stärker gefolgt werden. Zu diesem Zwecke wurde die



Anzahl der Figuren vergrößert, was übrigens auch in der Planimetrie geschehen ist. Wer noch mehr wünscht, kann die betreffenden Übungen aus meiner „Einführung in das stereometrische Zeichnen“ entnehmen, einiges auch aus dem „Vorkursus“. Auch meine vierbändigen „Elemente der Stereometrie“ stellen dem Fachlehrer viel Übungsmaterial zur Verfügung.

Da der zweite Teil des Lehrbuchs, der für die Oberrealschulklassen bestimmt ist, bei deren verhältnismäßig noch geringer Anzahl erst später auf eine dritte Auflage zu rechnen hat, sei bemerkt, daß ich die neu eingeführten Gebiete Kombinatorik, Wahrscheinlichkeitsrechnung und numerische Gleichungen höheren Grades vorläufig in besonderen Hefen bearbeitet habe, die vom Verlage dem zweiten Teile unentgeltlich beigelegt werden. Einiges Wenige aus dem zweiten Teile mußte im Hinblick auf die Lehrpläne in den ersten Teil herübergezogen werden, erscheint also bis zur Neubearbeitung doppelt. Diese kleine Unebenheit wird aber bald verschwinden. — Der weitergehende dritte Teil des Lehrbuchs hat seine Neuauflage erst kürzlich erhalten.

Für die ersten Auflagen hatte ich ein besonderes Begleitwort zur Rechtfertigung meiner methodischen Ansichten geschrieben. Die Lehrpläne von 1901 zeigen, daß die preußische Unterrichtsverwaltung im wesentlichen den Standpunkt teilt, den ich als den meinigen betont habe. Ein neues Begleitwort erscheint daher nicht nötig.

Die vorliegende Ausgabe ist, wie gesagt, besonders für Oberreal- und Realschulen bestimmt. Der fast vergriffene erste Teil der Gymnasialausgabe wird seine neue Bearbeitung in kürzester Frist erhalten. Auch für das Gymnasium sind vorläufig Ergänzungshefte wie die oben genannten erschienen. —

Möge die vorliegende Neubearbeitung das ihrige dazu beitragen, den mathematischen Unterricht im Sinne der neuen Lehrpläne methodisch auszugestalten und dieses besondere Lehrgebiet zu einem solchen zu machen, auf dem jeder Schüler, nicht bloß der besonders für Mathematik begabte, mit Interesse und daher mit Lust und Liebe lernt und arbeitet.

Hagen, i. W., im Juli 1904.

G. Holzmüller.



# Inhaltsverzeichnis.

## Erste Abteilung.

### Planimetrie.

#### A. Planimetrische Lehraufgabe der Quarta und Untertertia.

#### I. Übersichtliche Zusammenstellung und Ergänzung der planimetrischen Ergebnisse des Vorkursus.

|                                                                                       | Seite |
|---------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| a) Einige Vorbegriffe und ihre Erklärungen . . . . .                                  | 1     |
| $\alpha$ ) Die Mathematik und ihre Teile . . . . .                                    | 1     |
| $\beta$ ) Der mathematische Raum und die geometrischen Gebilde . . . . .              | 2     |
| $\gamma$ ) Bewegungsbeziehungen und Dimensionen . . . . .                             | 7     |
| $\delta$ ) Gegenseitiges Schneiden und Durchdringen geometrischer Gebilde . . . . .   | 8     |
| $\epsilon$ ) Begriff der Geraden und der Richtungen im Raume . . . . .                | 9     |
| $\zeta$ ) Begriff der Ebene, der ebenen Gebilde und der Planimetrie . . . . .         | 11    |
| $\eta$ ) Begriff des Kreises, des regelmäßigen Vielecks und ihrer Teile . . . . .     | 13    |
| $\theta$ ) Begriff des Winkels in der Ebene . . . . .                                 | 16    |
| b) Die einfachsten geometrischen Konstruktionen . . . . .                             | 21    |
| $\alpha$ ) Die Zeichengeräte . . . . .                                                | 21    |
| $\beta$ ) Drei Forderungen (Postulate) der Konstruktionslehre . . . . .               | 23    |
| $\gamma$ ) Die grundlegenden Konstruktionen . . . . .                                 | 25    |
| c) Bemerkungen über parallele Geraden und über die Winkelsumme des Dreiecks . . . . . | 33    |
| $\alpha$ ) Die Parallelensätze . . . . .                                              | 33    |
| $\beta$ ) Die Winkelsumme des Dreiecks . . . . .                                      | 38    |
| $\gamma$ ) Einige Folgerungen der Parallelensätze . . . . .                           | 39    |
| d) Konstruktionsübungen . . . . .                                                     | 45    |
| $\alpha$ ) Addition und Subtraktion von Geraden, Winkeln, Kreisbogen . . . . .        | 45    |
| $\beta$ ) Vervielfachung und Teilung von Geraden, Winkeln, Kreisbogen . . . . .       | 45    |
| $\gamma$ ) Konstruktion für gewisse Reihen von Winkeln . . . . .                      | 46    |
| $\delta$ ) Konstruktion gewisser Kreisteilungen und regelmäßiger Vielecke . . . . .   | 47    |
| $\epsilon$ ) Übungen mit regelmäßigen Vielecken . . . . .                             | 47    |
| $\zeta$ ) Zwei Hindernisaufgaben . . . . .                                            | 48    |
| $\eta$ ) Einige Vergrößerungs- und Verkleinerungsaufgaben . . . . .                   | 49    |



|                                                                                          | Seite |
|------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| e) Begriff der Symmetrie in der Ebene . . . . .                                          | 53    |
| $\alpha$ ) Erklärung und Grundsätze der einfachen und mehrfachen Symmetrie               | 53    |
| $\beta$ ) Ableitung einfacher Sätze und Konstruktionen mit Hilfe der Symmetrie . . . . . | 56    |
| $\gamma$ ) Symmetrisches über das gleichschenklige Dreieck . . . . .                     | 61    |
| $\delta$ ) Symmetrisches über Kreise . . . . .                                           | 63    |

## II. Fortsetzung des planimetrischen Lehrgangs.

|                                                                                                                                                                                                                                                                                             |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| a) Die Lehre von der Kongruenz . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                    | 67  |
| $\alpha$ ) Die grundlegenden Kongruenzsätze für das Dreieck . . . . .                                                                                                                                                                                                                       | 67  |
| $\beta$ ) Allgemeines über Konstruktionen und Kongruenzsätze . . . . .                                                                                                                                                                                                                      | 73  |
| $\gamma$ ) Dreieckskonstruktionen . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                 | 77  |
| $\delta$ ) Einige andere Konstruktionen . . . . .                                                                                                                                                                                                                                           | 78  |
| b) Lehre von den Parallelogrammen . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                 | 81  |
| $\alpha$ ) Die grundlegenden Sätze in übersichtlicher Zusammenstellung . . . . .                                                                                                                                                                                                            | 81  |
| $\beta$ ) Quadratkonstruktionen . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                   | 83  |
| $\gamma$ ) Rechteckskonstruktionen . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                | 85  |
| $\delta$ ) Rhombuskonstruktionen . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                  | 88  |
| $\epsilon$ ) Parallelogrammkonstruktionen . . . . .                                                                                                                                                                                                                                         | 90  |
| c) Anfangsgründe der Kreislehre . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                   | 91  |
| $\alpha$ ) Rückblick auf das schon Bekannte . . . . .                                                                                                                                                                                                                                       | 91  |
| $\beta$ ) Peripherie- und Zentriwinkel, Tangenten-Sehnenwinkel . . . . .                                                                                                                                                                                                                    | 93  |
| $\gamma$ ) Tangentendreiecke und Tangentenvierecke . . . . .                                                                                                                                                                                                                                | 97  |
| $\delta$ ) Betrachtungen über mehrere Kreise . . . . .                                                                                                                                                                                                                                      | 101 |
| $\epsilon$ ) Konstruktionsübungen zur Kreislehre . . . . .                                                                                                                                                                                                                                  | 104 |
| d) Flächengleichheit geradliniger Gebilde . . . . .                                                                                                                                                                                                                                         | 106 |
| Flächengleiche Parallelogramme und Dreiecke. Satz des Pythagoras. Verwandlung von $n$ -Ecken in Dreiecke, Rechtecke und Quadrate. Quadrate über Summen und Differenzen von Geraden. Satz des Pappus. Satz des Pythagoras für spitz- und stumpfwinklige Dreiecke. Ergänzungsparallelogramme. |     |
| e) Längen- und Flächenberechnungen an ebenen Gebilden . . . . .                                                                                                                                                                                                                             | 117 |
| Berechnungen am Rechteck und Dreieck. Heronische Flächenformel. Mittlere Proportionale. Trapez. Tangentenviereck. Pythagoreische Zahlen. Kreis als regelmäßiges Vieleck.                                                                                                                    |     |
| f) Schlußbemerkungen zur planimetrischen Lehraufgabe der Quarta und Untertertia . . . . .                                                                                                                                                                                                   | 134 |
| Sachliche und genetische Definitionen. Grundsätze und Axiome. Schema für die Behandlung der Lehrrsätze. Direkter und indirekter Beweis. Bemerkungen über Konstruktionen und Berechnungen.                                                                                                   |     |



## B. Planimetrische Lehraufgabe der Obertertia und Untersekunda.

## I. Ähnlichkeitslehre für geradlinige Gebilde . . . . . 137

Verhältnisse am Dreieck. Ähnliche Figuren. Ähnlichkeitsätze für das Dreieck. Ähnlichkeitspunkte bei ähnlichen Vielecken, bei Kreisen und parallelen Geraden. Harmonische Teilung. Ähnlichkeitsbeweis für den Satz des Pythagoras. Übungen am Tangentenviereck.

## II. Proportionen und Ähnlichkeitsbeziehungen am Kreise . . 153

Sehnen und Sekanten durch einen Punkt. Kreishüchel und orthogonale Kreishchar. Anwendung auf Kartographie. Goldener Schnitt. Regelmäßiges Zehneck, Fünfeck, Fünfeck. Heronische Formeln, mit Hilfe der Ähnlichkeit abgeleitet. Regelmäßiges  $2n$ -Eck aus dem  $n$ -Eck berechnet. Einige Segmente. Lunula des Hippokrates.

## III. Anwendungen der Algebra auf die Geometrie.

Geometrische Deutung und Konstruktion algebraischer Ausdrücke . . . . . 170

Deutung einfacher Ausdrücke erster und zweiter Dimension. Konstruktionsaufgaben mit algebraischer Analysis.

## Zweite Abteilung.

## Arithmetik.

## A. Lehraufgabe der Quarta und Untertertia.

I. Das Gebiet der gewöhnlichen (absoluten und ganzen) Zahlen . . 183  
Die vier Grundrechnungen in gewöhnlichen Zahlen.

II. Erweiterung des Zahlgebietes durch Einführung der negativen und gebrochenen Zahlen . . . . . 197  
Geometrische Darstellung der Zahlenreihe. Ausdehnung der Rechnungen auf negative und gebrochene Zahlen. Hauptnenner von Brüchen. Primzahlen. Größter gemeinschaftlicher Teiler. Zusammenstellung der Ergebnisse.

III. Dezimalbrüche . . . . . 208  
Rechnungsregeln. Verwandeln gewöhnlicher Brüche in Dezimalbrüche und der letzteren in die ersteren. Periodische Dezimalbrüche. Nicht periodische von unendlicher Stellenzahl. Irrationalzahlen. Abgekürztes Rechnen.

IV. Proportionen . . . . . 213  
Verschiedene Schreibweisen derselben Proportion. Ableitung neuer Proportionen aus gegebenen. Sätze über Proportionen.

V. Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten . . . . . 216



## B. Lehraufgabe der Obertertia.

|                                                                                     | Seite |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| I. Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten . . . . .                         | 218   |
| II. Rein quadratische Gleichungen und Ausziehen der Quadratwurzel . . . . .         | 221   |
| III. Grundform der gemischt quadratischen Gleichung mit einer Unbekannten . . . . . | 229   |
| IV. Potenzen und Wurzeln mit ganzen positiven Exponenten . . . . .                  | 230   |
| Zusammenstellung der wesentlichen Ergebnisse . . . . .                              | 237   |

## C. Lehraufgabe der Untersekunda.

|                                                                                                                                                                                                                                        |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| I. Gleichungen zweiten Grades . . . . .                                                                                                                                                                                                | 238 |
| II. Potenzen mit negativen und gebrochenen Exponenten . . . . .                                                                                                                                                                        | 241 |
| III. Die gemeinen oder Briggs'schen Logarithmen . . . . .                                                                                                                                                                              | 244 |
| Erklärung dieser Logarithmen. Andeutungen über die Möglichkeit ihrer Berechnung. Logarithmus eines Produktes, eines Bruches, einer Potenz, einer Wurzel. Rechnungserleichterung durch Logarithmen. Anwendungen auf Zinseszinsrechnung. |     |
| Zusammenstellung der wichtigsten Ergebnisse . . . . .                                                                                                                                                                                  | 252 |

## Dritte Abteilung.

## Trigonometrie.

## Lehraufgabe der Untersekunda.

|                                                                                                                                                                                                                        |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| I. Die trigonometrischen Funktionen am rechtwinkligen Dreieck . . . . .                                                                                                                                                | 253 |
| Die vier Hauptfunktionen. Berechnung der Funktionen für gewisse Winkel. Berechnung einfacher rechtwinkliger Dreiecke. Einfache Beziehungen zwischen den Funktionen. Darstellung der Funktionen durch Linien am Kreise. |     |
| II. Berechnung rechtwinkliger und gleichschenkliger Dreiecke und regelmäßiger Vielecke . . . . .                                                                                                                       | 258 |
| III. Die Funktionen des stumpfen Winkels und das allgemeine Dreieck . . . . .                                                                                                                                          | 261 |
| Die Funktionen im zweiten Quadranten und ihre Darstellung durch Linien am Kreise. Sinussatz. Kosinussatz. Sinusquadratatz. Die Hauptaufgaben der Dreiecksberechnung. Der Tangentensatz in geometrischer Ableitung.     |     |
| Zusammenstellung der wichtigsten Ergebnisse . . . . .                                                                                                                                                                  | 269 |



## Vierte Abteilung.

## Stereometrie.

## Lehraufgabe der Untersekunda.

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | Seite |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Vorbemerkungen . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 270   |
| I. Übungen am Würfel und an den aus ihm abgeleiteten Körpern . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 271   |
| <p>Zeichnen des Würfels in verschiedenen Projektionen. Berechnungen am Würfel. Sein Flächenneß. Das regelmäßige Achteck, seine Elemente und sein Flächenneß. Das regelmäßige Viereck, seine Elemente und sein Flächenneß. Durchdringungen zweier Vierecke, zweier Würfel, zweier Achtecke. Der Pyramidenwürfel. Das Rhombendodekaeder und sein Flächenneß. Das Pentagondodekaeder, aus dem Würfel abgeleitet. Grundriß, Aufriß und Neß des regelmäßigen Zwölfecks. Berechnung seiner Elemente. Ableitung des regelmäßigen Zwanzigecks aus ihm. Das dem Oktaeder einbeschriebene Ikosaeder. Zwei demselben Würfel umbeschriebene Dodekaeder und zwei demselben Oktaeder einbeschriebene Ikosaeder in ihren Durchdringungen. Konstruktion des Ikosaeders aus dem Achsenkreuz mit stetig geteilter Halbachse. Berechnung seiner Elemente. Grund- und Aufriß des Ikosaeders. Zusammenhang zwischen den Projektionen des Dodekaeders und Ikosaeders. Einige Halbstumpfe und ihre reziproken Körper. Der Stern der fünf regelmäßigen Tetraeder. Bemerkungen über die Platonischen und Archimedischen Körper und ihre reziproken.</p> |       |
| II. Senkrechte Prismen und Zylinder . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 305   |
| <p>Der Rechteckkörper und seine Elemente. Inhaltsformel für senkrechte Prismen und Zylinder von beliebiger Grundfläche. Projektionen von senkrechten Prismen und Zylindern.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |       |
| III. Der Satz des Cavalieri und seine wichtigsten Anwendungen . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 310   |
| <p>Planimetrische Veranschaulichung des Satzes. Stereometrische Erläuterung. Einfache Beispiele dazu. Inhaltsformel für Pyramiden und Kegel. Inhalt und Oberfläche der Kugel. Mantelfläche des senkrechten Kreiskegels. Die Formel <math>J = \frac{Og}{3}</math> für Polyeder, die einer Kugel umbeschrieben sind.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |       |
| IV. Vermischte Übungsaufgaben . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 316   |
| Zusammenstellung der wichtigsten Ergebnisse . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 318   |
| Anhang: Das griechische Alphabet . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 320   |



# Erste Abteilung. Planimetrie.

## A. Planimetrische Lehraufgabe der Quarta und Untertertia.

### I. Übersichtliche Zusammenstellung und Ergänzung der planimetrischen Ergebnisse des Vorkursus.

#### a) Einige Vorbegriffe und ihre Erklärungen.

##### $\alpha$ ) Die Mathematik und ihre Teile.\*)

1) Die Mathematik ist die Lehre von den Größen. Sie zerfällt in die reine und die angewandte Mathematik. (Vgl. Vorkursus I.)\*\*)

$\alpha_1$ ) Die reine Mathematik ist die Lehre von den Raum- und den Zahlengrößen.

Die Geometrie oder Raumlehre ist die Lehre von den Raumgrößen.

Die Arithmetik oder Zahlenkunde ist die Lehre von den Zahlengrößen.

$\alpha_2$ ) Die angewandte Mathematik ist die Lehre von allen anderen meßbaren Größen.

(Hierher gehören z. B. die Zeitgrößen und die Geschwindigkeiten, die mechanischen Größen wie Kräfte, Gewichte, Massen, Druckspannungen, Zugspannungen, Arbeiten, Maschinenleistungen, physikalische Größen aller Art, wie Lichtstärke, Wärme, magnetische und elektrische Kräfte usw.)

\*) Um an die griechischen Buchstaben zu gewöhnen, hat Verfasser solche zur Zählung der Abschnitte benutzt. Das griechische Alphabet befindet sich am Schlusse dieses Bandes.

\*\*) Es wird angenommen, daß der Vorkursus sich in der Hand des Lehrers befinde. Dort sind ausführlichere Erläuterungen gegeben. Hier soll mehrfach auf diese hingewiesen werden und zwar unter Angabe der Nummern der dortigen Paragraphen.



β) Der mathematische Raum und die geometrischen Gebilde.

2) Der Weltraum ist das Gebiet, in dem sich alle wirklichen oder physischen Körper befinden, und in dem alle möglichen Bewegungen (Ortsveränderungen) stattfinden. Er enthält z. B. die gesamte uns bekannt gewordene Fixsternwelt und erstreckt sich nach menschlicher Auffassung über diese hinaus nach jeder Richtung hin ins Unendliche (Endlose, Unbegrenzte, Unmeßbare). Wie sich der Weltraum außerhalb der Fixsternwelt verhält, ist uns vollständig unbekannt, sodaß man sogar seine Unendlichkeit nicht nachweisen, sondern nur vermuten oder voraussetzen kann. Deshalb denke man sich statt des wirklichen Weltraums einen mathematischen Raum, dem bestimmte Eigenschaften zuzuschreiben sind, die sich auch auf das unendlich ferne Gebiet beziehen sollen. (Vorkursus § 1.)

3) Der mathematische Raum, den wir uns denken wollen, soll folgende Eigenschaften haben: Er erstreckt sich nach allen Richtungen hin ununterbrochen ins Unendliche. Er ist in jeder Hinsicht unverändert und befindet sich z. B. im Zustande vollkommener Ruhe (Unbeweglichkeit).\*) Er ist in allen Teilen gleichartig und vollkommen stoffleer, besitzt also keine physikalisch-chemischen Eigenschaften.\*\*\*) Er ist lediglich als ausgedehnt und als in Teile zerlegbar zu denken. Unter den unendlich zahlreichen Richtungen pflegt man im Hinblick auf die Stellung des Beobachters drei Hauptrichtungen auszuwählen, z. B. von vorn nach hinten, von rechts nach links, von unten nach oben. Allgemeiner spricht man von drei Dimensionen (Ausdehnungen) des mathematischen Raumes\*\*\*), worüber erst später eingehend berichtet werden soll. (Gewöhnlich bezeichnet man diese Dimen-

\*) Die Alten hielten die Erde für unbewegt und meinten, um diese drehe sich das gesamte Weltall. Später hielt man die Sonne für das in Ruhe befindliche Zentrum des Weltalls. Bald mußte man auch diese als im Weltraume sich bewegend annehmen. So wurde man zur Annahme eines ruhenden Weltraumes genötigt. Dem entspricht die Annahme eines in Ruhe befindlichen mathematischen Raumes.

\*\*) Gewisse Unregelmäßigkeiten, die man im wirklichen Raume wahrnimmt, haben ihren Grund in seiner unregelmäßigen Stoffzufüllung. Ein schräg ins Wasser getauchter geradliniger Stab z. B. erscheint als gebrochen. Solche Unregelmäßigkeiten sind im mathematischen Raume ausgeschlossen.

\*\*\*\*) Auf die Untersuchung mathematischer Räume von mehr als drei Dimensionen kann die Schule nicht eingehen. Der hier zu besprechende Raum wird als der Euklidische Raum bezeichnet. Euklid, der um 300 v. Chr. gelebt und nach Pappus in Alexandria gewirkt hat, stellte die Elemente der Mathematik in mustergültiger Weise zusammen.



fionen als Länge, Breite und Höhe.) Nur von diesem mathematischen Raume soll von jetzt ab die Rede sein.

4) Ein **mathematischer Körper** ist ein Teil des Raumes, der vollständig gegen den übrigen Raum abgegrenzt ist. Diese Abgrenzung geschieht durch Gebilde, die man als **Flächen** bezeichnet. (Diese bedürfen noch der näheren Erläuterung.) Von der Art der Begrenzung hängt die besondere **Gestalt** (Form) des Körpers ab. Die Größe des Raumes, den ein Körper einnimmt, bezeichnet man als seinen **Rauminhalt** oder kürzer als seinen **Inhalt**. Jeder mathematische Körper ist teilbar durch Flächen. Er wird als im Raum bewegbar angenommen. Nur von mathematischen Körpern soll von jetzt ab gesprochen werden. (Über die Unterschiede zwischen wirklichen und mathematischen Körpern vgl. Vorkursus §§ 2, 7, 8.)

**[Bemerkungen.]** Ein Körper kann sich ganz im Endlichen (im meßbaren Gebiete) befinden, er kann sich aber auch vom Endlichen aus bis ins Unendliche (Unmeßbare) erstrecken. Hier soll zunächst nur von endlichen Körpern die Rede sein. Diese haben eine bestimmt vorstellbare Gestalt und einen endlichen Inhalt.

Reicht der Körper bis ins Unendliche, so kann zwar seine Gestalt auch dort eine bestimmt vorgeschriebene sein, aber von eigentlicher Vorstellbarkeit kann dann nicht mehr gesprochen werden, auch wird der Inhalt im allgemeinen unbestimmbar, weil er im allgemeinen unendlich groß wird. (Trotzdem gibt es mathematische Körper, die bis ins Unendliche reichen und doch einen endlichen genau bestimmbaren Inhalt haben.)\* Die Begrenzung eines ganz im Endlichen liegenden

\*) Diese Behauptung erscheint auf den ersten Blick unwahrscheinlich. Lediglich zu dem Zwecke, vor übereilten Ausprüchen über das Unendliche zu warnen, soll ein einfaches Beispiel angegeben werden.

Man denke sich eine senkrecht stehende Säule von quadratischer Grundfläche. Die letztere fasse 1 qm, die Säule habe die Höhe von 2 m, also den Inhalt 2 cbm. Man denke sich die Säule durch horizontale Schnitte in Schichten zerlegt, die von unten her der Reihe nach die Höhen 1 m,  $\frac{1}{2}$  m,  $\frac{1}{4}$  m,  $\frac{1}{8}$  m,  $\frac{1}{16}$  m usw. haben, sodaß jedesmal, die noch vorhandene Resthöhe halbiert wird. Man kann sich denken, daß diese Resthalbierung unendlich oft vorgenommen wird, sodaß die Restschicht schließlich unendlich dünn wird und ihre Höhe allmählich immer näher an Null heranrückt. Die einzelnen Schichten haben dann der Reihe nach die Inhalte 1 cbm,  $\frac{1}{2}$  cbm,  $\frac{1}{4}$  cbm,  $\frac{1}{8}$  cbm,  $\frac{1}{16}$  cbm usw. Die Summe der Inhalte ist also  $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots\right)$  cbm



Körpers bezeichnet man als seine Oberfläche. Diese ist zugleich die Grenzfläche seines Außenraumes. Ein Körper kann auch mehrere Oberflächen haben.\*)

5) Eine mathematische Fläche ist zunächst ein Gebilde, welches als Grenze eines Körpers auftritt und demnach benachbarte Räume voneinander trennt. Sie selbst ist nicht ein Teil eines Raumes, sondern die gemeinschaftliche Grenze zweier benachbarter Raumteile. Ihr räumlicher Inhalt ist gleich Null, weil sie keine Dicke besitzt. Ist die Fläche begrenzt, so sind ihre Grenzen Gebilde, die man Linien nennt und die noch der näheren Erläuterung bedürfen. Die Fläche ist teilbar durch Linien. Die Fläche hat, auch wenn sie unbegrenzt ist, eine bestimmte Gestalt; ist sie begrenzt, so ist die Gestalt auch von der Art der Begrenzung abhängig. Die Größe einer Fläche bezeichnet man als den Flächeninhalt. Die Flächen werden als im Raume bewegbar angenommen. (Vgl. Vorkursus § 3.)

und dies muß gleich dem ursprünglichen Inhalte 2 cbm sein. (Daher sagt man, die Summe der bis ins Unendliche fortzusetzenden Reihe  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$  sei gleich 2.)

Jetzt denke man sich die einzelnen Teile der Säule statt übereinander dicht nebeneinander gelegt, sodaß sie einen geradlinigen Streifen von der Breite 1 m bedecken, von dem jeder Teil 1 qm Grundfläche beansprucht. Dann muß dieser Streifen bis ins Unendliche reichen, denn es sind unzählige Körperteile vorhanden, die unendlich viele Quadratmeter bedecken.

Betrachtet man jetzt das Ganze als einen einzigen Körper, so reicht dieser bis ins Unendliche und hat doch nur 2 cbm Inhalt. —

In derselben Weise kann man mit einer solchen Säule von  $1\frac{1}{2}$  m Höhe verfahren, von der man erst eine Schicht von 1 m Höhe abschneidet, dann eine solche von  $\frac{2}{3}$  der Resthöhe, nämlich  $\frac{1}{3}$  m, dann wieder eine solche von  $\frac{2}{3}$  der Resthöhe usw. Dabei erhält man in derselben Weise die Reihe  $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots = \frac{3}{2}$ . Mit den Körperteilen kann jetzt ebenso verfahren werden, wie vorher. Der neue Körper erstreckt sich dann wieder ins Unendliche und hat doch nur den Inhalt  $\frac{3}{2}$  cbm.

An solchen Beispielen erkennt man, daß es in vielen Fällen falsch ist, von der Erstreckung eines Körpers ins Unendliche darauf zu schließen, daß sein Inhalt unendlich groß sei.

\*) Als Beispiel sei die Hohlkugel genannt, die eine äußere und eine innere Oberfläche hat.



[**Bemerkungen.** Eine Fläche kann ganz im Endlichen liegen und muß dabei nicht notwendig durch Linien begrenzt sein, denn sie kann vollständig in sich zurücklaufen. \*) Eine Fläche kann teilweise in sich zurücklaufen, teilweise sich ins Unendliche erstrecken \*\*). Eine Fläche kann ins Unendliche reichen, ohne im Endlichen irgendwie in sich zurückzulaufen oder irgendwie begrenzt zu sein. \*\*\*) Flächen, die bis ins Unendliche reichen, haben im allgemeinen einen unendlich großen Flächeninhalt. (Trotzdem gibt es Flächen, die bis ins Unendliche reichen und doch einen endlichen, genau bestimmbareren Flächeninhalt haben. †) Eine ganz im Endlichen befindliche Fläche hat im allgemeinen einen endlichen Flächeninhalt. (Trotzdem gibt es Flächen solcher Art, deren Inhalt unendlich groß ist). ††)

Die Begrenzung einer im Endlichen liegenden Fläche nennt man ihre Umrandung oder ihren Umfang. Eine Fläche kann auch mehrere Umrandungen haben. Als Beispiel diene die Fläche zwischen zwei Kreisen derselben Ebene, von denen der eine den andern umschließt, ohne ihn zu berühren.

6) Eine Linie ist zunächst ein Gebilde, welches eine Fläche begrenzt oder benachbarte Flächenteile voneinander trennt. Sie selbst ist nicht ein Teil einer Fläche, sondern die gemeinschaftliche Grenze zweier benachbarter Flächenteile. Ihr Flächeninhalt ist gleich Null, weil sie keine Breite hat. Ist die Linie begrenzt, so sind die Grenzen Gebilde, die man als Punkte bezeichnet und die noch der

\*) Das einfachste Beispiel ist die Kugelfläche. Diese ist unbegrenzt und liegt doch ganz im Endlichen, sobald nur der Radius endlich ist. Die Kugelfläche hat dabei eine bestimmte Gestalt. Man kann aus dieser Fläche Teile ausschneiden, deren Gestalt nun auch durch die Grenzlinien bestimmt ist.

\*\*) Beispiele sind die Mantelflächen des Kreiszylinders und des Kreiskegels, die sich bis ins Unendliche erstrecken können.

\*\*\*) Ein Beispiel ist die Ebene.

†) Als Beispiel diene eine der beiden bis ins Unendliche reichenden senkrechten Grenzflächen des in der Randbemerkung zu 4) besprochenen ersten Körpers. Die Teile dieser Fläche haben zusammen genommen den Flächeninhalt  $(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots) \text{ qm} = 2 \text{ qm}$ .

††) Man kann sich auf einem endlichen Zeichenblatt eine Linie denken, die aus unendlich vielen Kreuz- und Quersügen oder Windungen besteht, so daß ihre Länge unendlich groß ist. Denkt man sich über dieser Linie einen „Zylindermantel“ von nur 1 cm Höhe errichtet, so ist dessen Flächeninhalt unendlich groß, obwohl er ganz im Endlichen liegt. Auch dieses Beispiel soll nur vor übereilten Aussagen über das Unendliche warnen.



näheren Erläuterung bedürfen. Jede Linie ist durch Punkte teilbar. Sie hat eine bestimmte Gestalt (Form). Die Größe einer Linie bezeichnet man als ihre Länge. Die Linien werden als im Raume bewegbar angenommen. (Vgl. Vorkursus § 4.)

[**Bemerkungen.** Eine Linie kann ganz im Endlichen liegen und muß dabei nicht notwendig eine Grenze haben, denn sie kann in sich zurücklaufen.\*\*) Eine bis ins Unendliche reichende Linie ist stets von unendlicher Länge. Eine ganz im Endlichen liegende Linie ist im allgemeinen von endlicher Länge. Trotzdem gibt es Linien, die ganz im Endlichen liegen und doch von unendlicher Länge sind.\*\*\*) Mathematische Linien sind „unsichtbar“\*\*\*\*), da sie keine Breite haben. Man kann sie durch dünne Fäden oder durch gezeichnete „Linien“ nur veranschaulichen.]

7) Ein Punkt ist zunächst ein Gebilde, welches eine Linie begrenzt oder benachbarte Linienteile voneinander trennt. Er selbst ist kein Teil einer Linie, sondern nur das Ende einer solchen oder die gemeinschaftliche Grenze benachbarter Linienteile. Seine Länge ist gleich Null. Er ist also nur eine im Raume gedachte Stelle, die überhaupt keine Ausdehnung hat, also weder Gestalt noch Größe besitzt und auch nicht teilbar ist. Die Punkte werden als im Raume bewegbar angenommen.

Mathematische Punkte sind unsichtbar. Man kann sie nur veranschaulichen.

8) Es gibt also an einfachen geometrischen Gebilden nur die folgenden: Körper, Flächen, Linien und Punkte. Daher gibt es für die Raumlehre nur Raumgrößen (im engeren Sinne), Flächengrößen, Liniengrößen (oder Längen), während man von Punktgrößen nicht reden kann. Dies führt auf die Raummaße, Flächenmaße und Längenmaße.

\*) Das einfachste Beispiel ist die Kreislinie.

\*\*) Vgl. die letzte zu 5) gegebene Randbemerkung.

\*\*\*)) Das Wort „unsichtbar“ ist nur aus Gründen der Veranschaulichung gebraucht, da im mathematischen Raume von Lichterscheinungen nicht die Rede sein kann. Auch bei Punkten wird in diesem veranschaulichenden Sinne von „Unsichtbarkeit“ gesprochen. Trotzdem wird später vielfach vom Erscheinen solcher Gebilde gesprochen. Anstelle des wirklichen Auges hat man sich dabei ein geistiges Auge zu denken, bei dem die Schärfe der Sehkraft als eine unendlich große zu denken ist, sodaß ihm sogar Unendlichkleines sichtbar ist.



Als zusammengesetzte geometrische Gebilde kann man sich Gruppen von Körpern, Gruppen von Flächen, Gruppen von Linien, Gruppen von Punkten und auch Gruppen verschiedenartiger dieser Gebilde denken.

Jetzt wird folgende Erklärung verständlich sein:

Die Raumlehre oder Geometrie beschäftigt sich mit den gesetzmäßig gestalteten mathematischen Körpern und den an ihnen auftretenden oder auch als selbständig zu denkenden Flächen, Linien und Punkten, mit den Eigenschaften und gegenseitigen Beziehungen dieser Gebilde, mit ihrer Berechnung und Konstruktion. (Vgl. Vorkursus § 9.)

7) Bewegungsbeziehungen und Ausdehnungen oder Dimensionen.

9) Durch Bewegung eines Punktes im Raume entsteht als Weg eine Linie. Dieser Weg hat eine (endliche oder eine unendliche) Länge, aber keine Breite und keine Dicke. Man sagt daher: Eine Linie hat nur eine einzige Dimension, die Länge. (Vorkursus § 44 und 45.)

10) Durch Bewegung einer Linie entsteht als Weg im allgemeinen eine Fläche. Zur Längenausdehnung der Linie tritt dabei eine neue Ausdehnung, die als Breite bezeichnet werden soll. Man sagt daher: Eine Fläche hat zwei Dimensionen, Länge und Breite.

Für die Bewegung wird dabei vorausgesetzt, daß die Linie sich nicht in sich selbst bewege, sondern seitlich aus ihrer Lage heraustrete. (Vorkursus § 46.)\*

11) Durch Bewegung einer Fläche entsteht als Weg im allgemeinen ein Körper. Zu den Dimensionen Länge und Breite tritt dabei eine neue, die man als Dicke oder auch als Höhe bezeichnet. Man sagt daher: Ein Körper hat drei Dimensionen, Länge, Breite und Dicke (oder Höhe).

Für die Bewegung wird dabei vorausgesetzt, daß die Fläche sich nicht in sich selbst bewege, sondern seitlich aus ihrer Lage heraustrete.\*

\*) Daß sich Linien ohne jede Gestaltveränderung in sich selbst bewegen können, sodaß keine Fläche entsteht, erkennt man z. B. an der Geraden, am Kreise, an der Schraubenlinie. Daß sich Flächen ohne Gestaltveränderung in sich selbst bewegen können, sodaß kein Körper entsteht, erkennt man z. B. an der Ebene, am Kreiszylinder, am senkrechten Kreiskegel, an der Kugel, an jeder Drehungsfläche und an jeder Schraubenfläche. Auch gewisse entsprechende Körper können sich so in sich selbst bewegen, daß sie nicht aus sich selbst



[**Bemerkungen.** Durch Bewegung eines Körpers entsteht im allgemeinen wieder ein körperlicher Weg. Eine vierte Dimension nämlich, in die ein Körper z. B. mit allen Punkten zugleich hinaustreten könnte, ist uns im Weltraum nicht sinnlich wahrnehmbar. Daher nehmen wir auch für unseren mathematischen Raum an, er besitze nur die genannten drei Dimensionen.\*)

In jedem endlichen Körperteile kann man sich einen kleinen Würfel denken, an dessen Kanten man Länge, Breite und Höhe erkennt. Demnach muß der Körper selbst alle drei Dimensionen haben. Auf jeden endlichen Teil einer (z. B. krummen) Fläche kann man im allgemeinen ein sehr kleines Quadrat zeichnen (z. B. auf die Kugelfläche.) An den Seiten des Quadrates erkennt man die Länge und Breite. Die beiden ersten Dimensionen besitzt also auch die Fläche, aber sie hat keine Dicke. Von jeder z. B. krummen Linie läßt sich im allgemeinen ein so kleines Stück ausschneiden, daß man es als geradlinig betrachten kann. An ihm beobachtet man nur die Länge, aber keine Breite und Dicke. So hat auch die ganze Linie nur die Dimension Länge, nicht aber die Dimensionen Breite und Dicke.]

12) Umgekehrt kann man sich folgendes vorstellen: Läßt man bei einem Körper die Dicke so zusammenschrumpfen, daß sie schließlich überall verschwindet (gleich Null wird), so bleibt nur noch eine Fläche übrig. Läßt man bei dieser die Breite so zusammenschrumpfen, daß diese schließlich überall verschwindet, so bleibt nur eine Linie übrig. Läßt man bei dieser die Länge so zusammenschrumpfen, daß letztere schließlich gleich Null ist, so bleibt nur noch ein Punkt übrig. (Vgl. Vorkursus § 44.)

d) Das gegenseitige Schneiden und Durchdringen geometrischer Gebilde.

13) Schneiden einander zwei Linien einmal oder öfter, so geschieht es jedesmal in einem Punkte. Also: Jeder Schnitt zweier Linien ist ein Punkt. Der Schnittpunkt ist beiden Linien gemeinsam.\*\*\*) Eine krumme Linie kann auch sich selbst schneiden. (Vorkursus § 6.)

heraustreten und ihre Bewegung nicht wahrnehmbar ist, z. B. jeder Drehungskörper, der sich um seine Achse dreht, jeder beiderseits ins Unendliche reichende Zylinder, jeder ebenso ins Unendliche reichende Schraubenkörper, der sich in entsprechender „Schraubung“ bewegt.

\*) Wer sich einen Raum mit mehr als vier Dimensionen denken will, der möge sich mit dessen Geometrie beschäftigen. Mit unserem Euklidischen Raume haben solche Untersuchungen nichts zu schaffen.

\*\*) **Beispiele:** Zwei gerade Linien haben höchstens einen Schnittpunkt,



14) Schneiden einander zwei Flächen einmal oder mehrfach, so geschieht es jedesmal in einer Linie. Also: Jeder Schnitt zweier Flächen ist eine Linie. Die Schnittlinie ist beiden Flächen gemeinsam.\*) Eine gekrümmte Fläche kann auch sich selbst schneiden. (Vorkursus § 6.)

15) Schneiden einander eine Linie und eine Fläche einmal oder öfter, so geschieht es jedesmal in einem Punkte. Also: Jeder Schnitt einer Linie und einer Fläche ist ein Punkt. Der Schnittpunkt ist beiden Gebilden gemeinsam.\*\*)

16) Bei Körpern spricht man nicht von gegenseitigem Schneiden, sondern von gegenseitigem Durchdringen. „Wahrnehmbar“ ist dabei nur das gegenseitige Durchschneiden ihrer Oberflächen, welches in Linien geschieht. Darüber soll erst in der Stereometrie gesprochen werden. Gekrümmte Körper können so gestaltet sein, daß Teile von ihnen einander durchdringen. (Vorkursus § 6.)

e) Begriff der geraden Linie und der Richtungen im Raume.

17) Die gerade Linie wird in der Regel veranschaulicht durch einen straff gespannten Faden, der sich zwischen zwei nicht allzuweit voneinander entfernten Punkten befindet.\*\*\*) Man schließt daraus: Die gerade Linie ist der kürzeste Weg zwischen je zweien ihrer Punkte. Daraus folgt z. B., daß die Summe zweier Dreiecksseiten stets größer ist als die dritte, auch wenn letztere die größte von ihnen ist. In einem Dreiecke  $ABC$  z. B., dessen Ecken die Seiten  $a, b, c$  gegenüberliegen, sei  $c$  die größte Seite, dann

zwei Kreise haben höchstens zwei Schnittpunkte, zwei Ellipsen haben höchstens vier Schnittpunkte usw.

\*) **Beispiele:** Zwei Ebenen können einander höchstens in einer Geraden schneiden. Drei Ebenen können einander höchstens in drei Geraden schneiden. Zwei Kugelflächen können einander in einer Kreisklinie schneiden. Eine Ebene und eine Kugelfläche können einander in einer Kreisklinie schneiden.

\*\*) Eine Gerade und eine Ebene können einander höchstens in einem Punkte schneiden, eine Kreisklinie und eine Ebene höchstens in zwei Punkten, eine Gerade und eine Kugelfläche in höchstens zwei Punkten.

\*\*\*) Diese Veranschaulichung versagt bei größeren Entfernungen der beiden Punkte. So geben z. B. Telegraphendrähte und Telephondrähte trotz aller Zugspannung doch krumme „Linien“. Dasselbe gilt von Seilen, auch Drahtseilen, von längeren Ketten usw. Man nennt die so veranschaulichten Linien Kettenlinien. Die Abweichung von der geradlinigen Form erfolgt durch die Wirkung der Schwerkraft. Ein längerer Telegraphendraht würde zerreißen, ehe er durch Zugspannung ganz geradlinig würde. Ein in senkrechter Richtung gespannter Draht wird jedoch stets geradlinig.



ist doch  $a + b > c^*)$ , denn der direkte Weg von  $B$  bis  $A$  ist kürzer als der Umweg  $BC + CA$ .

Daraus folgt ferner  $(a + b) - b > c - b$ , oder  $a > c - b$  d. h. jede Dreiecksseite, auch die kleinste, ist größer als der Unterschied der beiden andern. (Daß  $a + b - b = a$  ist, erscheint leichtverständlich.)

18) Man kann das Auge in Lagen bringen, in denen jedes Stück einer Geraden als Punkt erscheint.\*\*) Der vorderste Punkt verdeckt dabei alle andern Punkte der Geraden.

19) Daher sagt man: Für diese Lage des geistigen Auges liegen alle Punkte der Geraden in derselben Richtung. Ebenso sagt man allgemeiner: Die Gerade hat in allen ihren Teilen dieselbe Richtung. Sind  $A$  und  $B$  die Endpunkte der Geraden, so kann man ihr zwei Richtungen zuschreiben, die Richtung von  $A$  nach  $B$  oder die Richtung von  $B$  nach  $A$ . Daraus folgt ferner:

20) Die Gerade kann in ihrer Richtung bewegt werden, ohne seitlich aus der „Richtungslinie“ hervorzutreten. Durch diese Bewegung erhält man nicht eine Fläche, sondern nur die Verlängerung der Geraden. Die Gerade kann nach beiden Richtungen hin ins Unendliche verlängert werden.

21) Dreht man die Gerade unter Festhaltung zweier ihrer Punkte, so nimmt das (geistige) Auge nichts von einer Lagenänderung wahr. (Dagegen würden krumme Linien bei dieser Drehungsbewegung dem Auge in unendlich vielen verschiedenen Lagen erscheinen.) Man schließt daraus: Zwischen je zwei (im Endlichen liegenden) Punkten ist nur eine einzige Gerade möglich. Oder: Eine Gerade ist durch zwei ihrer Punkte vollständig bestimmt.

22) Weil zwischen zwei Punkten nur eine einzige Gerade möglich ist und diese den kürzesten Weg gibt, so mißt man den gegenseitigen Abstand der beiden Punkte mittels dieser Geraden. Also: Die gegenseitige Entfernung zweier Punkte ist gleich der Länge der sie verbindenden Geraden.

23) Aus 21) folgt noch: Zwei Geraden können höchstens einen im Endlichen liegenden Schnittpunkt haben. Hätten sie

\*) Das Zeichen  $>$  bedeutet „größer als“, das Zeichen  $<$  bedeutet „kleiner als“.

\*\*) Der ausgesprochene Satz sagt eigentlich nur, daß eine Gerade eine Ebene nur in einem Punkte schneiden kann. Auf einem höheren Standpunkte wird er so ausgedrückt: Kann die Projektion einer Linie auf eine Ebene ein Punkt sein, so ist die Linie eine Gerade.



nämlich zwei solche, so würden zwischen zwei im Endlichen liegenden Punkten zwei Geraden möglich sein, was dem in 21) angegebenen Satze widerspräche.

24) Zwei gleich lange Geraden können auf zweierlei Art zur Deckung gebracht werden. Ist  $AB$  die eine Gerade,  $A_1B_1$  die andere, so kann man  $AB$  sowohl auf  $A_1B_1$  als auch auf  $B_1A_1$  legen. Statt dieses Satzes sagt man auch: Zwei Geraden von derselben Länge sind auf zweierlei Art kongruent.

25) Eine nur einseitig begrenzte Gerade bezeichnet man als Strahl. Den Grenzpunkt bezeichnet man als seinen Ausgangspunkt oder Anfangspunkt. Seine Richtung geht von diesem aus ins Unendliche. So kann man sich z. B. vom Auge aus nach jedem Punkte des scheinbaren Himmelsgewölbes eine Gerade gezogen und diese bis ins Unendliche verlängert denken. Allgemeiner gilt:

Von jedem Raumpunkte gehen unendlich viele Strahlen aus. Die Gesamtheit aller dieser Strahlen bezeichnet man als das Strahlenbündel des Punktes. Durch das Strahlenbündel werden alle von dem Punkte ausgehenden Richtungen im Raume angegeben.

26) Linien, die nicht alle Eigenschaften der Geraden besitzen, nennt man krumme Linien oder Kurven. (Man vgl. Vorfursus § 11—16.)

2) Begriff der Ebene, der ebenen Gebilde und der Planimetrie.

27) Eine Ebene ist eine unbegrenzte Fläche, in der sich von jedem ihrer Punkte aus nach jedem andern (ihrer Punkte) eine Gerade ziehen läßt, die nirgends, auch in ihrer Verlängerung nicht, aus dieser Fläche austritt.

28) Von jedem Punkte der Ebene gehen also unendlich viele ganz in ihr liegende Strahlen aus. Die Gesamtheit aller dieser Strahlen bezeichnet man als das (ebene) Strahlenbüschel des Punktes. Durch dieses Strahlenbüschel werden alle von dem Punkte ausgehenden Richtungen in der Ebene angegeben.

29) Das Auge kann in Lagen gebracht werden, in denen ihm ein irgendwie begrenztes Stück der Ebene als eine gerade Linie erscheint.\*)

\*) Der Satz ist im Grunde derselbe, wie der Satz, daß zwei Ebenen einander nur in einer Geraden schneiden können. Auf einem höheren Standpunkte wird gesagt: Eine Fläche, deren Projektion auf eine Ebene eine Gerade sein kann, ist stets eine Ebene.



30) Statt dessen kann man sagen: Bewegt sich ein Strahl um seinen festliegenden Anfangspunkt so, daß er stets auf einer festen Geraden hingeleitet, die nicht durch diesen Punkt geht, so beschreibt er eine Ebene. (Statt des Strahles kann man auch die unbegrenzte Gerade nehmen.) Daraus folgt:

31) Eine Ebene ist durch eine Gerade und einen außerhalb dieser liegenden Punkt vollständig bestimmt. Daraus folgt ferner:

32) Eine Ebene ist durch drei Punkte vollständig bestimmt; denn zwei davon kann man durch eine Gerade verbinden. Daraus folgt ferner:

33) Durch zwei einander schneidende Geraden ist eine Ebene vollständig bestimmt. Die eine Gerade kann man nämlich als die feste Gerade, einen beliebigen Punkt der andern kann man als den Drehungspunkt des Strahles betrachten, die zweite Gerade als den bewegten Strahl in einer seiner Lagen. Gleitet also eine Gerade auf zwei festen einander schneidenden Geraden hin, so beschreibt sie eine Ebene.

34) Bei der unter 30) beschriebenen Bewegung tritt der Fall ein, daß der Durchschnittspunkt der gedrehten und der festgehaltenen Geraden in unendliche Entfernung rückt. Dann sagt man, die feste Gerade und die bewegte Gerade sind in dieser Lage parallel, sie haben dabei dieselbe Richtung, sie gehen nach demselben unendlich fernen Punkte hin. Daraus folgt für 33), daß der Schnittpunkt der beiden Geraden auch in unendlicher Entfernung liegen darf. Also ergibt sich der Satz: Durch zwei parallele Geraden ist stets eine Ebene vollständig bestimmt. Oder: Gleitet eine Gerade auf zwei festen parallelen Geraden hin, so beschreibt sie eine Ebene. Oder: Durch zwei parallele Geraden läßt sich stets eine Ebene legen.

35) Umgekehrt kann man sagen: Schneiden einander zwei Geraden im Raume nicht, so weit man sie auch verlängert, läßt sich aber durch beide eine Ebene legen, so sind die Geraden parallel. (Es gibt Geraden im Raume, die noch so weit verlängert, einander nicht schneiden, durch die sich aber keine Ebene legen läßt. Solche Gerade nennt man windschiefe Gerade.)

Über diese Sätze muß aber noch ausführlicher gesprochen werden.

36) Flächen, die nicht alle Eigenschaften der Ebene besitzen, nennt man krumme Flächen.



37) Geometrische Gebilde, die ganz in derselben Ebene liegen, bezeichnet man als ebene Gebilde.

Geometrische Gebilde, die nicht ganz in derselben Ebene liegen, bezeichnet man als nicht ebene, oder als unebene oder als räumliche Gebilde (im engeren Sinne).

So gibt es ebene Punktgruppen und räumliche Punktgruppen; ebene Liniengruppen und räumliche Liniengruppen; ebene und räumliche Gruppen von Punkten und Linien und ebene und räumliche Gruppen von Flächenstücken; es gibt ebene Kurven und räumliche Kurven.

38) Demnach zerfällt die Geometrie in zwei Teile, in die Geometrie der ebenen Gebilde oder die Planimetrie und in die Geometrie der räumlichen Gebilde (im engeren Sinne) oder die Stereometrie.

Vorläufig soll nur noch von der Planimetrie die Rede sein. In ihr kann man hinsichtlich der Größenmessung von Längenmessung (Longimetrie) und Flächenmessung (Planimetrie im engeren Sinne) sprechen. (Vgl. zu diesem Abschnitte Vorkursus § 20—29.)

η) Begriff des Kreises\*), des regelmäßigen Vielecks und ihrer Teile.

39) Bewegt sich ein Punkt, ohne umzukehren, in einer Ebene so, daß er von einem gegebenen festen Punkte der letzteren stets denselben Abstand behält, so kehrt er schließlich in die ursprüngliche Lage zurück. Der nach einem solchen Umlaufe zurückgelegte Weg wird als eine Kreislinie bezeichnet. Der feste Punkt heißt ihr Mittelpunkt, oder ihre Mitte, oder ihr Zentrum.

Die Kreislinie ist diejenige ebene, in sich zurücklaufende Kurve, deren Punkte von einem bestimmten festen Punkte der Ebene denselben Abstand haben. (Man vgl. zu diesem Abschnitte Vorkursus VI.)

40) Jede Verbindungslinie des Kreiszentrums mit einem Punkte der Kreislinie bezeichnet man als einen Halbmesser oder Radius des Kreises. Die Länge aller Radien eines Kreises ist dieselbe, denn sie ist gleich jenem unveränderlichen Abstände vom Mittelpunkte.

\*) Unter Kreis wird bald die Kreislinie, bald die Kreisfläche verstanden. Der Sprachgebrauch schwankt. Nach Bedürfnis sollen die letzteren Worte gebraucht werden, sonst der Kürze halber das Wort Kreis.



41) Zu jedem Kreisradius gibt es einen anderen von entgegengesetzter Richtung. Jede durch den Mittelpunkt gehende Gerade schneidet also den Kreis in zwei Punkten. Das zwischen den letzteren liegende Stück einer solchen Geraden heißt der Durchmesser des Kreises. Jeder Kreisdurchmesser ist doppelt so lang als der zugehörige Kreisradius. Alle Durchmesser eines Kreises sind also gleich lang. Die Endpunkte jedes Durchmessers heißen Gegenpunkte des Kreises.

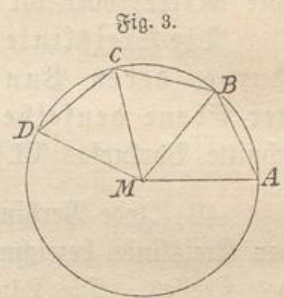
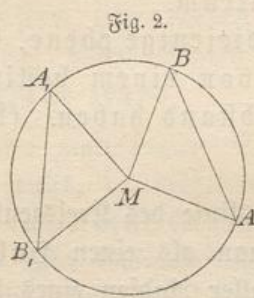
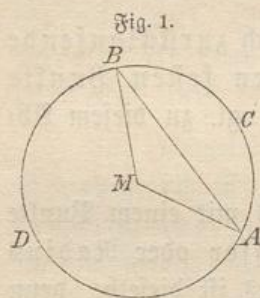
42) Je zwei Kreislinien von demselben Radius decken einander (oder sind kongruent). Legt man nämlich die eine so auf die andere, daß ihr Mittelpunkt auf den der anderen fällt, so müssen auch die beiden Kreislinien sich decken. (Wäre dies nämlich nicht der Fall, so müßten ungleiche Radien vorhanden sein.)

Sie decken einander auf unendlich viele Arten, dreht man nämlich die auf die andere gelegte in der Ebene um ihren Mittelpunkt, so wird die Kongruenz nicht gestört. Jeder Radius des einen Kreises kann mit einem beliebigen des anderen zur Deckung gebracht werden.

Daraus folgt, daß der Kreis ein vollkommen regelmäßiges ebenes Gebilde ist.

43) Jeder Durchmesser teilt die Kreislinie in zwei kongruente Teile, die man als Halbkreise bezeichnet. Kongruent sind sie, weil sich der eine so um das Kreiszentrum drehen läßt, daß beide einander decken. Die Deckung kann auch durch Umklappen der einen Hälfte um den sie begrenzenden Durchmesser erfolgen.

44) Jeder Teil einer Kreislinie heißt ein Kreisbogen. Die gerade Verbindungslinie seiner Endpunkte heißt Sehne. Die ver-



längerte Sehne heißt Sekante. Jede Sehne teilt den Kreis in zwei verschiedene Kreisbögen, in einen kleineren und einen größeren Kreisbogen. Jeder kann als der zum anderen gehörige Restbogen bezeichnet werden. (Fig. 1.)

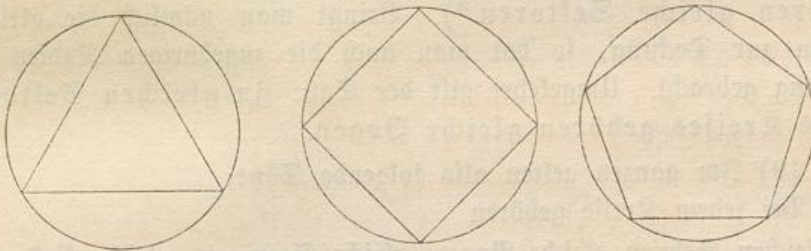


45) Zu gleichen Sehnen eines Kreises gehören gleiche Bogen.\*) Sind nämlich zwei Sehnen eines Kreises gleich, so lassen sie sich durch Drehung der einen um das Kreiszentrum zur Deckung bringen. Dabei decken einander sowohl die beiden kleinen Bogen, als auch die zugehörigen Restbogen. Gewöhnlich spricht man nur von dem kleineren Bogen.

Dann gilt die Erklärung: Gleiche Bogen eines Kreises sind also solche, zu denen gleiche Sehnen gehören. (Fig. 2.)

46) Schließt eine Reihe gleicher Sehnen, deren Anzahl größer als zwei ist, nach einem Umlange, so ist die Kreislinie in eine entsprechende Anzahl gleicher Teile eingeteilt. Von den Sehnen sagt man dann: Sie bilden ein regelmäßiges Vieleck. Verbindet man näm-

Fig. 4.



lich die Ecken eines solchen Gebildes durch Radien mit dem Mittelpunkte, so hat man lauter gleichschenklige Dreiecke, von denen jedes mit jedem anderen zur Deckung gebracht werden kann, indem man es um den Mittelpunkt dreht. (Man kann die Sehnen zur Deckung bringen, also auch die zu ihnen gehörigen Radienpaare, denn zwischen einem Endpunkte und dem Mittelpunkte ist nur eine einzige Gerade möglich.)

47) Die von der Kreislinie umschlossene Fläche heißt die Kreisfläche. Sie entsteht z. B. durch Drehung eines Radius um einen seiner Endpunkte. Die Kreisfläche wird durch jede Sehne in zwei Flächen zerlegt, die man Kreisabschnitte oder Segmente nennt. Nur bei dem Durchmesser sind die beiden Segmente kongruent (Halbkreisflächen). Bei anderen Sehnen ist das Segment, in dem das Kreiszentrum liegt, das größere, das andere ist das kleinere. Gewöhnlich versteht man unter dem zu einer Sehne gehörigen Segment das kleinere, während man das größere als das zugehörige Restsegment bezeichnet. (Man kann das kleinere Segment soweit um den Mittelpunkt drehen, daß es ganz innerhalb des größeren liegt.) Dann

\*) Will man den Unterschied festhalten, so sage man: „Zu gleichen Sehnen gehören gleiche Bogenpaare“.



gilt der Satz: Zu gleichen Sehnen eines Kreises gehören gleiche Segmente. \*) Man kann nämlich die Sehnen zur Deckung bringen, mit ihnen auch die Kreisbogen und ihre Mittelpunkte, folglich auch die von Sehne und Bogen umschlossenen Flächen. Umgekehrt gehören zu gleichen Segmenten eines Kreises gleiche Sehnen.

48) Den von zwei Radien begrenzten Teil einer Kreisfläche bezeichnet man als Kreisabschnitt oder Kreissektor. Durch zwei Radien wird die Kreisfläche in zwei Sektoren zerlegt. Nur wenn die beiden Radien einen Durchmesser bilden, sind die beiden Sektoren einander gleich (Halbkreisflächen). Sonst sind sie ungleich. Der kleinere Sektor kann soweit um den Mittelpunkt gedreht werden, daß er ganz innerhalb des größeren liegt. Gewöhnlich meint man bei Angabe eines Sektors den kleineren. Zu gleichen Bogen eines Kreises gehören gleiche Sektoren. \*) Bringt man nämlich die gleichen Bogen zur Deckung, so hat man auch die zugehörigen Radien zur Deckung gebracht. Umgekehrt gilt der Satz: Zu gleichen Sektoren eines Kreises gehören gleiche Bogen.

49) Im ganzen gelten also folgende Sätze:

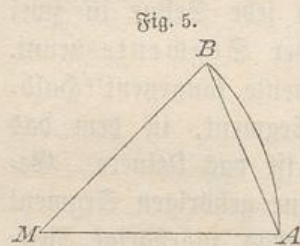
Bei jedem Kreise gehören

|                    |                |                   |                         |
|--------------------|----------------|-------------------|-------------------------|
| zu gleichen Sehnen | gleiche Bogen, | gleiche Segmente, | gleiche Sektoren;       |
| " "                | Bogen          | " Sehnen,         | " Segmente, " Sektoren; |
| " "                | Segmenten,     | " Sehnen,         | " Bogen, " Sektoren;    |
| " "                | Sektoren       | " Sehnen,         | " Bogen, " Segmente.    |

Statt gleich kann man hier überall kongruent sagen.

§) Begriff des Winkels in der Ebene.

50) Gehen von einem festen Punkte der Ebene zwei Strahlen aus, ein in ihr festliegender und ein in ihr um den Punkt drehbarer, so kann man den letzteren zunächst mit dem ersteren zur Deckung bringen und dann in zweierlei Sinne von ihm wegdrehen. Die Drehung kann nämlich im Sinne der Uhrzeigerbewegung und auch im entgegengesetzten Sinne erfolgen. \*\*) Bei dieser Drehung beschreibt jeder Punkt des bewegten Strahles einen Kreis, der sich schließt, sobald der Strahl eine volle Umdrehung gemacht hat. Dieses Schließen

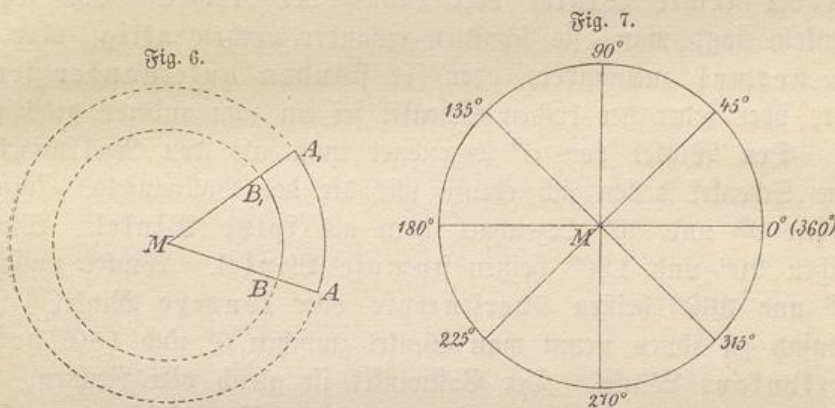


\*) Will man den Unterschied festhalten, so sage man: „Zu gleichen Sehnen gehören gleiche Segmentpaare“ oder: „gleiche Sektorenpaare“ usw.

\*\*) Vielfach bezeichnet man die, der Uhrzeigerbewegung entsprechende



erfolgt für alle Teile des Strahles gleichzeitig. Ebenso vollenden alle Punkte des bewegten Strahles gleichzeitig eine halbe Umdrehung, oder eine dritte Umdrehung, oder zwei Drittel einer Umdrehung usw. Jeder Lage entspricht also für alle Punkte des Strahles ein bestimmter Bruchteil bzw. ein bestimmtes Vielfaches einer vollen Umdrehung (z. B.  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{3}{2}$ ,  $\frac{5}{2}$ ,  $\frac{5}{3}$  Umdrehung). Gewöhnlich spricht man nur von (echten) Bruchteilen der Umdrehung, da sich beim Überschreiten der Anfangslage der Vorgang noch einmal oder mehrfach wiederholt. Jenen Bruchteil der vollen Umdrehung bezeichnet man auch als die Abweichung des bewegten Strahles vom festen Strahle, oder als den Richtungsunterschied beider Strahlen, oder als den Winkel, den beide Strahlen mit-



einander bilden. Die gezeichneten Teile der beiden Strahlen nennt man die Schenkel des Winkels. Ihre Länge ist vollständig gleichgültig und hat keinen Einfluß auf die Größe der Drehung oder auf die Größe des Winkels. Der Winkel ist lediglich das Maß der (besprochenen) Drehung. Der Drehungspunkt heißt Scheitelpunkt oder kürzer Scheitel des Winkels. (Fig. 6.)

51) Im Vorkursus (Abschnitt VI) ist gezeigt worden, wie man teils durch Konstruktion, teils durch Versuche\*) einen Kreis in 2, 3,

Drehung als die negative Drehung, die entgegengesetzte als die positive Drehung. Andere sprechen bzw. von Rechtsdrehung und Linksdrehung.

\*) Man kann zwar gewisse Kreisteilungen mit Zirkel und Lineal exakt (andere mit Hilfe gewisser Kurven annäherungsweise) ausführen. Im allgemeinen sind aber die Teilungen in 7, 9, 11, 13, 19, 23, 25 usw. Teile nur auf dem Wege des probeweisen Absteckens mit Hilfe des Zirkels mit einiger Annäherung durchführbar, worüber im Schlußbände zu sprechen ist. Merkwürdig ist, daß auch die Grundlage der Gradeinteilung, der 360. Teil des Kreises, nur annäherungsweise bestimmt werden kann.



4, 5, 6, 7, 8, 9, ... Teile zerlegen kann. Verbindet man die Endpunkte eines solchen Teiles durch Radien mit dem Kreismittelpunkte, so erhält man Winkel von entsprechender Größe, sodaß die Kreisteilung und die Winkelkonstruktion eng zusammenhängen. Winkel, die von zwei Radien eines Kreises gebildet werden, heißen Zentriwinkel. Durch die (angenäherte) Konstruktion des 360-Grades erhält man zugleich den Winkel, den man als einen Winkelgrad bezeichnet. Die volle Umdrehung gibt einen Winkel von  $360^\circ$ , er heißt Vollwinkel. Seine Schenkel decken einander (vgl. Fig. 7). Die halbe Umdrehung gibt einen Winkel von  $180^\circ$ , er heißt gestreckter Winkel. Seine Schenkel haben entgegengesetzte Richtungen und fallen daher in dieselbe gerade Linie. Der vierte Teil der Umdrehung gibt den Winkel von  $90^\circ$ . Dieser heißt der rechte Winkel oder einfach der Rechte. Von seinen Schenkeln sagt man, sie schneiden einander rechtwinklig, oder sie seien normal zueinander, oder sie ständen aufeinander senkrecht, oder jeder der beiden Schenkel sei ein zum anderen gehöriges Lot. Den Winkel von  $0^\circ$  bezeichnet man als den Nullwinkel. Seine Schenkel decken sich ebenso wie die des Vollwinkels. Winkel zwischen  $0^\circ$  und  $90^\circ$  bezeichnet man als spitze Winkel. Winkel zwischen  $90^\circ$  und  $180^\circ$  heißen stumpfe Winkel. Winkel zwischen  $180^\circ$  und  $360^\circ$  heißen überstumpfe oder konvexe Winkel. Im Gegensatz zu ihnen nennt man Winkel zwischen  $0^\circ$  und  $180^\circ$  hohle oder konkave Winkel. Der Vollwinkel ist gleich vier Rechten, der gestreckte gleich zwei Rechten. Zwei Winkel heißen gleich, wenn ihre Schenkel sich (abgesehen von der Länge) zur Deckung bringen lassen.

52) Ist die Summe zweier Winkel gleich  $360^\circ$ , so heißt jeder der Restwinkel des anderen. Ist die Summe zweier Winkel gleich  $180^\circ$ , so heißt jeder der Supplementwinkel des anderen. Ist die Summe zweier Winkel gleich  $90^\circ$ , so heißt jeder der Komplementwinkel des anderen.

53) [Den sechzigsten Teil eines Winkelgrades bezeichnet man als Minute, den sechzigsten Teil der Minute als Sekunde (den sechzigsten Teil der Sekunde als Tertia) usw. (Erste, zweite, dritte Verminderung.) So sagt z. B.  $\sphericalangle \alpha = 22^\circ 23' 35''$ , der Winkel  $\alpha$  zähle 22 Grad 23 Minuten 35 Sekunden. (Drei Striche würden Tertia bedeuten.) Man kann aber den Winkel auch in Dezimalbruchform schreiben, z. B.  $\sphericalangle \beta = 39^\circ,51$ .] Unter  $\sphericalangle ABC$  versteht man einen Winkel, dessen Scheitel der Punkt  $B$  ist, während  $A$  und  $C$  die Endpunkte der Schenkel sind. Der Scheitel wird also stets in der Mitte genannt.



54) Durch Verlängerung eines Winkelschenkels über den Scheitel hinaus erhält man den Nebenwinkel des Winkels, der zugleich ein Supplementwinkel des gegebenen Winkels ist. Verlängert man beide Schenkel eines Winkels über den Scheitel hinaus, so erhält man zwei einander gleiche Nebenwinkel, außerdem den Scheitelwinkel. Dieser ist dem gegebenen Winkel gleich, denn er ist wie jener der Supplementwinkel für jeden der beiden Nebenwinkel.

55) Aus Gründen der Regelmäßigkeit des Kreises folgt: Zu gleichen Zentriwinkeln eines Kreises gehören gleiche Bogen, gleiche Sehnen, gleiche Segmente, gleiche Sektoren. Bringt man nämlich zwei gleiche Zentriwinkel zur Deckung, so fallen die Endpunkte ihrer Radien paarweise zusammen, ebenso die Endpunkte der zugehörigen Sehnen, der zugehörigen Bogen. Danach läßt sich die unter 49) gegebene Tabelle erweitern.

56) Den halben Umfang des Kreises vom Radius 1 bezeichnet man mit dem griechischen Buchstaben  $\pi$ . Der Umfang ist also  $u = 2\pi$ . Wird der Kreis z. B. im 7-fachen Maßstabe gezeichnet, so ist der Umfang  $u = 2 \cdot 7 \cdot \pi$ ; wird er im  $r$ -fachen Maßstabe gezeichnet, so ist der Umfang  $u = 2r\pi$ . Zunächst durch Messung (durch Umlegen eines möglichst dünnen Fadens um eine Kreisscheibe) findet man, daß  $\pi$  ungefähr gleich  $\frac{22}{7}$  oder ungefähr 3,14 ist.\*) Jedem Bogen des Kreises vom Radius 1, der ein bestimmter Bruchteil des Kreisumfangs ist, entspricht also ein Winkel (Zentriwinkel), der denselben Bruchteil von  $360^\circ$  gibt. So entsprechen einander z. B.  $\frac{\pi}{6}$  und  $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$ ;  $\frac{\pi}{5}$  und  $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$  usw. Man sagt daher: Ein Winkel  $\beta^\circ$  verhält sich zum Winkel  $360^\circ$  ebenso, wie der zugehörige Bogen  $\hat{\beta}$  jenes Kreises zum Bogen  $2\pi$ ; oder: Ein Winkel  $\beta^\circ$  verhält sich zum Winkel  $180^\circ$  ebenso, wie der zugehörige Bogen  $\hat{\beta}$  zum Bogen  $\pi$ . Diesen Satz stellt man in folgender Schreibweise (als folgende Proportion) dar:

$$\beta^\circ : 180^\circ = \hat{\beta} : \pi.$$

\*) Ein genauerer Wert ist  $\pi = 3,14159265\dots$ . Archimedes (geboren 237 v. Chr. zu Syrakus) nahm  $\frac{22}{7}$  an, was 3,142857... gibt, also etwas zu groß ist. Ein weit genauerer Näherungswert ist  $\frac{355}{113}$ . Dieser gibt 3,1415929..., was schon auf 7 Stellen stimmt, für die gewöhnlichen Berechnungen also vollständig ausreicht. Die Berechnung von  $\pi$  wird später gelehrt.



Zur Umrechnung von Winkeln in Bogen und von Bogen in Winkel braucht man also die Formeln\*)

$$\beta^{\circ} = \frac{\widehat{\beta}}{\pi} 180^{\circ}, \quad \widehat{\beta} = \pi \frac{\beta^{\circ}}{180^{\circ}}.$$

So gehört z. B. zum Bogen  $\widehat{\beta} = 1$  der Winkel  $\beta^{\circ} = \frac{1}{\pi} 180^{\circ} = 57^{\circ},295 = 57^{\circ} 17',70 = 57^{\circ} 17' 42''$ .\*\*) Der selbe Winkel gehört zum Bogen  $\widehat{b} = r \cdot \widehat{\beta} = r \cdot 1$  am Kreise mit Radius  $r$ .

(Den Kreisumfang berechnet man aus dem Radius nach der obigen Formel  $u = 2r\pi$ , den Kreisradius aus dem Umfange nach der Formel  $r = \frac{u}{2\pi}$ .\*\*\*)

Zum Winkel  $1^{\circ}$  gehört (am Kreise mit Radius 1) der Bogen  $\widehat{\beta} = \pi \frac{1^{\circ}}{180^{\circ}} = \frac{\pi}{180} = 0,017453$ , am Kreise mit Radius  $r$  dagegen der  $r$ -fache Bogen.

(Bezeichnet man den am Kreise mit Radius  $r$  gemessenen Bogen mit  $\widehat{b}_r$ , den am Radius 1 gemessenen wieder mit  $\widehat{\beta}$ , so hat man die Formeln  $\widehat{b}_r = r\widehat{\beta}$ ,  $\widehat{\beta} = \frac{\widehat{b}_r}{r}$ . Die obigen Umrechnungsformeln für den Kreis mit Radius  $r$  werden dann

$$\beta^{\circ} = \frac{\widehat{b}_r}{r\pi} 180^{\circ}, \quad \widehat{b}_r = r\pi \frac{\beta^{\circ}}{180^{\circ}},$$

die mit den obigen übereinstimmen, sobald man den Wert  $r\widehat{\beta}$  für  $\widehat{b}_r$  einsetzt.)

\*) Die Gradbezeichnungen heben sich in der Formel  $\widehat{\beta} = \pi \frac{\beta^{\circ}}{180^{\circ}}$  auf, man kann sie also in der Form  $\widehat{b} = \pi \frac{\beta}{180}$  schreiben, nur muß dann gesagt werden, daß der Winkel in Graden ausgedrückt ist, z. B.  $\beta = 20^{\circ},3$ , nicht etwa  $\beta = 20^{\circ} 18'$  oder  $1218'$ .

\*\*) Man vergesse nie, daß der Bogen  $\widehat{b}$  am Kreise vom Radius 1 gemessen wird. Bei ungenauen Werten von  $\pi$  findet man nicht so genaue Resultate. Die Bruchteile der Sekunden sind hier vernachlässigt.

\*\*\*) Nimmt man also den Erdumfang als 5400 geographische Meilen an, so hat der Erdradius eine Länge von 859,43 geographischen Meilen. Nimmt man den Erdumfang zu 40 000 000 m an, so hat der Erdradius eine Länge von 6 366 200 m. Dabei ist der genauere Wert von  $\pi$  zugrunde gelegt und eine Genauigkeit auf fünf Stellen erstrebt. — Der Äquatorgrad hat für die Erde eine Länge von  $\frac{5400}{360} = \frac{2700}{180} = 15$  geogr. Meilen. Für jede Reise längs des Äquators kann man also die Länge aus den Graden und die Grade aus der Länge berechnen.



(In vielen Lehrbüchern, besonders in den physikalischen, wird von Winkeln  $\pi$  oder  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{\pi}{3}$ ,  $\frac{\pi}{4}$  usw. gesprochen. Man meint damit Winkel von  $180^\circ$ , bzw.  $90^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $45^\circ$  usw., denn dabei ist die Größe des am Kreise mit Radius 1 gemessenen Bogens angegeben. Hier soll bei einem Winkel  $\alpha$  stets der Winkel in Grad und seinen Bruchteilen gemeint sein, während  $\hat{\alpha}$  den am Kreise mit Radius 1 gemessenen Bogen bedeuten soll. Bogenlängen an Kreisen von beliebigem Radius sollen dagegen mit lateinischen Buchstaben nebst Bogen, z. B. mit  $\hat{a}$  bezeichnet werden, gegebenenfalls mit  $\hat{a}_r$ , wenn der Radius  $r$  bekannt ist. Es handelt sich bei diesen Unterscheidungen nur um die Vermeidung von Mißverständnissen.)

## b) Die einfachsten planimetrischen Konstruktionen.

### a) Die Zeichengeräte.

57) Die unentbehrlichsten Zeichengeräte sind das Lineal und der Zirkel. Das erstere dient zum Zeichnen gerader Linien mittels des Bleistiftes oder der mit Tusche gefüllten Handreißfeder\*). Der Handzirkel dient zum Messen der Längen und zur Kontrolle für die Richtigkeit der Zeichnungen, der Einfaßzirkel mit den Einfaßteilen zum Zeichnen der Kreise und Kreisbogen mit Bleistift oder Reißfeder.

(Daß es auch krummlinige oder Kurvenlineale und Schablonen zum Zeichnen bestimmter Kurven gibt, sei beiläufig bemerkt).

58) Sollen Geraden von gegebener Länge gezeichnet werden, so ist die Länge unmittelbar mit Hilfe eines Maßstabes, oder mittelbar mit Hilfe des Zirkels zu bestimmen, dem man an einem Maßstabe die geforderte Öffnung gibt. Der Maßstab ist entweder nur auf dem Blatte gezeichnet, oder er ist ein Lineal mit metrischer Einteilung, welches also Meter, Dezimeter, Zentimeter, Millimeter angibt. (Vorfuss § 14 bis 16.)

59) Bei technischen Zeichnungen stellt man die Gebilde meist nicht in der wirklichen Größe, sondern in „verkleinertem Maßstabe“ dar. Dann wird auf dem Rande des Zeichenblattes ein „verjüngter“

\*) Die Vorsilbe Reiß hängt mit dem Worte Riß zusammen, denn man spricht vom Grundriß oder Aufriß eines Gebäudes oder einer Maschine oder eines Apparates oder irgend eines räumlichen Gebildes. Solche Riße werden auf dem Reißbrett gezeichnet. Die Zeicheninstrumente gehören zum Reißzeug.



oder „verkleinerter Maßstab“ gezeichnet, der angibt, welche Länge z. B. 1 m bedeuten soll. Auf Landkarten für nicht allzugroße Gebiete wird durch den Maßstab angegeben, welche Länge ein Kilometer oder eine geographische Meile bedeuten soll. Man spricht dann vom Maßstabe  $\frac{1}{10}$  oder 1:10; vom Maßstabe  $\frac{1}{10000}$  oder 1:10 000 usw. Kleinere Gebilde werden in den naturwissenschaftlichen Lehrbüchern oft in vergrößertem Maßstabe dargestellt, z. B. im zehnfachen Maßstabe ( $\frac{10}{1}$  oder 10:1) usw.

60) Zur Zeichnung von Kreisen erhält der Einsatzzirkel bestimmte Einsatzteile, für das Zeichnen mit Bleistift den Blei- oder Stifteinsatz, für das Zeichnen mit Tusche oder einer sonstigen gefärbten Flüssigkeit den Reißfeder- oder Federeinsatz.

61) Soll die Zeichnung genau werden, so ist ein ebenes, genau rechtwinkliges Reißbrett mit aufgespanntem Zeichenbogen zu benutzen, auf dem mit Hilfe der Reißchiene senkrechte und wagerechte Linien bequem zu zeichnen sind. Zu den senkrechten Linien benutzt man aber meist das längs der wagerechten Reißchiene bewegliche Winkeldreieck oder den Winkelhaken (Rechtwinkellineal), welches außerdem das bequeme Zeichnen von Linien gestattet, die  $45^\circ$  bzw.  $30^\circ$  und  $60^\circ$  Neigung haben. Lineal und Winkelhaken oder die beiden Arten von Winkelhaken dienen auch zum bequemen Zeichnen von Loten und Parallelen.

62) Schwierig ist das Zeichnen sehr kleiner Kreise. Für diese hat man sogenannte Nullzirkel (oder Nullenzirkel) mit Mikrometerschraube zum Regulieren der Zirkelöffnung und mit feinem Nadeleinsatz zur schärfsten Einhaltung des Kreismittelpunktes konstruiert. Der Einsatz wird durch eine elastische Feder nach dem Zirkel hingedrängt, durch die Schraube von ihm weggedrängt. Federzirkel mit Schraube benutzt man auch zum genauen Messen kleiner Abstände.

63) Zur Zeichnung bzw. Messung von beliebigen Winkeln dient der Transporteur des Reißzeugs, bei dem der Halbkreis in 180 gleiche Teile eingeteilt ist, die also den Winkelgraden entsprechen.\*)

64) Das Bestimmen der Längen mit Hilfe des Maßstabs und das der Winkel mit Hilfe des Transporteurs fällt in der Regel ungenau aus. Zur Verschärfung der Ablesung benutzt man den sog. Nonius, womöglich mit mikroskopischer Vorrichtung zum Ablesen.

\*) Sehr brauchbar zu Längen- und Winkelmessungen ist Simons durchsichtige Meßtafel. D. R. G. M. 80 166.



Darüber ist in der Physik zu sprechen, wohin die Vorrichtungen der Feldmeß- und der astronomischen Instrumente gehören.

65) Selbst beim genauesten Zeichnen mathematischer Figuren stellen sich in der Regel Ungenauigkeiten ein. Diese beruhen teils in den Ungenauigkeiten der Lineale, Winkelhaken und der sonstigen Zeichengeräte, teils im ungenauen Anlegen des Lineals oder Einsetzen der Zirkelspitze, im ungenauen Einstellen der Zirkelöffnung, teils im ungenauen Beurteilen des Schnittpunktes zweier Geraden oder zweier Kreisbogen. Letzteres ist namentlich dann der Fall, wenn die Geraden oder Kreisbogen einander unter sehr kleinen Winkeln schneiden. Daher ist danach zu streben, daß die betreffenden Bestimmungslinien einander möglichst rechtwinklig schneiden. Auch die Breite der gezeichneten Linien gibt zu Ungenauigkeiten Anlaß, ebenso die Ausdehnung der veranschaulichten Punkte.

Im allgemeinen ist das Zirkelzeichnen\*) genauer als das Linealzeichnen. Erstrebt man möglichste Genauigkeit, so ist es gut, während der Arbeit Kontrollkonstruktionen (oder Messungen) vorzunehmen und bei der Entdeckung von Abweichungen den Grundfehler aufzusuchen oder wenigstens für möglichste Ausgleichung der Ungenauigkeiten zu sorgen.\*\*)

Man pflegt die mit Zirkel und Lineal ausführbaren Konstruktionen als exakte zu bezeichnen. Sie sind aber nur in der Vorstellung genau ausführbar, weil, wie schon gesagt, in der Wirklichkeit die gezeichneten Linien eine gewisse Breite haben müssen, um sichtbar zu werden, und weil ebenso die Punkte der Zeichnung durchaus nicht mathematische, ausdehnungslose Gebilde sind. Die praktische Konstruktion ist nur eine rohe Veranschaulichung der mathematischen Konstruktion. Diese setzt gewisse in der Wirklichkeit unerfüllbare Forderungen oder Postulate voraus, die in folgendem besprochen werden.

#### β) Drei Forderungen (Postulate) der Konstruktionslehre.

66) Erste Forderung: Zwei gegebene Punkte durch eine Gerade zu verbinden.

\*) Deshalb hat der italienische Mathematiker Mascheroni (sprich Maskeróni) den erfolgreichen Versuch gemacht, alle Grundkonstruktionen nur mit Hilfe des Zirkels auszuführen. Andere machten den Versuch, alle Konstruktionen mit Hilfe des Lineals allein auszuführen, was aber, wie Steiner fand, nur möglich war, sobald man einen festen Kreis als gegeben annahm.

\*\*) Die sogenannte Geometrographie versucht die Konstruktionen so kurz als möglich auszuführen und mit der Verminderung der Zahl der Ope-



Die Aufgabe ist nur mit Hilfe eines sehr genauen und genau an die Punkte angelegten Lineals und mit scharf gespitztem Bleistift bezw. scharfer Reißfeder mit einiger Genauigkeit auf dem Reißbrett lösbar. Dabei sind folgende Bedingungen zu beachten: 1) Beide Punkte müssen im Endlichen (z. B. auf dem Reißbrett) liegen; 2) die gegenseitige Entfernung der beiden Punkte darf nicht unendlich klein sein, denn dabei hat man kein hinreichendes Urtheil über die dem Lineal zu gebende Richtung. —

Die Gerade kann mit Hilfe des Lineals über die beiden Punkte hinaus verlängert werden.\*) Das zwischen den gegebenen Punkten liegende Stück gibt zugleich den gegenseitigen Abstand der Punkte an. Liegt zwischen den Punkten ein Hindernis, soll z. B. auf dem Fußboden einer Werkstätte eine Gerade über eine im Wege stehende Maschine hinaus gezogen werden, so sind besondere Konstruktionen nötig.

67) Zweite Forderung\*\*): Den Schnittpunkt zweier Geraden zu konstruieren.

Die Verlängerung der Geraden muß mit möglichster Genauigkeit erfolgen. Sonst ist über die Genauigkeit der Lösungen dasselbe zu sagen wie vorher. Bedingungen: a) Die beiden Geraden müssen im Endlichen liegen; b) sie dürfen nicht unendlich nahe aneinander liegen, denn dann wird der Schnittpunkt unbestimmt; c) sie dürfen nicht parallel sein, denn dann fällt der Schnittpunkt in unendliche Entfernung. Die Parallelen geben dann nur die Richtung an, in der er liegt. — Der Schnittpunkt wird um so genauer bestimmt, je näher der Schnittwinkel an  $90^\circ$  liegt. Von etwaigen Hindernissen gilt dasselbe wie vorher.

68) Dritte Forderung: Um einen gegebenen Punkt einen Kreis von gegebenem Radius zu legen.

rationen zugleich die Anzahl der Fehlermöglichkeiten zu verringern. In der Praxis sind aber Kontrollkonstruktionen und Probemessungen nicht zu entbehren.

\*) Die Verlängerung wird bisweilen als ein zweites Postulat genannt.

\*\*) Diese zweite Forderung wird in der Regel nicht mit genannt, sie ist aber ebenso wesentlich wie die erste. Das eine Mal handelt es sich um die Bestimmung einer Geraden durch zwei Punkte, das andere Mal um die Bestimmung eines Punktes durch zwei Geraden. Die zweite Forderung ist die reziproke der anderen. (Vertauschung der Worte Linie und Punkt.) Es müssen auch Konstruktionen dafür gelehrt werden, eine Gerade über ein Hindernis hinaus zu verlängern, oder den Schnittpunkt zweier Geraden, der jenseits eines Hindernisses liegt, zu bestimmen.



Der Zirkel ist genau in den Punkt einzusetzen, nachdem die Zirkelöffnung genau gleich der Länge des Radius gemacht ist. Bedingungen: 1) Der Punkt muß im Endlichen liegen. 2) Der Radius darf weder unendlich groß noch unendlich klein sein. — Einen Sonderfall bildet die Aufgabe, um einen gegebenen Punkt einen Kreis zu legen, der durch einen gegebenen Punkt geht.

69) Man könnte noch Nebenforderungen aufstellen, die sich auf die Benutzung des metrisch eingeteilten Maßstabes, des Transporteurs, des Winkeldreiecks beziehen.

γ) Die grundlegenden Konstruktionen.

70) Erste Grundkonstruktion: Eine gegebene Gerade (nach der einen ihrer Richtungen) um sich selbst zu verlängern, ihre Länge zu verdreifachen, zu vervierfachen usw.

Der Schüler beschreibe die mit Lineal und Zirkel auszuführende Konstruktion selbst. (Die Teilpunkte sollen durch kleine Kreisbogen markiert werden.)

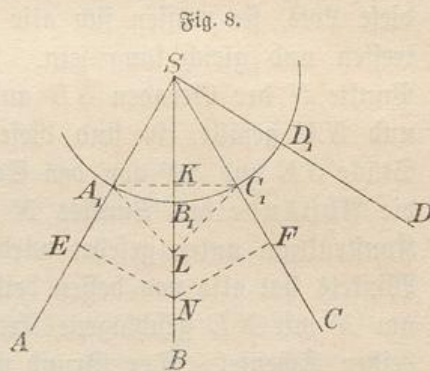
71) Zweite Grundkonstruktion\*): Einen gegebenen Winkel (in einem der beiden Drehungssinne) zu verdoppeln, zu verdreifachen, zu vervierfachen usw.

**Auflösung.** In Fig. 8 sei  $ASB$  der zu vervielfachende Winkel. Man lege um den Scheitel  $S$  einen Kreis von beliebigem Radius, der die Schenkel in  $A_1$  und  $B_1$  schneidet, dann schlage man mit der Zirkelöffnung  $B_1A_1$  um  $B_1$  einen Bogen, der den Kreis in  $C_1$  schneidet, dann um  $C_1$  mit derselben Öffnung einen Bogen, der ihn in  $D_1$  schneidet usw. Dann ziehe man die Geraden  $SC_1$ ,  $SD_1$  usw. Dann ist  $\angle A_1SC_1$  der doppelte Winkel,  $\angle A_1SD_1$  der dreifache usw.

Die Richtigkeit der Konstruktion beruht darauf, daß zu gleichen Sehnen eines Kreises gleiche Zentriwinkel gehören.

**Bemerkungen.** a) Klappt man den Winkel  $BSC$  um die Gerade  $BS$ , so deckt er sich mit dem Winkel  $BSA$ . Man nennt  $BS$  die Symmetrielinie oder Symmetrieachse des Winkels  $ASC$ .

\*) Diese Konstruktion kann als eine reziproke der ersten betrachtet werden.





Bei diesem Umklappen deckt sich  $SC_1$  mit  $SA_1$ , sodaß  $C_1$  auf  $A_1$  fällt. Jeder Punkt von  $SB$  bleibt dabei in seiner Lage. Zieht man also die Gerade  $A_1C_1$ , so deckt sich beim Umklappen ihr Teil  $KC_1$  mit  $KA_1$ , sodaß beide gleich lang sind. Ferner deckt sich  $\angle SKC_1$  mit  $\angle SKA_1$ , da aber  $\angle A_1KC_1$  ein gestreckter Winkel ist, so muß  $\angle SKA_1$  und ebenso  $\angle SKC_1$  ein Rechter sein. Ferner deckt sich  $\angle SC_1K$  mit  $\angle SA_1K$ , beide sind also ebenfalls gleich. (Man nennt ein Dreieck mit gleichen „Schenkeln“  $A_1S$  und  $C_1S$  ein gleichschenkeliges Dreieck.  $A_1C_1$  heißt seine Grundlinie oder Basis. Aus der Figur lassen sich also Eigenschaften des gleichschenkeligen Dreiecks ablesen, die der Schüler schon jetzt selbständig auszusprechen versuche; z. B. die Winkel an der „Grundlinie“ des gleichschenkeligen Dreiecks sind einander gleich. Man bezeichnet diese Winkel als Basiswinkel. Sind umgekehrt zwei Dreieckswinkel einander gleich, so ist das Dreieck gleichschenkelig, denn es hat eine Symmetrieachse.)

b) Verbindet man einen beliebigen Punkt  $L$  von  $SB$  mit  $A_1$  und  $C_1$ , so decken einander bei jenem Umklappen auch die Geraden  $A_1L$  und  $C_1L$ . Jeder Punkt der Geraden  $SB$  ist also von  $A_1$  und  $C_1$  gleich weit entfernt. Man nennt  $SB$ , weil es das in der Mitte  $K$  von  $A_1C_1$  auf dieser Linie errichtete Lot ist, die Mittelsenkrechte oder das Mittellot von  $A_1C_1$ . Jeder Punkt der Mittelsenkrechten einer Geraden ist also von deren Endpunkten gleich weit entfernt.

c) Macht man ferner  $SE = SF$  und denkt man sich in  $E$  und  $F$  auf diesen Linien Lote errichtet, so decken sich bei jenem Umklappen diese Lote, sie müssen sich also in einem Punkte  $N$  der Geraden  $SB$  treffen und gleich lang sein. Denkt man sich umgekehrt von einem Punkte  $N$  der Geraden  $SB$  auf die Geraden  $SA$  und  $SC$  Lote  $NE$  und  $NF$  gefällt, so sind diese gleich lang und sie schneiden gleiche Stücke  $SE$  und  $SF$  von den Schenkeln ab. Man nennt  $NE$  und  $NF$  die Abstände des Punktes  $N$  von den Geraden  $AS$  und  $CS$ , deren Konstruktion unten gelehrt wird. Jeder Punkt der Halbierenden eines Winkels hat also von dessen beiden Schenkeln denselben Abstand. (Der um  $N$  mit  $NE$  geschlagene Kreis geht auch durch  $F$  und berührt die beiden Schenkel. Der Grund wird unten auseinandergesetzt.)

Die Symmetrielinie  $SB$  eines Winkels  $ASC$  oder seiner Halbierungslinie hat also sehr bemerkenswerte Eigenschaften, die sofort Benutzung finden sollen.

72) Dritte Grundkonstruktion: Einen Winkel zu halbieren.



**Auflösung.** Ist in Fig. 8  $\angle ASC$  der zu halbierende Winkel, so lege man um den Scheitel  $S$  einen Kreisbogen von beliebigem Radius, der die Schenkel in  $A_1$  und  $C_1$  schneidet. Darauf schlage man um  $A_1$  und  $C_1$  mit derselben (oder einer anderen) Zirkelöffnung Kreisbogen, die einander in einem Punkte  $L$  schneiden. Verbindet man  $L$  mit  $S$ , so hat man den Winkel halbiert.

Die Richtigkeit folgt aus den obigen Bemerkungen. (Beiläufig ergibt sich folgendes: Stehen über derselben Grundlinie zwei verschiedene, gleichschenklige Dreiecke, so ist die Verbindungslinie ihrer Spitzen das Mittellot der Grundlinie.)

Ist der gegebene Winkel ein gestreckter, so erhält man durch diese Konstruktion einen rechten Winkel.

Dadurch ist also folgende Aufgabe gelöst:

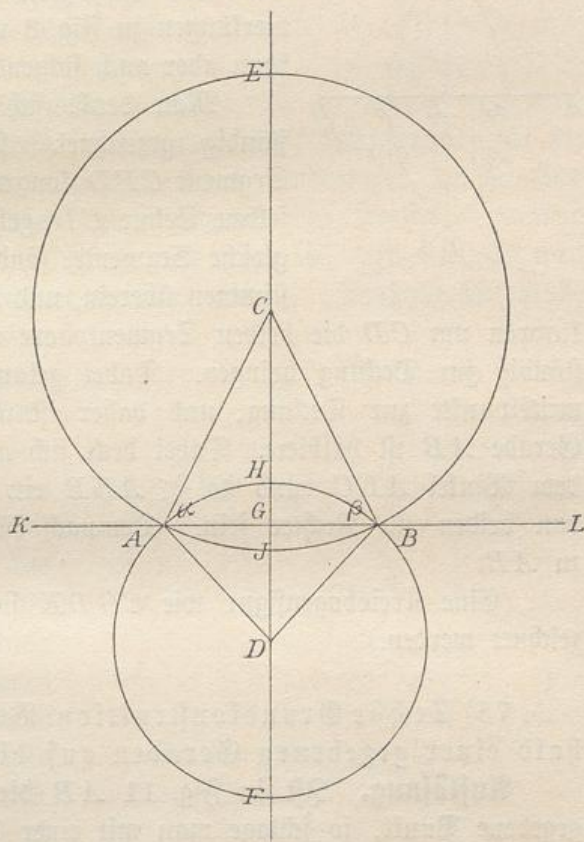
73) Vierte Grundkonstruktion: Auf einer Geraden in einem gegebenen Punkte  $G$  ein Lot zu errichten.

**Auflösung.** Man schneide von  $G$  aus auf der Geraden nach beiden Richtungen gleiche Stücke ab. Um die Schnittpunkte schlage man mit einer größeren Zirkelöffnung Kreisbogen, die einander auf beiden Seiten der Geraden schneiden. Verbindet man die neuen Schnittpunkte durch eine Gerade, so hat man das gesuchte Lot errichtet. (Die Konstruktion ist in Fig. 9 enthalten, wenn man sich  $AC = AD$  denkt.)

Eines neuen Beweises bedarf es nicht. (Eine zweite Lösung soll später gegeben werden. Welche Folgerungen ergeben sich für das gleichschenklige Dreieck?)

Daraus ergibt sich noch die Lösung der folgenden Aufgabe.

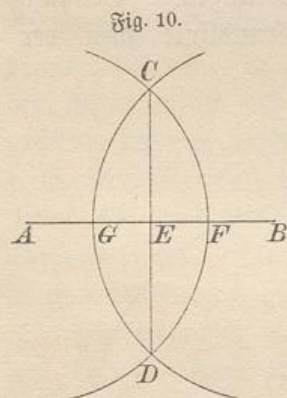
Fig. 9.





74) Fünfte Grundkonstruktion: Eine gegebene Gerade zu halbieren (und zugleich ihr Mittellot zu konstruieren).

**Auflösung.** Ist  $AB$  in Fig. 10 die gegebene Gerade, so schlage man um  $A$  und  $B$  mit derselben (hinreichend großen) Birkelöffnung Kreise, die einander auf beiden Seiten der Geraden in Punkten  $C$  und  $D$  schneiden. Verbindet man die Punkte  $C$  und  $D$  durch eine Gerade, so hat man die Mittelsenkrechte gezeichnet und durch ihren Schnittpunkt  $E$  mit  $AB$  zugleich den Halbierungspunkt gefunden.



Die Richtigkeit ergibt sich aus den Bemerkungen zu Fig. 8 und zu 72) und 73). Sie kann aber auch folgendermaßen bewiesen werden:

Man denke sich die beiden Kreise vollständig gezeichnet. Dann ist nicht nur das Segment  $CFD$  kongruent  $CGD$ , denn zu derselben Sehne  $CD$  gehören bei gleichen Kreisen gleiche Segmente, sondern auch die Restsegmente stimmen überein, und daher lassen sich durch Umklappen um  $CD$  die beiden Segmentpaare und damit die Kreise vollständig zur Deckung bringen. Dabei gelangen aber auch die Kreismittelpunkte zur Deckung, und daher ist  $EB$  gleich  $EA$ , d. h. die Gerade  $AB$  ist halbiert. Dabei deckt sich auch der Winkel  $BEC$  mit dem Winkel  $AEC$ , und da  $\angle AEB$  ein gestreckter ist, muß jeder von beiden ein Rechter sein. Demnach ist  $CD$  die Mittelsenkrechte zu  $AB$ .

(Eine Kreisbogenfigur wie  $CGDF$  soll als Doppelsegment bezeichnet werden.)

75) Sechste Grundkonstruktion: Von einem Punkte außerhalb einer gegebenen Geraden auf diese ein Lot zu fallen.

**Auflösung.** Ist in Fig. 11  $AB$  die gegebene Gerade,  $P$  der gegebene Punkt, so schlage man mit einer hinreichend großen Birkelöffnung um  $P$  einen Kreis, der  $AB$  in zwei Punkten  $A_1$  und  $B_1$  schneidet. Um  $A_1$  und  $B_1$  schlage man mit derselben (oder einer anderen) Birkelöffnung Kreise, die einander in einem Punkte  $Q$  auf der anderen Seite der Geraden schneiden. Verbindet man  $P$  mit  $Q$ , so hat man auch das gesuchte Lot  $PC$ .

Die Richtigkeit ergibt sich daraus, daß  $PQ$  die Mittelsenkrechte von  $A_1B_1$  ist.

**Bemerkung.** Legt man um  $P$  einen Kreis mit dem Radius  $PC$  und dann einen Kreis mit kleinerem und einen Kreis mit größerem



Radius, so liegt der größere Kreis ganz außerhalb des Kreises mit Radius  $PC$  und schneidet die Gerade in zwei Punkten, die so rechts und links von  $C$  liegen, daß die Schnittpunkte gleich weit von  $C$  entfernt sind. ( $PQ$  ist Symmetrielinie.)

Der kleinere Kreis dagegen liegt ganz innerhalb des mit  $PC$  geschlagenen Kreises.

Der letztere trennt also die um  $P$  geschlagenen Kreise welche die Gerade  $AB$  schneiden, von den Kreisen, die  $AB$  überhaupt nicht treffen; er ist der einzige um  $P$  geschlagene Kreis, der  $AB$  nur in einem Punkte trifft, oder wie man sagt, berührt.  $AB$  liegt sonst ganz außer-

halb dieses Kreises und heißt seine Tangente (Berührende) für den Punkt  $C$ . Errichtet man also auf einem Radius in dessen Endpunkte ein Lot, so ist dieses eine Tangente des Kreises. Zugleich sieht man, daß  $PC$  die kürzeste Gerade ist, die von  $P$  nach der Geraden  $AB$  gezogen werden kann. Deshalb ist es be-

rechtigt,  $PC$  als den Abstand des Punktes  $P$  von der Geraden zu bezeichnen.

An Fig. 11 erkennt man, daß die Verbindungslinie des Kreismittelpunktes mit der Sehnenmitte den Abstand des Kreismittelpunktes von der Sehne gibt. Bei der Deckung

gleicher Segmente oder Bogen oder Sektoren eines Kreises decken sich auch die zugehörigen Sehnen und die Sehnenmitten.

Daher decken einander auch die Abstände der Sehnen vom Kreismittelpunkte. Den unter

48) genannten Sätzen kann also noch folgender beigefügt werden: Bei jedem Kreise gehören zu gleichen

Sehnen gleiche Mittelpunktsabstände, zu gleichen Abständen vom Mittelpunkte gehören gleiche Sehnen.

Fig. 11.

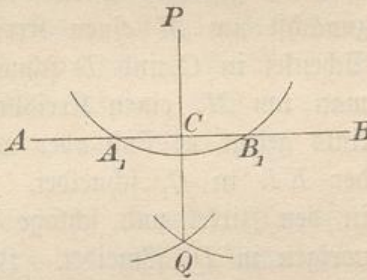
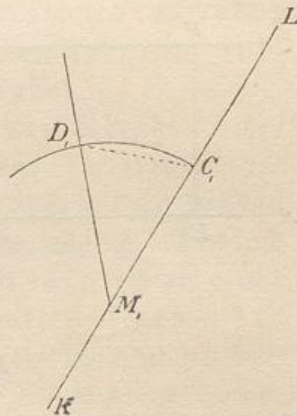
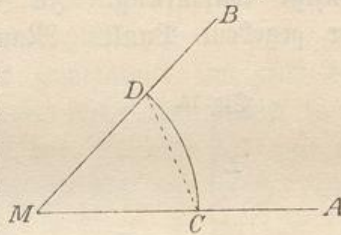


Fig. 12.





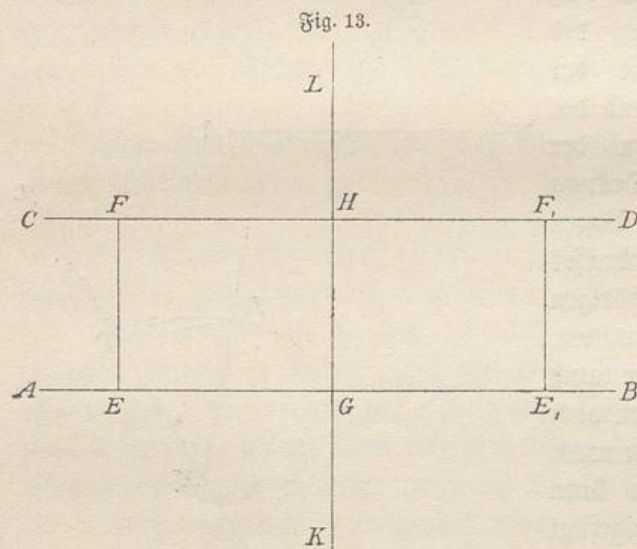
76) Siebente Grundkonstruktion. Einen gegebenen Winkel an eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte (nach einer der vier vorhandenen Möglichkeiten) anzutragen.

**Auflösung.** Ist in Fig. 12  $AMB$  der gegebene Winkel, ist  $KL$  die gegebene Gerade und  $M_1$  der gegebene Punkt, so schlage man zunächst um  $M$  einen Kreisbogen von beliebigem Radius, der die Schenkel in  $C$  und  $D$  schneidet. Mit derselben Zirkelöffnung schlage man um  $M_1$  einen Kreisbogen (in der Figur ist er nach oben und links gelegt, es sind aber noch drei andere Möglichkeiten vorhanden), der  $KL$  in  $C_1$  schneidet. Dann nehme man die Entfernung  $CD$  in den Zirkel und schlage damit einen Kreisbogen um  $C_1$ , der den vorigen in  $D_1$  schneidet. Zieht man  $M_1D_1$ , so ist  $C_1M_1D_1$  der anzutragene Winkel.

Die Richtigkeit der Konstruktion folgt daraus, daß zu gleichen Sehnen  $CD$  und  $C_1D_1$  gleich großer Kreise gleiche Zentrwinkel gehören.

77) Achte Grundkonstruktion. Zu einer gegebenen Geraden durch einen (außerhalb dieser) gegebenen Punkt eine Parallele zu legen.

a) **Vorläufige Auflösung.** In Fig. 13 sei  $AB$  die gegebene Gerade,  $H$  der gegebene Punkt. Man fälle von  $H$  auf  $AB$  ein



Lot  $HG$  und errichte auf diesem in  $H$  ein Lot  $CHD$ , dann ist  $CD$  die gesuchte Parallele.

**Beweis.** Man denke sich  $AB$  und  $CD$  bis ins Unendliche verlängert. Denkt man sich dann die linke Hälfte der Figur um  $BG$  geklappt, so kann man sie mit der rechten Hälfte zur Deckung bringen, denn die

Winkel bei  $H$  und bei  $G$  sind sämtlich rechte Winkel. Angenommen nun, auf der linken Seite hätten  $HC$  und  $GA$  einen im Endlichen liegenden Schnittpunkt  $P$ , so müßte sich dieser mit einem symmetrisch gelegenen Schnittpunkte  $P_1$  decken, in dem sich  $HD$



und  $GB$  schneiden müßten. Dann aber hätte man zwischen zwei im Endlichen liegenden Punkten  $P$  und  $P_1$  zwei getrennte gerade Verbindungslinien. Dies ist aber unmöglich. Daher ist auch ein endlicher Schnittpunkt  $P$  auf der linken Seite unmöglich und ebenso aus Gründen der Kongruenz ein endlicher Schnittpunkt  $P_1$  auf der rechten Seite. Demnach sind die Geraden  $AB$  und  $CD$  Linien, die, soweit man sie auch verlängert, keinen im Endlichen liegenden Schnittpunkt haben. Solche Linien heißen aber parallele, sobald sie in derselben Ebene liegen, und dies ist hier der Fall. (Ebene der Zeichnung.)

**Bemerkungen.** a) Man hat damit den Satz gefunden: In der Ebene sind Lote auf derselben Geraden parallel. Umgekehrt folgt: Zwei Parallelen haben unendlich viele gemeinschaftliche Lote.

b) Bei dem obigen Umklappen decken sich zwei Punkte  $E$  und  $E_1$ , sobald  $GE = GE_1$  ist. Fällt man von  $E$  und  $E_1$  aus Lote  $EF$  und  $E_1F_1$  auf  $CD$ , so sind beide gemeinschaftliche Lote der Parallelen  $AB$  und  $CD$ . Beim Umklappen um  $GH$  decken sich mit den Punkten  $E$  und  $E_1$  zugleich die Lote  $EF$  und  $E_1F_1$ , weil die rechten Winkel  $GEF$  und  $G_1E_1F_1$  aufeinander fallen. Folglich sind die Abstände  $EF$  und  $E_1F_1$  einander gleich.

Denkt man sich aber das gemeinsame Lot  $GH$  der Parallelen an anderer Stelle gezeichnet, z. B. mehr nach rechts, so deckt sich beim Umklappen um das neue  $GH$  der Abstand  $EF$  mit einem anderen Lote  $E_2F_2$ , welches wiederum gleich  $EF$  sein muß. Da  $GH$  unendlich viele Lagen annehmen kann, so folgt: Sämtliche im Endlichen liegenden gemeinsamen Lote zweier parallelen Geraden sind einander gleich; oder: Parallele Geraden haben im Endlichen überall denselben Abstand voneinander.

c) Ferner folgt: Errichtet man auf einer Geraden zwei Lote von derselben Länge und Richtung, so liegen die freien Endpunkte in einer Parallelen zur Geraden. Zwischen diesen Endpunkten ist aber nur eine einzige Gerade möglich. Demnach gilt der Satz: Durch einen gegebenen Punkt läßt sich zu einer gegebenen Geraden nur eine einzige Parallele legen.

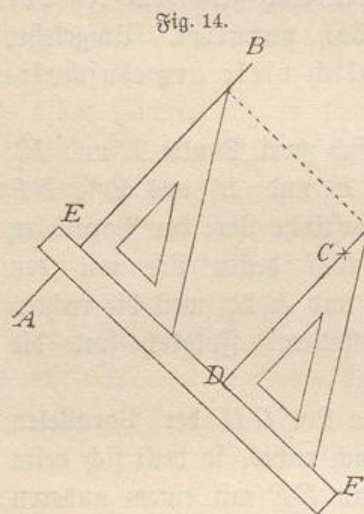
Ist das zweite Lot zu kurz oder zu lang, so schneidet die verlängerte Verbindungslinie der freien Endpunkte die gegebene Gerade in einem endlichen Punkte, das eine Mal in der Richtung nach dem zweiten Lote hin, das andere Mal in entgegengesetzter Richtung.

d) Das Viereck  $EFF_1E_1$  bezeichnet man als ein Rechteck, weil es vier rechte Winkel hat.  $KL$  ist die eine Mittellinie oder



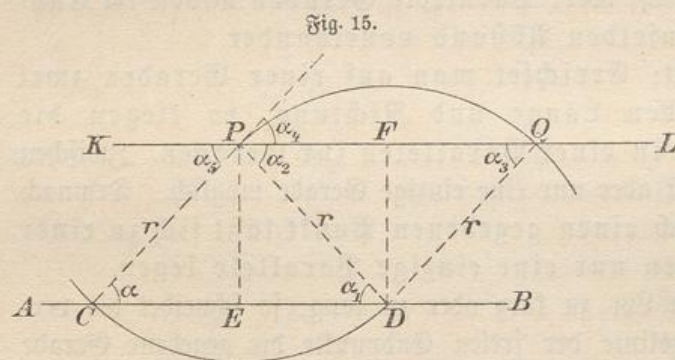
Symmetrieachse des Rechtecks. Wo liegt die zweite? Zieht man die Gerade  $EF_1$ , so zerlegt man das Rechteck in zwei kongruente Dreiecke. In jedem dieser Dreiecke muß die Winkelsumme gleich zwei Rechten sein, weil die des Rechtecks gleich vier Rechten ist. Dabei ist  $\angle E_1F_1F = \angle F_1EE_1$ . Was folgt daraus für schräge Linien an Parallelen?  $EF_1$  heißt eine Diagonale des Rechtecks, eine zweite ist  $E_1F$ . Der Schüler versuche schon jetzt selbständig die Eigenschaften des Rechtecks und seiner Mittellinien und Diagonalen abzuleiten.

e) Fig. 14 zeigt, wie man mit Hilfe des Lineals und des Winkelhafens zu  $AB$  durch den Punkt  $C$  eine Parallele zieht.



Man legt den Winkelhaften mit dem einen Schenkel genau an die Gerade  $AB$  an, an den anderen Schenkel wird das Lineal  $EF$  angelegt und fest auf das Reißbrett gedrückt. Dann verschiebt man den Winkelhaften längs des Lineals, bis der Punkt  $C$  in der gezeichneten Weise sichtbar wird. Man hält den Winkelhaften in der richtigen Lage fest und zeichnet  $CD$ , was die gesuchte Parallele gibt. — (Auch mit anders angelegtem Winkelhaften kann man die Parallele ziehen, was bisweilen bequemer ist.)

β) **Kürzere Auflösung.** Man schlage um  $P$  einen Kreisbogen mit beliebigem Radius  $r$ , der  $AB$  in  $C$  und  $D$  schneidet, schlage um  $D$  einen Kreisbogen mit demselben Radius (der also durch  $P$  geht),



nehme  $CD$  in den Zirkel und schlage damit, wie es Fig. 15 zeigt, einen Kreisbogen um  $P$ , der den Schnittpunkt  $Q$  gibt. Zieht man dann  $PQ$ , so ist dies die gesuchte Parallele.

**Beweis.** Zu gleichen Sehnen  $CD$  und  $PQ$  gleicher Kreise gehören kongruente Sektoren, also lassen sich die Sektoren  $PCD$  und  $DQP$  (und damit die gleichschenkligen Dreiecke  $PCD$  und  $DQP$ ) zur Deckung bringen

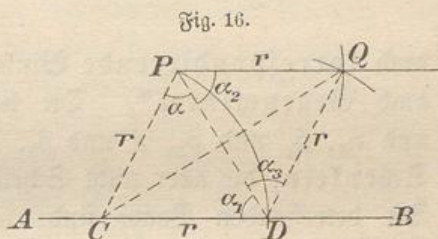


Dabei decken einander auch die Mittelsenkrechten von  $CD$  und  $PQ$ , so daß der Abstand  $PE$  auf den Abstand  $DF$  fällt. Da demnach die Lote  $EP$  und  $DF$  gleich lang sind, ist  $PF$  und damit  $PQ$  parallel zu  $AB$ .

**Bemerkungen.** In Fig. 15 ist (nach 71a)  $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \alpha_1$ , ebenso  $\sphericalangle \alpha_2 = \sphericalangle \alpha_3$ , also der Deckung wegen  $\sphericalangle \alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$  und  $\sphericalangle CPD = \sphericalangle PDQ$ . Man erhält demnach die Linie  $PQ$  auch dadurch, daß man den Winkel  $DPQ$  oder  $\alpha_2$  gleich dem Winkel  $CDP$  oder  $\alpha_1$  macht. Der Schüler zeige, daß auch  $\sphericalangle QDB = \alpha$ , also  $DQ \parallel CP$  ist, sodaß die Berechtigung vorliegt, das Viereck  $CDQP$  als ein Parallelogramm zu bezeichnen. Er versuche schon jetzt selbstständig Eigenschaften des Parallelogramms und seiner Diagonalen aufzufinden. Besonders gilt der Satz: Die Gegenseiten eines Parallelogramms sind gleich und parallel, oder: Parallele zwischen Parallelen sind einander gleich. — Auch die Winkel  $\alpha_4$  und  $\alpha_5$  sind gleich  $\alpha$ .  $KL$  und  $AB$  sind also parallel, wenn gewisse Winkel gleich sind. Welche?

$\gamma$ ) Man kann auch mit einer einer einzigen Zirkelöffnung zum Ziele kommen: Man nehme auf  $AB$  einen beliebigen Punkt  $C$  an, schlage um  $C$  mit der Zirkelöffnung  $CP$  einen Kreisbogen, der in  $D$  schneidet, um  $P$  und  $D$  schlage man Kreisbogen mit derselben Öffnung, die den Schnittpunkt  $Q$  geben.  $PQ$  ist die gesuchte Parallele.

Fig. 16.



Die Richtigkeit folgt daraus, daß  $CQ$  die Mittelsenkrechte zu  $PD$  ist, wobei, wie früher,  $\angle \alpha = \alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_2$  ist. Weil nämlich wieder  $\alpha_2 = \alpha_1$  ist, muß  $PQ \parallel CD$  sein.

**Bemerkung.** Ist umgekehrt  $PQ \# CD$ , so muß  $PC \# DQ$ .  
 $\angle \alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$  und  $PD \perp CQ$  sein ( $\#$  soll heißen gleich und parallel). Das Viereck  $CDQP$  hat lauter gleiche und paarweise parallele Seiten. Es heißt eine Raute oder ein Rhombus. Der Schüler versuche schon jetzt selbständig Eigenschaften des Rhombus und seiner Diagonalen aufzufinden.

c) Bemerkungen über parallele Geraden und über die Winkelsumme des Dreiecks.

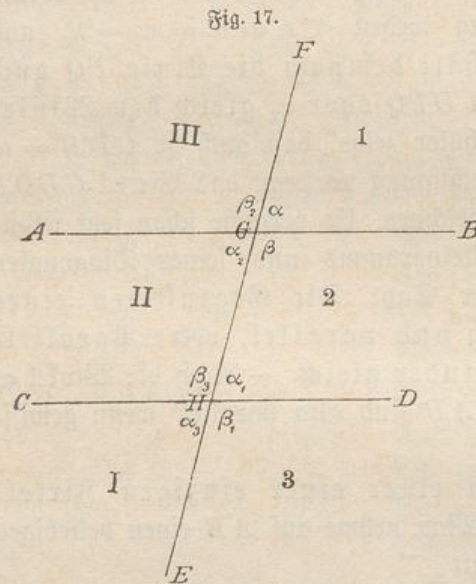
$\alpha$ ) Die Parallelenfüße.

78) Aus den letzten Konstruktionen und der Schlußbemerkung ergibt sich für Fig. 17 folgendes:



Ist  $AB \parallel CD$ , so ist  $\sphericalangle \beta = \sphericalangle \beta_3$ . Demnach ist im ganzen, weil auch Scheitelwinkel gleich sind,  $\sphericalangle \beta_2 = \sphericalangle \beta = \sphericalangle \beta_3 = \sphericalangle \beta_1$ . Da ferner zu gleichen Winkeln gleiche Nebenwinkel gehören, so ist auch  $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \alpha_2 = \sphericalangle \alpha_1 = \sphericalangle \alpha_3$ . Die Summe aus je einem  $\alpha$  und je einem  $\beta$  ist gleich zwei Rechten.

Finden umgekehrt die genannten Winkelgleichheiten statt, so sind  $AB$  und  $CD$  parallel.



79) Man teilt die genannten acht Winkel der Fig. 17 in gewisse Gruppen ein. 1)  $\beta$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_3$ ,  $\alpha_1$  liegen zwischen den Parallelen und werden daher innere Winkel genannt, die übrigen sind äußere Winkel. 2) Winkel wie  $\alpha$  und  $\alpha_1$ , die paarweise gleichgerichtete Schenkel haben, nennt man gleichliegende Winkel,

auch korrespondierende Winkel (d. h. einander entsprechende), wohl auch Gegenwinkel.\*) Die betreffenden Paare sind  $\alpha$  und  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  und  $\alpha_3$ ,  $\beta_1$  und  $\beta_3$ ,  $\beta$  und  $\beta_1$ . 3) Winkel mit entgegengesetzten Schenkeln, die aber nicht Scheitelwinkel sind, heißen Wechselwinkel. Die betreffenden Paare sind:  $\alpha$  und  $\alpha_3$ ,  $\alpha_2$  und  $\alpha_1$ ,  $\beta$  und  $\beta_3$ ,  $\beta_1$  und  $\beta_2$ . 4) Winkel mit einem gleichgerichteten und einem entgegengesetzt gerichteten Schenkelpaare, die aber keine Nebenwinkel sind, bezeichnet man als entgegengesetzte Winkel.\*\*)

Die betreffenden Paare sind:  $\alpha$  und  $\beta_1$ ,  $\beta$  und  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$  und  $\alpha_3$ ,  $\alpha_1$  und  $\beta_3$ . (Man kann diese Winkelgruppen auch so definieren, daß die Winkel entweder auf derselben Seite der die Parallelen schneidenden Geraden, oder auf verschiedenen Seiten liegen, daß sie ferner zugleich äußere bzw. zugleich innere Winkel sind, oder daß sie nicht zugleich innere bzw. äußere sind. Diese Definitionen sollen dem Schüler überlassen werden.)

80) Über diese Winkelpaare lassen sich nach obigem folgende Sätze aussprechen:

\*) Diese allgemein übliche Bezeichnung ist nicht glücklich gewählt.

\*\*) Auch diese Bezeichnung ist nicht glücklich gewählt, aber sie ist allgemein gebräuchlich. Sie soll beibehalten werden, weil diese Winkel von geringerer Bedeutung sind.



Werden zwei Parallelen von einer Geraden geschnitten, so sind je zwei gleichliegende Winkel gleich, je zwei Wechselwinkel gleich, je zwei entgegengesetzte Winkel betragen zusammen zwei Rechte.

Umgekehrt: Werden zwei Geraden von einer dritten geschnitten, und sind dabei zwei gleichliegende Winkel gleich, oder sind zwei Wechselwinkel gleich, oder betragen zwei entgegengesetzte Winkel zusammen zwei Rechte, so sind die beiden ersten Geraden parallel.\*)

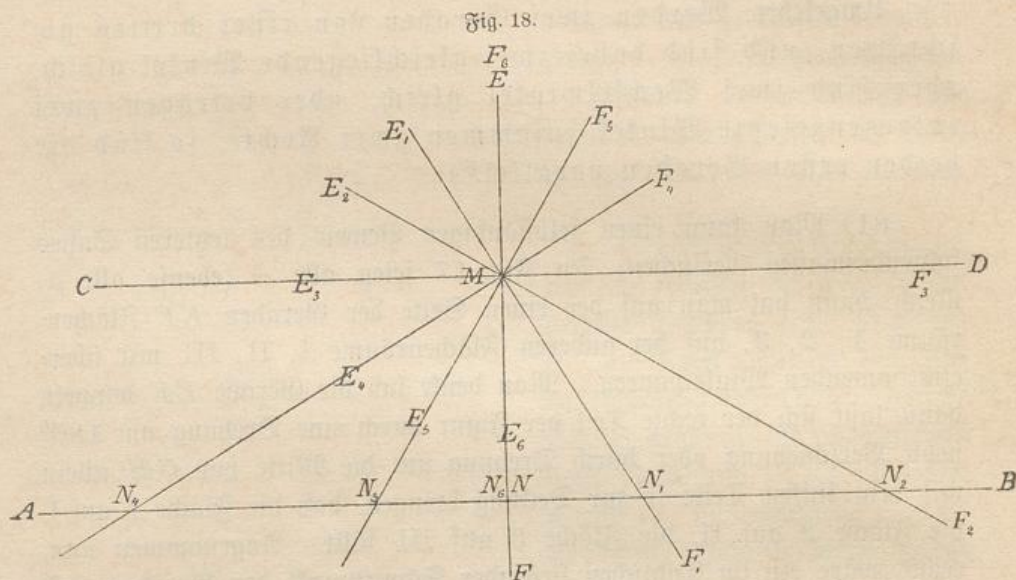
81) Man kann einen selbständigen Beweis des letzteren Satzes folgendermaßen versuchen: In Fig. 17 seien alle  $\alpha$  (ebenso alle  $\beta$ ) gleich, dann hat man auf der einen Seite der Geraden  $EF$  Flächenräume 1, 2, 3, auf der anderen Flächenräume I, II, III mit übereinstimmenden Winkelpaaren. Man denke sich die Gerade  $EF$  doppelt, dann läßt sich der rechte Teil der Figur durch eine Drehung um  $180^\circ$  nebst Verschiebung oder durch Drehung um die Mitte von  $GH$  allein mit dem linken Teile so zur Deckung bringen, daß die Fläche 1 auf I, die Fläche 2 auf II, die Fläche 3 auf III fällt. Angenommen nun, rechts wäre ein im Endlichen liegender Schnittpunkt der Geraden  $GB$  und  $HD$  vorhanden, so müßte er bei der Deckung mit einem dann notwendig vorhandenen Schnittpunkte der Geraden  $HC$  und  $GA$  zusammenfallen. Dann aber hätte man zwischen zwei endlichen Punkten zwei getrennte Geraden, was unmöglich ist. Demnach kann weder rechts noch links von der schneidenden Geraden ein im Endlichen liegender Schnittpunkt möglich sein, folglich sind  $AB$  und  $CD$  parallel.

82) Das gegenseitige Verhalten zweier Parallelen läßt sich noch auf folgendem Wege verdeutlichen. In Fig. 18 ist eine feste Gerade  $AB$  und eine um  $M$  drehbare Gerade dargestellt. Die Anfangslage der letzteren sei  $EF$ . Bewegt sich  $EF$  linksdrehend um  $M$ , so nimmt die Gerade z. B. die Lagen  $E_1F_1$ ,  $E_2F_2$ ,  $E_3F_3$ , ...  $E_6F_6$  an, wobei sie eine halbe Umdrehung gemacht hat und sich entgegengesetzt zur Anfangslage befindet. Dabei ist der Durchschnittpunkt  $N$  mit der festen Geraden auf dieser über  $N_1$  und  $N_2$  nach unendlicher Entfernung gewandert, die der Lage  $E_3F_3$  entspricht. Dann ist er plötzlich nach einem in entgegengesetzter Richtung liegenden unendlich fernen Punkte übersprungen und von dort her über  $N_4$ ,  $N_5$  nach  $N_6$ , d. h.

\*) Es ist gerechtfertigt, auch dann von gleichliegenden Winkeln usw. zu sprechen, wenn die beiden Geraden nur nahezu parallel sind. Die Behauptung des Parallelismus rechtfertigt die Benennung.



in die Anfangslage  $N$  zurückgelangt. Macht von jetzt ab die Linie noch eine Drehung von  $180^\circ$ , so wiederholt sich der Vorgang und  $EF$  kommt in die eigentliche Anfangslage und Anfangsrichtung zurück.



Überall also ist die Bewegung von  $N$  eine ununterbrochene, nur beim Passieren der parallelen Lage macht der Schnittpunkt auch bei der geringsten Drehung einen unendlich großen Sprung.

[83)\*] Dies führt auf die Frage, wie man sich das Verhalten der Parallelen im Unendlichen selbst denken soll. Der Satz, daß die beiden Geraden  $AB$  und  $EF$  für jede Lage einen und nur diesen einen Schnittpunkt haben, wird plötzlich zweifelhaft für den Fall des Parallelismus. Oben wurde absichtlich stets nur gesagt, dabei wäre im Endlichen kein Schnittpunkt vorhanden. Man kann ihn auch für das Unendliche ableugnen; man kann aber auch sagen, er befinde sich im Unendlichen, nur bleibe es zweifelhaft, ob er nach der einen oder nach der entgegengesetzten Richtung zu denken sei; man kann aber auf Grund der besprochenen Symmetrie auch behaupten, es seien in unendlichen entgegengesetzten Entfernungen zwei Schnittpunkte vorhanden.

\*) Dieser Abschnitt kann vorläufig übergangen werden, muß aber jedenfalls irgendwann zur Sprache kommen. Für den Zeitpunkt ist die Qualität der Schüler entscheidend.



Im Grunde genommen sind alle diese Redewendungen gleichberechtigt, und dies kann man folgendermaßen aufklären. Weil in Fig. 17  $\angle \alpha = \angle \alpha_1$  ist, sagt man, die beiden Parallelen  $GB$  und  $HD$  hätten gegen die Gerade  $EF$  denselben Richtungsunterschied. Daher ist die Behauptung berechtigt, sie hätten dieselbe Richtung.

Denkt man sich einmal, die beiden Geraden hätten im Unendlichen denselben Abstand wie im Endlichen, so bedeutet dies den Richtungsunterschied Null; denkt man sich, sie hätten dort einen Schnittpunkt, so bedeutet dies einen unendlich kleinen Richtungsunterschied, dessen Folgen im Endlichen durchaus nicht wahrnehmbar sein können. Beide Annahmen bedeuten also für die nur im Endlichen arbeitende Mathematik ganz dasselbe. Ob das eine, ob das andere der Fall ist, ein Richtungsunterschied oder eine Änderung des Abstandes ist im Endlichen nicht wahrnehmbar.

Für die nur im Endlichen arbeitende Mathematik gilt daher auch der Satz, daß durch einen endlichen Punkt nur eine einzige Parallele gelegt werden könne, mit voller Bestimmtheit. Für die mit dem Unendlichen arbeitende Mathematik wird aber der Satz zweifelhaft, denn es können für das Unendliche die Fälle des Schneidens und des Nichtschneidens nicht auseinander gehalten werden. Man kann sogar für das Unendliche den Fall eines Auseinandergehens annehmen, ohne daß die Geltung jenes Satzes im Endlichen gestört wird. Daraus ergibt sich, daß dem Satze eine Geltung für das Unendliche sowohl zugesprochen, als auch abgesprochen werden kann; streng beweisen läßt er sich dafür nicht.

Euklid hat dies erkannt. Trotzdem sprach er ihn mit Bestimmtheit aus, jedoch ohne Beweis. Er sprach ihn aus als ein Axiom, d. h. als eine selbstverständliche aber unbeweisbare Annahme. Er dachte sich eben seinen mathematischen Raum so, daß der Satz Geltung haben sollte.\*) Wir gehen sicher, wenn wir ihn vorläufig als für das Endliche geltend annehmen.]

\*) Zahlreiche, auch bedeutende Mathematiker haben versucht, diesen Satz und die obigen Parallelenätze in ihrer vollen Geltung zu beweisen. Stets aber wurde von anderen nachgewiesen, daß der angebliche Beweis Trugschlüsse enthielt. Im allgemeinen verwechselte man den wirklichen Weltraum mit dem mathematischen Raume, den man sich willkürlich als den des Euklid, aber auch anders denken kann, ohne daß für die Mathematik des Endlichen Unterschiede entstehen. So kann man sich z. B. die endliche Ebene als ein Stück einer unendlich großen Kugeloberfläche denken, dann aber läuft die so gedachte Ebene im Unendlichen in sich zurück. Zwei Parallelen verhalten sich dann wie zwei Meridiane, die einander in den beiden unendlich fernen Polen schneiden. Man



## β) Die Winkelsumme des Dreiecks.

84) Die Winkelsumme im Dreieck ist gleich zwei Rechten. Im Vorkursus wurde dieser Satz zunächst für rechtwinklige Dreiecke abgeleitet, die sich stets als eine diagonale Hälfte gewisser Rechtecke betrachten lassen; dann für gleichschenklige Dreiecke, dann für allgemeine Dreiecke. Mit Hilfe der Parallelenlehre läßt er sich für Dreiecke von endlicher Größe folgendermaßen beweisen:

Man denke sich beim Dreieck  $ABC$  durch den Punkt  $B$  eine Parallele  $PQ$  zur Seite  $CA$  gelegt. Bezeichnet man die Winkel bei  $A$ ,  $B$  und  $C$  (Fig. 19) als  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$ , die beiden durch die Parallele entstandenen Winkel mit  $\alpha_1$  und  $\gamma_1$ , so sind die Wechselwinkel  $\alpha$  und  $\alpha_1$  einander gleich, ebenso die Wechselwinkel  $\gamma$  und  $\gamma_1$ , also stimmen die Winkelsummen  $(\alpha + \beta + \gamma)$  und  $(\alpha_1 + \beta + \gamma_1)$  überein. Die letztere Summe ist aber gleich

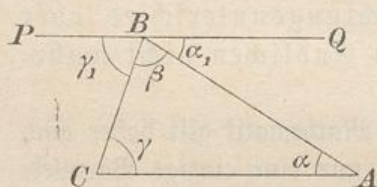
dem gestreckten Winkel  $PBQ$ , also gleich zwei Rechten, daher ist auch die Summe  $(\alpha + \beta + \gamma)$  gleich zwei Rechten.

[Auch dieser Satz gilt, streng genommen, nur für endliche Dreiecke. Gauß hat es für nötig gehalten, ihn für ein großes Dreieck, dessen Eckpunkte (trigonometrische Punkte) der Hohenhausen bei Göttingen, der Brocken und der Inselberg sind, zu prüfen. Innerhalb der Fehlergrenzen der Instrumente bewährte sich der Satz als richtig. Absolute Gewißheit war damit nicht gewonnen.]

**Bemerkungen.** 1) Veranschaulichen läßt sich der Satz folgendermaßen: In Fig. 20 ist eine bewegliche Gerade  $DE$  auf die Seite  $AC$  des gezeichneten Dreiecks gelegt. Diese Gerade soll um den Punkt  $A$  gedreht werden, bis sie in die Lage von  $AB$  gelangt und als  $D_1E_1$  erscheint. Dabei ist die kleinere der beiden möglichen Drehungen gemeint, die dem Winkel  $\alpha$  entspricht. Darauf soll die Gerade ebenso um den Punkt  $B$  gedreht werden, bis sie in die Lage von  $BC$  gelangt und als  $D_2E_2$  erscheint. Die neue Drehung entspricht dem Winkel  $\beta$ .

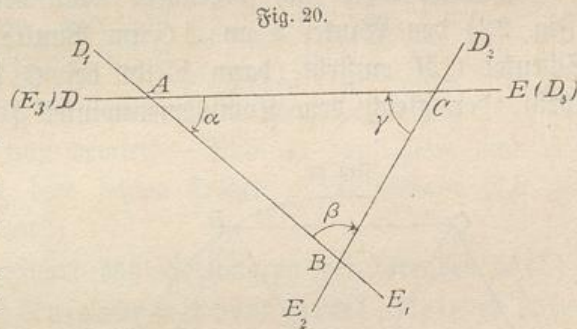
kann sich aber die endliche Ebene auch als einen Teil einer unendlich großen Drehungsfläche denken, auf der die „Meridiane“ im Unendlichen auseinanderlaufen. Daraus ergibt sich die Unbeweisbarkeit des Euklidischen Axioms (für das unendlich ferne Gebiet), das der alte griechische Meister in seinem Scharfsinn richtig als ein solches bezeichnet hat. Eine interessante Frage ist dabei die folgende: Welche geometrischen Sätze sind unabhängig von diesen oder jenen Axiomen des Euklid?

Fig. 19.





Darauf ist sie ebenso um  $C$  zu drehen, bis sie in die Lage von  $CA$  gelangt und als  $D_3E_3$  erscheint. Diese Schlußdrehung entspricht dem Winkel  $\gamma$ . Jetzt aber liegt die Gerade auf  $DE$ , jedoch hat sie zum ersten Male die der ursprünglichen entgegengesetzte Richtung erhalten. Demnach hat sie sich um  $180^\circ$  gedreht, und daher muß  $\alpha^\circ + \beta^\circ + \gamma^\circ = 180^\circ$  sein.\*)



2) Errichtet man auf einer Geraden  $AB$  in den Endpunkten unendlich lange Lote nach derselben Seite, so kann man das Gebilde als ein gleichschenkliges

Dreieck mit unendlich langen Schenkeln betrachten. Die beiden Basiswinkel sind dabei Rechte, der dritte Winkel ist nach Euklid gleich Null.

3) Legt man durch die Endpunkte einer Geraden  $AB$  unendlich lange parallele Strahlen, die auf der einen Seite der Geraden liegen, so kann man das Gebilde als ein ungleichschenkliges Dreieck betrachten, dessen eine Seite  $AB$  ist, während die beiden anderen unendlich lang sind. Die Summe der Winkel  $A$  und  $B$  ist dabei gleich zwei Rechten, der dritte Winkel ist nach Euklid gleich Null.

#### γ) Einige Folgerungen der Parallelenjäge.

85) Das gleichseitige Dreieck läßt sich auf drei Arten als gleichschenkelig betrachten. Im gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel gleich. Folglich sind die sämtlichen Winkel des gleichseitigen Dreiecks einander gleich, und jeder ist gleich  $\frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$ .

Nun läßt sich aber der Winkel  $60^\circ = \frac{360^\circ}{6}$  genau sechsmal um einen Punkt legen. Folglich lassen sich sechs gleichseitige Dreiecke von derselben Größe so aneinanderlegen, daß sie ein regelmäßiges Sechseck bilden (Fig. 21). Diesem läßt sich ein Kreis umbeschreiben, wobei der Radius gleich den Seiten der gleichseitigen Dreiecke ist. Folglich:

Trägt man in einen Kreis den Radius mehrfach als Sehne ein, so schließt sich die Reihe mit der sechsten Sehne.

\*) Man veranschauliche den Satz mittels eines einseitig bezeichneten Lineals oder mit der Reißschiene an der Wandtafel, wobei sich die entgegengesetzte Schlußlage sehr deutlich zeigt.



Jeder Winkel des regelmäßigen Sechsecks beträgt  $120^\circ$ , jeder seiner Zentriwinkel  $60^\circ$ . Es besitzt sechs Symmetrielinien.

86) Die Summe der beiden spitzen Winkel im rechtwinkligen Dreieck ist gleich einem Rechten. (Sie sind Komplementwinkel.) Warum?

Daraus ergibt sich folgendes: Man denke sich im Dreieck  $ABC$  (Fig. 22) den Winkel  $\alpha$  an  $AC$  im Punkte  $C$  angelegt, wodurch der Schenkel  $CM$  entsteht, dann bleibt bei  $C$  der Komplementwinkel  $\beta_1$  übrig, der gleich dem Komplementwinkel  $\beta$  sein muß. Aus  $\alpha = \alpha_1$

Fig. 21.

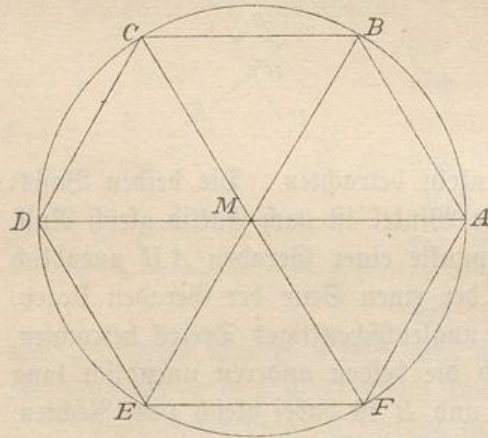
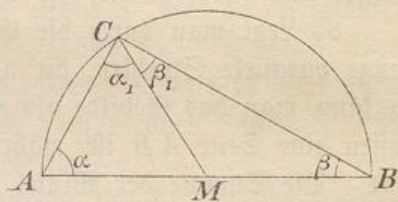


Fig. 22.



folgt, daß  $AMC$  ein gleichschenkliges Dreieck ist. Aus  $\beta = \beta_1$  folgt, daß  $BCM$  ein gleichschenkliges Dreieck ist. Daraus folgt  $AM = CM = BM$ . Demnach ist  $AB$  durch  $M$  halbiert, und schlägt man mit dem Radius  $MA$  um  $M$  einen Kreis, so geht dieser durch  $A$ ,  $B$  und  $C$ .

Man bezeichnet allgemein die Schenkel des rechten Winkels am rechtwinkligen Dreieck als Katheten, die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite als Hypotenuse des Dreiecks. Der gefundene Satz läßt sich daher folgendermaßen aussprechen:

Beim rechtwinkligen Dreieck hat der umbeschriebene Kreis seinen Mittelpunkt in der Mitte der Hypotenuse. Oder:

Der umbeschriebene Kreis des rechtwinkligen Dreiecks hat die Hypotenuse zum Durchmesser.

Umgekehrt: Zeichnet man über dem Durchmesser eines Kreises ein Dreieck, welches den dritten Eckpunkt in der Kreislinie hat, so ist das Dreieck ein rechtwinkliges.

**Beweis.** In Fig. 22 ist  $MA = MC$ , folglich  $\sphericalangle \alpha = \alpha_1$ . Außerdem ist  $MB = MC$ , folglich  $\sphericalangle \beta = \beta_1$ . Demnach ist  $\alpha + \beta = \alpha_1 + \beta_1$ . Die Summe der vier Winkel ist aber gleich  $180^\circ$ , folglich ist  $\alpha_1 + \beta_1 = 90^\circ$ , d. h.  $\sphericalangle ACB$  ein Rechter.



Der Satz wird gewöhnlich abgekürzt folgendermaßen ausgesprochen: Der Winkel im Halbkreise ist ein Rechter. (Sehr einfach ergibt sich daraus, daß sich um den Schnittpunkt  $M$  der Diagonalen eines Rechtecks ein Kreis legen läßt, der durch die Ecken des Rechtecks geht.)

**Aufgabe.** Auf einer Geraden  $AC$  im Endpunkte (oder in einem beliebigen Punkte) ein Lot zu errichten.

**Auflösung.** Man schlage um  $A$  und  $C$  Kreisbogen von demselben (beliebigen) Radius, die einen Punkt  $M$  geben (Fig. 22), und um  $M$  einen Kreisbogen von demselben Radius; dann ziehe man  $AM$  bis zum Schnitte  $B$  mit dem letzten Bogen. Die Gerade  $CB$  gibt das gesuchte Lot. (Warum?)

(Die Konstruktion erspart das Verlängern der Geraden  $AC$ .)

**Aufgabe.** Dieselbe Aufgabe mit dem Zirkel allein zu lösen.

**Auflösung.** Man schlage mit  $CA$  um  $C$  einen Kreisbogen, trage auf diesem zweimal hintereinander dieselbe Zirkelöffnung ab und schlage mit ihr um die beiden Teilpunkte  $D$  und  $E$  Kreisbogen, die einander in einem Punkte  $B$  schneiden. Durch  $C$  und  $B$  ist das gesuchte Lot vollständig bestimmt. (Warum? Vgl. das regelmäßige Sechseck.)

87) Der Winkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks sei gleich  $\gamma$ . Wie groß ist jeder Basismwinkel  $\alpha$ ? Antwort:  $\alpha = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$ .

**Beweis.**  $\alpha + \alpha + \gamma = 180^\circ$  oder  $2\alpha + \gamma = 180^\circ$ , also  $2\alpha = 180^\circ - \gamma$ , also  $\alpha = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$ . — (Daraus folgt ferner  $\frac{\gamma}{2} = 90^\circ - \alpha$ , also  $\gamma = 180^\circ - 2\alpha$  als Winkel an der Spitze, wenn  $\alpha$  der Basismwinkel ist.)

**Aufgabe.** Wie groß ist jeder Winkel des regelmäßigen Fünfecks?

**Auflösung.** Der Zentriwinkel des Fünfecks ist gleich  $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$ , der Basismwinkel des zugehörigen gleichschenkligen Dreiecks ist also gleich  $90^\circ - \frac{72^\circ}{2} = 90^\circ - 36^\circ = 54^\circ$ . Jeder Winkel des regelmäßigen Fünfecks besteht aus zwei solchen Winkeln, ist also gleich  $108^\circ$ .

[Für das regelmäßige  $n$ -Eck folgt: Zentriwinkel  $= \frac{360^\circ}{n}$ , Basismwinkel des zugehörigen gleichschenkligen Dreiecks  $= 90^\circ - \frac{180^\circ}{n}$ , folglich der doppelt so große  $n$ -Eckswinkel  $= 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$ , wobei  $n > 2$  zu denken ist.]

88) Stimmen zwei Dreiecke in zwei Winkeln überein, so stimmen sie auch im dritten überein. Sind nämlich  $\alpha, \beta, \gamma$  die Winkel des einen Dreiecks,  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  die des anderen, und ist



$\alpha = \alpha_1$  und  $\beta = \beta_1$ , so ist in dem einen Dreiecke  $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$ , im anderen  $\gamma_1 = 180^\circ - (\alpha_1 + \beta_1)$ , also muß  $\gamma = \gamma_1$  sein. (Warum?)

89) Unter einem Außenwinkel eines Dreiecks versteht man einen Winkel, der durch Verlängerung einer der Seiten des Dreiecks entsteht. Von ihm gilt der Satz:

Jeder Außenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der an den beiden anderen Ecken liegenden Dreieckswinkel.

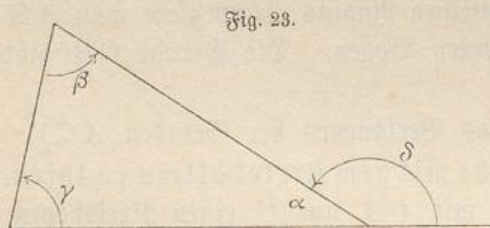


Fig. 23.

**Beweis.** In Fig. 23 ist  $\delta$  ein Außenwinkel,  $\alpha, \beta, \gamma$  sind die Dreieckswinkel. Dabei ist  $\beta + \gamma = 180^\circ - \alpha$ , auch  $\delta = 180^\circ - \alpha$ , also  $\delta = \beta + \gamma$ .

**Bemerkung.** Eine durch den Scheitel von  $\alpha$  gelegte Parallele zur Gegenseite zerlegt  $\delta$  in die beiden Bestandteile  $\beta$  und  $\gamma$ . Die Summe aller sechs Außenwinkel des Dreiecks ist gleich vier Rechten.

90) Wie groß ist die Summe der Winkel im unregelmäßigen  $n$ -Eck?\*) Antwort: Denkt man sich einen Punkt  $P$  im Innern des  $n$ -Ecks mit dessen Ecken verbunden, so entstehen  $n$  Dreiecke. Jedes dieser Dreiecke hat als Winkelsumme zwei Rechte, alle Dreiecke zusammen haben also die Winkelsumme  $2n$  Rechte. Davon sind vier Rechte abzuziehen als Summe der Winkel, die um  $P$  herumliegen, für das  $n$ -Eck bleibt daher als Winkelsumme  $(2n - 4)$  Rechte.

**Beispiele.** Winkelsumme des Vierecks  $(2 \cdot 4 - 4) = 4$  Rechte. Winkelsumme des Fünfecks  $(2 \cdot 5 - 4) = 6$  Rechte. Winkelsumme des Sechsecks  $(2 \cdot 6 - 4) = 8$  Rechte. Winkelsumme des Siebenecks  $(2 \cdot 7 - 4) = 10$  Rechte. Jedes folgende hat zwei Rechte mehr.

**Bemerkung.** Die Summe aller 8 Außenwinkel des Vierecks beträgt 8 Rechte. Wie ist es bei dem konvexen  $n$ -Eck?

91) Halbiert man bei zwei Parallelen, die von einer Geraden geschnitten werden, gleichliegende Winkel oder Wechselwinkel, so werden die Halbierenden parallel; halbiert man entgegengesetzte Winkel, so stehen die Halbierenden aufeinander senkrecht. (Beweis dem Schüler zu überlassen.)

92) Winkel, deren Schenkel gleichgerichtet parallel sind, sind einander gleich. Winkel, deren Schenkel entgegengesetzt gerichtet parallel

\*) Es sei zunächst vorausgesetzt, daß das  $n$ -Eck überall konvex ist, daß also jeder seiner Winkel kleiner als  $180^\circ$  ist.

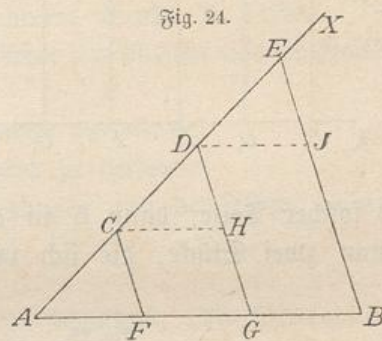


sind, sind einander gleich. Winkel mit parallelen Schenkeln, von denen ein Paar gleichgerichtet, ein Paar entgegengesetzt gerichtet ist, betragen zusammen zwei Rechte. (Beweis dem Schüler zu überlassen. Der Satz gilt auch von Nebenwinkeln.)

Fällt man von einem Punkte aus, der außerhalb eines Winkels und seines Scheitelwinkels liegt, Lote auf dessen Schenkel, so bilden diese Lote einen Winkel, der dem gegebenen gleich ist. Fällt man sie von einem Punkte aus, der innerhalb des gegebenen Winkels oder seines Scheitelwinkels liegt, so bilden sie den Supplementwinkel des gegebenen Winkels.

93) **Aufgabe.** Eine gegebene Gerade in 3, 5 oder in eine beliebige Anzahl gleicher Teile zu zerlegen.\*)

**Auflösung.** In Fig. 24 sei  $AB$  die in drei gleiche Teile zu zerlegende Gerade, dann ziehe man eine beliebig gerichtete Gerade  $AX$  und trage auf dieser mit beliebiger Zirkelöffnung gleiche Stücke  $AC$ ,  $CD$  und  $DE$  ab. Jetzt verbinde man  $E$  mit  $B$  und lege durch  $D$  und  $C$  Parallelen zu  $EB$ , die auf  $AB$  Teilpunkte  $G$  und  $F$  geben. Dann ist  $AF = FG = GB$ .



**Beweis.** Um die letzte Behauptung zu beweisen, lege man durch  $D$  und  $E$  Parallelen zu  $AB$ , sodaß Dreiecke  $DEJ$  und  $CDH$  entstehen.

Für diese Dreiecke ist  $CD = DE$ , auch stimmen ihre Winkel bei  $C$  und  $D$ , bei  $H$  und  $J$ , bei  $D$  und  $E$  überein. (Weshalb?) Es wird behauptet, daß die beiden Dreiecke sich zur Deckung bringen lassen. Man kann nämlich  $DE$  so auf  $CD$  legen, daß dabei die gleichen Winkel  $EDJ$  und  $DCH$  einander decken, daß ferner die gleichen Winkel  $DEJ$  und  $CDH$  einander decken. Weil dies der Fall ist, so müssen dabei auch die Punkte  $J$  und  $H$  zusammenfallen, denn zwei einander deckende Paare von Geraden müssen denselben Schnittpunkt haben. Demnach muß  $DJ = CH$  sein.

Weil aber Parallele zwischen Parallelen gleichlang sind, ist  $GB = DJ$  und ebenso  $FG = CH$ . Demnach muß auch  $FG = GB$  sein. (Warum?)

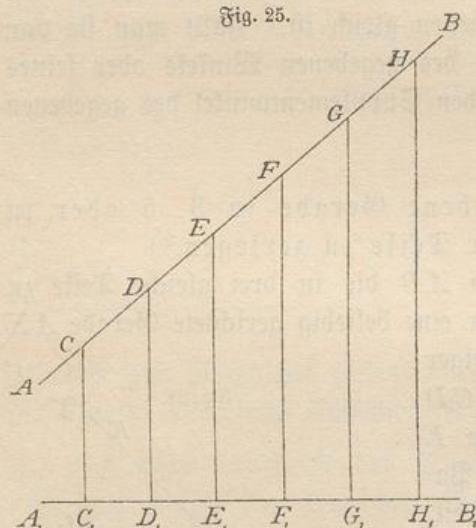
\*) Diese Aufgabe, bei der es sich um kongruente Dreiecke handelt, wird vorausgeschickt, um eine Reihe von Konstruktionen zu ermöglichen.



Ebenso ist zu beweisen, daß sich Dreieck  $DEJ$  mit dem Dreieck  $ACF$  zur Deckung bringen läßt, und daß daher auch  $AF = DJ$  und folglich auch  $AF = GB$  ist. Es ist also, wie behauptet wurde,  $AF = FG = GB$ .

**Folgerung.** Ist eine Gerade in gleiche Teile geteilt, und zieht man von den Teilpunkten aus Parallelen bis zu einer anderen Geraden, so wird auch diese in gleiche Teile zerlegt.

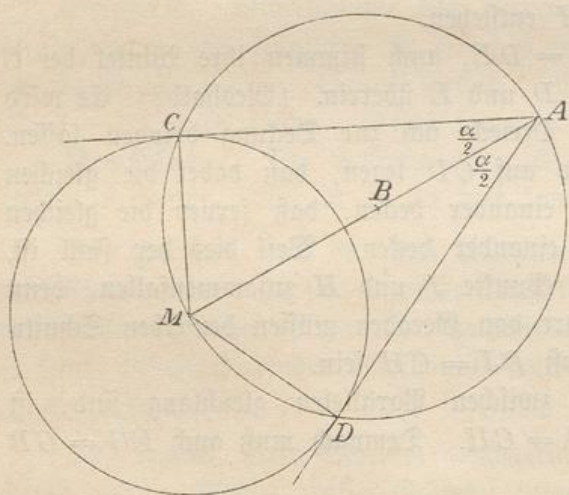
Fig. 25.



Der Beweis wird mit Hilfe eben solcher Dreiecke geführt wie vorher. —

Sind die Parallelen Lote auf der zweiten Geraden, so sagt man, die Teilpunkte der ersten seien auf die zweite Gerade projiziert. Dies ist in Fig. 25 dargestellt. Also gilt der Satz: Die Projektion gleicher Teile einer Geraden auf eine andere Gerade gibt auf dieser gleiche Teile. Zählt man bei der einen Geraden erst 3 solcher Teile, dann 5 in aufeinander folgender Reihe ab, so hat man zwei Stücke, die sich verhalten wie 3 zu 5. Legt man durch

Fig. 26.



die Endpunkte Parallelen bis zur zweiten Geraden, so erhält man auch dort zwei Stücke, die aus 3 bzw. 5 gleichen Teilen bestehen. Auch von diesen Stücken sagt man, sie verhielten sich wie 3 zu 5. Daher sagt man allgemein: Alle Geraden, die durch drei Parallelen gezogen werden, sind in demselben Verhältnis geteilt, nämlich im Verhältnis der Abstände der Parallelen.

94) **Aufgabe.** Von einem außerhalb eines (gegebenen) Kreises gegebenen Punkte an den Kreis Tangenten zu legen.



**Auflösung.** In Fig. 26 sei  $M$  der gegebene Kreis\*),  $A$  der gegebene Punkt. Man ziehe die Gerade  $AM$ , halbiere sie, was  $B$  gibt und lege um  $B$  mit der Zirkelöffnung  $BM$  einen Kreis, der den ersten Kreis in  $C$  und  $D$  schneidet. Die Geraden  $AC$  und  $AD$  geben die gesuchten Tangenten.

**Beweis.** Der Winkel  $ACM$  ist als Winkel im Halbkreise ein Rechter, also ist  $CA$  das im Endpunkte des Radius  $MC$  auf diesem errichtete Lot, d. h.  $CA$  ist Tangente des Kreises  $M$ . Das Entsprechende findet bei  $D$  statt.

#### d) Konstruktionsübungen.\*\*)

$\alpha$ ) Addition und Subtraktion von Geraden, von Winkeln, von Kreisbogen mit demselben Radius.

96) Die Summe dreier oder mehrerer gegebener\*\*\*\*) Geraden zu bilden.

97) Die Summe dreier oder mehrerer Winkel zu bilden.

98) Die Summe dreier oder mehrerer Kreisbogen von demselben Radius zu bilden.

99) Den Unterschied zweier Geraden zu bilden.

100) Den Unterschied zweier Winkel zu bilden.

101) Den Unterschied zweier Kreisbogen von demselben Radius zu bilden.

$\beta$ ) Vervielfachung und Teilung von Geraden, von Winkeln und von Kreisbogen.

102) Eine Gerade auf die doppelte, dreifache, vierfache usw. Länge zu bringen.

103) Einen Winkel auf die doppelte, dreifache, vierfache usw. Größe zu bringen.

104) Einen Kreisbogen auf das Doppelte, Dreifache, Vierfache usw. zu bringen.

105) Eine Gerade in 2, 4, 8, 16, 32 usw. gleiche Teile zu zerlegen. (Zwei Lösungsarten sind anzugeben.)

106) Eine Gerade in beliebig viele gleiche Teile zu zerlegen.

107) Beliebige Bruchteile einer Geraden zu bilden, z. B.  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{2}{5}$ ,  $\frac{3}{5}$ ,  $\frac{4}{5}$ ,  $\frac{5}{6}$ ,  $\frac{2}{7}$ ,  $\frac{3}{7}$ ,  $\frac{4}{7}$ ,  $\frac{5}{7}$ ,  $\frac{6}{7}$  usw.

\*) Man bezeichnet den gegebenen Kreis häufig nur mit seinem Mittelpunkt.

\*\*) Einige der schon gelösten Aufgaben werden der leichteren Übersicht wegen noch einmal genannt.

\*\*\*) Das Wort „gegeben“ soll von jetzt ab weggelassen werden.



- 108) Einen Winkel in 2, 4, 8, 16, 32 usw. gleiche Teile zu zerlegen. \*)
- 109) Einen Kreisbogen in 2, 4, 8, 16, 32 usw. gleiche Teile zu zerlegen.
- 110) Eine Gerade im Verhältnis 2 : 3 (zwei zu drei) zu teilen. (Man teile sie in 5 gleiche Teile. Zählt man 2 davon ab, so hat man den gesuchten Teilpunkt.)
- 111) Eine Gerade in einem beliebigen ganzzahligen Verhältnis zu teilen.
- 112) Eine Gerade so zu verlängern, daß sie sich zum Zusatzstück verhält wie 3 : 5. (Man teile sie in 3 Teile und verlängere sie um 5 solcher Teile.)
- 113) Einen Winkel so zu vergrößern, daß er sich zum Zusatzwinkel verhält wie 2 : 3. (Man halbiere den Winkel und addiere zu ihm das Dreifache einer Hälfte.)
- 114) So kann man einen Winkel derart vergrößern, daß er zum Zusatzteile im Verhältnis 2 :  $n$ , 4 :  $n$ , 8 :  $n$ , 16 :  $n$  usw. steht, wobei  $n$  eine ganze Zahl ist.
- 115) Die Aufgaben 113) und 114) lassen sich auch für Kreisbogen ausführen.

γ) Konstruktion für gewisse Reihen von Winkeln.

- 116) Die Winkelreihe  $\dots 360^\circ, 180^\circ, 90^\circ, 45^\circ, \frac{45^\circ}{2}, \frac{45^\circ}{4}, \frac{45^\circ}{8}, \dots$  zu konstruieren.
- 117) Die Winkelreihe  $\dots 240^\circ, 120^\circ, 60^\circ, 30^\circ, 15^\circ, \frac{15^\circ}{2}, \frac{15^\circ}{4}, \dots$  zu konstruieren.
- 118) Die dreifachen, fünffachen, siebenfachen usw. Winkel der Reihen 116) und 117) zu konstruieren.
- 119) Durch Addition und Subtraktion das Anfangsglied für andere Reihen konstruierbarer Winkel aufzufinden, z. B.

$$330^\circ, 165^\circ, \frac{165^\circ}{2}, \frac{165^\circ}{4}, \dots$$

$$300^\circ, 150^\circ, 75^\circ, \frac{75^\circ}{2}, \frac{75^\circ}{4}, \dots$$

$$210^\circ, 105^\circ, \frac{105^\circ}{2}, \frac{105^\circ}{4}, \dots$$

\*) Andere Teilungen beliebiger Winkel sind mit Lineal und Zirkel aus später darzulegenden Gründen nicht durchführbar. Für gewisse Winkel ist aber die Dreiteilung möglich, z. B. für die Winkel  $360^\circ, 180^\circ, 90^\circ$ , für gewisse wird später die Fünfteilung gelehrt usw. Von den Teilungen beliebiger Kreisbogen gilt dasselbe.



d) Konstruktion gewisser Kreisteilungen und regelmäßiger Vielecke.

- 120) Einen Kreis in 2, 4, 8, 16, 32, ... gleiche Teile zu zerlegen.  
 121) Einen Kreis in 3, 6, 12, 24, 48, ... gleiche Teile zu zerlegen  
 122) Einem Kreise ein regelmäßiges 4-Eck, 8-Eck, 16-Eck, 32-Eck, ... einzubeschreiben.  
 123) Einem Kreise ein regelmäßiges 3-Eck, 6-Eck, 12-Eck, 24-Eck, ... einzubeschreiben. ( $ACE$  in Fig. 21 ist ein gleichs. Dreieck.)  
 124) Einem Kreise ein regelmäßiges 4-Eck, 8-Eck, 16-Eck, 32-Eck, ... umzubeschreiben.  
 125) Einem Kreise ein regelmäßiges 3-Eck, 6-Eck, 12-Eck, 24-Eck, ... umzubeschreiben.  
 126) Über einer gegebenen Geraden ein regelmäßiges 4-Eck, 8-Eck, 16-Eck, 32-Eck, ... zu konstruieren.\*)  
 127) Über einer gegebenen Geraden ein regelmäßiges 3-Eck, 6-Eck, 12-Eck, 24-Eck, ... zu konstruieren.\*)  
 128) Die Aufgaben 122) und 124) bzw. 123) und 125) so zu vereinigen, daß die Seiten des umbeschriebenen Vielecks denen des eingeschriebenen parallel werden.  
 129) Dieselben Aufgaben so zu vereinigen, daß die Seiten des umbeschriebenen Vielecks durch die Ecken des eingeschriebenen gehen.  
 130) Den Mittelpunkt eines gegebenen regelmäßigen Vielecks zu finden und dessen ein- und dessen umbeschriebenen Kreis zu konstruieren.

e) Übungen mit regelmäßigen Vielecken.

- 131) Die Ebene lückenlos mit gleichseitigen Dreiecken von derselben Größe zu belegen.  
 132) Die Ebene lückenlos mit Quadraten von derselben Größe zu belegen.  
 133) Die Ebene lückenlos mit regelmäßigen Sechsecken von derselben Größe zu belegen.

\*) Quadrat, gleichseitiges Dreieck, regelmäßiges Sechseck über einer gegebenen Geraden sind leicht zu konstruieren. Bei größerer Anzahl der Seiten konstruiere man zunächst das gleichschenklige Dreieck mit dem zugehörigen Zentriwinkel. Beim Achteck z. B. ist der Zentriwinkel gleich  $\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$ , der Winkel an der Grundlinie des gleichschenkligen Dreiecks also gleich  $90^\circ - \frac{45^\circ}{2} = 67\frac{1}{2}^\circ$ , was leicht zu konstruieren ist. Dann lege man um die Spitze des Dreiecks einen durch die Endpunkte der gegebenen Geraden gehenden Kreis, in den sich die Gerade achtmal als Sehne eintragen läßt, wenn man richtig gezeichnet hat.



134) Die Ebene mit regelmäßigen Achtecken von derselben Größe so zu belegen, daß Quadrate von derselben Seitenlänge übrig bleiben.

135) Die Ebene mit regelmäßigen Sechsecken von derselben Größe so zu belegen, daß gleichseitige Dreiecke von derselben Seitenlänge übrig bleiben. (Auf jeder Sechsecksseite steht ein solches Dreieck.)

136) Die Ebene mit regelmäßigen Sechsecken von derselben Größe so zu belegen, daß Rhomben von derselben Seitenlänge und von den Winkeln  $60^\circ$  und  $120^\circ$  übrig bleiben.

137) In ein gegebenes gleichseitiges Dreieck ein kleineres von gegebener Größe so einzuzichnen, daß die Ecken des kleineren auf die Seiten des größeren fallen. \*) Wann hat die Aufgabe zwei Lösungen, wann nur eine, wann keine?

138) Um ein gegebenes gleichseitiges Dreieck ein größeres von gegebener Seite so zu legen, daß die Seiten des letzteren durch die Eckpunkte des ersteren gehen. \*\*) Wann hat die Aufgabe zwei Lösungen, wann nur eine, wann keine?

139) Die Aufgabe 137) für zwei Quadrate zu lösen.

140) Die Aufgabe 138) für zwei Quadrate zu lösen.

141) Die Aufgabe 137) für zwei regelmäßige Sechsecke oder Achtecke usw. zu lösen.

142) Die Aufgabe 138) für zwei regelmäßige Sechsecke oder Achtecke usw. zu lösen.

#### §) Zwei Hindernisaufgaben.

143) Eine gerade Linie über ein gegebenes Hindernis hinaus zu verlängern.

[Es kommt vor, daß auf dem Fußboden einer Werkstätte eine Gerade gezogen werden soll, die über eine im Wege stehende Maschine hinaus zu verlängern ist; oder daß eine geplante Straße abgesteckt werden soll, obwohl ein wegzureißendes Gebäude noch steht. Man begnüge sich mit folgender vorläufiger Lösung: Man umgehe das

\*) Die Mitten beider Dreiecke müssen aufeinander fallen. Man zeichne das kleinere Dreieck irgendwo für sich, bilde den Radius seines umbeschriebenen Kreises, und lege mit diesem einen Kreis um den Mittelpunkt des gegebenen (größeren) Dreiecks. Ist der Radius groß genug, so erhält man sechs Schnittpunkte mit den Seiten des letzteren, welche zwei gleichseitige Dreiecke geben.

\*\*) Man zeichne das größere Dreieck irgendwo für sich, bilde die Radien der ihm ein- und umbeschriebenen Kreise und lege mit diesen Kreise um den Mittelpunkt des gegebenen (kleineren) Dreiecks. Ragen die Spitzen des letzteren über den kleineren hinaus, so lassen sich von ihnen aus an diesen Kreis sechs Tangenten legen, von den je drei einem der zu zeichnenden Dreiecke angehören. Die Tangenten enden auf dem größeren Kreise.



Hindernis durch drei Seiten eines Rechtecks, die sich um das Hindernis herumlegen lassen und konstruiere statt der vierten Seite ihre Verlängerung als Lot auf der dritten.

Statt der drei Rechtecksseiten kann man auch zwei Seiten eines gleichseitigen oder gleichschenkligen Dreiecks benutzen, die das Hindernis umgehen.

Später wird eine von Winkeln unabhängige Konstruktion gelehrt.]

144) Den jenseits eines Hindernisses liegenden Schnittpunkt zweier Geraden zu bestimmen.

[Die Geraden sind (zunächst nach der vorigen Methode) über das Hindernis hinaus zu verlängern. Dann ist der Schnittpunkt leicht zu bestimmen.]

**Bemerkung.** Ist das Hindernis z. B. ein Fluß, der nicht umgangen werden kann, so benutzt der Landmesser Stäbe, von denen zwei auf der zu verlängernden Geraden senkrecht in die Erde gestossen werden, während ein dritter Stab jenseits des Flusses so eingestellt wird, daß er dem über den ersten Stab hinblickenden Beobachter durch den zweiten Stab verdeckt wird. So findet man einen ersten Punkt für die Verlängerung der Geraden, einen zweiten kann man in derselben Weise bestimmen. In ähnlicher Weise kann mit der zweiten Aufgabe verfahren werden.

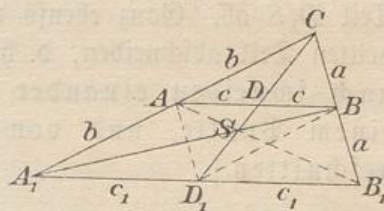
η) Einfache Vergrößerungs- und Verkleinerungsaufgaben.\*)

145) Ein gegebenes Dreieck im doppelten Maßstabe zu zeichnen.

**Auflösung.** Ist in Fig. 27  $ABC$  das gegebene Dreieck, so verlängere man  $CA$  über  $A$  hinaus um sich selbst, was  $A_1$  gibt. Dann lege man durch  $A_1$  eine Parallele zu  $AB$ , welche die Verlängerung von  $CB$  in einem Punkte  $B_1$  schneidet. Dann ist  $A_1B_1C$  das verlangte Dreieck.

**Beweis.** Weil  $CA_1$  in  $A$  halbiert und  $A_1B_1 \parallel AB$  ist, so ist auch  $CB_1$  in  $B$  halbiert, d. h.  $CB_1$  ist doppelt so groß als  $CB$ . Zieht man ferner die Gerade  $BD_1 \parallel AA_1$ , so ist  $AB$  gleich  $A_1D_1$ , denn Parallelen zwischen Parallelen sind einander gleich. Weil aber  $CB_1$  in  $B$  hal-

Fig. 27.



\*) Eigentlich gehören solche Aufgaben in die Ähnlichkeitslehre. Um jedoch die Konstruktionsübungen mannigfaltiger zu machen, sind sie schon hier eingeschaltet worden.



biert und  $BD_1 \parallel CA_1$  ist, so ist auch  $A_1B_1$  in  $D_1$  halbiert, also ist  $AB_1 = 2 \cdot A_1D_1 = 2 \cdot AB$ . Alle Seiten des Dreiecks  $A_1B_1C_1$  sind also doppelt so groß als die Dreiecks  $ABC$ . Zugleich sind alle Winkel des Dreiecks  $A_1B_1C$  gleich den entsprechend liegenden Winkel des Dreiecks  $ABC$ . (Warum?)

**Bemerkungen.** Die Auflösung kann folgendermaßen umgestaltet werden. Man verlängere  $CA$  über  $A$  hinaus um sich selbst, ebenso  $CB$  über  $B$  hinaus um sich selbst und verbinde die neuen Endpunkte  $A_1$  und  $B_1$  durch eine Gerade. Diese muß von selbst parallel zu  $AB$  und doppelt so lang wie  $AB$  werden. —

Zum Beweise konnte man auch  $AD_1 \parallel CB_1$  ziehen.

Dann hat man vier übereinstimmende Dreiecke und sieht daraus, daß der Flächeninhalt des Dreiecks  $A_1B_1C$  viermal so groß ist als der von  $ABC$ .

Sind also die Seiten eines Dreiecks doppelt so groß wie die eines anderen, so haben beide Dreiecke dieselben Winkel und der Inhalt des größeren Dreiecks ist das Vierfache von dem des kleineren.

[In der Figur ist ganz ebenso Dreieck  $A_1SC$  die Vergrößerung des Dreiecks  $BSD_1$  auf den doppelten Maßstab; also ist  $SC$  das Doppelte von  $SD_1$ , und  $SA_1$  das Doppelte von  $SB$ . (Die Geraden  $SB$  und  $SD_1$  sind jetzt über die Ecke  $S$  hinaus verdoppelt gezeichnet worden.) Demnach ist  $D_1S$  der dritte Teil von  $D_1C$  und  $BS$  der dritte Teil von  $BA_1$ . (Dies bestätigt sich auch, wenn man durch  $A$  und  $B$  Parallelen zu  $CD_1$  legt, welche die halbierte Linie  $A_1B_1$  in vier gleiche Teile zerlegen, von denen drei Teile durch Parallelen auf  $A_1B$  übertragen werden, sodaß diese Linie in drei gleiche Teile geteilt ist.)

Man nennt die Geraden, die von der Ecke des Dreiecks nach den Mitten der Gegenseiten gehen, Mittellinien des Dreiecks. Die Mittellinie  $A_1B$  schneidet also von der Mittellinie  $CD_1$  den dritten Teil  $D_1S$  ab. Ganz ebenso muß die Mittellinie  $B_1A$  von  $CD_1$  den dritten Teil abschneiden, d. h. sie muß auch durch  $S$  gehen. Demnach schneiden einander die Mittellinien des Dreiecks in einem Punkte, und von jeder wird der dritte Teil abgeschnitten.]

146) Ein gegebenes Dreieck im halben Maßstabe zu zeichnen.

Die Auflösung ergibt sich aus Fig. 27 und ist dem Schüler zu überlassen.

147) Ein gegebenes Dreieck im dreifachen Maßstabe zu zeichnen.



Die Auflösung geschieht ähnlich wie bei Aufgabe 145. Sie ist dem Schüler zu überlassen. Dieser soll die Richtigkeit der Konstruktion beweisen und durch Zeichnen geeigneter Parallelen das große Dreieck in neun mit dem gegebenen übereinstimmende Dreiecke zerlegen um so zu zeigen, daß der Flächeninhalt der neunfache des ursprünglichen ist.

148) [Ein gegebenes Dreieck im  $n$ fachen Maßstabe (wo  $n$  eine beliebige ganze Zahl ist) oder im  $\frac{3}{2}$ fachen Maßstabe, oder im  $\frac{3}{4}$ fachen Maßstabe, oder im  $\frac{m}{n}$ fachen Maßstabe ( $m$  und  $n$  ganze Zahlen) zu zeichnen und nachzuweisen, daß der Inhalt des neuen Dreiecks der  $n^2$ fache bzw.  $\frac{9}{4}$ fache, bzw.  $\frac{9}{16}$ fache, bzw. der  $\left(\frac{m}{n}\right)^2$ fache geworden ist.]

149) Ein gegebenes Quadrat im doppelten, dreifachen, vierfachen Maßstabe zu zeichnen und nachzuweisen, daß der Inhalt der vierfache, bzw. neunfache, bzw. 16fache ist. [Das Quadrat ferner im  $\frac{2}{3}$ fachen,  $\frac{5}{4}$ fachen,  $\frac{m}{n}$ fachen Maßstabe zu zeichnen und nachzuweisen, daß der Inhalt das  $\frac{4}{9}$ fache,  $\frac{25}{16}$ fache,  $\left(\frac{m}{n}\right)^2$ fache geworden ist.]

150) Ein gegebenes regelmäßiges 6-Eck, oder 8-Eck, oder 12-Eck, oder 16-Eck im doppelten, oder dreifachen, oder vierfachen Maßstabe zu zeichnen und nachzuweisen, daß der Inhalt das 4fache, bzw. 9fache, bzw. 16fache geworden ist.

(Die Auflösung geschieht am einfachsten, indem man um den Mittelpunkt des Vielecks einen Kreis mit dem doppelten, dreifachen, vierfachen Radius des umbeschriebenen Kreises schlägt und die nach den Ecken des ursprünglichen Vielecks gezogenen Radien bis zum Kreise verlängert, worauf die Sehnen einzutragen sind.

Weil jedes der gleichschenkligen Dreiecke auf das Vierfache, Neunfache, Sechzehnfache des ursprünglichen Inhalts gelangt, so gilt dasselbe auch vom Gesamtinhalte des Vielecks.)

151a) Ein gegebenes Rechteck im doppelten, dreifachen, vierfachen usw. Maßstabe zu zeichnen.

(**Auflösung.** Man zeichne eine Diagonale und bringe sie nach derselben Richtung hin auf die doppelte, dreifache, vierfache usw. Länge. Von den gefundenen Endpunkten falle man Lote auf die vom Anfangspunkte der Diagonale ausgehenden Rechtecksseiten. Es entstehen so Rechtecke von den Seiten  $2a$  und  $2b$ ,  $3a$  und  $3b$ ,  $4a$  und  $4b$  usw. oder, wie man auch sagt, von demselben Seitenverhältnis  $a : b$ . In allen diesen Rechtecken bildet die Diagonale mit den Rechtecksseiten dieselben beiden Winkel.)



151b) Ein beliebiges gegebenes Viereck im doppelten Maßstabe zu zeichnen.

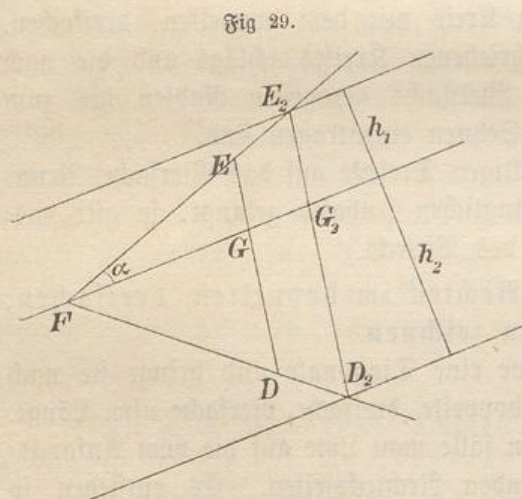
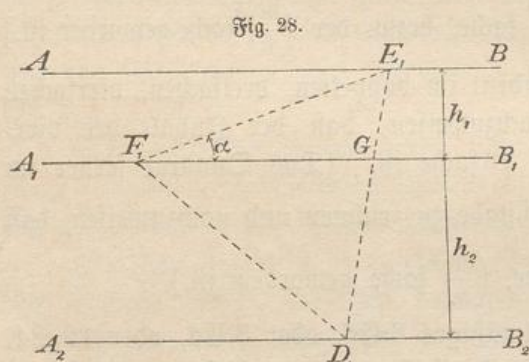
(Die Auflösung ist dem Schüler zu überlassen, der mehrere Wege aufzufinden hat, z. B. auch den Weg, die Abschnitte der Diagonalen vom Schnittpunkte aus zu verdoppeln, wobei jedes Dreieck auf den vierfachen Inhalt kommt, also auch der Gesamthalt vervierfacht wird.)

Auch der dreifache, vierfache usw. Maßstab macht keine Schwierigkeiten.

152) [Eine schwierigere Vergrößerungsaufgabe: Gegeben seien drei Parallelen, von denen die beiden letzten den doppelten gegen-

seitigen Abstand haben wie die beiden ersten. Es soll ein gleichseitiges Dreieck gezeichnet werden, welches seine Ecken auf den Parallelen hat. Eine seiner Ecken soll vorgeschrieben sein.

**Auflösung.** In Fig. 28 seien  $AB$ ,  $A_1B_1$ ,  $A_2B_2$  die Parallelen mit den Abständen  $h_1$  und  $h_2 = 2h_1$ ;  $F_1$  soll der gegebene Eckpunkt des gleichseitigen Dreiecks sein. Man zeichne zunächst irgendwo ein gleichseitiges Dreieck  $DEF$  von beliebiger, z. B. kleiner Größe und mache in diesem  $EG = \frac{1}{3}ED$  (Fig. 29). Dann verlängere man  $FE$  und  $FD$  und die zu ziehende Gerade  $FG$  über  $E$ ,  $D$ ,  $G$  hinaus. Zu  $FG$  ziehe man Parallele in den entgegengesetzten Abständen  $h_1$  und  $h_2$ , welche die verlängerten Dreiecksseiten in  $E_2$  und  $D_2$  schneiden. Zieht man  $D_2E_2$ , so hat man ein gleichseitiges Dreieck  $FD_2E_2$ , welches den Forderungen ge-



richtige Lage zu bringen ist. Man lege den Winkel  $EFG = \alpha$  an  $A_1B_1$  im Punkte  $F_1$  nach der Seite des kleineren Abstandes an, was den Schnittpunkt  $E_1$  gibt und schlage um  $F_1$  mit  $F_1E_1$  einen Kreis-

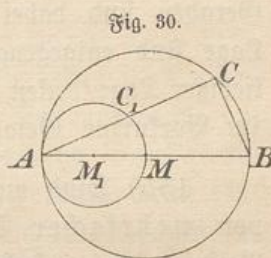


bogen, der  $A_2B_2$  in  $D_2$  schneidet. Dann sind  $D_1E_1F_1$  die Eckpunkte des gesuchten Dreiecks. (Letzteres kann noch auf eine zweite Art, links von  $F_1$  liegend, gezeichnet werden, wozu nur die Bervollständigung des letzten Kreisbogens nötig ist.)

Der Beweis der Richtigkeit soll dem Schüler überlassen bleiben. Dieser wird dann auch imstande sein, die Aufgabe für beliebige Abstandsverhältnisse zu lösen. — Die Konstruktion kann erheblich abgekürzt werden, denn eigentlich ist die Aufgabe gelöst, sobald man im Hilfsdreieck  $FG$  gezogen und den Winkel  $\alpha$  in die Hauptfigur übertragen hat.]\*)

153) Zeichnet man in einen Kreis einen ihn berührenden vom halben Radius, so ist jede durch den Berührungspunkt gelegte Sehne durch den kleineren Kreis halbiert.

**Beweis.** Der kleinere Kreis geht durch den Mittelpunkt  $M$  des größeren. Ist  $A$  Berührungspunkt, so ist  $AMB$  ein Durchmesser, der durch die Mitten beider Kreise geht. Wird eine beliebige Sehne  $AC$  in  $C_1$  vom kleineren Kreise geschnitten und zieht man  $CB$  und  $C_1M$ , so sind die Winkel  $AC_1M$  und  $ACB$  Rechte als Winkel im Halbkreis, also ist  $C_1M \parallel CB$ ; da ferner  $AB$  in  $M$  halbiert ist, muß auch  $AC$  in  $C_1$  halbiert sein.



Entsprechendes findet statt mit einem inneren Berührungskreise, dessen Radius der dritte, vierte,  $n^{\text{te}}$  Teil vom Radius des größeren ist.

Was geschieht, wenn der Berührungskreis außerhalb des gegebenen liegt?

(Der angegebene Satz läßt sich bei vielen Konstruktionsaufgaben anwenden.)

### e) Begriff der Symmetrie in der Ebene.

#### a) Erklärung und Grundgesetze der einfachen und mehrfachen Symmetrie.

154) Bei den grundlegenden Konstruktionen drängte sich der Begriff der Symmetrie auf, bei dessen Beachtung viele Sätze und Konstruktionen sich als selbstverständlich ergeben.

Man bezeichnet ein planimetrisches Gebilde als einfach

\*) Die Aufgabe kann natürlich überschlagen werden. Der Beweis der Richtigkeit soll nur eine Scharfsinnsprobe für begabtere Schüler sein.



symmetrisch, wenn es durch eine und nur eine Gerade so in zwei Hälften zerlegt wird, daß die eine Hälfte durch Umklappung um diese Gerade mit der anderen Hälfte zur Deckung gebracht werden kann.

Jede Hälfte bezeichnet man als das Spiegelbild der anderen. Die Gerade heißt die Symmetrielinie oder Symmetrieachse des Gebildes, oder auch die spiegelnde Gerade, die als unbegrenzt zu denken ist. Jeder Punkt dieser Geraden ist sein eigenes Spiegelbild. Das Spiegelbild jedes anderen Punktes wird gefunden, indem man von ihm auf die Gerade ein Lot fällt und dieses über den Fußpunkt hinaus um sich selbst verlängert. Die spiegelnde Gerade ist ihr eigenes Spiegelbild. Jede Parallele zur spiegelnden Geraden wird eine Parallele entgegengesetzten Abstandes. Jede die spiegelnde Gerade schneidende Gerade wird eine sie in demselben Punkte unter entgegengesetzt gleichem Winkel schneidende Gerade. Jedes Lot zur spiegelnden Geraden gibt seine eigene Verlängerung. Symmetrische Stücke von Geraden sind dabei gleich lang; symmetrische Winkel von beliebiger Lage sind entgegengesetzt gleich. Symmetrische Kreisbogen von beliebiger Lage decken einander. (Vgl. zu diesem Abschnitte das unter V im Vorkursus Gesagte.)

155) Sind mehrere Symmetrieachsen vorhanden, so spricht man von mehrfacher Symmetrie. Das gleichschenklige Dreieck ist ein Beispiel der einfachen Symmetrie; die Halbierende des Winkels an der Spitze ist die Symmetrieachse. Das Rechteck ist ein Beispiel für die zweifache Symmetrie; die beiden Mittellinien sind seine Symmetrieachsen. Auch der Rhombus ist ein Beispiel für die zweifache Symmetrie; die beiden Diagonalen sind seine Symmetrieachsen. Das gleichseitige Dreieck hat drei Symmetrieachsen, die Halbierenden der Winkel. Das Quadrat hat vier Symmetrieachsen, die Diagonalen und die Mittellinien. Das regelmäßige Fünfeck hat fünf Symmetrieachsen, die Winkelhalbierenden. Das regelmäßige Sechseck hat sechs Symmetrieachsen, die drei Hauptdiagonalen und die drei Mittellinien usw. Der Kreis hat unendlich viele Symmetrieachsen, nämlich sämtliche Durchmesser.

156) Beim Rechteck und Rhombus schneiden die Symmetrieachsen einander rechtwinklig in einem Punkte, den man als den Mittelpunkt der Figur bezeichnet. Beim Rechteck ist dieser Punkt der Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises, beim Rhombus ist er der des eingeschriebenen Kreises. Bei allen genannten regelmäßigen Vielecken schneiden einander die Symmetrieachsen in einem Punkte, dem Mittel-



punkte des Vielecks, der zugleich Mittelpunkt des um- und des eingeschriebenen Kreises ist. Dort folgen sie unter gleichen Winkeln aufeinander, beim gleichseitigen Dreieck bilden sie Winkel von  $\frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$ , beim Quadrat solche von  $\frac{180^\circ}{4} = 45^\circ$ , beim Fünfeck solche von  $\frac{180^\circ}{5} = 36^\circ$ , beim Sechseck solche von  $\frac{180^\circ}{6} = 30^\circ$  usw.

157) Diese Einfachheit erklärt sich folgendermaßen: Das Spiegelbild einer Symmetrieachse gegen eine Symmetrieachse ist wieder eine Symmetrieachse. Schneiden einander die beiden ersten im Endlichen, so muß die dritte durch denselben Punkt gehen. Spiegelt man die beiden ersten Symmetrieachsen gegen die dritte, so müssen die Spiegelbilder wieder durch denselben Punkt gehen usw. Daraus folgt: Bei mehrfacher Symmetrie gehen alle Symmetrieachsen durch denselben Punkt. Dieser Punkt heißt der Mittelpunkt des Gebildes.

158) Sollen nur zwei Symmetrieachsen vorhanden sein, so müssen diese aufeinander senkrecht stehen, denn sonst würde durch die Spiegelung gegen die eine eine dritte Symmetrieachse entstehen usw. Sollen nur drei Symmetrieachsen vorhanden sein, so müssen sie einander unter  $60^\circ$  schneiden, denn sonst würden durch Spiegelung gegen eine davon neue Symmetrieachsen entstehen. Das Entsprechende gilt von vier, fünf, sechs usw. Symmetrieachsen. Eine Symmetrieachse teilt die Ebene in zwei übereinstimmende Hälften, zwei geben vier übereinstimmende „Quadranten“, drei geben sechs übereinstimmende Sextanten der Ebene,  $n$  Symmetrieachsen geben  $2n$  Zentriwinkel von der Größe  $\frac{360^\circ}{2n}$  oder  $\frac{180^\circ}{n}$ . Das regelmäßige  $n$ -Eck hat  $n$  Symmetrieebenen. Ist  $n$  eine gerade Zahl, so sind die Symmetrieebenen zur Hälfte Hauptdiagonalen, zur Hälfte winkelhalbierende Mittellinien. Ist  $n$  ungerade, so sind sämtliche Winkelhalbierenden Mittellinien. Eine eigentümliche Stellung nehmen die unbegrenzten Parallelen ein. Jedes gemeinschaftliche Lot ist für sie eine Symmetrieachse. Es sind also unendlich viele Symmetrieachsen vorhanden, die einander im Endlichen nicht schneiden. Der Streif zwischen zwei Parallelen hat außerdem noch eine vereinzelte parallele Symmetrieachse.

159) Von der Zeichnung eines kunstgewerblichen ebenen Musters (Flachornament) von mehrfacher Symmetrie braucht nur der einem solchen Zentriwinkel entsprechende Teil gegeben zu sein. Der Rest ist



leicht zu konstruieren, sei es Punkt für Punkt oder Linie für Linie. (Hat man statt des Flachornaments ein mehrfach symmetrisches Relief

Fig. 31.

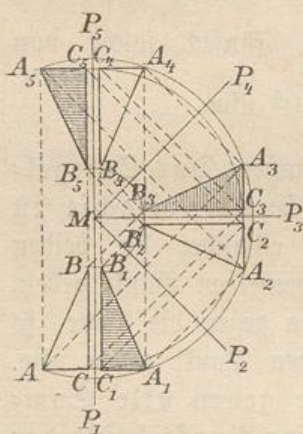
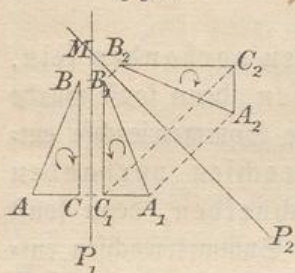


Fig. 32.



symmetrisch zu einander. Man könnte sie als verkehrtsymmetrisch bezeichnen.

auf ebener Grundlage, so braucht man auch nur den entsprechenden Teil zu geben, jedoch sind benachbarte symmetrische Teile nicht mehr kongruent, sondern räumlich symmetrisch. Vgl. Vorkursus V, 112 und 113.)

160) Die Umklappung eines mehrfach symmetrischen (planimetrischen) Gebildes gibt dessen Teilen entgegengesetzten Drehungssinn; die Umklappung des Bildes um die zweite Achse stellt den ursprünglichen Drehungssinn wieder her; die Umklappung des neuen Bildes um die dritte Achse gibt wieder den entgegengesetzten Drehungssinn usw. Eine gerade Anzahl von Spiegelungen läßt den Drehungssinn ungeändert, eine ungerade Anzahl gibt den entgegengesetzten Drehungssinn.

Fig. 31 und 32 veranschaulichen dies an einem mehrfach gespiegelten rechtwinkligen Dreieck. Die schraffierten Dreiecke sind nicht

β) Ableitung einfacher Sätze und Konstruktionen mit Hilfe der Symmetrie.

161) Das Spiegelbild zweier Punkte. In Fig. 33 sind zwei Punkte  $D$  und  $E$  gegen die Gerade  $AB$  gespiegelt, was  $D_1$  und  $E_1$  gegeben hat. Dadurch ist zugleich die Gerade  $DE$  gespiegelt und ihr Spiegelbild  $D_1E_1$  entstanden. Schneidet nun  $DE$  die spiegelnde Gerade in einem im Endlichen liegenden Punkte  $G$ , so muß auch  $D_1E_1$  durch den Punkt  $G$  gehen und  $AB$  unter entgegengesetzt gleichem Winkel schneiden.

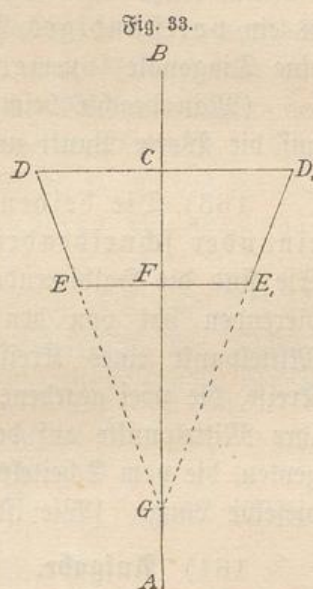
Man kann aber auch  $D$  und  $E_1$  als die gespiegelten Punkte,  $D_1$  und  $E$  als die Spiegelbilder betrachten. Demnach müssen auch  $DE_1$  und  $D_1E$  einander auf der Geraden  $AB$  schneiden.

Zwei Geraden, die gegen eine dritte Gerade symmetrisch sind, bezeichnet man bisweilen als antiparallel in bezug auf die spiegelnde



Gerade. Deshalb wird das in bezug auf die Mittellinie  $CF$  symmetrische Viereck  $DEE_1D_1$ , von dem zwei Seiten  $DD_1$  und  $EE_1$  parallel sind, während die anderen  $DE$  und  $D_1E_1$  antiparallel sind, als ein Antiparallelogramm bezeichnet. (Es heißt jedoch auch ein symmetrisches Paralleltrapez.)

Die Diagonalen und die antiparallelen Gegenseiten eines solchen Vierecks schneiden also einander auf dessen Symmetrielinie. Die symmetrisch liegenden Geraden und Winkel stimmen überein.



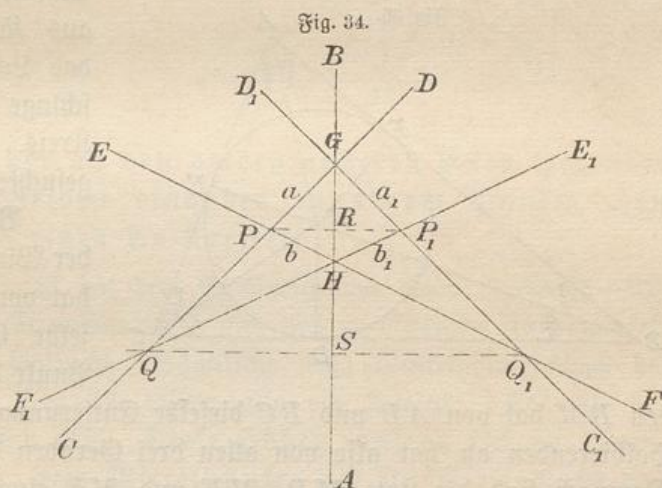
162) Das Spiegelbild zweier unbegrenzter Geraden. In Fig. 34 sind zwei Geraden  $CD$  und  $EF$  gegen eine dritte Gerade  $AB$  gespiegelt, was die Bilder  $C_1D_1$  und  $E_1F_1$  gegeben hat, von denen das eine mit  $CD$  durch den Schnittpunkt  $G$ , das andere mit  $EF$  durch den Schnittpunkt  $H$  auf der Geraden  $AB$  gehen muß. Die Punkte  $P$  und  $P_1$  sind ein symmetrisches Punktepaar. Betrachtet man aber  $CD$  und  $E_1F_1$  als die gespiegelten Geraden, so folgt, daß auch die Punkte  $Q$  und  $Q_1$  ein symmetrisches Punktepaar sind.

Punktepaar sind.

Das Viereck  $PHP_1G$  ist ein gegen die Diagonale  $GH$  symmetrisches.

Es besteht aus zwei gleichschenkeligen Dreiecken, welche die Grundlinie  $PP_1$  gemeinsam haben. Es wird als Deltoid bezeichnet.

Zu diesem Viereck gehören sechs Verbindungslinien  $PP_1$ ,  $GH$ ,  $GP$ ,  $GP_1$ ,  $P_1H$ ,  $PH$ . Die Gegenseiten geben drei Schnittpunkte  $Q$ ,  $Q_1$  und  $R$ . Ein Viereck mit seinen sämtlichen sechs Geraden bezeichnet man als ein vollständiges Viereck. Das hier vorliegende ist ein gegen eine Diagonale symmetrisches vollständiges Viereck.





Die Geraden  $a, b, a_1, b_1$  bilden ein Vierseit mit sechs Schnittpunkten  $P, P_1, Q, Q_1, G, H$ . Das Vierseit mit seinen sechs Schnittpunkten besitzt also drei Diagonalen,  $PP_1, QQ_1, GH$ . Man nennt es ein vollständiges Vierseit. Hier handelt es sich um ein gegen eine Diagonale symmetrisches vollständiges Vierseit.

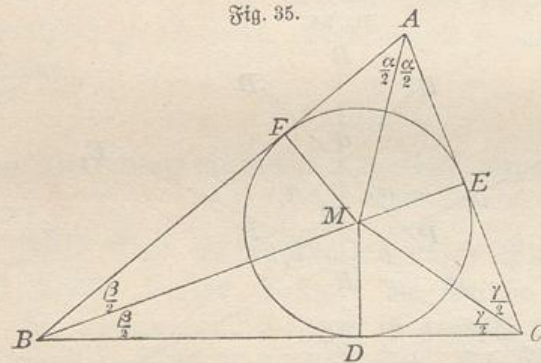
(Man beachte beim Viereck und Vierseit die Reziprozität in bezug auf die Worte Punkt und Gerade.)

163) Die beiden Symmetrielinien zweier unbegrenzten einander schneidenden Geraden stehen aufeinander senkrecht. Sie sind die Halbierenden der vier Winkel. Jeder Punkt jeder Halbierenden hat von den beiden Geraden denselben Abstand, ist also Mittelpunkt eines Kreises, der die beiden Geraden berührt. Alle Kreise, die zwei gegebene einander schneidende Geraden berühren, haben ihre Mittelpunkte auf den beiden Symmetrieachsen. Die beiden Tangenten, die vom Scheitelpunkte an jeden dieser Kreise gezogen sind, haben dieselbe Länge. [Wie ist es, wenn die beiden Geraden parallel sind?]

164) **Aufgabe.** In ein gegebenes Dreieck den eingeschriebenen Kreis (In-Kreis) einzuzichnen (der die drei Seiten berührt).

**Auflösung.** In Fig. 35 sei  $ABC$  das gegebene Dreieck. Man halbiere die Winkel bei  $A$  und  $B$ . Die Halbierenden geben den Schnittpunkt  $M$ . Von  $M$

Fig. 35.



aus fälle man auf  $BC$  das Lot  $MD$ . Mit  $MD$  schlage man um  $M$  einen Kreis. Dieser Kreis ist der gesuchte Berührungskreis.

**Beweis.** Jeder Punkt der Winkelhalbierenden  $AM$  hat von  $AB$  und  $AC$  dieselbe Entfernung. Jeder Punkt der Winkelhalbierenden  $BM$  hat von  $AB$  und  $BC$  dieselbe Entfernung.  $M$  gehört beiden Halbierenden an, hat also von allen drei Geraden dieselbe Entfernung. Demnach sind die Lote  $MD, ME$  und  $MF$  einander gleich.

**Folgerung.** Weil die Abstände  $MD$  und  $ME$  einander gleich sind, muß  $M$  auch auf der Halbierenden des Winkels  $C$  liegen. Also ist auch  $MC$  eine Winkelhalbierende. Folglich:

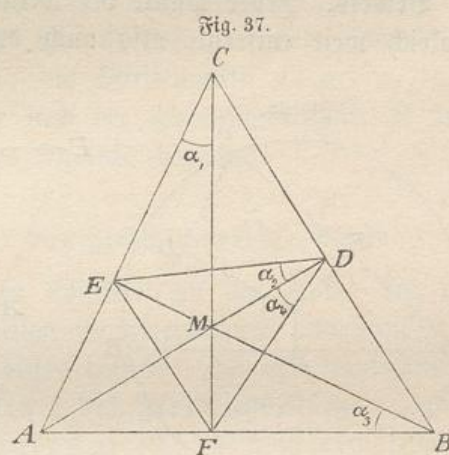
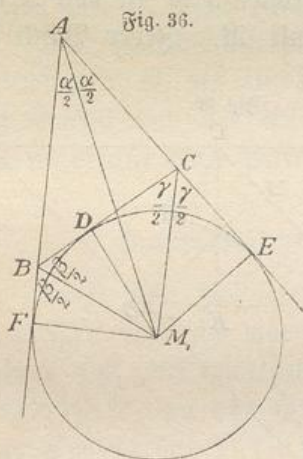
Die Halbierenden der Dreieckswinkel schneiden einander in einem Punkte, dem Mittelpunkt des In-Kreises.



165) **Aufgabe.** An ein gegebenes Dreieck  $ABC$  einen Kreis zu legen, der die Seite  $BC$  von außen her, die beiden anderen Seiten von innen her berührt.

**Auflösung.** In Fig. 36 halbiere man den Winkel bei  $A$  und den Außenwinkel  $CBF$ . Das gibt, wie vorher, einen Schnittpunkt  $M_1$  als Mittelpunkt eines Kreises, der sowohl die Verlängerungen der Dreiecksseiten  $AB$  und  $AC$ , als auch die Seite  $BC$  berührt. Das von  $M_1$  auf eine der Seiten gefällte Lot, z. B.  $M_1D$ , ist der Radius des nun leicht zu zeichnenden Kreises, eines äußeren Berührungskreises oder An-Kreises.

**Folgerung.** Weil der Kreis  $M_1$  die Seiten  $AB$  und  $BC$  berührt, muß der Punkt  $M_1$  auch auf der Halbierenden des Außenwinkels  $BCE$  liegen. Folglich: Die Halbierenden eines Drei-



eckswinkels und der an den beiden anderen Ecken liegenden Außenwinkel schneiden einander in einem Punkte, dem Mittelpunkte des einen An-Kreises.

166) Das Dreieck hat drei An-Kreise und einen In-Kreis. Die Halbierenden jedes Dreieckswinkels und des zugehörigen Außenwinkels stehen aufeinander senkrecht. Sämtliche sechs Winkelhalbierenden des Dreiecks  $DEF$  in Fig. 37 bilden also ein Dreieck  $ABC$  mit den Höhen  $AD$ ,  $BE$  und  $CF$ . Diese Höhen müssen sich in einem Punkte schneiden, dem Mittelpunkte des In-Kreises für das Höhenfußpunktdreieck  $DEF$ , während  $A$ ,  $B$  und  $C$  die Mittelpunkte der An-Kreise dieses Dreiecks sind.

Dieser Satz kommt später noch einmal zur Sprache.

167) Das Mittellot einer Geraden  $AB$  ist eine ihrer Symmetrielinien. (Als zweite kann man die Gerade selbst be-



trachten.) Jeder Punkt der Mittelsenkrechten ist von den Endpunkten  $A$  und  $B$  der Geraden gleich weit entfernt. Er ist also Mittelpunkt eines Kreises, der durch die Punkte  $A$  und  $B$  geht. Folglich:

Alle Kreise, die durch zwei gegebene Punkte gehen, haben ihre Mittelpunkte auf der zugehörigen Mittelsenkrechten.

168) **Aufgabe.** Einen Kreis zu zeichnen, der durch drei gegebene Punkte geht, die nicht auf einer Geraden liegen.

**Auflösung.** In Fig. 38 seien  $A$ ,  $B$  und  $C$  die drei gegebenen Punkte. Man bilde die Mittelsenkrechte zu  $AB$  und die Mittelsenkrechte zu  $BC$ , diese schneiden einander in einem Punkte  $M$ , der von den drei Eckpunkten gleiche Entfernungen hat und daher Mittelpunkt des nun leicht zu zeichnenden Kreises ist.

**Beweis.** Jeder Punkt der Mittelsenkrechten  $FM$  ist von  $A$  und  $B$  gleich weit entfernt, also auch der Punkt  $M$ . Jeder Punkt der

Fig. 38.

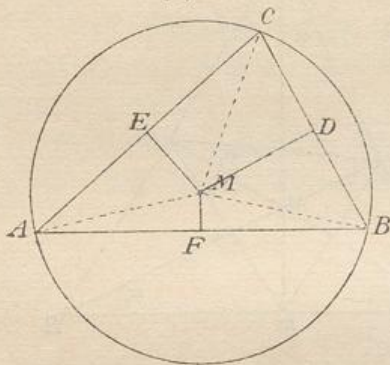
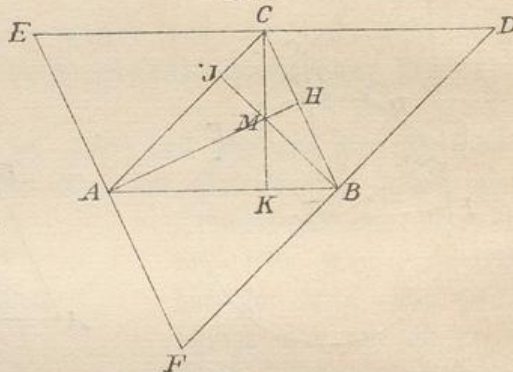


Fig. 39.



Mittelsenkrechten  $DM$  ist von  $B$  und  $C$  gleich weit entfernt, also auch  $M$ . Folglich ist  $M$  von  $A$ ,  $B$  und  $C$  gleich weit entfernt. — Die Aufgabe ist nur auf eine Art lösbar. Haben zwei Kreise drei Punkte gemein, so fallen sie vollständig zusammen.

**Folgerung.** Weil  $M$  von  $A$  und  $C$  gleich weit entfernt ist, muß  $M$  auch auf der Mittelsenkrechten von  $AC$  liegen. Also:

Die Mittellote der Seiten eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkte, dem Mittelpunkt des dem Dreieck umbeschriebenen Kreises.

Dieser Kreis soll kurz als der Um-Kreis des Dreiecks bezeichnet werden.

169) Denkt man sich auf den Höhen des Dreiecks  $ABC$  (Fig. 39) in den Eckpunkten Lote errichtet, so geben diese ein Dreieck  $DEF$ , dessen Seiten den Seiten von  $ABC$  parallel sind. (Warum?)



Dabei sind also  $ABCE$  und  $ACBF$  Parallelogramme, sodaß  $CB = EA = AF$  ist. Demnach ist das Lot  $AH$  die Mittelsenkrechte von  $EF$ . Ebenso zeigt sich, daß  $BJ$  die Mittelsenkrechte von  $FD$  und  $CK$  die Mittelsenkrechte von  $DE$  ist. Diese Mittelsenkrechten müssen sich aber in einem Punkte schneiden. Demnach schneiden einander die Höhen des Dreiecks  $DEF$  und überhaupt jedes Dreiecks in einem Punkte. Der bereits ausgesprochene Satz über die Dreieckshöhen ist damit bestätigt. — Der Höhenschnittpunkt  $M$  hat also noch zweierlei Bedeutung. Er ist Mittelpunkt des Um-Kreises vom Dreieck  $DEF$  und zugleich Mittelpunkt des In-Kreises vom Dreieck  $HJK$ .

Bildet man jedoch ein stumpfwinkliges Dreieck  $ABC$  und dazu die Figur, so fällt  $M$  außerhalb der Dreiecke  $ABC$ ,  $DEF$  und  $HJK$  und ist nicht In-Kreis, sondern An-Kreis des letzteren.

Der Durchschnittspunkt  $S$  der Mittellinien des Dreiecks, der Mittelpunkt  $M$  des Um-Kreises, die Mittelpunkte  $\mu$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\mu_3$  des In-Kreises und der An-Kreise und der Höhenschnittpunkt  $H$  werden als merkwürdige Punkte des Dreiecks bezeichnet.

γ) Symmetrisches über das gleichschenklige Dreieck.

170) Die Halbierende des Winkels an der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks war als dessen Symmetrielinie nachgewiesen, sodaß es aus zwei kongruenten Hälften besteht. Zunächst folgte der Satz: Die Winkel an der Grundlinie des gleichschenkligen Dreiecks (die Basiswinkel) sind einander gleich; oder: Gleichen Seiten eines Dreiecks liegen gleiche Winkel gegenüber.

171) Umgekehrt folgt: Sind zwei Winkel eines Dreiecks einander gleich, so ist das Dreieck gleichschenkelig. Oder: Gleichen Winkeln eines Dreiecks liegen gleiche Seiten gegenüber. (Sind nämlich die Winkel bei  $A$  und  $B$  einander gleich, so sind sie symmetrisch gegen die Mittelsenkrechte, müssen also einander in demselben Punkte  $C$  der Mittelsenkrechten schneiden, sodaß auch  $AC = BC$  ist.)

172) Die Halbierende des Winkels an der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks halbiert die Grundlinie und steht auf dieser senkrecht; die Mittelsenkrechte der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks geht durch die Spitze und halbiert den dortigen Winkel. Die Verbindungslinie der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks mit der Mitte der Grundlinie steht auf dieser senkrecht und halbiert den Winkel an der Spitze.



Alle diese Sätze sind nur Ausdrucksweisen dafür, daß das gleichschenklige Dreieck aus zwei kongruenten Teilen besteht.

Jedes Lot auf der Symmetrielinie des gleichschenkligen Dreiecks schneidet von den Schenkeln gleiche Stücke ab, von der Fläche ein Antiparallelogramm. Legt man an eine Gerade  $AB$  in  $A$  und  $B$  nach derselben Seite gleiche Winkel so an, daß die Schenkel einander in einem Punkte  $C$  schneiden, gibt man den Schenkeln dieselbe Länge  $AD = BE$  und verbindet man  $A$  mit  $E$  und  $B$  mit  $D$ , so geben die Verbindungslinien gleichschenklige Dreiecke  $ABF$  und  $DEF$ . Warum?

173) Der Mittelpunkt des Um-Kreises, des In-Kreises, des An-Kreises für die Grundlinie, der Höhendurchschnitt, der Durchschnitt der Mittellinien liegen beim gleichschenkligen Dreieck auf dessen Symmetrielinie. Die Mittelpunkte der beiden anderen An-Kreise sind symmetrisch gegen die Symmetrielinie. Ihre Verbindungslinie geht durch die Spitze des Dreiecks.

174) Die Mittelsenkrechte einer Kreissehne geht stets durch die Mitte des Kreises. Daraus folgt wieder der Satz: Das durch zwei Punkte gehende Büschel von Kreisen hat die Mittelpunkte auf der Mittelsenkrechten. Man konstruiere die betreffenden Linien und einige der Kreise. (Vgl. Nr. 167.)

175) Stehen, wie in Fig. 34, zwei ungleiche gleichschenklige Dreiecke über derselben Grundlinie, so haben sie eine gemeinschaftliche Symmetrielinie, denn die Symmetrielinien beider fallen mit der Mittelsenkrechten der Grundlinie zusammen. Dabei können die beiden gleichschenkligen Dreiecke ihre Spitze auf verschiedenen Seiten der Grundlinie oder auf derselben Seite haben. Stimmen dagegen die beiden gleichschenkligen Dreiecke überein, so hat das Gebilde zwei Symmetrieachsen und ist eine Raute (oder Rhombus).

176) **Aufgaben.** Die mehrfache Symmetrie des gleichseitigen Dreiecks, des Quadrates, des regelmäßigen Fünfecks, des regelmäßigen Sechsecks usw. eingehender zu untersuchen.

(Es soll z. B. untersucht werden, ob parallele Seiten vorhanden sind, ob Diagonalen vorhanden sind, die zu einer Seite parallel sind, wie sich beliebige Diagonalen paarweise verhalten, ob sich kongruente Flächenteile vorfinden. Die Zerlegung jedes regelmäßigen Vielecks in gleichschenklige Dreiecke, deren Spitzen im Mittelpunkte zusammenfallen, ist gleichfalls zu untersuchen. Die Winkel dieser Dreiecke sind zu bestimmen. Die ein- und umbeschriebenen Kreise sind zu untersuchen, besonders hinsichtlich ihrer Sektoren, Segmente und Bogen.



## d) Symmetrisches über Kreise.\*)

177) Daß jeder Kreis in bezug auf jeden Durchmesser symmetrisch ist, war schon gezeigt. Zwei oder mehrere konzentrische Kreise haben jeden gemeinschaftlichen Durchmesser zur Symmetrielinie.

178) Errichtet man auf dem Durchmesser eines Kreises einen zweiten rechtwinklig schneidenden Durchmesser, so hat das Gesamtgebilde vier Symmetrieachsen, die den Kreis in gleiche Oktanten zerlegen. Errichtet man auf dem Durchmesser an beliebiger anderer Stelle ein unbegrenztes Lot, so ist das Gesamtgebilde nur gegen den Durchmesser symmetrisch. (Man unterscheide die Fälle, daß das Lot außerhalb des Kreises liegt, daß es den Kreis nur in einem Punkte trifft, daß es innerhalb des Kreises liegt. Man zeige, daß es im letzteren Falle zwei Schnittpunkte mit dem Kreise haben muß und nicht mehr haben kann. Die Folgen der Symmetrie sind anzugeben.)

179) Hat ein Kreis zwei einander schneidende unbegrenzte Tangenten, so ist nur die Verbindungslinie des Schnittpunktes mit dem Mittelpunkte Symmetrielinie des Gesamtgebildes. Was folgt daraus für gewisse Stücke der Tangenten, für gewisse Winkel, für gewisse Kreisbogen, für gewisse Flächenstücke? Verbindet man die Berührungspunkte der Tangenten mit dem Kreismittelpunkte, was folgt dann weiter hinsichtlich der Symmetrie?

Sind aber die beiden Tangenten parallel, so gibt es für das Gesamtgebilde zwei aufeinander senkrechte Symmetrielinien.

180) Zwei nicht konzentrische ungleiche Kreise haben nur eine Symmetrielinie, die Zentrale, d. h. die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte. Folgende Fälle sind möglich: Die Kreise liegen ganz auseinander; sie berühren einander äußerlich; sie schneiden einander. (Dies geschieht dann in zwei symmetrischen Punkten, aber nicht in mehr Punkten; denn Kreise, die in mehr als zwei Punkten übereinstimmen, stimmen vollständig überein); sie berühren einander innerlich, wobei der größere den kleineren umschließt; der kleinere wird vom größeren ganz umschlossen, ohne daß sie einen gemeinschaftlichen Punkt haben.  $[c > (r + r_1); c = (r + r_1); (r + r_1) > c > (r - r_1); c = (r - r_1); c < (r - r_1); c = 0$  gibt konzentrische Kreise.]

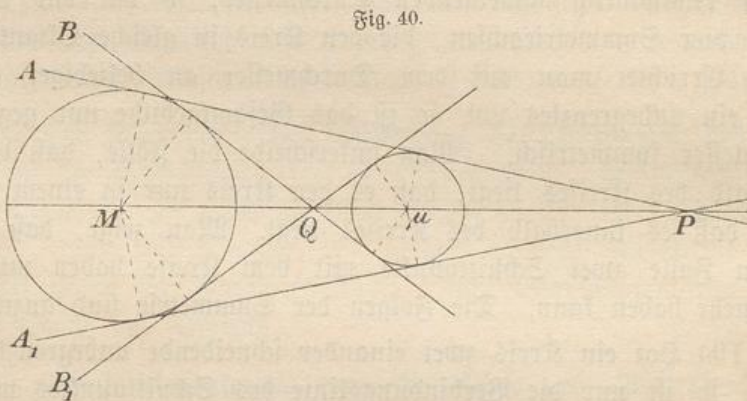
Im Falle des Schneidens haben die Kreise eine gemeinschaftliche Sehne. Welche Symmetrieverhältnisse finden dabei hinsichtlich gewisser Längen, Winkel, Kreisbogen, Flächen statt?

\*) Dieser Abschnitt gibt Veranlassung zu zahlreichen Beispielen für das technische Zirkelzeichnen.



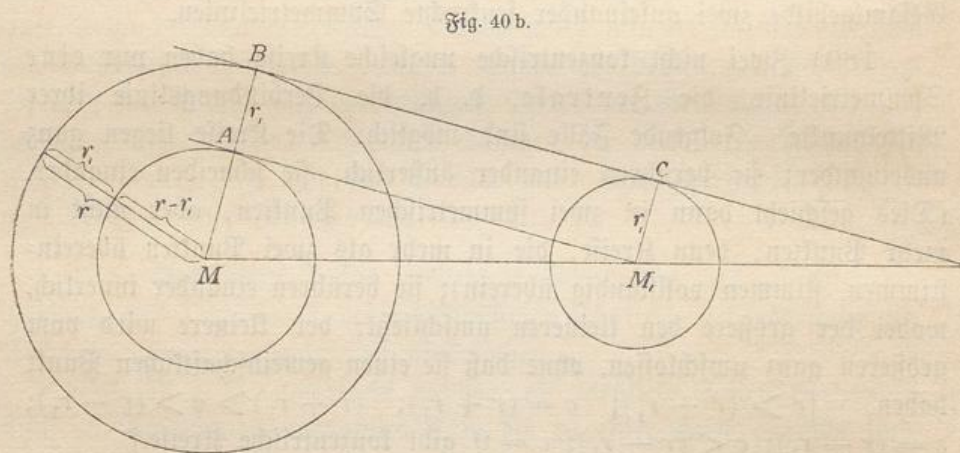
181) Im Falle des Auseinanderliegens haben die beiden Kreise vier gemeinschaftliche Tangenten. Aus Gründen der Symmetrie schneiden sich diese paarweise in Punkten  $P$  und  $Q$  der Symmetrieachse (der Centrale).

$AP$  und  $A_1P$  nennt man die äußeren gemeinschaftlichen Tangenten,  $BQ$  und  $B_1Q$  die inneren. (Fig. 40.)



Was folgt für die Punkte der Figur, für die einzelnen Tangentenstücke, für die Winkel, Bogen, Flächenstücke der Figur; für die Radien der Berührungspunkte usw.?

Im Falle der äußerlichen Berührung beschränkt sich die Anzahl der gemeinschaftlichen Tangenten auf drei; im Falle des Schneidens



auf zwei; im Falle der inneren Berührung auf eine; im Falle der vollständigen Umschließung des kleineren durch den größeren (ohne Berührung) gibt es keine Tangente.

[Will man die gemeinsamen äußeren Tangenten zweier Kreise konstruieren, so verfähre man vorläufig folgendermaßen: In Fig. 40b



seien die Kreise  $M$  und  $M_1$  mit den Radien  $r$  und  $r_1$  gegeben. Man schlage um  $M$ , den Mittelpunkt des größeren Kreises, einen Hilfskreis mit dem Radius  $(r - r_1)$ , lege an diesen von  $M_1$  aus eine Tangente, die in  $A$  berühre, ziehe  $MA$  bis zum Schnittpunkte  $B$  und errichte auf  $MB$  in  $B$  ein Lot. Dieses gibt die Tangente  $BC$ . Die gegen  $MM_1$  dazu symmetrische Linie ist leicht zu zeichnen. —

Der Beweis der Richtigkeit ergibt sich aus dem Rechteck  $ABCM_1$  und ist dem Schüler zu überlassen.

Für die gemeinsamen inneren Tangenten zweier auseinander liegenden Kreise benutze man einen Hilfskreis mit dem Radius  $(r + r_1)$ .]

182) Sind zwei nicht konzentrische Kreise gleich groß, so hat das Gesamtgebilde stets zwei Symmetrieachsen. Die zweifache Symmetrie soll für die verschiedenen Lagen untersucht werden.

183) Haben drei oder mehr ungleiche Kreise ihre Mittelpunkte auf einer Geraden, so ist diese die einzige Symmetrieachse. Gehen drei oder mehr ungleiche Kreise durch zwei Punkte, so liegen alle Mittelpunkte auf der Mittelsenkrechten dieser Punkte, die demnach die einzige Symmetrielinie ist. Gehen drei oder mehr ungleiche Kreise durch einen Punkt, und liegen dabei ihre Mittelpunkte auf einer durch diesen Punkt gehenden Geraden, so ist diese Symmetrielinie des Gesamtgebildes, alle Kreise berühren einander in den gegebenen Punkten und haben dort eine gemeinschaftliche Tangente.

184) **Aufgabe.** Die Kreisreihe zu konstruieren, die innerhalb eines (z. B. spitzen) Winkels liegt und dessen Schenkel berührt, wobei aber jeder Kreis die beiden benachbarten Kreise äußerlich berühren soll.

(Man gehe von einem beliebigen Lote auf der Winkelhalbierenden aus, welches ein gleichschenkliges Dreieck gibt, dessen In-Kreis und dessen An-Kreis leicht zu zeichnen sind. Dann errichte man Lote in den neuen Schnittpunkten der Winkelhalbierenden, was neue gleichschenklige Dreiecke gibt, für die nun entweder In-Kreise oder Außenkreise zu zeichnen sind. Statt die neuen Winkel stets zu halbieren, ziehe man gewisse Parallelen mit Hilfe des Lineals und Winkelhafens, errichte auch die Lote mit deren Hilfe.)

Sind die beiden Berührungsgeraden parallel, so werden alle Kreise gleich, und die Aufgabe vereinfacht sich.

185) **Aufgabe.** Um einen gegebenen Kreis lassen sich Berührungskreise, die mit ihm denselben Radius haben, so legen, daß jeder seine beiden Nachbarn berührt. Wie groß ist ihre Anzahl, und



konstruiert man diese Kreise? Die Symmetrieverhältnisse des Gesamtgebildes sollen untersucht werden.

(Sowohl die Mittelpunkte als auch die gegenseitigen Berührungspunkte der Kreisreihe liegen auf gewissen Kreisen, auch hat die Reihe einen umbeschriebenen Kreis.)

186 a) **Aufgabe.** Einen Kreis zu zeichnen, um den drei, vier, acht, zwölf, sechzehn solcher Berührungskreise von gegebenem Radius gelegt sind, wobei die Reihe jedesmal geschlossen sein soll.

186 b) Um einen gegebenen Kreis drei, vier, acht, zwölf, sechzehn solcher Berührungskreise zu zeichnen, wobei die Reihe jedesmal geschlossen sein soll.

(Im ersteren Falle zeichne man zwei Durchmesser, die einander unter  $60^\circ$  schneiden. Im Schnittpunkte des ersten Durchmessers mit dem Kreise zeichne man eine Tangente. Man halbiere den Winkel von  $150^\circ$ , den die Tangente mit dem zweiten Durchmesser bildet. Wo die Winkelhalbierende den ersten Durchmesser schneidet, liegt das Zentrum des gesuchten Kreises. Mit den übrigen Fällen verfähre man in entsprechender Weise.)

187) **Aufgabe.** Einen Kreis in sechs gleiche Sektoren einzuteilen und in jeden Sektor einen Berührungskreis zu zeichnen.

(Man bilde die Symmetrielinie eines der Sektoren, errichte auf ihr im Schnittpunkte mit dem Kreise ein Lot und zeichne den Inkreis des entstehenden (gleichseitigen) Dreiecks.)

188) **Aufgabe.** Um einen Punkt eines gegebenen Kreises mit dem Radius einen Kreisbogen zu schlagen, der ganz innerhalb des Kreises liegt und zwei Teilpunkte der Kreislinie gibt. Mit den beiden Teilpunkten soll dasselbe geschehen und die Konstruktion so oft wiederholt werden, bis das Ganze schließt.

Das Gesamtgebilde soll beschrieben werden.\*)

189) **Aufgabe.** In die Bogendreiecke, welche vom gegebenen Kreise und je zwei aufeinander folgenden der vorher konstruierten Kreisbogen gebildet sind, Berührungskreise einzuzeichnen.\*)

\*) Zahlreiche Beispiele mehrfach symmetrischer Figuren findet man in den Lehrbüchern für gebundenes Zeichnen. Auf gotische Maßwerke, besonders auf Rosetten, sei aufmerksam gemacht, weil sie vortreffliche Zeichenübungen geben und das Verständnis für die gotische Baukunst vermitteln. Man vgl. G. Müller: Übungsstoff für das geometrische Zeichnen (Stuttgart bei P. Neff); Weishaupt-Richter: Das Ganze des Linearzeichnens; Bd. I (Leipzig bei S. Zieger).



(Das Lot, welches auf dem Symmetrieradius eines Bogendreiecks im Endpunkte errichtet ist, berührt die beiden vollendeten Kreisbogen des Dreiecks. Diese Tangente ist bereits halbiert. Man zeichne über der einen Hälfte einen Halbkreis. Dieser gibt auf dem einen Grenzbogen den Berührungspunkt mit dem gesuchten Kreise, denn die drei betreffenden Tangenten müssen gleich lang sein.)

## II. Fortsetzung des planimetrischen Lehrgangs.

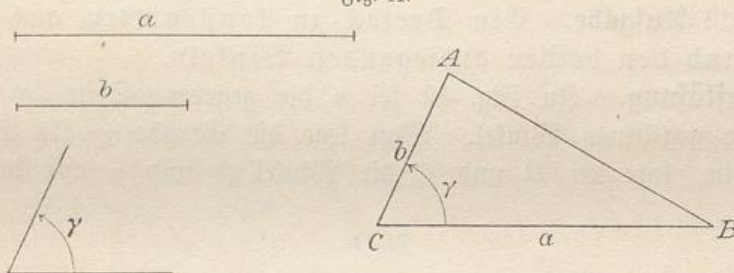
### a) Die Lehre von der Kongruenz.

$\alpha$ ) Die grundlegenden Kongruenzsätze für das Dreieck.

190) **Aufgabe.** Ein Dreieck zu konstruieren aus zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel.

**Auflösung.** In Fig. 41 seien  $a$ ,  $b$  und  $\sphericalangle \gamma$  die gegebenen Stücke. Man lege die Gerade  $a$  als  $CB$  beliebig hin, trage bei  $C$

Fig. 41.



an sie den Winkel  $\gamma$  an, mache den neuen Schenkel  $CA = b$  und verbinde  $A$  mit  $B$ . Dann ist Dreieck  $ABC$  das gesuchte, denn es enthält die gegebenen Stücke.

**Bemerkungen.** Die Aufgabe ist stets lösbar, sobald nur  $\gamma$  ein konkaver Winkel ist, was vorausgesetzt werden soll. (Ist der  $\sphericalangle \gamma = 0$ , so fällt Seite  $b$  auf  $a$ . Ist  $\sphericalangle \gamma = 180^\circ$ , so fällt  $b$  in die zu  $a$  entgegengesetzte Richtung. Im ersten Grenzfall wird Seite  $c = a - b$ , falls  $a$  die größere ist, im zweiten wird  $c = a + b$ . In beiden Fällen wird die Dreiecksfläche gleich Null; im allgemeinen wird die Fläche verschieden von Null.)

Die Aufgabe führt stets zu einer einzigen Lösung. So oft man ein Dreieck aus den gegebenen Stücken konstruiert, sei es im einen oder im entgegengesetzten Sinne (Umklappung), stets erhält man Dreiecke, die sich mit dem zuerst konstruierten decken.



Legt man nämlich das zweite so konstruierte Dreieck so auf das erste, daß die Winkel  $\gamma$  aufeinander fallen und zwar mit den gleichlangen Schenkeln, so müssen auch die Endpunkte  $B$  einander decken, ebenso die Endpunkte  $A$  und demnach auch die Verbindungslinien  $AB$ . Daher stimmen die Verbindungslinien in der Länge überein und die Winkel bei  $B$ , ebenso die bei  $C$  in der Größe. Auch die Flächeninhalte beider Dreiecke stimmen überein.

Daraus folgt

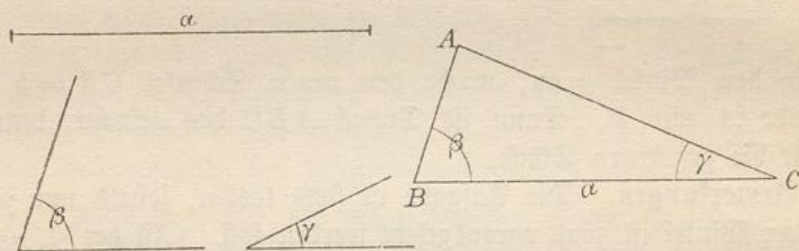
**der erste Kongruenzsatz:** Stimmen zwei Dreiecke in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel überein, so sind sie kongruent.

Die genannten drei Stücke  $a, b, \gamma$  genügen zur Konstruktion und zugleich zum Nachweise der Kongruenz, d. h. der Übereinstimmung der übrigen Stücke  $c, \alpha, \beta$  und  $F$  (Fläche). Damit ist nachgewiesen, daß die Dreiecke auch in sonstigen Stücken übereinstimmen müssen, z. B. in gleichliegenden (homologen) Höhen, in gleichliegenden Mittellinien, in gleichliegenden Winkelhalbierenden, in den eingeschriebenen Kreisen, in den gleichliegenden An-Kreisen, in den Um-Kreisen usw.

**191) Aufgabe.** Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln.

**Auflösung.** In Fig. 42 sei  $a$  die gegebene Seite,  $\beta$  und  $\gamma$  seien die gegebenen Winkel. Man lege die Gerade  $a$  als  $BC$  beliebig hin, lege bei  $B$  und  $C$  die Winkel  $\beta$  und  $\gamma$  auf derselben

Fig. 42.



Seite an die Gerade an und verlängere die freien Schenkel bis zum Durchschnitt  $A$ , dann ist  $ABC$  das gesuchte Dreieck, denn es hat die gegebenen Stücke.

**Bemerkungen.** Die Aufgabe ist stets lösbar, sobald  $\beta + \gamma < 180^\circ$  ist. (Grenzfälle sind  $\beta + \gamma = 0$ , wobei die beiden Schenkel auf  $a$  fallen,  $\alpha = 180^\circ$  und  $F = 0$  wird, und  $\beta + \gamma = 180^\circ$ , wobei die Schenkel parallel werden und, wenn sie nicht zusammenfallen, ein unendliches Dreieck geben.)



Die Aufgabe hat stets nur eine einzige Lösung, denn alle anderen Dreiecke, die aus denselben Stücken konstruiert werden, lassen sich mit dem ersten zur Deckung bringen. Man kann sie nämlich mit den gleichen Seiten so aufeinander legen, daß die gleichen Winkelpaare aufeinander fallen. Weil dabei die freien Schenkelpaare einander decken, müssen auch die Durchschnittspunkte einander decken. Dadurch ist das Übereinstimmen in den übrigen Stücken  $b, c, a, F$  nachgewiesen. (Die Übereinstimmung im Winkel  $\alpha$  war dabei selbstverständlich. Warum?)

Daraus folgt

**der zweite Kongruenzsatz:** Stimmen zwei Dreiecke in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln überein, so sind sie kongruent.

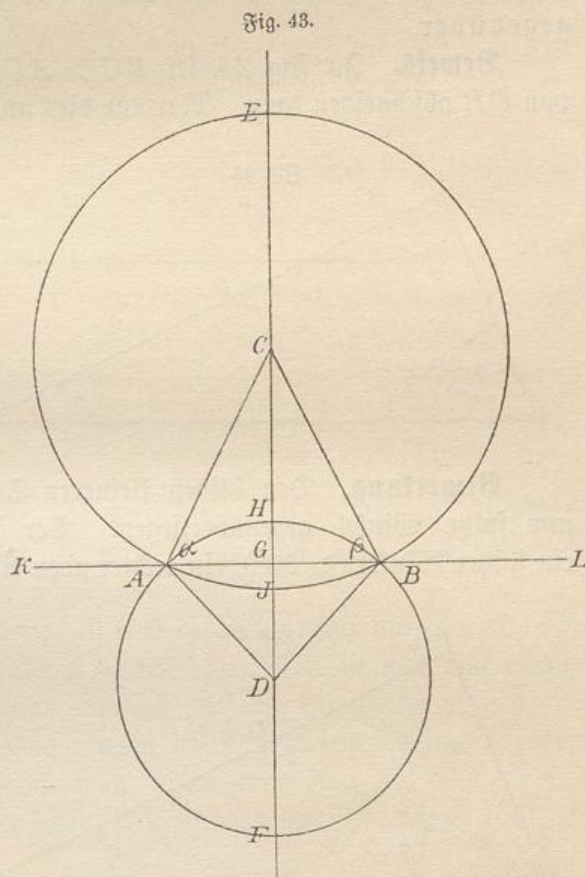
Man kann aber all-  
gemeiner sagen:

Stimmen zwei Dreiecke in einer Seite und zwei homologen Winkeln überein, so sind sie kongruent.

192) Aufgabe. Ein Dreieck zu konstruieren aus den drei Seiten.

**Auflösung.** Sind  $a$ ,  $b$  und  $c$  die gegebenen Seiten, so lege man z. B.  $a$  als  $BC$  beliebig hin und schlage mit den Zirkelöffnungen  $b$  und  $c$  Kreisbögen um  $C$  und  $B$ . Schneiden diese einander in  $A$ , so verbinde man  $A$  mit  $B$  und  $C$ . Dann ist  $\triangle ABC$  das gesuchte Dreieck, denn es hat die gegebenen Stücke.

**Bemerkung.** Die Aufgabe ist stets lösbar, sobald die Summe der beiden kleineren Seiten größer ist als die dritte. (Im Grenzfalle  $a = b + c$  fallen  $b$  und  $c$  auf  $a$  und der Flächeninhalt des Dreiecks ist Null.) Die Aufgabe hat aber nur eine einzige Lösung. Denkt man





sich nämlich die Dreiecke mit der größten Seite so aneinander gelegt, daß ein aus zwei gleichschenkligen Dreiecken bestehendes Viereck  $ABDC$  entsteht, so ist dieses symmetrisch gegen die Diagonale  $BC$ , also ist  $\triangle BCA \cong BCD$ . (Vgl. Fig. 43, die aber andere Buchstaben enthält.)

Man kann auch sagen, daß die zu ganzen Kreisen vervollständigten Konstruktionsbogen einander decken, daher auch ihre Durchschnitte. Aus der Übereinstimmung zweier Dreiecke in den drei Seiten folgt also die Übereinstimmung in den drei Winkeln und im Flächeninhalt.

So ergibt sich

**der dritte Kongruenzsatz:** Stimmen zwei Dreiecke in den drei Seiten überein, so sind sie kongruent.

193) Ein Hilfssatz und seine Umkehrung. Der größeren von zwei Dreiecksseiten liegt stets der größere Winkel gegenüber.

**Beweis.** In Fig. 44 sei  $BC > AC$ , sodaß man  $CA$  als  $CD$  von  $CB$  abschneiden kann. Man tue dies und verbinde  $A$  mit  $D$ . Dann

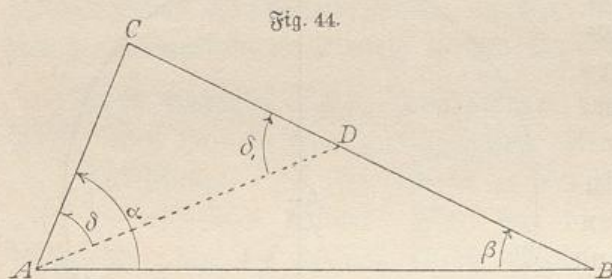


Fig. 44.

ist  $\triangle ACD$  gleichschenkl. und  $\sphericalangle \delta = \delta_1$ . Dabei ist  $\sphericalangle \delta_1$  als Außenwinkel des  $\triangle ABD > \sphericalangle \beta$ , also auch  $\sphericalangle \delta > \sphericalangle \beta$ , folglich ist  $\alpha$ , welches größer als  $\delta$  ist, erst recht größer als  $\beta$ .

**Bemerkung.** Den beiden kleineren Seiten eines Dreiecks können nur spitze Winkel gegenüberliegen. Der größten Dreiecksseite kann ein spitzer Winkel ( $> 60^\circ$ ), ein rechter oder ein stumpfer gegenüberliegen.

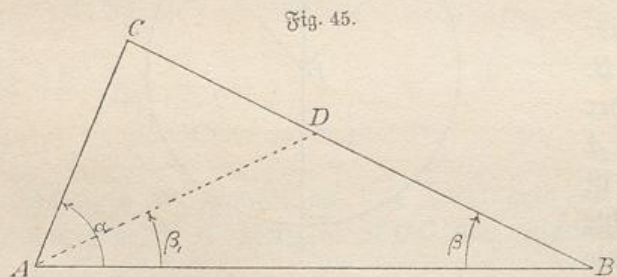


Fig. 45.

Umgekehrt folgt: Dem größeren von zwei Dreieckswinkeln liegt stets die größere Seite gegenüber.

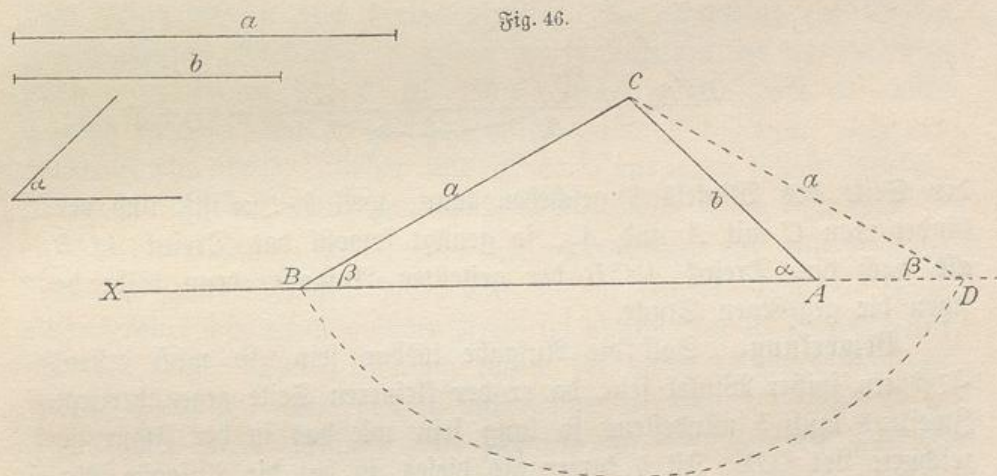
**Beweis.** In Fig. 45 sei  $\sphericalangle \alpha > \sphericalangle \beta$ , sodaß man  $\sphericalangle \beta$  als  $\sphericalangle BAD = \beta_1$  vom Winkel  $\alpha$  abziehen kann. Tut man dies nach Art der Fig. 45, so ist  $\triangle ADB$  gleichschenkl., d. h.  $BD = DA$ . Im  $\triangle ACD$  ist aber  $AC < CD + DA$ , also, da man für  $DA$  auch  $DB$  setzen kann,  $AC < CD + DB$ , d. h.  $AC < CB$ .



**Bemerkung.** Die einem rechten oder einem stumpfen Dreieckswinkel gegenüberliegende Seite ist stets die größte des Dreiecks. (Daher war das von einem Punkte auf eine Gerade gefällte Lot die kürzeste Linie, die vom Punkte nach der Geraden gezogen werden kann.)

194) **Aufgabe.** Ein Dreieck zu konstruieren aus zwei Seiten und dem der größeren gegenüberliegenden Winkel.

**Auflösung.** In Fig. 46 seien  $a$  und  $b$  die gegebenen Seiten,  $a$  die größere davon;  $\alpha$  sei der  $a$  gegenüberliegende Winkel. Man lege  $b$  als  $AC$  beliebig hin und lege bei  $A$  den Winkel  $\alpha$  als  $\angle CAX$  daran. Jetzt schlage man mit  $a$  um  $C$  einen Kreis, der die Gerade  $CX$  an zwei Stellen  $B$  und  $D$  schneiden muß (weil  $a > b$  ist). Von



diesen Punkten ist nur der auf der Seite von  $\alpha$  liegende Punkt  $B$  brauchbar. Verbindet man  $B$  mit  $C$ , so hat man das verlangte Dreieck, denn es besitzt die gegebenen Stücke.

**Bemerkung.** Das Dreieck ist stets möglich, sobald nur  $\angle \alpha < 180^\circ$ . (Was geschieht im Grenzfalle  $\alpha = 180^\circ$ ?) Stets ist nur eine einzige Lösung möglich. Macht man nämlich dieselbe Konstruktion noch einmal, so lassen sich beide Zeichnungen vollständig zur Deckung bringen. Der Schüler weise dies selbst nach. (Er kann auch die Dreiecke mit den Seiten  $a$  so aneinander legen, daß eine symmetrische Figur entsteht.)

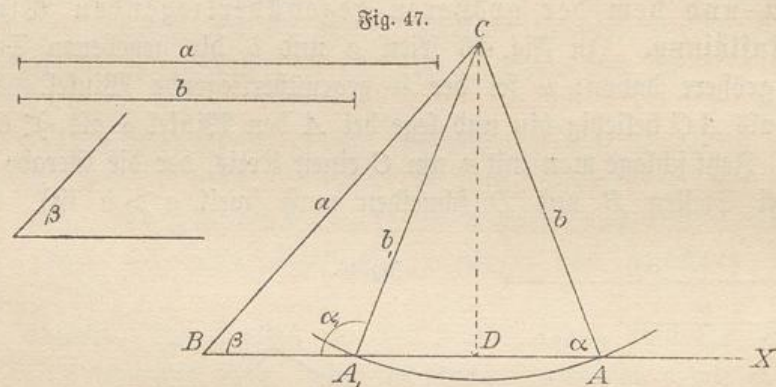
Daraus folgt

**der vierte Kongruenzsatz:** Stimmen zwei Dreiecke in zwei Seiten und dem der größeren gegenüberliegenden Winkel überein, so sind sie kongruent.

195) **Aufgabe.** Ein Dreieck zu konstruieren aus zwei Seiten und dem der kleineren gegenüberliegenden Winkel.



**Auflösung.** In Fig. 47 seien  $a$  und  $b$  die gegebenen Seiten,  $b$  die kleinere davon,  $\beta$  der ihr gegenüberliegende Winkel. Man lege  $a$  als  $BC$  beliebig hin und lege bei  $B$  den Winkel  $\beta$  als  $\angle CBX$  an. Darauf schlage man um  $C$  mit  $b$  einen Kreisbogen. Schneidet dieser die Gerade  $BX$  in zwei Punkten  $A$  und  $A_1$ , (was nur auf



der Seite des Winkels  $\beta$  geschehen kann, weil  $b < a$  ist), und verbindet man  $C$  mit  $A$  und  $A_1$ , so genügt sowohl das Dreieck  $ACB$ , als auch das Dreieck  $A_1CB$  der gestellten Aufgabe, denn beide besitzen die gegebenen Stücke.

**Bemerkung.** Soll die Aufgabe lösbar sein, so muß erstens  $\angle \beta$  ein spitzer Winkel sein, da er der kleineren Seite gegenüberliegt. Zweitens muß  $b$  mindestens so lang sein wie das in der Figur gezeichnete Lot  $CD$ . Ist  $b$  kürzer als dieses, so hat die Aufgabe keine Lösung. Ist  $b$  gleich diesem Lote, so hat die Aufgabe eine Lösung, und dabei ist das Dreieck ein rechtwinkliges. Ist  $b$  länger als dieses Lot, aber kleiner als  $a$ , so hat die Aufgabe zwei Lösungen, eine mit einem spitzen Winkel  $\alpha$  und eine andere mit einem stumpfen Winkel  $\alpha_1$ , der der Supplementwinkel von  $\alpha$  ist. (Warum?)

Man kann die beiden Dreiecke, wie auch Fig. 46 zeigt, mit den Seiten  $b$  so aneinander legen, daß sie zusammen ein gleichschenkliges Dreieck bilden. Sämtliche Dreiecke, die man aus denselben Stücken konstruiert, sind entweder dem Dreieck  $ABC$  oder dem Dreieck  $A_1BC$  kongruent. Zwei solche decken also einander, wenn die Winkel  $\alpha$  in beiden „gleichartig“ sind, d. h. beide spitz oder beide stumpf, oder beide rechte Winkel sind. Der Beweis der Deckung kann wie vorher dem Schüler überlassen werden.

Daraus folgt

**der fünfte Kongruenzsatz.** Stimmen zwei Dreiecke in zwei Seiten und dem der kleineren gegenüberliegenden Winkel



überein, und sind die der größeren gegenüberliegenden Winkel gleichartig, so sind die Dreiecke kongruent.

β) Allgemeines über Konstruktionen und Kongruenzsätze.

196) Alle sonstigen Konstruktionen von Dreiecken aus drei voneinander unabhängigen gegebenen Stücken lassen sich auf die fünf hier angegebenen grundlegenden Dreieckskonstruktionen zurückführen. Dasselbe gilt von den sonstigen Kongruenzsätzen, die ebenso auf die hier angegebenen fünf zurückzuführen sind.

Daß die gegebenen Stücke unabhängig voneinander sein müssen, zeigt sich z. B. an den Dreieckswinkeln. Die Aufgabe, ein Dreieck aus gegebenen Winkeln  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  zu konstruieren, ist nur denkbar, wenn  $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$  ist. Der Winkel  $\gamma$  also darf gar nicht gegeben werden, denn er ist schon durch  $\alpha$  und  $\beta$  bestimmt, nicht unabhängig von ihnen. Daher sind zunächst nur zwei Stücke gegeben,  $\alpha$  und  $\beta$ , und das dritte zur Konstruktion nötige Stück fehlt noch.

Bei der fünften Konstruktion hat man gesehen, daß eine Aufgabe bisweilen zwei Lösungen hat. Dies beruht darauf, daß ein Kreis eine Gerade oder einen anderen Kreis im allgemeinen in zwei Punkten schneiden kann. Dieser Umstand führte bei dieser Aufgabe auf zwei Punkte  $A$  und  $A_1$ . Aber dies ist nicht immer der Fall. So hat z. B. in Fig. 30 der Kreis ebenfalls zwei Schnitte mit der Geraden, aber es war trotzdem nur eine einzige Lösung der vierten Aufgabe möglich. Jeder eindeutig lösbaren Konstruktionsaufgabe entspricht ein Kongruenzsatz.

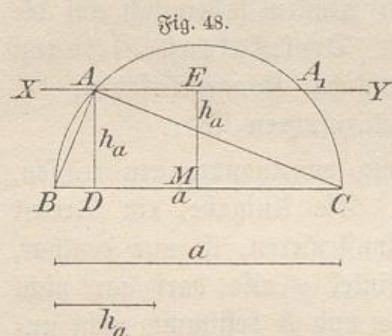
197) Die Konstruktionsaufgaben verlangen in der Regel eine Voruntersuchung darüber, wie die Aufgabe etwa angegriffen werden kann. Diese Untersuchung bezeichnet man als die Analyse der Aufgabe. An diese schließt sich die Konstruktion an. Nach Vollendung der letzteren ist der Beweis dafür zu geben, daß das konstruierte Gebilde die gegebenen Stücke hat. Die Analyse kann verschiedenartig ausfallen, sodaß bisweilen ganz verschiedene Konstruktionswege möglich werden. Je weniger Grundoperationen man dabei zur Ausführung nötig hat, für um so besser gilt die Lösung. — In der Regel wird noch eine Untersuchung darüber verlangt, unter welchen Bedingungen die Aufgabe lösbar ist, wann sie eine oder mehrere Lösungen hat, und welche Sonderfälle eintreten können. Diese Untersuchung heißt Determination.



## 198) Beispiel einer Dreieckskonstruktion.

1. **Aufgabe.** Ein rechtwinkliges Dreieck soll konstruiert werden aus der Hypotenuse  $a$  und der zu dieser gehörigen Höhe  $h_a$ .

2. **Analysis.** Man denke sich das Dreieck  $ABC$  gezeichnet.  $\angle BAC$  sei der rechte Winkel, ihm gegenüber liege die Hypotenuse  $a$ ,  $DA$  sei die zu dieser gehörige Höhe  $h_a$ .



Man erinnere sich des Satzes, daß der Winkel im Halbkreis ein Rechter ist. Demnach muß die Spitze  $A$  des Dreiecks auf einem Halbkreise liegen, der über  $BC = a$  als Durchmesser zu zeichnen ist. (Man sagt: Der geometrische Ort der Spitze  $A$  ist der zum Durchmesser  $a$  gehörige Halbkreis.)

Ferner muß die Spitze  $A$  von der Hypotenuse den Abstand  $h_a$  haben, d. h. sie muß in einer Parallelen zu  $a$  liegen, die von dieser Geraden den Abstand  $h_a$  hat. (Dies ist ein zweiter geometrischer Ort für die Spitze.) Durch die Kenntnis der beiden geometrischen Orte wird die Konstruktion ermöglicht.

3. **Konstruktion.**  $a$  und  $h_a$  seien die nebst dem rechten Winkel gegebenen Stücke. Man lege  $a$  als  $BC$  beliebig hin und konstruiere die zugehörige Mittelsenkrechte, der man die Länge  $ME = h_a$  gebe. Auf dieser errichte man im Punkte  $E$  ein Lot  $EX$ . Um  $M$  lege man mit  $MB$  einen Kreis, der das Lot  $EX$  in  $A$  schneide. Verbindet man  $A$  mit  $B$  und  $C$ , so hat man in  $ABC$  das verlangte Dreieck.

4. **Beweis.** Nach der Konstruktion ist  $MB = MC$ , also geht der geschlagene Kreisbogen durch  $B$  und  $C$  und ist ein Halbkreis vom Durchmesser  $BC = a$ . Da  $\angle BAC$  ein Winkel im Halbkreise ist, muß er ein Rechter sein.  $ME$  steht senkrecht auf  $BC$  und hat die Länge  $h_a$ , also hat das zugehörige Lot  $EX$  überall, auch bei  $A$ , von der Hypotenuse  $a$  den Abstand  $h_a$ , d. h. die Höhe  $DA$  hat die gegebene Länge. Das Dreieck hat demnach die verlangten Stücke.

5. **Determination.** Ist  $h_a$  kleiner als der Radius  $\frac{a}{2}$  des Kreises, so sind zwei Schnittpunkte  $A$  und  $A_1$  möglich. Diese geben aber zwei kongruente Dreiecke, denn  $\triangle ABC$  und  $\triangle A_1CB$  sind symmetrisch gegen die Mittelsenkrechte. Ist  $h_a = \frac{a}{2}$ , so wird das Lot  $EX$  Tangente des Kreises, dann ist also nur ein Dreieck möglich.



und dieses ist rechtwinklig gleichschenkelig. Ist  $h_a > \frac{a}{2}$ , so schneiden einander die beiden geometrischen Orte nicht, d. h. es ist keine Lösung möglich. (Für den Grenzfall  $h_a = 0$  fällt  $A$  mit  $B$  oder mit  $C$  zusammen. Die Fläche des Dreiecks wird dann gleich Null.)

**Bemerkung.** Folgern kann man daraus den Satz: Stimmen zwei rechtwinklige Dreiecke in der Hypotenuse und der zugehörigen Höhe überein, so sind sie kongruent. —

Bisweilen liegt aber die Lösung der Aufgabe weit versteckter, sodaß sie fast auf einen Kunstgriff hinausführt. Auch dazu sollen Beispiele gegeben werden.

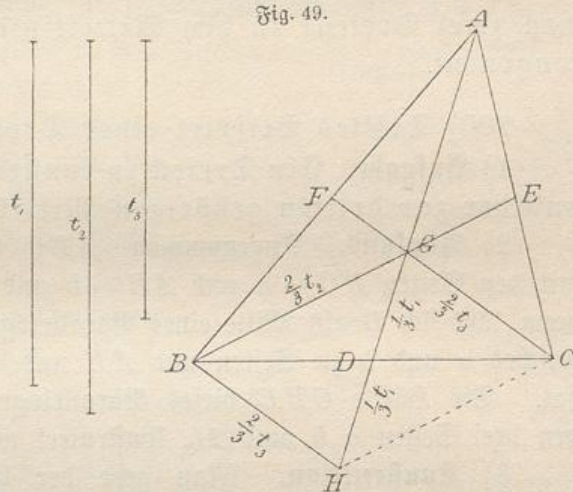
199) Beispiel einer anderen Dreieckskonstruktion.

1) **Aufgabe.** Ein Dreieck aus den drei Mittellinien zu konstruieren.

2) **Analysis.** Man denke sich das Dreieck  $ABC$  mit den drei Mittellinien  $AD$ ,  $BE$  und  $CF$  oder  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  gezeichnet und erinnere sich des Satzes, daß diese Geraden durch denselben Punkt  $G$  gehen, durch den von jeder der dritte Teil abgeschnitten wird. Danach ist  $DG = \frac{1}{3}t_1$ ,  $BG = \frac{2}{3}t_2$ ,  $CG = \frac{2}{3}t_3$ . Außerdem ist  $DB = DC$ . Macht man also noch  $DH = DG$ , so ist  $BGCH$  ein Parallelogramm (denn die Diagonalen halbieren einander). Die Hälfte  $BGH$  dieses Parallelogramms ist ein Dreieck mit den Seiten  $\frac{2}{3}t_1$ ,  $\frac{2}{3}t_2$ ,  $\frac{2}{3}t_3$ , kann also leicht konstruiert werden, und auch der Rest der Konstruktion ist leicht zu übersehen.

3) **Konstruktion.** Sind in Fig. 49  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  die gegebenen Mittellinien, so schneide man von jeder den dritten Teil ab und konstruiere aus den Resten das Dreieck  $BGH$ . Man mache  $HD$  gleich  $\frac{1}{3}t_1$ , ziehe  $BD$  und verlängere es um sich selbst über  $D$  hinaus, was  $C$  gibt.  $HG$  verlängere man über  $G$  hinaus um sich selbst, was  $A$  gibt. Verbindet man  $A$  mit  $B$  und  $C$ , so ist  $ABC$  das verlangte Dreieck.

Fig. 49.





4) **Beweis.** Nach der Konstruktion ist  $D$  der Halbierungspunkt von  $BC$ , also ist  $AD$  die eine Mittellinie des Dreiecks. Nach der Konstruktion ist  $HA = \frac{4}{3}t_1$ ,  $HD = \frac{1}{3}t_1$ , also  $AD = t_1$ , d. h. die Mittellinie  $AD$  hat die richtige Länge. Da aber der Punkt  $G$  von ihr den dritten Teil abschneidet, so sind  $BG$  und  $CG$  Teile der beiden anderen Mittellinien. Dabei ist  $BG = \frac{2}{3}t_2$  und auch gleich  $\frac{2}{3}BE$ , folglich ist  $BE = t_2$ . Da nach der Konstruktion  $GH$  und  $BC$  durch  $D$  halbiert sind, so ist das Viereck  $BGCH$  ein Parallelogramm. Folglich ist  $GC = BH = \frac{2}{3}t_3$ . Da aber zugleich  $GC = \frac{2}{3}CF$  ist, so ist  $CF = t_3$ . Das Dreieck hat also die verlangten Mittellinien.

5) **Determination.** Die Aufgabe ist lösbar, sobald die Summe der beiden kleineren Mittellinien größer ist als die dritte, denn dann kann  $\triangle BGH$  konstruiert und die Figur vollendet werden. Im Grenzfalle  $t_1 + t_3 = t_2$  wird die Fläche des Dreiecks  $ABC$  gleich Null. Warum? Sind zwei Mittellinien gleich, so wird das Dreieck gleichschenkelig, sind alle drei gleich, so wird es gleichseitig.

**Bemerkung.** Daraus ergibt sich folgender Kongruenzsatz: Stimmen zwei Dreiecke in den Mittellinien überein, so sind sie kongruent.

#### 200) Drittes Beispiel einer Dreieckskonstruktion.

1) **Aufgabe.** Ein Dreieck zu konstruieren aus zwei Seiten und der zur dritten gehörigen Mittellinie.

2) **Analysis.** Angenommen,  $ABC$  wäre das gesuchte Dreieck mit den Seiten  $BC = a$  und  $AC = b$  und der Mittellinie  $CD = t_3$ , dann läßt sich  $D$  als Mitte eines Parallelogramms  $ACBE$  betrachten, welches  $a$  und  $b$  zu Seiten und  $AB$  und  $CE = 2t_3$  zu Diagonalen hat. Die Hälfte  $CBE$  dieses Parallelogramms kann demnach aus den drei Seiten  $a$ ,  $b$ , und  $2t_3$  konstruiert werden.

3) **Konstruktion.** Man gebe der beliebig hinzulegenden Geraden  $CE$  die Länge  $2t_3$ , schlage um  $C$  und  $E$  Bogen vom Radius  $a$  bzw.  $b$ , die einander in  $B$  schneiden, ziehe  $BD$  und verlängere es über  $D$  hinaus um sich selbst, und verbinde den neuen Endpunkt  $A$  mit  $C$  und  $C$  mit  $B$ , dann ist  $ABC$  das gesuchte Dreieck.

4) **Beweis** und 5) **Determination** sind einfach.

**Bemerkung.** Damit sind zugleich folgende Aufgaben gelöst:

- a) Zwischen zwei konzentrischen Kreisen sei ein Punkt  $P$  gegeben; durch ihn soll von Kreis zu Kreis eine Gerade so gelegt werden, daß sie in  $P$  halbiert ist. b) Gegeben seien zwei konzentrische Kreise und ein zwischen ihnen liegender Punkt  $P$ . Es soll ein Rechteck gezeichnet werden, welches



seine Ecken zu je zweien auf den beiden Kreisen und  $P$  zum Mittelpunkt hat.

201) Lassen sich zwei Vielecke auf dieselbe Art in homologe Dreiecke zerlegen, so sind die Vielecke kongruent.

Der Beweis ist so einfach, daß er den Schülern überlassen werden kann.

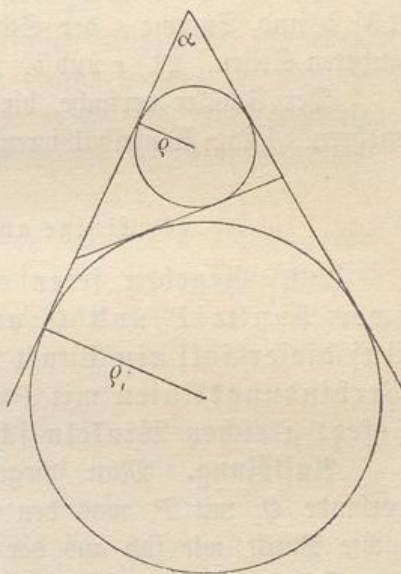
In kongruenten Figuren stimmen homologe Geraden, homologe Winkel, homologe Kreise, homologe Flächenstücke überein.

γ) Dreieckskonstruktionen.\*)

202) **Bezeichnungen.** Die den Punkten  $A, B, C$  gegenüberliegenden Dreiecksseiten sollen in der Regel mit  $a, b, c$  bezeichnet werden, die zu  $A, B, C$  gehörigen Winkel mit  $\alpha, \beta, \gamma$ . Die Mittellinien des Dreiecks sollen  $t_1, t_2, t_3$  heißen, die Winkelhalbierenden, bis zur Gegenseite gerechnet,  $w_1, w_2, w_3$ ; die Höhen  $h_1, h_2, h_3$ ; der Radius des Umkreises  $r$ , die Radien der vier Berührungskreise  $\varrho, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ . Dabei entsprechen die Marken 1, 2, 3 den Buchstaben  $A, B, C$  bzw.  $a, b, c$ . Der Umfang eines Dreiecks heiße  $u$ . Bei rechtwinkligen Dreiecken soll die Hypotenuse  $c$  heißen. Bei gleichschenkligen Dreiecken soll  $b$  die Basis sein.

203) Dreiecke zu konstruieren aus: 1)  $a, b, h_1$ . 2)  $a, b, h_3$ . 3)  $a, h_1, h_2$ . 4)  $a, h_2, h_3$ . 5)  $a, b, t_1$ . 6)  $a, t_1, t_2$ . 7)  $a, t_2, t_3$ . 8)  $a, b, t_3$ . 9)  $r, a, \beta$ . 10)  $r, a, h_1$ . 11)  $r, a, h_2$ . 12)  $r, a, t_1$ . 13)  $r, a, t_2$ .\*\*) 14)  $\varrho, a, \beta$ . 15)  $\varrho, \alpha, \beta$ . 16)  $\varrho, a_1, a_2$  ( $a_1$  und  $a_2$  sollen die durch den Berührungspunkt entstehenden Teile von  $a$  sein). 17)  $\varrho, w_1, \alpha$ . 18)  $\varrho_1, a, \beta$ . 19)  $\varrho_1, \alpha, \beta$ . 20)  $\varrho_1, a_1, a_2$ . 21)  $\varrho_1, w_1, \alpha$ . 22)  $\varrho, \beta, h_1$ . 23)  $\varrho_1, \beta, h_1$ . 24)  $\varrho_3, \gamma, h_1$ . 25)  $\alpha, \varrho, \varrho_1$ . 26)  $\alpha, \varrho_1, \varrho_2$ . 27)  $\alpha, \varrho, h_1$ . 28)  $\alpha, \varrho_2, h_1$  (vgl.

Fig. 50.



\*) Einige der Aufgaben sind schon vorher besprochen.

\*\*) Der Ort der Mitten aller Sehnen, die von einem Punkte der Kreislinie ausgehen, ist ein Berührungskreis vom halben Radius. (Vgl. § 153.)



Fig. 50). 29) Aus den Seiten  $a_1, b_1, c_1$  des Höhenfußpunktdreiecks. 30) Aus  $a, \beta$  und der Summe  $s$  der beiden anderen Seiten. 31) Aus  $a, \beta$  und der Differenz  $d$  der beiden anderen Seiten. (Bei diesen beiden Aufgaben kommen Sätze vom Außenwinkel beim gleichschenkligen Dreiecke zur Anwendung.)

204) Rechtwinklige Dreiecke zu konstruieren aus: 1) Hypotenuse  $c$  und Kathete  $a$ . 2) Hypotenuse  $c$  und  $\alpha$ . 3) Hypotenuse  $c$  und Höhe  $h_3$ . 4) Hypotenuse  $c$  und  $t_1$ .\*) 5)  $q$  und spitzem Winkel  $\alpha$ . 6)  $q$  und Kathete  $a$ . 7)  $q_1$  (an Kathete  $a$ ) und  $\alpha$ . 8)  $q_1$  und  $\beta$ . 9)  $q_1$  und  $a$ . 10)  $q$  und  $q_1$ . 11)  $q$  und  $q_3$ . 12)  $q_1$  und  $q_3$ . 13)  $q_3$  und  $a$ . 14)  $q_3$  und  $\beta$ . 15) Hypotenuse  $c$  und Summe  $s$  der beiden Katheten. 16) Hypotenuse  $c$  und Unterschied  $d$  der beiden Katheten.

205) Gleichschenklige Dreiecke zu konstruieren aus: 1) Basis  $b$  und Höhe  $h_2$  (oder  $q_1$ ). 2) Basis  $b$  und  $q$ . 3) Basis  $b$  und  $q_2$ . 4) Basis  $b$  und  $\angle \beta$ . 5) Basis  $b$  und  $t_1$ . 6) Basis  $b$  und  $h_1$ . 7)  $q$  und  $q_2$ . 8)  $q$  und  $h_2$  (oder  $q_1$ ). 9)  $q$  und  $\beta$ . 10)  $q$  und  $\alpha$ . 11)  $a$  und  $h_1$ . 12)  $\alpha$  und  $w_1$ . 13)  $\beta$  und  $w_1$ . 14)  $q_2$  und  $\beta$ . 15)  $q_2$  und  $\alpha$ . 16)  $q_1$  und  $\alpha$ . 17)  $q_1$  und  $\beta$ . 18)  $a$  und  $t_2$ . 19)  $b$  und Summe  $s$  der Schenkel. 20)  $a$  und Summe der beiden anderen Seiten. 21)  $r$  und  $b$ . 22)  $r$  und  $a$ . 23)  $r$  und  $\beta$ . 24)  $r$  und  $\alpha$ .

Der Schüler versuche, die Beispiele dieses Abschnitts selbst zu vermehren. (Die Winkelhalbierenden pflegen Schwierigkeiten zu machen.)

#### d) Einige andere Konstruktionen.

206) Gegeben seien eine unbegrenzte Gerade  $KL$  und zwei Punkte  $P$  und  $Q$  auf derselben Seite der Geraden. Auf dieser soll ein Punkt  $X$  so bestimmt werden, daß dessen Verbindungslinien mit  $P$  und  $Q$  die Gerade unter entgegengesetzt gleichen Winkeln schneiden.\*\*)

**Auflösung.** Man spiegele  $Q$  gegen die Gerade, was  $Q_1$  gibt, verbinde  $Q_1$  mit  $P$ , was den Schnittpunkt  $X$  gibt. Dies ist der gesuchte Punkt, wie sich aus der Geraden  $XQ$  leicht ergibt. — Beweis dem Schüler zu überlassen.

**Bemerkungen.** Statt  $Q$  zu spiegeln, kann man auch  $P$  spiegeln. — Geht von  $Q$  ein Lichtstrahl an die spiegelnde Gerade  $KL$ , so wird er so zurückgeworfen, daß  $\angle \alpha = \alpha_1$  ist. Er hat also, um von  $Q$

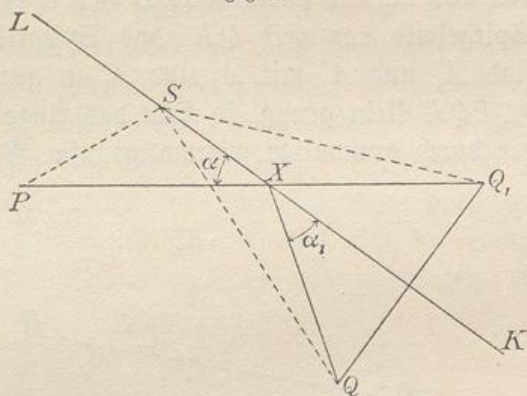
\*) Vgl. Anm. 2) auf Seite 77.

\*\*) Diese Aufgabe wird vielfache Anwendung finden.



aus ins Auge, welches sich in  $P$  befinden möge, zu gelangen, den konstruierten Weg  $QXP$  zurückzulegen. Das Auge sieht dann in der Verlängerung von  $PX$  das Spiegelbild  $Q_1$  von  $Q$ .

Fig. 51.



Die Gerade  $Q_1P = XQ_1$ ,  $+ PX$  ist der kürzeste Weg zwischen  $Q_1$  und  $P$ . Folglich ist auch  $QX + XP$  der kürzeste Weg, der von  $Q$  aus zum Spiegel und dann nach  $P$  führt. Der Lichtstrahl, der von  $Q$  zum Spiegel und nach dem Auge geht, hat demnach den kürzesten unter den möglichen Wegen eingeschlagen.

207) Gegeben seien eine unbegrenzte Gerade  $KL$  und zwei beliebige Punkte  $P$  und  $Q$  auf verschiedenen Seiten der Geraden. Auf dieser soll ein Punkt  $X$  so konstruiert werden, daß dessen Verbindungslinien mit  $P$  und  $Q$  die Gerade unter entgegengesetzt gleichen Winkeln schneiden.\*)

(Die Auflösung soll dem Schüler überlassen bleiben, der wiederum mit der Spiegelung des einen Punktes zu beginnen hat. Er versuche auch zu zeigen, daß der Unterschied der Wege  $PX$  und  $XQ$  ein Höchstwert für alle möglichen Wege von  $P$  zur Geraden und vom Schnittpunkte nach  $Q$  ist.)

208) Innerhalb eines gegebenen Winkels  $PQR$  seien zwei Punkte  $A$  und  $B$  gegeben; auf den Schenkeln sollen Punkte  $C$  und  $D$  so bestimmt werden, daß  $AC$  und  $CD$  mit dem einen Schenkel entgegengesetzt gleiche Winkel bilden,  $CD$  und  $DB$  mit dem anderen. (Fig. 52.)

(Man bilde die Spiegelbilder  $A_1$  und  $B_1$  von  $A$  und  $B$  in bezug auf die Schenkel  $PQ$  und  $QR$ , dann gibt die Gerade  $A_1B_1$  die gesuchten Punkte  $C$  und  $D$ . Bildet man die Spiegelbilder  $A_2$  und  $B_2$  in bezug auf die vertauschten Schenkel, so erhält man ein zweites Punktpaar  $C_1$  und  $D_1$ . Die Beweise führe der Schüler.)

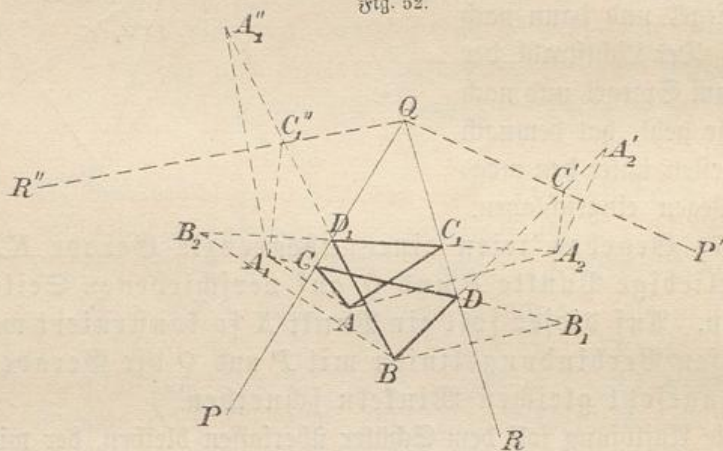
**Bemerkungen.** Denkt man sich in  $A$  ein Kerzenlicht, in  $B$  das Auge der Beobachters, und sind  $PQ$  und  $QR$  Spiegel, so ist  $AC + CD + DB$  der Weg eines zum Auge gelangenden Lichtstrahls, der von jedem Spiegel unter demselben Winkel zurückgeworfen (re-

\*) Diese Aufgabe wird vielfache Anwendung finden.



reflektiert) wird, unter dem er auf ihn fällt. Das Auge sieht dann in der Verlängerung von  $BD$  ein Spiegelbild  $A_2'$  von  $A$ , und zwar ist  $A_2'B = AC + CD + DB$ . Auch in  $A_1''$  sieht das Auge ein Spiegelbild von  $A$ , und dabei ist  $A_1''B = AC_1 + C_1D_1 + D_1B$ . —  $QP'$  ist das Spiegelbild von  $QP$ ,  $QR''$  das Spiegelbild von  $QR$ . In der Figur sind  $A_2'$  und  $A_1''$  mit  $A_2$  und  $A_1$  in gewisse Beziehung gesetzt. — Ist  $\angle PQR$  klein genug, so sieht das Auge  $B$  noch weitere Bilder von  $A$ , die durch dreimalige, viermalige usw. Reflexion an den Spiegeln her-

Fig. 52.



vorgebracht werden. Auch für diese Spiegelungen versuche man die Wege der Lichtstrahlen zu konstruieren. Man untersuche, ob der Weg  $AC + CD + DB$  ein kleinster Weg (Minimalweg) für den Gang von  $A$  nach dem ersten, dann zum zweiten Spiegel, dann nach  $B$  ist, ebenso ob  $AC' + C'D' + D'B$  ein Minimalweg ist usw. —  $A$  und  $B$  können ihre Rollen vertauschen. Je nach ihrer Lage können gewisse Sonderfälle eintreten.

208a) Man versuche dieselbe Aufgabe für eine von drei spiegelnden Geraden begrenzte Fläche zu lösen.

209) Eine Gerade von gegebener Länge  $a$  so in einen festen rechten Winkel  $PQR$  einzulegen, daß ihre Endpunkte auf den Schenkeln liegen und sie den einen Schenkel unter gegebenem spitzen Winkel  $\alpha$  schneidet.

(Nach dem Satze über den Umkreis des rechtwinkligen Dreiecks hat die Mitte der Geraden zum geometrischen Ort einen um  $Q$  mit dem Radius  $\frac{a}{2}$  beschriebenen Kreisbogen. Man zeichne einen Radius

\*) Einiges aus den obigen Übungen wird wiederholt.



$QC = \frac{a}{2}$  so, daß  $\angle CQP$  gleich  $\alpha$  ist, und schlage um  $C$  einen Kreisbogen mit demselben Radius  $\frac{a}{2}$ , der  $QP$  in  $A$  schneidet.  $AC$  ist dann die Hälfte der Geraden in der geforderten Lage, die Verlängerung  $CB$  bis zum anderen Schenkel vollendet die Konstruktion.)

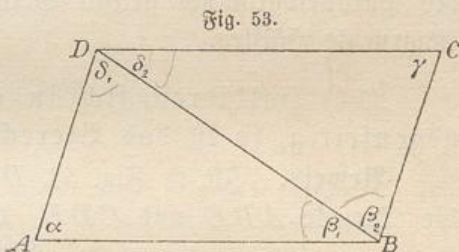
**Bemerkung.** Gleitet eine Gerade von gegebener Länge mit den Endpunkten auf den Schenkeln eines festen rechten Winkels, so bewegt sich ihre Mitte auf dem besprochenen Kreise. Gleitet also der eine Endpunkt auf dem einen Schenkel und wird die Mitte durch eine Kurbel auf dem genannten Kreise geführt, so muß sich der andere Endpunkt geradlinig bewegen. (Eine wichtige Geradföhrung der Maschinenkunde.)

### b) Lehre von den Parallelogrammen.

a) Die grundlegenden Sätze in übersichtlicher Zusammenstellung.

210) Die Gegenseiten und ebenso die Gegenwinkel des Parallelogramms sind einander gleich.

**Beweis.** Durch die Diagonale  $BD$  wird das Parallelogramm  $ABCD$  (Fig. 53) in zwei kongruente Dreiecke geteilt, denn beide Dreiecke stimmen überein in der Seite  $BD$ , in den Winkeln  $\delta_1$  und  $\beta_2$  (die als Wechselwinkel bei Parallelen gleich sind) und in den Winkeln  $\beta_1$  und  $\delta_2$  (aus demselben Grunde), also nach dem zweiten Kongruenzsatz. Folglich sind die den gleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten gleich, d. h.  $AB = CD$  und  $AD = CB$ ; ferner ist  $\alpha = \gamma$ , außerdem aber  $\delta_1 + \delta_2 = \beta_2 + \beta_1$ , d. h.  $\angle ADC = \angle ABC$ .



211) Sind in einem Viereck je zwei gegenüberliegende Seiten einander gleich, so ist es ein Parallelogramm.

**Beweis.** Die Kongruenz der Dreiecke in Fig. 53 folgt jetzt nach dem dritten Kongruenzsatz. Aus ihr folgt  $\delta_1 = \beta_2$ , sodaß  $AD \parallel BC$  ist; außerdem folgt  $\delta_2 = \beta_1$ , sodaß auch  $CD \parallel AB$  ist.

212) Sind in einem Viereck zwei Seiten gleich und parallel, so ist es ein Parallelogramm.

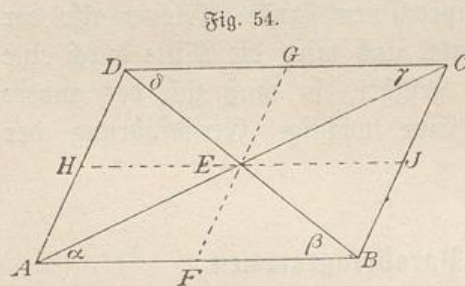
**Beweis.** Ist in Fig. 53  $AB \parallel CD$ , so folgt aus dem Parallelismus, daß  $\delta_2 = \beta_1$  ist. Die Dreiecke stimmen jetzt in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel überein, sind also kongruent nach dem



ersten Kongruenzsatz. Folglich ist auch  $\delta_1 = \beta_2$  und daher auch  $AD \parallel CB$ , also  $ABCD$  ein Parallelogramm.

213) Die Diagonalen jedes Parallelogramms halbieren einander.

**Beweis.** In Fig. 54 sind die Dreiecke  $ABE$  und  $CDE$  nach dem zweiten Kongruenzsatz kongruent, denn  $DC = AB$ ,  $\delta = \beta$  und  $\gamma = \alpha$ , folglich sind die den gleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten gleich, d. h.  $AE = EC$  und  $DE = EB$ .

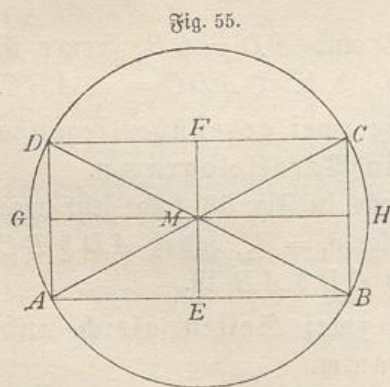


**Bemerkung.** Jedes Parallelogramm hat zwei Mittellinien ( $FG$  und  $HJ$ ), die zu den Seiten parallel sind und durch den Durchschnittspunkt der Diagonalen gehen.

Sie zerlegen das Parallelogramm in vier kongruente Parallelogramme, denn diese lassen sich mit den gleichliegenden Diagonalen so aufeinander decken, daß kongruente Dreiecke (zweiter Kongruenzsatz) aufeinander fallen. Die Mittellinien halbieren also die Seiten und sind ihnen bezüglich gleich. Jede durch den Mittelpunkt des Parallelogramms gelegte Gerade zerlegt das Parallelogramm in kongruente Hälften.

214) Halbieren sich in einem Viereck die Diagonalen gegenseitig, so ist das Viereck ein Parallelogramm.

**Beweis.** Ist in Fig. 54  $DE = BE$  und  $AE = CE$ , so sind die Dreiecke  $ABE$  und  $CDE$  da auch die Scheitelwinkel übereinstimmen, kongruent (nach dem ersten Kongruenzsatz). Folglich ist  $AB = CD$ , und da auch die Wechselwinkel übereinstimmen,  $AB \parallel CD$ , also ist  $ABCD$  ein Parallelogramm.



215) Ist im Parallelogramm ein Winkel ein rechter, so sind sämtliche Winkel rechte (warum?), das Parallelogramm ist also ein Rechteck. Im Rechteck sind beide Diagonalen gleich.

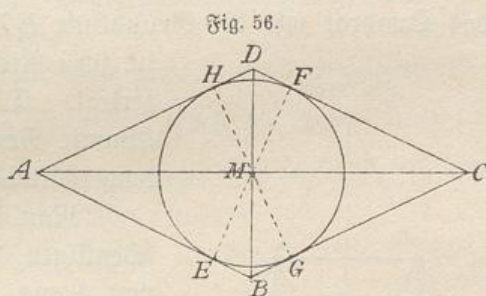
Sind in einem Parallelogramm die Diagonalen gleichlang, so ist es ein Rechteck. (Warum?) Durch die Ecken des Rechtecks läßt sich ein Kreis legen. Das Rechteck



hat zwei Symmetrieachsen, die Mittellinien des Rechtecks. (Vgl. Fig. 55.) Der dem Rechteck umbeschriebene Kreis ist gleichzeitig der den rechtwinkligen Dreiecken  $ABC$ ,  $ABD$  usw. umbeschriebene. (Vgl. Winkel im Halbkreis.)

216) Sind in einem Parallelogramm zwei zusammenstoßende Seiten gleich, so sind alle Seiten gleich (warum?), das Parallelogramm ist also ein Rhombus.

Der Rhombus wird durch die beiden Diagonalen in vier kongruente Dreiecke zerlegt. (Warum?) Folglich: Im Rhombus stehen die Diagonalen aufeinander senkrecht. Beide sind Symmetrieachsen des Rhombus. Die Winkel des Rhombus werden durch die Diagonalen halbiert. Die vom Schnittpunkte der Diagonalen auf die Seiten des Rhombus gefällten Lote sind gleich lang, in den Rhombus läßt sich also ein Kreis beschreiben (Beweise dies an Fig. 56.)



Stehen in einem Viereck die Diagonalen aufeinander senkrecht und halbieren sie sich gegenseitig, so ist das Viereck ein Rhombus. (Warum?) Werden in einem Parallelogramm die Winkel durch die Diagonalen halbiert, so ist es ein Rhombus. (Warum?)

217) Das Quadrat ist Rhombus und Rechteck zugleich, seine Diagonalen sind also gleich, halbieren sich gegenseitig und stehen aufeinander senkrecht. Die Winkel des Quadrates werden durch die Diagonalen halbiert. In das Quadrat und um dasselbe läßt sich ein Kreis beschreiben.

#### β) Quadratkonstruktionen.

218) Folgende Konstruktionen sind schon durchgeführt worden: Über einer gegebenen Geraden ein Quadrat zu errichten. Ein Quadrat von gegebener Diagonale zu zeichnen; oder, was dasselbe ist, einem gegebenen Kreise ein Quadrat einzuzichnen. Um einen gegebenen Kreis ein Quadrat zu zeichnen. Einem gegebenen Quadrate ein gegebenes kleineres einzuzichnen (sodass dessen Ecken auf seinen Seiten liegen). Um ein gegebenes Quadrat ein gegebenes größeres zu legen (sodass dessen Seiten durch seine Ecken gehen).



219) Folgende Konstruktionen sollen durchgeführt werden:

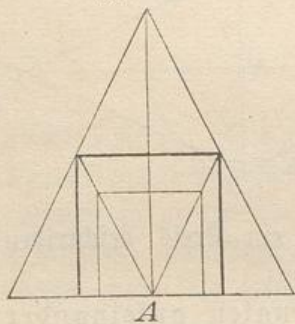
1) Ein Quadrat zu zeichnen, dessen Umfang gleich einer gegebenen Geraden ist.

2) In ein gegebenes gleichschenkliges Dreieck ein auf der Grundlinie stehendes Quadrat so einzuziehen, daß dessen obere Ecken in die Schenkel fallen.

[Denkt man sich die Figur gezeichnet, so erkennt man, daß sie einfach symmetrisch ist.

Ist  $BC$  die Grundlinie des Dreiecks,  $AD$  die Höhe,  $EFGH$  das Quadrat mit der Grundlinie  $EF$ , die auf  $BC$  liegt, so ist dieses in zwei Rechtecke vom Seitenverhältnis  $1:2$  zerlegt. Die Diagonale  $AG$  hat eine bestimmte Neigung gegen  $AC$ , die dem Kathetenverhältnis  $1:2$  entspricht.

Fig. 56 b.



Man hat also in dem gegebenen gleichschenkligen Dreieck das Lot  $DA$  zu fällen, von  $A$  aus von der Grundlinie ein beliebiges Stück  $AF_1$  abzuschneiden und im Endpunkte ein Lot  $F_1G_1$  von doppelter Länge zu errichten,  $AG_1$  zu ziehen und so weit zu verlängern, bis es den Schenkel in  $G$  trifft,

durch  $G$  die Parallele  $GH$  zur Grundlinie zu legen und das Quadrat zu vollenden.]

3) In einen gegebenen Halbkreis ein auf dem Durchmesser stehendes Quadrat einzuziehen, von dem zwei Ecken in die Kreislinie fallen.

4) In ein gegebenes Kreissegment ein Quadrat in entsprechender Weise einzuziehen.

5) In einen gegebenen Sektor ein Quadrat so einzuziehen, daß zwei Ecken auf den Kreisbogen, zwei in die Grenzradien fallen.

(Man zeichne in den Winkel des Sektors zunächst ein kleineres Quadrat symmetrisch ein und lege durch dessen Grundecken den zugehörigen konzentrischen Kreisbogen. Dann verbinde man die Spitze mit den Grundecken des Hilfsquadrates und verlängere die Geraden bis zum gegebenen Kreisbogen. Dies gibt die Grundecken des gesuchten Quadrates.)

6) In einen gegebenen Rhombus ein Quadrat einzuziehen.

7) Einem gegebenen Doppelsegmente\*) ein Quadrat einzubeschreiben.

\*) Es ist die Figur gemeint, die durch Aneinanderlegen zweier kongruenter Kreissegmente längs der Sehnen entsteht.



8) Durch den Mittelpunkt eines gegebenen Quadrates sei eine beliebige Gerade gelegt. Um das Quadrat soll ein anderes beschrieben werden, von dem zwei Gegenecken auf der Geraden liegen. (Man bilde von einer der gegebenen Quadratecken das Spiegelbild.)

γ) Rechteckskonstruktionen.

220) Aufgaben ohne Kreise.

1) Ein Rechteck von gegebenem Umfange zu konstruieren, bei dem das eine Seitenpaar doppelt so lang ist als das andere.

2) Dieselbe Aufgabe für das Seitenverhältnis 3 : 1 oder 4 : 1, oder 3 : 2, oder 4 : 3 usw. zu lösen.

3) Ein Rechteck von gegebenem Umfange  $u$  und gegebener Diagonale  $d$  zu zeichnen. (Man konstruiere zunächst ein Dreieck aus  $\frac{u}{2}$ , dem anliegenden Winkel  $45^\circ$  und der diesem gegenüber liegenden Seite  $d$ . — Unten wird sich noch ein anderer Weg ergeben.)

4) Ein Rechteck von gegebener Höhe in ein gegebenes gleichschenkliges Dreieck so einzuzichnen, daß es auf dessen Grundlinie steht und zwei seiner Ecken auf den Schenkeln hat.

5) Dieselbe Aufgabe für ein Rechteck mit gegebener Grundlinie zu lösen.

6) Dieselbe Aufgabe für ein Rechteck mit gegebenem Seitenverhältnis 2 : 1 oder 1 : 2 zu lösen. (Die Hälfte des Rechtecks, die durch die Dreieckshöhe begrenzt wird, hat eine Diagonale von bestimmter Neigung. Vgl. 151 a.)

7) Dieselbe Aufgabe mit Rechtecken von beliebigen Seitenverhältnissen, z. B. 3 : 1 oder 1 : 3; 3 : 2 oder 2 : 3; 4 : 1 oder 1 : 4; 4 : 3 oder 3 : 4 usw. zu lösen.

8) Folgenden Hilfsatz zu beweisen: Sämtliche Rechtecke, die einem Quadrate einbeschrieben sind (wobei ihre Seiten paarweise parallel zu dessen Diagonalen sein müssen), haben denselben Umfang, nämlich die doppelte Diagonale. ( $d = \frac{u}{2}$ .)

9) **Folgerung:** Denkt man sich diese Rechtecke so auf die eine Diagonale des Quadrates gestellt, daß die andere Diagonale gemeinschaftliche Symmetrieachse bleibt, so liegen die freien Ecken auf den Schenkeln eines gleichschenkligen Dreiecks, dessen Grundlinie ebenso wie die Höhe gleich der Quadratdiagonale ist. Daraus folgt: Hat ein gleichschenkliges Dreieck eine Höhe, die gleich der Grundlinie ist, so haben alle auf dem letzteren stehenden einbeschriebenen Rechtecke denselben Umfang, nämlich die



doppelte Höhe. (Beide Sätze lassen sich zu Konstruktionen benutzen, bei denen es sich um Rechtecke von gegebenem Umfang handelt.)

10) Die Aufgabe 3) mit Hilfe des unter 8) besprochenen Quadrates zu lösen.

11) Ein Rechteck von gegebenem Umfange und gegebenem Schnittwinkel der Diagonalen zu zeichnen. (Vgl. das unter 8) besprochene Quadrat; zwei Lösungen sind möglich.)

12) Die Aufgaben 1) und 2) mit Hilfe des unter 8) besprochenen Quadrates zu lösen.

13) Ein Rechteck von gegebenem Umfange in ein gegebenes gleichschenkliges Dreieck so einzuziehen, daß es auf der Grundlinie steht und zwei Ecken auf den Schenkeln hat. (Man benutze das unter 9) genannte gleichschenklige Dreieck mit  $b = h = \frac{u}{2}$ . Wo die zusammengehörigen Schenkel beider Dreiecke einander schneiden, liegen zwei Ecken des gesuchten Rechtecks. Schneiden sich diese Schenkel nicht, so ist die Aufgabe unlösbar. Die Determination mit den Grenzfällen ist ausführlich zu bearbeiten.)

14) Ein Rechteck von gegebenem Umfange in einen gegebenen Rhombus einzuziehen. (Man ziehe das unter 8) besprochene Quadrat zu Hilfe. Die Determination ist ausführlich zu geben.)

15) Ein Rechteck von gegebenem Seitenverhältnis in einen gegebenen Rhombus einzuziehen. (Das Verhältnis sei z. B. 1 : 2 oder 2 : 1; 2 : 3 oder 3 : 2; 1 : 4 oder 4 : 1; 3 : 4 oder 4 : 3.)

16) Ein Rechteck von gegebener Diagonale in einen gegebenen Rhombus einzuziehen.

17) Ein Rechteck von gegebenem Schnittwinkel der Diagonalen in einen gegebenen Rhombus einzuziehen.

18) Ein Rechteck von gegebener Seite in einen gegebenen Rhombus einzuziehen. (Zwei Lösungen.)

19) Um einen Rhombus ein Rechteck zu beschreiben, von dem eine Seite der Richtung nach gegeben ist.

20) Um ein gegebenes Rechteck ein anderes zu legen, von dem eine Seite der Richtung nach gegeben ist.

21) In ein gegebenes Rechteck ein anderes von gegebener Diagonale einzuziehen. (Die Diagonale ist in enge Grenzen eingeschlossen.)

22) Folgenden Hilfsatz zu beweisen: Die einem rechtwinklig gleichschenkligen Dreieck einbeschriebenen Rechtecke, die Stücke der Katheten zur Seite haben und deren eine Ecke in



die Hypotenuse fällt, haben sämtlich denselben Umfang. (Einfache Folgerung von 8.)

23) Einem beliebigen rechtwinkligen Dreiecke ein Rechteck gegebenen Umfangs einzuzichnen. (Die Lösung beruht auf dem vorigen Hilfsfabe. Man nehme ein gewisses rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck zur Hilfe.)

### 221) Aufgaben mit Kreisen.

1) Einem gegebenen Kreise ein Rechteck einzubeschreiben, von dem eine Seite gegeben ist, die horizontal sein soll.

2) Einem gegebenen Kreise ein Rechteck einzubeschreiben, für welches der Schnittwinkel der Diagonalen gegeben ist und dessen größere Seite entweder wagerecht oder senkrecht sein soll.

3) Einem gegebenen Kreise ein Rechteck vom Seitenverhältnis 1:2 einzubeschreiben, dessen größere Seite entweder wagerecht oder senkrecht sein soll. (Man zeichne zunächst ein beliebiges Rechteck dieses Seitenverhältnisses mit einer Diagonale und benutze den dabei auftretenden Winkel.)

4) Dieselbe Aufgabe für beliebiges Seitenverhältnis zu lösen.

5) Einem gegebenen Kreise ein Rechteck von gegebenem Umfang einzubeschreiben, dessen größere Seite entweder wagerecht oder senkrecht sein soll. (Man kann z. B. das in Nr. 220) unter 8) besprochene Quadrat benutzen, welches den Kreis schneiden wird, wenn die Aufgabe lösbar ist.)

6) bis 10) Die Aufgaben 1) bis 5) für den Fall zu lösen, daß das Rechteck einem Halbkreise so einbeschrieben werden soll, daß es auf dessen Durchmesser steht und zwei Ecken in den Kreisbogen fallen. (Die geänderte Aufgabe 1) gibt zwei Fälle, entweder ist die Grundlinie oder die Höhe des Rechtecks gegeben. Die geänderte Aufgabe 2) kann man so lösen, daß man zunächst ein beliebiges Rechteck mit dem gegebenen Schnittwinkel der Diagonalen zeichnet, dieses durch die eine Mittellinie halbiert und die eine Diagonale der Rechteckshälfte zeichnet. Die Neigung dieser Diagonale ist bei dem gegebenen Halbkreise zu benutzen. Ähnlich ist bei der geänderten dritten und vierten Aufgabe zu verfahren. Bei der geänderten fünften kann das in Nr. 220) unter 9) besprochene Dreieck benutzt werden.

11) bis 15). Die Aufgaben 1) bis 5) für den Fall zu lösen, daß das Rechteck in entsprechender Weise einem gegebenen Kreissegmente einbeschrieben werden soll.

16) bis 20) Die Aufgaben 1) bis 5) für den Fall zu lösen, daß das Rechteck einem Viertelskreise so einbeschrieben werden soll, daß



die Rechtecke Teile der beiden Grenzradien zur Seite haben und die freie Ecke in die Kreislinie fällt.

21) Man versuche einige dieser Aufgaben für den Fall zu lösen, daß das Rechteck einem gegebenen Kreissektor symmetrisch so einzubeschreiben werden soll, daß das eine Eckenpaar in die Kreislinie, das andere in die Grenzradien fällt.

22) Einem gegebenen Doppelsegmente ein Rechteck nach Art der Aufgaben 1) bis 5) einzubeschreiben.

#### δ) Rhombuskonstruktionen.

##### 222) Aufgaben ohne Kreise.

1) Um ein gegebenes Quadrat einen Rhombus zu zeichnen, von dem ein Winkel gegeben ist.

2) Um ein gegebenes Quadrat einen Rhombus zu zeichnen, von dem eine Diagonale gegeben ist.\*)

3) Um ein gegebenes Quadrat einen Rhombus zu zeichnen, dessen Diagonalenverhältnis gleich  $1:2$  ist. (Man zeichne die Mittellinien des Quadrates und zeichne einen beliebig großen Rhombus vom Diagonalenverhältnis  $1:2$ , für die die Mittellinien die Symmetrieachsen sind. Zu seinen Seiten lege man Parallelen durch die Ecken des Quadrates. Die Konstruktion läßt sich erheblich abkürzen.)

4) Dieselbe Aufgabe für ein beliebiges Diagonalenverhältnis zu lösen.

5) bis 8) Die Aufgaben 1) bis 4) dahin abzuändern, daß der Rhombus einem gegebenen Rechteck umbeschrieben werden soll.

9) In einen gegebenen Rhombus einen anderen einzuzeichnen, von dem die Länge einer Diagonale gegeben ist.

10) In einen gegebenen Rhombus einen anderen einzuzeichnen, von dem die Richtung einer Diagonale gegeben ist.

11) Um ein gegebenes Quadrat einen Rhombus zu legen, bei dem der eine Winkel das Doppelte, oder das Dreifache, oder das Fünffache des anderen ist. (Der gestreckte Winkel ist bezw. in 3, 4, 6 gleiche Teile zu zerlegen.)

12) Dieselbe Aufgabe für den Fall des Rechtecks statt des Quadrates zu lösen.

13) Einen Rhombus zu konstruieren, von dem eine Seite und die Summe der Diagonalen gegeben ist. (Man konstruiere zunächst

\*) Die Aufgabe, um ein Quadrat einen Rhombus zu zeichnen, von dem eine Seite gegeben ist, läßt sich erst auf einem höheren Standpunkte lösen.



ein Hilfsdreieck aus der halben Diagonalensumme  $\frac{s}{2}$ , dem anliegenden Winkel  $45^\circ$  und der diesem gegenüber liegenden Rhombusseite  $a$ . Durch Zeichnung der zu  $\frac{s}{2}$  gehörigen Dreieckshöhe wird der Quadrant des gesuchten Rhombus vollendet.)

14) Durch den Mittelpunkt eines Rhombus sei eine Gerade gelegt. Um den Rhombus einen anderen zu zeichnen, der zwei Gegenseiten auf der Geraden hat. (Man bilde das Spiegelbild einer der Rhombusecken.)

### 223) Aufgaben mit Kreisen.

1) Um einen gegebenen Kreis einen Rhombus zu legen, dessen eine Diagonale nach Länge und Richtung gegeben ist.

2) Um einen gegebenen Kreis einen Rhombus zu legen, von dem ein Winkel gegeben ist, und dessen eine Diagonale eine gegebene Richtung haben soll. (Verschiedene Fälle sind möglich.)

3) Um einen gegebenen Kreis einen Rhombus zu legen, von dem eine Seite  $a$  nach Länge und Richtung gegeben ist. (Man konstruiere zunächst ein rechtwinkliges Dreieck von der Hypotenuse  $a$  und der zugehörigen Höhe  $o$ .)

4) Um einen gegebenen Kreis einen Rhombus von gegebenem Umfang zu legen, dessen eine Diagonale gegebene Richtung haben soll.

5) Um einen gegebenen Kreis einen Rhombus zu legen, für dessen Seiten zwei verschiedene Richtungen vorgeschrieben sind.

6) Um einen gegebenen Kreis einen Rhombus zu legen, von dem zwei Seiten oder ihre Verlängerungen durch zwei gegebene Raumpunkte gehen sollen.

7) Um einen gegebenen Kreis einen Rhombus zu legen, dessen eine Diagonale der Richtung nach gegeben ist, während eine seiner Seiten einen zweiten gegebenen Kreis berühren soll. (An Stelle des zweiten Kreises kann auch ein Punkt treten.)

8) Um einen gegebenen Kreis einen Rhombus zu legen, von dem zwei aneinander stoßende Seiten einen zweiten gegebenen Kreis berühren sollen. (Mehrere Fälle sind möglich.)

9) Um einen gegebenen Kreis einen Rhombus zu legen, dessen Diagonalen das Längenverhältnis  $1:2$  haben. (An des letzteren Stelle kann auch ein beliebiges Längenverhältnis treten.)

10) Um einen gegebenen Kreis einen Rhombus zu legen, dessen Winkel im Verhältnis  $1:2$  stehen, und dessen größere Diagonale eine vorgeschriebene Richtung hat. (An Stelle des Verhältnisses  $1:2$



darf auch irgend ein anderes treten, welches mit den bisher bekannten Fällen der Kreisteilung erledigt werden kann, z. B.  $1:3$ ,  $1:5$ ,  $1:7$ .)

11a) Um einen gegebenen Rhombus einen anderen zu legen, der einen um die Mitte des ersteren gelegten und dessen Seiten schneidenden Kreis berührt.

11b) Gegeben sei ein Rhombus und ein ganz in seinem Innern liegender konzentrischer Kreis. Um diesen Kreis soll ein Rhombus gelegt werden, dessen Seitenverlängerungen durch die Ecken des gegebenen Rhombus gehen.

**Bemerkung.** Nach diesen Aufgaben lassen sich durch die Ecken eines Rhombus die Seiten (bzw. Seitenverlängerungen) anderer Rhomben legen, deren Diagonalenrichtungen und Flächeninhalte ganz beliebige sein können, während die Radien der konzentrischen Berührungskreise zwischen Null und einem gewissen Höchstwerte liegen.

12) Einem gegebenen Doppelsegment einen Rhombus einzubeschreiben.

13) Einem gegebenen Doppelsegment einen Rhombus umzubeschreiben, von dem eine Diagonale (oder ein Winkel, oder eine Seitenrichtung, oder ein Diagonalenverhältnis, oder ein einfaches Winkelverhältnis) gegeben ist.

14) Um ein gegebenes Doppelsegment einen Rhombus zu legen, dessen eine Seite einen gegebenen Kreis berühren soll.

#### e) Parallelogrammkonstruktionen.

##### 224) Einfache Aufgaben.

1) Ein Parallelogramm zu konstruieren aus zwei ungleichen Seiten und dem eingeschlossenen Winkel.

2) Ein P. z. f. aus einer Seite, der zugehörigen Höhe und einem Winkel.

3) Ein P. z. f. aus einer Seite und den beiden Diagonalen.

4) Ein P. z. f. aus zwei ungleichen Seiten und einer der Diagonalen.

5) Ein P. z. f. aus den Diagonalen und dem von diesen eingeschlossenen Winkel.

6) Ein P. z. f. aus den Diagonalen und dem Winkel, den die kleinere Diagonale mit der größeren Seite bildet.

7) Ein P. z. f. aus den Diagonalen und dem Winkel, den die größere Diagonale mit der größeren Seite bildet.

8) Ein P. z. f. aus einer Diagonale, dem dieser gegenüber liegenden Winkel und dem Umfange des Parallelogramms. (Man konstruiere zunächst ein Dreieck aus der Diagonale ( $d$ ), dem halben



Umfange  $\left(\frac{u}{2}\right)$  und der Hälfte des der Diagonale gegenüber liegenden Winkels  $\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ .

9) Ein Parallelogramm zu konstruieren aus zwei ungleichen Seiten und der Vorschrift, daß der eine Winkel das Doppelte (oder das Dreifache, oder das Fünffache, oder das Siebenfache) des anderen sei.

10) Ein Parallelogramm zu konstruieren aus einem Winkel, dem Umfang und der Vorschrift, daß die eine Seite das Doppelte (oder das Dreifache, Vierfache usw.) des anderen sein soll.

### 225) Aufgaben für um- und einzubeschreibende Parallelogramme.

1) Einem gegebenen Viereck (beliebiger Art) ein Parallelogramm einzuschreiben, dessen Ecken drei von den Seiten des Vierecks halbieren. (Es ist zu zeigen, daß auch die vierte Seite halbiert wird und daß die Parallelogrammseiten parallel zu den Diagonalen des Vierecks sind.)

2) Einem gegebenen Viereck ein Parallelogramm einzuzeichnen, dessen Seiten parallel zu den Diagonalen des Vierecks sind, und von den Schenkeln des einen Viereckswinkels den dritten (oder den vierten, oder den fünften) Teil abschneiden. (Die Möglichkeit der Konstruktion ist nachzuweisen.)

3) Einem gegebenen Rhombus ein Parallelogramm einzubeschreiben, dessen Diagonalen gegeben sind. (Die Ecken des Parallelogramms sollen auf den vier Seiten des Rhombus liegen. Sind die Diagonalen des Parallelogramms zu groß, so können die Ecken des Parallelogramms auf die Verlängerungen der Rhombusseiten fallen. Der Rhombus kann auch ein Quadrat sein. An seine Stelle kann auch ein Rechteck oder ein Parallelogramm treten.)

Einem gegebenen Doppelsegment ein Parallelogramm einzubeschreiben, dessen Diagonalen gegeben sind.

5) Einem gegebenen Doppelsegment ein Parallelogramm einzuzeichnen, von dem eine Seite bereits eingezeichnet ist.

6) Um ein gegebenes Doppelsegment ein Parallelogramm von gegebenen Seitenrichtungen zu legen.

### c) Anfangsgründe der Kreislehre.

α) Rückblick auf das schon Bekannte.

226) Bekannt sind bereits folgende Begriffe der Kreislehre: Kreisklinie, Kreisfläche, Kreisumfang (Peripherie, die Zahl  $\pi$ ), Sehne



(Chorde), Sekante, Durchmesser (Diameter), Halbmesser (Radius), Bogen, Zentriwinkel, Kreisabschnitt (Sektor), Kreisabschnitt (Segment), Berührende (Tangente), der umbeschriebene Kreis (Um-Kreis) des Dreiecks, der einbeschriebene Kreis (In-Kreis) des Dreiecks, die äußeren Berührungskreise (An-Kreise) des Dreiecks, die Kreisteilung, das regelmäßige Vieleck mit um- und einbeschriebenem Kreise. Der umbeschriebene Kreis des Rechtecks. Der einbeschriebene Kreis des Rhombus.

227) Bekannt sind bereits folgende Sätze der Kreislehre: Bei jedem Kreise gehören zu gleichen Sehnen gleiche Mittelpunktsabstände, gleiche Bogen, gleiche Segmente, gleiche Sektoren, gleiche Zentriwinkel. Auch sämtliche Umkehrungen dieses Satzes sind bekannt. Der Satz vom rechten Winkel im Halbkreise. Die Sätze über das vom Kreismittelpunkte auf die Sehne gefällte Lot und die entsprechenden Umkehrungen. Die Sätze über die Gleichheit der von einem Punkte aus an den Kreis gelegten Tangenten und die Halbierende ihres Schnittwinkels. Der Satz vom umbeschriebenen Kreise des Dreiecks. (Durch drei Punkte ist im allgemeinen nur ein Kreis möglich.) Durch zwei Punkte sind unendlich viele Kreise möglich, die ihre Mittelpunkte auf dem Mittellote haben. Einfache Sätze über das Kreisbüschel. Der Satz vom einbeschriebenen Kreise des Dreiecks. Der Satz von den anbeschriebenen Kreisen des Dreiecks. (An drei nicht parallele Geraden lassen sich vier Kreise legen.) An zwei Gerade lassen sich unendlich viele Kreise legen, die ihre Mittelpunkte auf den beiden Winkelhalbierenden haben. Jedes regelmäßige Vieleck hat einen um- und einen einbeschriebenen Kreis. Zu jedem Kreise gehört ein ein- und ein umbeschriebenes regelmäßiges Vieleck von gegebener Seitenzahl. Sätze über den Zusammenhang zwischen Winkeln und Bogen, z. B.  $\alpha = \pi \frac{\alpha^0}{180^0}$ ,  $\alpha^0 = \frac{\alpha}{\pi} 180^0$ . Dabei ist  $\pi = 3,14159265 \dots$

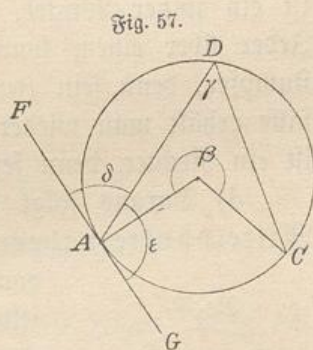
228) Bekannt sind bereits z. B. folgende Konstruktionen der Kreislehre: Vervielfachung des Kreisbogens, seine wiederholte Halbierung. Die Einteilung der Peripherie in 2, 4, 8, 16, 32, ... Teile, in 3, 6, 12, 24, 48, ... Teile. Die Konstruktion der entsprechenden Winkel. Die Konstruktion der entsprechenden regelmäßigen Vielecke, die dem Kreise ein- oder umbeschrieben sind. Die Konstruktion einiger regelmäßiger Vielecke über gegebenen Geraden (von gegebener Seite). Die Konstruktion des umbeschriebenen Kreises und der vier Berührungskreise für das Dreieck. Einige Dreiecks- und Viereckskonstruktionen, die mit der Kreislehre zusammenhängen. Konstruktionen einiger Reihen von Berührungskreisen. Konstruktion der von einem Punkte



aus an einen gegebenen Kreis gehenden Tangente. Konstruktion der äußeren und der inneren gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kreise.

β) Die Peripherie- und Zentriwinkel, der Tangenten-Sehnenwinkel.

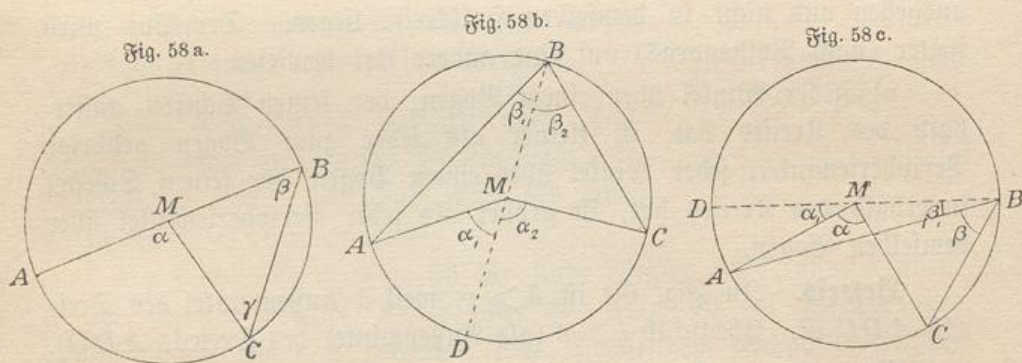
229) Liegt der Scheitel eines Winkels auf der Kreislinie, und sind seine Schenkel Sehnen, so heißt der Winkel ein Peripheriewinkel. (Ein solcher ist z. B.  $\angle \gamma$  oder  $\angle ADC$  in Fig. 57.) Von diesem Winkel sagt man, daß er auf dem konkaven Bogen  $AC$  steht. Verbindet man einen Punkt  $E$  dieses Bogens mit  $A$  und  $C$ , so erhält man einen Peripheriewinkel, der auf dem konvexen Bogen  $AC$  steht. [So steht auch der konkave Zentriwinkel  $AMC$  auf dem konkaven Bogen  $AC$ , der konvexe Zentriwinkel  $AMC$  oder  $\beta$  auf dem konvexen Bogen  $AC$ . Über einer Sehne  $AC$  kann sowohl ein konkaver, als auch ein konvexer Zentriwinkel stehen.]



230) Jeder Peripheriewinkel ist die Hälfte des auf demselben Bogen stehenden Zentriwinkels.

**Beweis.** Erster Fall. Schenkel  $AM$  (Fig. 58a) liegt auf  $AB$ . Dann ist  $\alpha = \beta + \gamma$  (Außenwinkel), da aber  $\beta = \gamma$  ist, so folgt  $\alpha = 2\beta$  und  $\beta = \frac{\alpha}{2}$ .

Zweiter Fall.  $M$  liegt zwischen  $AB$  und  $BC$ . (Fig. 58b.) Man ziehe den Durchmesser  $BD$ . Dann ist  $\alpha_1 = 2\beta_1$  (soeben be-



wiesen) und  $\alpha_2 = 2\beta_2$ , folglich  $\alpha_1 + \alpha_2 = 2(\beta_1 + \beta_2)$ , d. h.  $\angle AMC = 2 \cdot (\angle ABC)$ , also  $\angle ABC = \frac{1}{2}(\angle AMC)$ .

Dritter Fall.  $M$  liegt außerhalb  $ABC$ . (Fig. 58c.) Man



ziehe den Durchmesser  $BD$ . Dann ist  $\alpha + \alpha_1 = 2(\beta + \beta_1)$ , aber  $\alpha_1 = 2\beta_1$ , folglich durch Subtraktion  $\alpha = 2\beta$ .

231) **Folgerungen.** a) Alle Peripheriewinkel, die auf demselben Bogen eines Kreises stehen, sind einander gleich. Denn sie sind Hälften desselben Zentriwinkels.

b) Peripheriewinkel auf gleichen Bogen gleicher Kreise sind einander gleich.

c) Jeder über einem konvexen Bogen stehende Peripheriewinkel ist ein spitzer Winkel, denn sein Zentriwinkel ist kleiner als  $180^\circ$ . Jeder über einem konkaven Bogen stehende Peripheriewinkel ist ein stumpfer, denn sein Zentriwinkel ist größer als  $180^\circ$ . Im Zwischenfalle erhält man wieder den Satz: der Peripheriewinkel im Halbkreise ist ein Rechter, denn sein Zentriwinkel ist gleich  $180^\circ$ .

d) Daraus folgt der Satz: Von zwei Sehnen ist die dem Mittelpunkte nähere die größere. Man denke sich beide Sehnen von einem Punkte  $A$  ausgehend und in demselben Halbkreise liegend (Fig. 59). Dann ist  $\angle ACB$  ein stumpfer. Folglich ist  $AB$  größer als  $AC$ , denn dem größten Dreieckswinkel liegt die größte Seite gegenüber. Nun ist aber  $ME > MD$ , denn der mit Radius  $MD$  um  $M$  gelegte Kreis schließt die ganze Linie  $AB$  (mit Ausnahme des Punktes  $D$ ) aus, also auch alle Punkte des durch  $AB$  begrenzten Segmentes  $ACB$ . (Vgl. Nr. 75.) Also ist die dem Mittelpunkte nähere Sehne die größere.

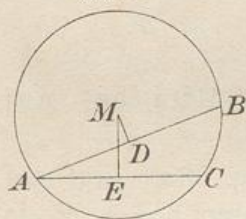
Nun gehören aber zu gleichen Sehnen gleiche Abstände, also gilt der Satz auch dann, wenn die Sehnen nicht von demselben Punkte ausgehen und nicht in demselben Halbkreise liegen. Der Satz wird später (nach Pythagoras) auf eine andere Art bewiesen.

e) Jeder Winkel über einem Bogen, der seinen Scheitel außerhalb des Kreises hat, ist kleiner als jeder zum Bogen gehörige Peripheriewinkel; jeder Winkel über einem Bogen, der seinen Scheitel innerhalb des Kreises hat, ist größer als jeder Peripheriewinkel über demselben Bogen.

**Beweis.** In Fig. 60 ist  $\delta > \gamma$ , weil  $\delta$  Außenwinkel des Dreiecks  $ADC$  ist. Ebenso ist  $\varepsilon > \delta$  (als Außenwinkel des Dreiecks  $AED$ ).

**Bemerkung.** Sämtliche gleichen Winkel über einer Geraden  $AB$  haben ihre Scheitel auf einem durch  $A$  und  $B$  gehenden Kreisbogen; kleinere Winkel über  $AB$  haben den Scheitel außerhalb dieses Bogens, größere dagegen innerhalb.

Fig. 59.





232) Zu jeder Sehne  $AB$  gehören zwei Bogen, folglich auch zwei Arten von Peripheriewinkeln, spitze und stumpfe. Die entsprechenden Winkel sind Supplementwinkel. In Fig. 61 z. B. ist die

Fig. 60.

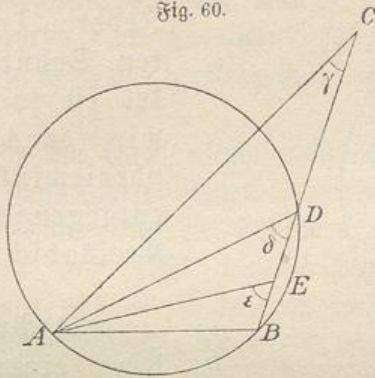
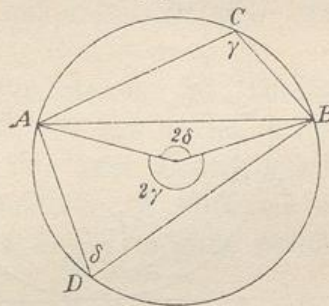


Fig. 61.



Summe des konkaven und des konvexen Zentrivinkels gleich 4 Rechten, folglich ist  $\gamma + \delta = 2R$ .

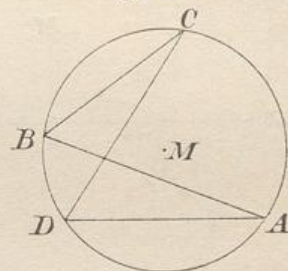
Jedes Viereck, dessen Ecken auf einem Kreise liegen, heißt ein Sehnenviereck. Demnach gilt für konvexe Sehnenvierecke der Satz:

Im Sehnenviereck ist die Summe gegenüberliegender Winkel gleich zwei Rechten.

Umkehrung: Ist in einem Viereck die Summe zweier gegenüberliegender Winkel gleich zwei Rechten, so ist das Viereck ein Sehnenviereck; d. h. der durch drei seiner Eckpunkte gelegte Kreis geht auch durch den vierten. Warum? (Vgl. Nr. 231 e.)

**Bemerkung.** Ist das Sehnenviereck ein sog. überschlagenes, wie es durch Fig. 62 dargestellt ist, so sind die Gegenwinkel  $A$  und  $C$  gleich, ebenso  $B$  und  $D$ , an Stelle der Supplementwinkel treten also gleiche Winkel.

Fig. 62.



233) Den Winkel zwischen einer Tangente und einer von ihrem Berührungspunkte ausgehenden Sehne bezeichnet man als einen Tangenten-Sehnenwinkel.

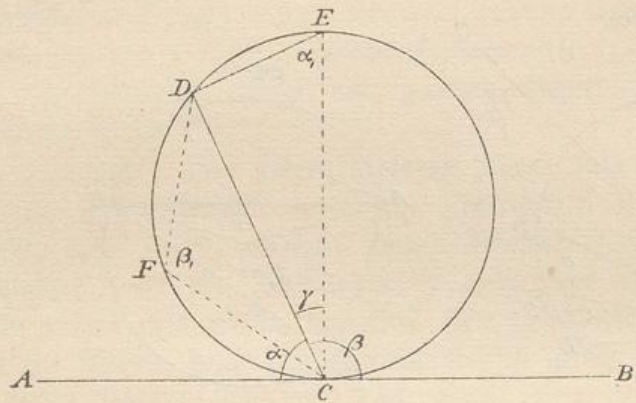
Ein solcher ist in Fig. 63 der spitze Winkel  $ACD$  oder  $\alpha$ , ebenso der stumpfe Winkel  $BCD$  oder  $\beta$ . Dort ist im Berührungspunkte  $C$  ein Lot  $CE$  errichtet, und  $E$  mit dem Endpunkte  $D$  der Sehne verbunden worden. Dadurch ist ein Peripheriewinkel  $\alpha_1$  entstanden, der als Komplementwinkel von  $\gamma$  ebenso groß sein muß, wie  $\alpha$ , denn  $\angle CDE = 90^\circ$ , also  $\alpha_1 = 90^\circ - \gamma$ . Demnach ist jeder Peripheriewinkel über  $CD$ , der auf derselben Seite von  $CD$  liegt,



so groß wie  $\alpha$ . Jeder auf der anderen Seite von  $CD$  liegende Peripheriewinkel über dieser Sehne ist aber gleich  $180^\circ - \alpha$ , d. h. ebenso

groß, wie  $\beta$ . Folglich gilt der Satz: Jeder Tangenten-Sehnenwinkel ist so groß, wie der Peripheriewinkel im entgegengesetzten Kreisabschnitte.

Fig. 63.

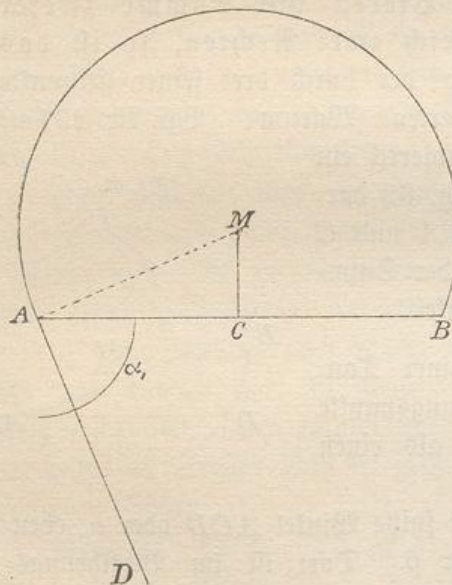


## 234) Aufgabe.

Über einer Geraden  $AB$  einen Kreisbogen zu zeichnen, der einen gegebenen Winkel  $\alpha$  als Peripheriewinkel über  $AB$  in sich faßt.

**Auflösung.** Ist  $AB$  die gegebene Gerade (Fig. 64) und  $\alpha$  der gegebene Winkel, so trage man  $\alpha$  als  $\angle BAD$  an die Gerade  $AB$  an. In  $A$  errichte man ein Lot auf  $AD$ , ebenso auf  $AB$  im Halbierungspunkte  $C$ . Die Lote schneiden sich im Mittelpunkt des gesuchten Kreisbogens. (Warum?)

Fig. 64.



**Bemerkungen.** Ist  $\alpha$  ein rechter Winkel, so hat man über  $AB$  als Durchmesser einen Halbkreis zu schlagen. — Der geometrische Ort für die Scheitel aller gleichen Winkel, die sich über einer Geraden  $AB$  nach derselben zeichnen lassen, ist ein bestimmter Kreisbogen. Ein ebensolcher ist der Ort für die Scheitel aller gleichen Winkel, die sich unterhalb der Geraden zeichnen lassen.

235) Aufgabe. Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite, dem ihr gegenüberliegenden Winkel und der zu ihr gehörigen Höhe.



**Auflösung.** Ist  $AB$  die gegebene Seite und  $\alpha$  der gegebene ihr gegenüberliegende Winkel, so konstruiere man den über  $AB$  stehenden Kreisbogen, der  $\alpha$  als Peripheriewinkel faßt. Ist  $h$  die gegebene Höhe, so ziehe man zu  $AB$  im Abstände  $h$  auf der Seite des Bogens eine Parallele. Ist  $C$  ein Schnittpunkt der Parallelen und des Bogens, so ziehe man  $CA$  und  $CB$ . Dann ist  $ABC$  das gesuchte Dreieck.

Ist die Höhe  $h$  zu groß (größer als die sog. Pfeilhöhe des Bogens), so gibt es keinen Schnittpunkt, und das Dreieck ist unmöglich. Ist  $h$  kleiner, als die Pfeilhöhe, so sind zwei Dreiecke möglich, die kongruent sind. Ist  $h$  gleich der Pfeilhöhe, so wird die Parallele Tangente, und es ist nur ein einziges Dreieck möglich, welches rechtwinklig-gleichschenkelig ist.

**Bemerkung.** Der Kreisbogen ist zugleich der dem Dreiecke umbeschriebene Kreis. Sind also  $a$  und  $\alpha$  gegeben, so ist der Radius des umbeschriebenen Kreises schon bestimmt. Man kann also nicht zugleich  $a$ ,  $\alpha$  und  $r$  geben, denn  $r$  ist nicht mehr unabhängig, sobald  $a$  und  $\alpha$  gegeben sind. Es ist gleichgültig, ob ein Dreieck aus  $a$ ,  $\alpha$  und einem dritten Stück konstruiert werden soll, oder aus  $a$ ,  $r$  und dem betreffenden Stück, oder aus  $\alpha$  und  $r$  und dem betreffenden Stück. Nur können bei  $a$  und  $r$  zwei Lösungen eintreten.

*γ) Tangentendreiecke und Tangentenvierecke.*

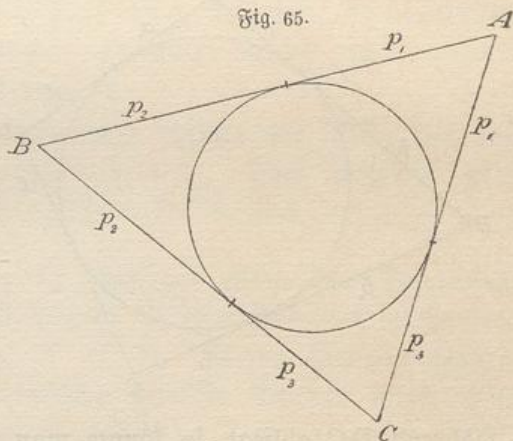
236) **Aufgabe.** Ein Dreieck habe die Seiten  $a$ ,  $b$  und  $c$ . Wie groß sind die Abschnitte  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$ , die durch die Berührungspunkte des Inkreises entstehen?

**Auflösung.** In Fig. 65 ist  $2p_1 + 2p_2 + 2p_3 = a + b + c$ , zugleich ist  $2p_2 + 2p_3 = 2a$ , folglich durch Subtraktion:  $2p_1 = a + b + c - 2a = b + c - a$ , folglich  $p_1 = \frac{b + c - a}{2}$ , ebenso  $p_2 = \frac{a + c - b}{2}$  und  $p_3 = \frac{a + b - c}{2}$ .

Setzt man noch  $\frac{a + b + c}{2} = p$ , so ist  $p_1 = p - a$ ,  $p_2 = p - b$ ,  $p_3 = p - c$ .

Holz Müller, Elementarmathematik. I. 4. Aufl.

Fig. 65.





237) Dieselbe Aufgabe für den An-Kreis mit Radius  $\rho_1$  zu lösen.

**Auflösung.** In Fig. 66 ist  $AF = AB + BF = AB + BD$  und  $AE = AC + CD$ , folglich  $AF + AE = AB + AC + BC = a + b + c$ , also  $AF = AE = \frac{a + b + c}{2} = p$ . Setzt ist  $CE = AE - AC = p - b = p_2$  und ebenso  $BF = AF - AB = p - c = p_3$ .

Folglich: Der An-Kreis teilt die unmittelbar berührte Dreiecksseite in dieselben Stücke, wie der In-Kreis, nur sind beide Stücke in der Lage vertauscht. Diese Beziehungen sind eine Quelle wichtiger Sätze.

238) **Satz.** Die Summe zweier Gegenseiten eines (gewöhnlichen) Tangentenvierecks ist gleich der Summe der beiden anderen Gegenseiten.

In Fig. 67 sind folgende Tangenten gleich:  $a = a_1$ ,  $b = b_1$ ,  $c = c_1$ ,  $d = d_1$ , folglich ist  $a + b + c + d = a_1 + b_1 + c_1 + d_1$ , d. h.  $AB + CD = BC + DA$ .

**Umkehrung.** Ist bei einem Viereck die Summe des einen Gegenseitenpaares gleich der des andern, so ist es ein Tangentenviereck.

**Beweis.** Angenommen,  $ABCD$  in Fig. 68 hätte in dem angegebenen Sinne gleiche Seitensummen und würde von dem gezeichneten Kreise nur an drei Seiten berührt,

während  $DC$  abliegt, so könnte man die vierte Tangente  $CD_1$  ziehen. Dann würde sein  $AB + CD_1 = AD_1 + BC$ , und nach der Voraussetzung  $AB + CD = (AD_1 + D_1D) + BC$ , folglich durch Subtraktion  $CD - CD_1 = D_1D$  oder  $CD = CD_1 + D_1D$ , d. h. die Summe zweier

Fig. 66.

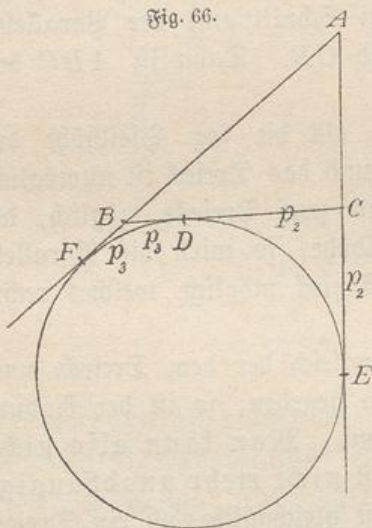
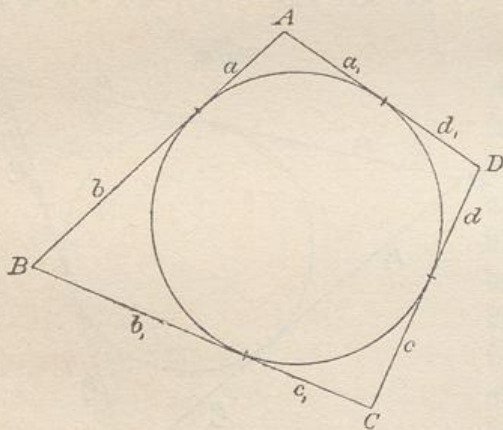


Fig. 67.



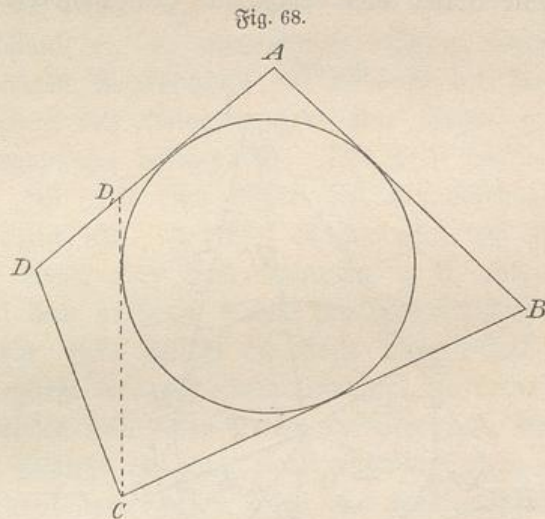


Dreiecksseiten würde gleich der dritten sein. Dieser Widerspruch kann nur dadurch aufgehoben werden, daß  $D$  auf  $D_1$  fällt. — Entsprechend wird der Beweis geführt, wenn man annimmt,  $CD$  schneide den Kreis.

**Bemerkungen.** Man

denke sich ein Tangentenviereck als Gelenkviereck, dann kann es beliebig viele verschiedene Gestalten annehmen. Solange es konvex bleibt, läßt sich ihm stets ein Kreis einbeschreiben. In zwei Sonderfällen geht es in ein Dreieck über. Dies geschieht, wenn zwei aneinanderstoßende Seiten einen Winkel von  $180^\circ$  bilden. — Jedes recht-

winklige Dreieck ist die Hälfte eines Tangenten-Sehnenvierecks. (Unter Tangenten-Sehnenviereck versteht man ein Viereck, welches sowohl einen umschriebenen, als auch einen eingeschriebenen Kreis hat. Man nennt solche Vierecke auch bizentrische Vierecke, womit auf die beiden Kreiszentra hingedeutet werden soll.)



239) **Aufgabe.** Folgender Satz soll bewiesen werden:

Verbindet man die Ecken eines Tangentenvierecks mit dem Mittelpunkte des eingeschriebenen Kreises, so entstehen vier Zentriwinkel, von denen je zwei nicht aneinanderliegende zusammen  $180^\circ$  betragen.

**Bemerkung.** Bezeichnet man diese Winkel der Reihe nach mit  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  und  $\xi_4$ , so ist  $\xi_1 + \xi_3 = \xi_2 + \xi_4$ . Dies entspricht ganz dem Satze für die Seiten  $AB + CD = BC + DA$ .

240) **Aufgabe.** In Fig. 69 sind die Ecken des Tangentenvierecks  $ABCD$  mit dem Mittelpunkte  $M$  des Inkreises verbunden, ebenso die Berührungspunkte  $E, F, G, H$ . Es soll bewiesen werden, daß die folgenden Inhaltsunterschiede gewisser Dreiecke gleich groß sind:  $\triangle AME - \triangle CMF = \triangle AMH - \triangle CMG = \triangle AMB - \triangle CMB$ ; ferner  $\triangle BMF - \triangle DMG = \triangle BME - \triangle DMH = \triangle BMC - \triangle DMC$ . Ferner sind folgende Inhaltssummen gleich:  $\triangle AMB + \triangle CMD = \triangle BMC + \triangle DMA = \frac{1}{2} ABCD$ .



**Bemerkung.** Nur Dreieckskongruenzen sollen zum Beweise benutzt werden. Die Sätze können später mit Hilfe der Inhaltssätze andere Beweise erhalten. (Sie werden später Anwendung finden.) Wie lauten diese Sätze für den Sonderfall des Tangentendreiecks?

Fig. 69.

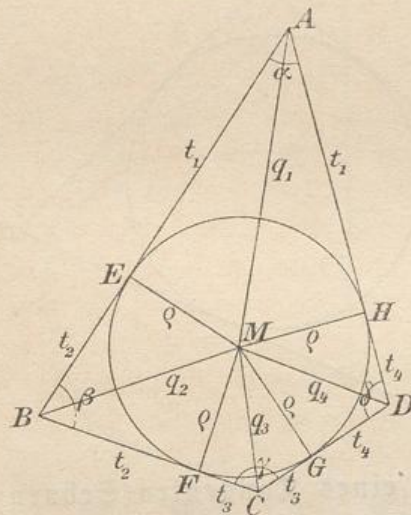
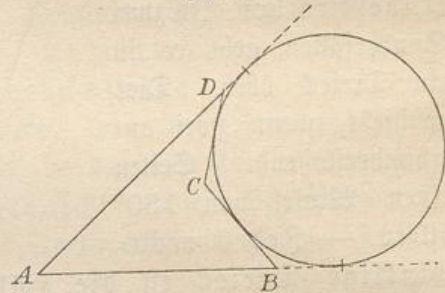


Fig. 70.



241) **Aufgabe.** Es soll versucht werden, die für das einem Kreise umschriebene Tangentenviereck geltenden Sätze auch für das einem Kreise anbeschriebene Tangentenviereck auszusprechen.

**Bemerkung.** Es gibt drei Arten anbeschriebener Tangentenvierecke, solche sind durch die Fig. 70, 71 und 72 dargestellt, das

Fig. 71.

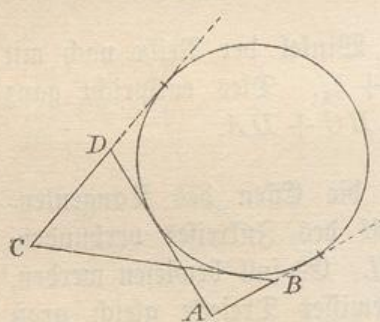
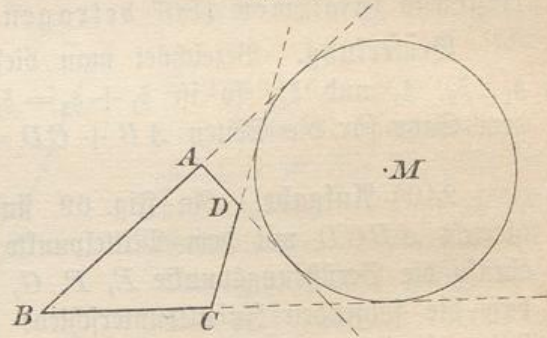


Fig. 72.



„Tangentenviereck mit einspringendem Winkel“, das „überschlagene Tangentenviereck“ und das nirgends unmittelbar berührende. Aufeinanderfolgende Seiten treten an die Stelle von gegenüberliegenden.



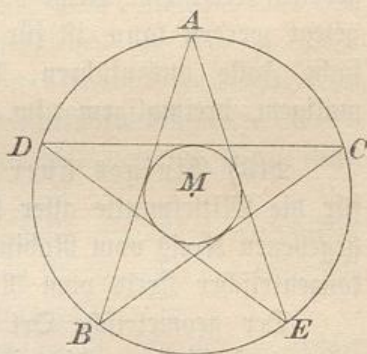
## d) Einfache Betrachtungen über mehrere Kreise.

242) Eigenschaften konzentrischer Kreise. Zwei konzentrische Kreise mit den Radien  $r$  und  $r_1$ , wobei  $r > r_1$  sein möge, haben überall denselben Abstand  $r - r_1$  voneinander. Jeder Punkt des einen hat vom zugehörigen Gegenpunkte des anderen den Abstand  $r + r_1$ . Jede Tangente des kleineren gibt eine Sehne des größeren, die im Berührungspunkte halbiert ist. Alle diese Sehnen sind von derselben Länge. Ist  $AB$  eine dieser Berührungssehnen,  $BC$  eine zweite,  $CD$  eine dritte usw., so kann es kommen, daß die Reihe dieser Geraden nach einem oder nach mehreren, z. B. nach  $n$  Umgängen schließt. Wo auf dem größeren Kreise der Ausgangspunkt der Reihe auch gewählt werde, stets schließt die Reihe nach derselben Anzahl von Umgängen. Schließt sie nach einem Umgange, so entsteht ein regelmäßiges Vieleck, welches dem einen Kreise umbeschrieben, dem anderen einbeschrieben ist. Schließt sie nach mehreren Umgängen, so entsteht ein regelmäßiger Vieleckstern, dessen Ecken auf dem größeren Kreise liegen und den Ecken eines regelmäßigen Vielecks entsprechen, während die Seiten den kleineren Kreis berühren und ein diesem umbeschriebenes Vieleck bilden.

Fig. 73 stellt den regelmäßigen Fünfeckstern dar, der nach zwei Umgängen schließt. Man hat, wenn die Ecken  $A, D, B, E, C$  des regelmäßigen Fünfecks vorliegen, nur jedesmal eine Ecke zu überschlagen, um den Stern zu zeichnen und den zugehörigen konzentrischen Kreis zu erhalten. Man berechne die Winkel dieses Gebildes in Graden. Macht man dasselbe bei einem  $n$ -Eck von gerader Seitenzahl, so erhält man keinen eigentlichen Stern, sondern zwei übereinandergelegte regelmäßige Vielecke von halber Seitenzahl. Macht man dasselbe bei einem  $n$ -Eck von ungerader Seitenzahl, so entsteht ein Stern, der nach zwei Umgängen schließt.

Man führe dies aus für den Fall  $n = 7$ , wobei das Siebeneck nur versuchsweise zu zeichnen ist. Überschlägt man in diesem Falle jedesmal zwei Punkte, so entsteht der Stern des regelmäßigen Siebenecks, der erst nach drei Umgängen schließt. Man versuche dasselbe für  $n = 8$  usw.

Fig. 73.





(Schließt bei zwei gegebenen konzentrischen Kreisen die Reihe der Berührungskreise nie, so erhält der Stern unendlich viele Ecken.)

Für jeden regelmäßigen Stern solcher Art lassen sich die Winkel leicht berechnen.

In die Ringfläche zwischen zwei konzentrischen Kreisen läßt sich zunächst ein beide berührender Kreis einlegen, dessen Radius gleich  $\frac{r - r_1}{2}$  ist. Es läßt sich eine ganze Reihe solcher aufeinander folgender Berührungskreise einzeichnen, von denen jeder auch seine beiden Nachbarn berührt. Diese Reihe von Berührungskreisen kann nach einem Umgange schließen. Dann bilden die auf dem größeren Kreise liegenden Berührungspunkte ein regelmäßiges  $n$ -Eck, ebenso die auf dem kleineren Kreise liegenden. Die Mittelpunkte der Kreisreihe bilden ein regelmäßiges  $n$ -Eck auf dem Kreise mit dem Radius  $\frac{r + r_1}{2}$ . Die Berührungspunkte je zweier der Reihen Kreise bilden ein regelmäßiges  $n$ -Eck auf dem Kreise, dessen Radius gleich der Tangente ist, die vom Centrum der konzentrischen Kreise aus an einen der Reihenkreise gelegt ist. Wie um einen gegebenen Kreis eine Reihe von Berührungskreisen für einfaches Schließen gelegt werden kann, ist für gewisse Fälle in § 186 gezeigt. Man versuche Fälle auszuführen, bei denen die Kreisreihe erst nach zweimaligem, dreimaligem usw. Umgange schließt.

243) Einiges über Kreisberührung. Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise von gegebenem Radius  $q$ , die einen gegebenen Kreis vom Radius  $r$  äußerlich berühren, ist ein zum letzteren konzentrischer Kreis vom Radius  $r + q$ .

Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise von gegebenem Radius  $q$ , die einen gegebenen Kreis vom Radius  $r$  innerlich berühren, ist ein zum letzteren konzentrischer Kreis vom Radius  $(r - q)$  bzw.  $(q - r)$ , je nachdem  $r$  oder  $q$  der größere Radius ist.

An Stelle des gegebenen Kreises kann eine gerade Linie treten.

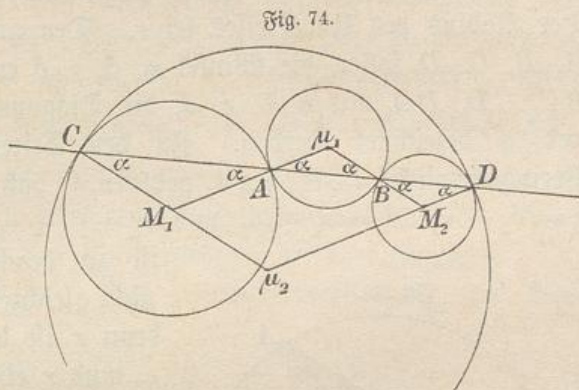
Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, die einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte innerlich oder äußerlich berühren, ist der zu dem Punkte gehörige Durchmesser bzw. seine Verlängerung.

Auch hier kann an Stelle des gegebenen Kreises eine gerade Linie treten.

Werden zwei Kreise von einem dritten berührt, so können die Berührungen gleichartige sein, d. h. beide äußerliche oder beide innerliche; sie können aber auch ungleichartige sein, d. h. die eine eine



äußerliche, die andere eine innerliche. Die Berührungsefante gibt dabei zu paarweise parallelen Radien Anlaß. Für den Fall zweier gleichartiger Berührungen der Kreise  $M_1$  und  $M_2$  durch Kreise  $\mu_1$  und  $\mu_2$  ist dies in Fig. 74 dargestellt. Dabei zeigt sich, daß die Berührungsefante für die äußerlichen Berührungen in  $A$  und  $B$  zugleich Berührungsefante für die innerlichen Berührungen in  $C$  und  $D$  ist. Die Ausführung der entsprechenden Figur für ungleichartige Berührungen sei dem Schüler überlassen. (Über diesen Gegenstand ist später ausführlicher zu sprechen.)



244) Gegenseitiges Schneiden zweier Kreise. Schneiden einander zwei Kreise, so versteht man unter dem Schnittwinkel den Winkel, unter dem sich die in den Schnittpunkten an beide gelegten Tangenten schneiden. Man braucht nur von einem Schnittwinkel zu reden, da die beiden Schnitte aus Symmetriegründen denselben Winkel geben. Gewöhnlich soll der spitze Schnittwinkel gemeint sein, nicht sein Nebenwinkel.

Wichtig ist der Sonderfall, daß die Kreise einander rechtwinklig schneiden. Dann ist die Tangente des einen ein Durchmesser des anderen. Man nennt dann die beiden Kreise Orthogonalkreise.

Zieht man in Fig. 74 die Tangenten in  $A$  und  $B$ , so erhält man den Mittelpunkt eines Kreises, der die Kreise  $M_1$  und  $M_2$  in  $A$  und  $B$  (und außerdem in zwei anderen Punkten) rechtwinklig schneidet. Ebenso wird der Kreis  $\mu_1$  rechtwinklig geschnitten.

Zieht man die Tangenten in  $C$  und  $D$ , so erhält man den Mittelpunkt eines Kreises, der die Kreise  $M_1$  und  $M_2$  in  $C$  und  $D$  (und außerdem in zwei anderen Punkten) rechtwinklig schneidet. Auch Kreis  $\mu_2$  wird rechtwinklig geschnitten. —

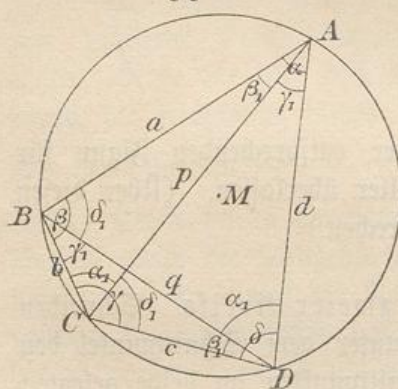
Die Aufgaben über Kreisberührungen und orthogonales Schneiden hängen also eng miteinander zusammen. (Später wird alles unter einem gemeinsamen Gesichtspunkte behandelt.)



## e) Konstruktionsübungen zur Kreislehre.

245) **Konstruktion von Sehnenvierecken.** Bezeichnungen: Der Radius des Um-Kreises sei  $r$ . Den aufeinander folgenden Ecken  $A, B, C, D$  sollen die Winkel  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  entsprechen, die Seiten  $AB, BC, CD, DA$  mit  $a, b, c, d$ , die Diagonalen  $AC$  und  $BD$  mit  $p$  und  $q$  bezeichnet werden. Zu den Seiten  $a, b, c, d$  sollen die Peripheriewinkel  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$  gehören, so daß  $\alpha = \beta_1 + \gamma_1, \beta = \gamma_1 + \delta_1, \gamma = \delta_1 + \alpha_1, \delta = \alpha_1 + \beta_1$  und  $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 = 180^\circ$  ist. Dabei

Fig. 75.



ist zu beachten, daß  $r, a$  und  $\alpha_1$  nicht gleichzeitig gegeben werden dürfen, denn  $r$  ist durch  $a$  und  $\alpha_1, a$  durch  $\alpha_1$  und  $r$  eindeutig bestimmt,  $\alpha_1$  durch  $r$  und  $a$  zweideutig, da es sowohl spitz, als auch stumpf (nämlich der Supplementwinkel) sein darf. Im übrigen ist es gleichgültig, ob  $r$  und  $a, a$  und  $\alpha_1, \alpha_1$  und  $r$  gegeben ist. Ebenso dürfen  $r, p$  und  $\beta, r, q$  und  $\alpha$  nicht gleichzeitig gegeben sein. Aus  $a, b, p$  und  $a, b, \beta$  ist  $r$  bereits bestimmt, aus  $b, c, q$  und  $b, c, \gamma$

ebenfalls usw. Die verschiedenen Aufgabengruppen lassen also gewisse Vertauschungen gegebener Stücke zu, ohne daß neues entsteht. Man achte auf solche Wiederholungen in der folgenden Zusammenstellung von Aufgaben.

Man versuche, die angegebene Bezeichnungsart auch für überschlagene Sehnenvierecke durchzuführen und bei den Konstruktionen dieser zu berücksichtigen. —

245a) **Aufgaben.** Ein Sehnenviereck zu konstruieren aus

- |                                  |                          |                                 |
|----------------------------------|--------------------------|---------------------------------|
| 1) $r, a, b, c$                  | 2) $r, a, \alpha, \beta$ | 3) $r, a, p, q$                 |
| 4) $r, a, b, q$                  | 5) $r, \alpha_1, b, c$   | 6) $r, \alpha_1, \alpha, \beta$ |
| 7) $r, \alpha_1, p, q$           | 8) $r, \alpha_1, b, q$   | 9) $a, \alpha_1, b, c$          |
| 10) $a, \alpha_1, \alpha, \beta$ | 11) $a, \alpha_1, p, q$  | 12) $a, \alpha_1, b, q$         |
| 13) $p, a, b, c$                 | 14) $\beta, a, b, c$     |                                 |

Der Schüler versuche noch andere Aufgaben aufzustellen. So können z. B. die Entfernungen  $e_1, e_2, e_3, e_4$  der Seiten  $a, b, c, d$  vom Kreiszentrum herangezogen werden. Schwierigere Aufgaben werden später folgen.

246) **Konstruktion von Tangentenvierecken.** Bezeichnungen: Der Radius des In-Kreises sei  $\rho$ . Den aufeinander folgenden



Ecken  $A, B, C, D$  entsprechen die Winkel  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ . Die Seiten  $AB, BC, CD, DA$  sollen  $a, b, c, d$  heißen. Die Entfernungen der Ecken vom Kreiszentrum  $\mu$  seien  $q_1, q_2, q_3, q_4$ , die Diagonalen  $AC$  und  $BD$  seien  $p_1$  und  $p_2$ . Die von  $A, B, C, D$  ausgehenden Tangententeile mögen mit  $t_1, t_2, t_3, t_4$  bezeichnet werden, sodaß  $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = a + c = b + d = \frac{u}{2}$  ist, wenn  $u$  den Umfang bedeutet.  $E, F, G, H$  seien die Berührungspunkte. Man stelle die Bezeichnungen auch für anbeschriebene Tangentenvierecke der drei Arten fest und versuche diese bei den Konstruktionen zu berücksichtigen.

246 a) **Konstruktionen.** Ein Tangentenviereck zu konstruieren aus

- 1)  $q, \alpha, \beta, b.$     2)  $q, \alpha, \beta, \gamma.$     3)  $q, a, b, \beta.$   
 4)  $q, q_1, q_2, b.$     5)  $q, q_1, q_2, q_3.$     6)  $a, \alpha, \beta, b.$   
 7)  $a, \alpha, \beta, q_3.$     8)  $a, \alpha, \beta, \gamma.$     9)  $a, b, c, \alpha.$   
 10) Ein Trapez zu konstruieren, welches einem Kreise mit Radius  $q$  umbeschrieben ist und von dem die eine Grundlinie  $a$  gegeben ist. Seine Eigenschaften sollen untersucht werden.

Der Schüler versuche noch andere Aufgaben aufzustellen. Schwierigere kommen später zur Sprache.

247) **Einige Berührungsaufgaben.** 1) Gegeben seien zwei Kreise. Ein dritter Kreis von gegebenem Radius soll so gelegt werden, daß er beide äußerlich berührt.

2) Dieselbe Aufgabe, jedoch sollen beide Kreise innerlich berührt werden.

3) Dieselbe Aufgabe, jedoch soll der erste Kreis äußerlich, der zweite innerlich berührt werden. (Oder der erste innerlich, der zweite äußerlich.)

**Bemerkung.** In den drei Aufgaben kann der eine Kreis auch eine Gerade oder ein Punkt sein.

4) Einen Kreis zu konstruieren, der einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte und außerdem eine gegebene Gerade berührt. (Zwei Fälle zu beachten, innerliche und äußerliche Berührung. Die Tangenten und die Gerade sollen berührt werden.)

5) Einen Kreis zu konstruieren, der zwei gegebene Kreise gleichzeitig berührt, und zwar den einen in einem gegebenen Punkte. (Sind in Fig. 74  $M_1$  und  $M_2$  die gegebenen Kreise und ist  $A$  der gegebene Berührungspunkt, so ziehe man  $M_1A$  und parallel gleichgerichtet dazu  $M_2D$ . Die Gerade  $AD$  schneidet dann den Kreis  $M_2$  im gesuchten Berührungspunkte  $B$ .  $M_1A$  und  $M_1B$  geben verlängert den Schnittpunkt  $\mu_1$  als Mittelpunkt des gesuchten Kreises. — Ist  $C$  der gegebene Berührungspunkt, so konstruiere man entsprechend  $B$ , worauf  $CB$  den



zweiten Berührungspunkt  $D$  gibt,  $M_1C$  und  $M_2D$  aber verlängert  $\mu_2$  geben.

6) Einen Kreis zu konstruieren, der zwei gegebene Kreise ungleichartig berührt, und zwar den einen in einem gegebenen Punkte  $A$ . (Man ziehe  $M_2D$  parallel und entgegengesetzt zu  $M_1A$  und ziehe  $AD$ , was den zweiten Berührungspunkt  $B$  gibt.)

247a) Einige Aufgaben über orthogonales Schneiden.

1) Gegeben seien zwei Kreise. Ein dritter Kreis von gegebenem Radius soll so gelegt werden, daß er beide rechtwinklig schneidet. (Der geometrische Ort seines Mittelpunktes ist in bezug auf jeden der gegebenen Kreise ein konzentrischer Kreis, von dem man einen Punkt findet, wenn man vom ersteren eine Tangente ausgehen läßt, die gleich dem gegebenen Radius ist. Wo beide Orte einander schneiden, liegt der Mittelpunkt. Der eine Kreis kann auch Gerade oder Punkt sein.)

2) Gegeben seien zwei Kreise. Ein Orthogonalkreis zu beiden soll konstruiert werden, der den einen in einem gegebenen Punkte schneidet. (Man beachte das über Berührungen Gesagte. Der andere Kreis kann auch Gerade oder Punkt sein.)

3) Man versuche diese Aufgaben für das Schneiden unter  $45^\circ$  oder unter beliebigem Winkel auszudehnen.

#### d) Flächengleichheit geradliniger Gebilde.

248) Kongruente Flächen sind inhaltsgleich. Dies ist darin begründet, daß sie sich zur Deckung bringen lassen.

Durch Zusammensetzen (Aneinanderlegen) von Flächen erhält man eine Fläche, deren Inhalt durch die Summe der Einzelflächen gegeben ist. Die Reihenfolge ist dabei gleichgültig. Das Zusammenlegen kann aber in verschiedener Weise erfolgen, sodaß die Schlußgebilde ein ganz verschiedenes Aussehen haben, also nicht kongruent sind. Trotzdem ist der Gesamtinhalt in allen Fällen derselbe. [ $F = F_1 + F_2 + F_3 = F_1 + F_3 + F_2 = \dots$ ] Die Flächengleichheit soll zum Unterschiede von der Kongruenz durch ein einfaches Gleichheitszeichen ausgedrückt werden.

Von einer Fläche kann eine andere abgezogen werden. Der Rest wird dann als der Unterschied (die Differenz) der Flächen bezeichnet. Man kann die zweite Fläche auf verschiedene Weise von der ersten abziehen (z. B. von ihr abschneiden), sodaß die Schlußgebilde ein ganz verschiedenes Aussehen haben können. Trotzdem hat der übrigbleibende Flächenteil stets denselben Inhalt. [ $F = F_1 - F_2$ , wobei  $F_1 > F_2$  vorausgesetzt werde.] Von einer

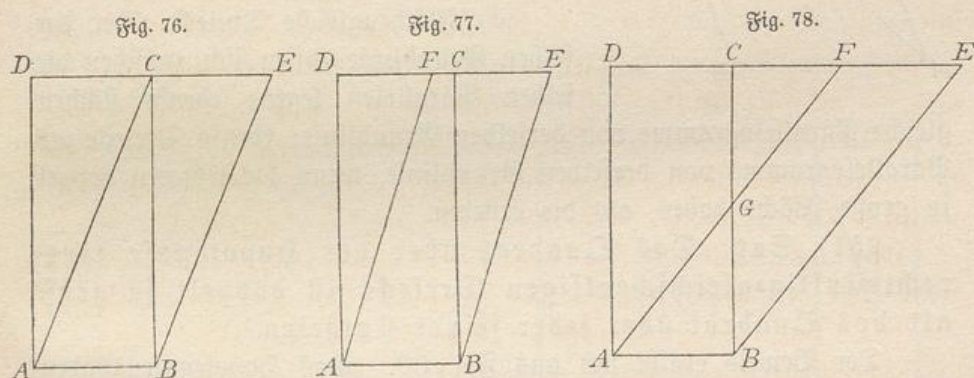


Fläche können mehrere andere abgezogen werden. Die Reihenfolge des Abziehens und das Aussehen des Schlußgebildes sind dabei gleichgültig.

Diese Sätze ermöglichen es, die Flächengleichheit verschiedener Gebilde festzustellen. Dazu sollen einige Beispiele gegeben werden.

249) Satz: Jedes Parallelogramm ist flächengleich mit einem Rechteck von derselben Grundlinie und derselben Höhe.\*)

**Beweis.** Die Grundlinie des Parallelogramms sei  $AB$ ; über ihr zeichne man das Rechteck von derselben Höhe. Dann entsteht ent-



weder eine Figur nach Art von Fig. 76, wo zwei Eckpunkte beider Vierecke in  $C$  zusammenfallen, oder eine Figur nach Art von 77, wo  $F$  zwischen  $D$  und  $C$  liegt, oder eine Figur nach Art von 78, wo  $FE$  außerhalb  $DC$  liegt.

In Fig. 76 ist  $\square ABCE = \triangle ABC + \triangle BCE$ , oder, da  $\triangle BCE \cong \triangle ADC$  ist,  $\square ABCE = \triangle ABC + \triangle ADC = \square ABCD$ , womit der Satz für diesen Fall bewiesen ist.

(An das Dreieck  $ABC$  ist das Dreieck  $BCE$  auf zwei verschiedene Arten angelegt worden, einmal als  $BCE$ , dann als  $ADC$ . Die Flächensumme muß beidemal dieselbe sein.)

In Fig. 77 ist ebenso  $\square ABEF = \triangle ABCF + \triangle BCE = \triangle ABCF + \triangle ADF = \square ABCD$ .

In Fig. 78 ist  $\square ABEF = \triangle ABG + \triangle BCE - \triangle GCF = \triangle ABG + \triangle ADF - \triangle GCF = \square ABCD$ .

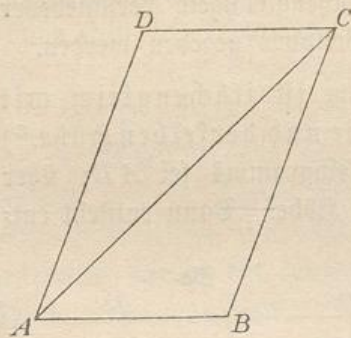
250) Folgerungen: a) Parallelogramme von gleichen Grundlinien und gleichen Höhen sind flächengleich. (Warum?)

\*) Das Zeichen  $\square$  oder  $\square$  soll stets ein Rechteck,  $\square$  ein Parallelogramm bedeuten,  $\diamond$  einen Rhombus,  $\square$  ein Quadrat.



Da, wie Fig. 79 zeigt, jedes Dreieck als Hälfte eines bestimmten Parallelogramms von derselben Grundlinie und derselben Höhe betrachtet werden kann, so folgt ferner:

Fig. 79.



b) Dreiecke von gleichen Grundlinien und gleichen Höhen sind inhaltsgleich.

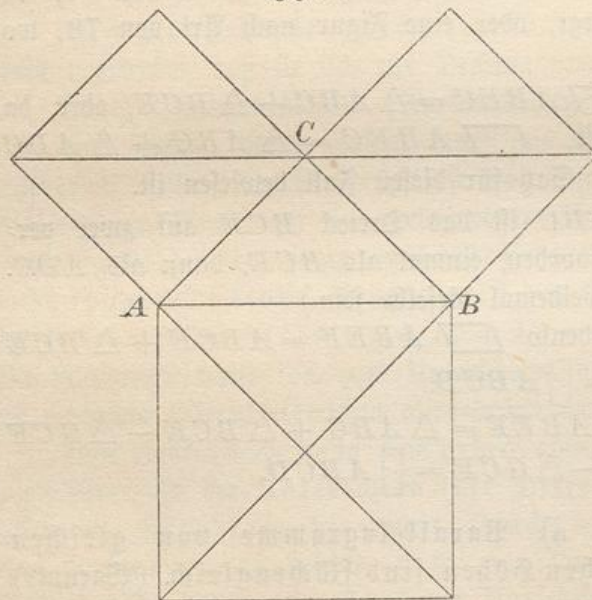
c) Jedes Dreieck ist die Hälfte eines Rechtecks oder Parallelogramms von derselben Grundlinie und derselben Höhe.

d) Flächengleiche Dreiecke über derselben Grundlinie lassen sich zwischen denselben Parallelen legen; ebenso flächengleiche Parallelogramme von derselben Grundlinie; ebenso Dreiecke und Parallelogramme von derselben Grundlinie, wenn die letzteren doppelt so große Fläche haben, als die ersteren.

251) Satz: Das Quadrat über der Hypotenuse eines rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks ist doppelt so groß, als das Quadrat über jeder seiner Katheten.

Der Beweis ergibt sich aus Fig. 80. Das Hypotenusenquadrat besteht aus vier gleichen Dreiecken, jedes Kathetenquadrat aus zwei Dreiecken derselben Art.

Fig. 80.



(Vorkursus § 70.)

Daraus ergibt sich die Lösung folgender Aufgaben:

a) Ein Quadrat zu konstruieren, welches den doppelten Flächeninhalt hat, wie ein gegebenes Quadrat.

b) Ein Quadrat zu konstruieren, welches den halben Flächeninhalt hat, wie ein gegebenes Quadrat.

252) Satz des Pythagoras. In jedem rechtwink-

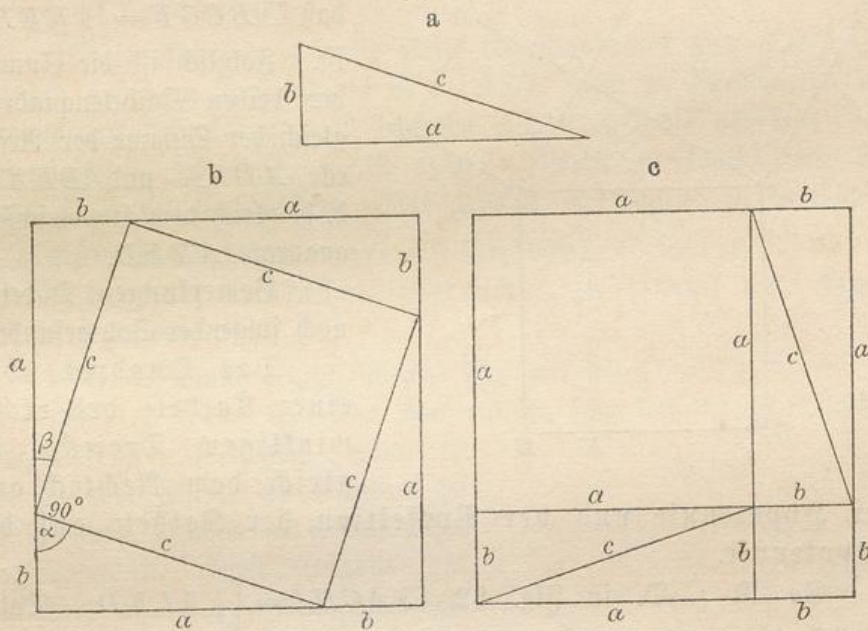
ligen Dreiecke ist das Hypotenusenquadrat gleich der Summe der beiden Kathetenquadrate.



**Erster Beweis.** Der schon im Vorkursus § 71 gegebene Beweis ergibt sich aus Fig. 81 a, b, c.

Ist Fig. 81a das gegebene rechtwinklige Dreieck mit den Katheten  $a$  und  $b$  und der Hypotenuse  $c$ , so zeichne man zwei Quadrate von der Seite  $(a + b)$ . In das eine lege man viermal das gegebene Dreieck so ein, wie es Fig. 81b zeigt, in das andere viermal so ein, wie es Fig. 81c zeigt. Der unbedeckte Rest der Fig. 81b muß

Fig. 81.



dann ebenso groß sein, wie der Rest in Fig. 81c. Das erstemal ist der Rest ein gleichseitiges Viereck mit der Seite  $c$ , dessen Winkel sich, da  $\alpha + \beta = 90^\circ$  ist, als rechte ergeben, sodaß es sich um das Hypotenusenquadrat handelt. Das zweitemal ist der Rest die Summe der beiden Kathetenquadrate. Da die Reste gleich groß sind, so ist das Hypotenusenquadrat gleich der Summe der Kathetenquadrate.

Man pflegt den Satz durch folgende Formel auszudrücken:  $c^2 = a^2 + b^2$  (d. h. das Quadrat über  $c$  ist gleich der Summe der Quadrate über  $a$  und  $b$ . Dabei bedeutet  $c^2$  das Produkt  $c \cdot c$  usw.)

**Zweiter Beweis (der des Euklid).**

In Fig. 82 sind die Quadrate über den Seiten des rechtwinkligen Dreiecks  $ABC$  errichtet, dessen Winkel  $CAB$  mit  $\alpha$  bezeichnet werde. Außerdem sind die Hilfslinien  $BJ$  und  $CD$  und  $CLK$ , letztere senkrecht zu  $AB$  gezogen. Dabei ist  $\triangle JAB = \frac{1}{2} \square ACHJ$ , denn beide stehen über derselben Grundlinie  $AJ$  und liegen zwischen







**Auflösung.**  $ALKD$  in Fig. 82 sei das gegebene Rechteck. Man verlängere die kleine Seite  $AL$  so weit, daß  $AB = AD$  wird. Über  $AB$  als Durchmesser zeichne man einen Halbkreis und verlängere  $KL$  bis zum Schnittpunkte  $C$  mit dem Halbkreise. Die Verbindungslinie  $CA$  ist dann die Seite des gesuchten Quadrates. (Der Beweis liegt im Satze vom Winkel im Halbkreise und dem des Pythagoras.)

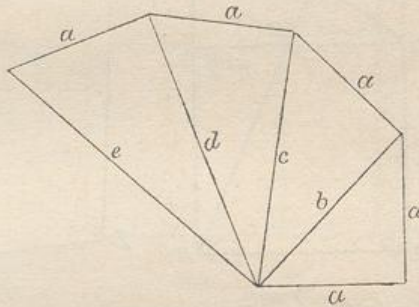
**Aufgabe e)** Ein Quadrat in ein Rechteck von gegebener Seite zu verwandeln.

(Ist in Fig. 82  $AC$  die Seite des Quadrates und  $AB > AC$  die des gesuchten Rechtecks, so ist  $\triangle ABC$  leicht zu konstruieren und daraus  $AL$  abzuleiten. Ist dagegen  $AL < AC$  die gegebene Seite des gesuchten Rechtecks, so ist  $\triangle ALC$  leicht zu konstruieren und dann  $\triangle ABC$  herzustellen. Das übrige ist bequem zu erledigen.)

**Aufgabe f)** Gegeben sei ein Quadrat; es sollen Quadrate von doppelter, dreifacher, vierfacher, fünffacher usw. Fläche konstruiert werden.

(Die Auflösung ergibt sich aus Fig. 83, wo  $b^2 = 2a^2$ ,  $c^2 = 3a^2$ ,  $d^2 = 4a^2$ ,  $e^2 = 5a^2$  ist. Die Konstruktion läßt sich bis zu beliebiger ganzer Zahl  $n$  fortsetzen. Damit ist die Aufgabe gelöst, ein Quadrat zu konstruieren, welches das  $n$ -fache eines gegebenen ist. Diese Aufgabe läßt sich aber abkürzen, indem man mit der nächst kleineren Quadratzahl beginnt. Soll z. B. das gesuchte Quadrat das Behnfache des gegebenen sein, so beginne man mit der dreifachen Seite, was das neunfache Quadrat gibt und fahre nach Pythagoras fort.)

Fig. 83.



**Bemerkungen.** In Fig. 83 ist  $d^2 = \frac{4}{5}e^2$ ,  $c^2 = \frac{3}{5}e^2$ ,  $b^2 = \frac{2}{5}e^2$ ,  $a^2 = \frac{1}{5}e^2$ . Man kann also die Figur benutzen, ein Quadrat zu konstruieren, welches  $\frac{4}{5}$ ,  $\frac{3}{5}$ ,  $\frac{2}{5}$ ,  $\frac{1}{5}$  eines gegebenen ist. Man hat nur nötig, die gegebene Quadratseite von dem gemeinschaftlichen Schnittpunkte der Strahlen aus auf  $e$  aufzulegen und von dem freien Endpunkte der Strahlen aus auf den Strahl  $d$  ein Lot zu fällen, dann von dessen Fußpunkte aus ein Lot auf den Strahl  $c$ , von dessen Fußpunkte aus ein Lot auf  $b$  und von dessen Fußpunkte aus auf  $a$ . Die gefundenen Abschnitte der Strahlen geben die Seiten der gesuchten Quadrate. Entsprechend würde bei sieben Strahlen die Aufgabe für



$\frac{6}{7}, \frac{5}{7}, \frac{4}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{1}{7}$  zu lösen sein. Später werden weit kürzere Konstruktionen gelehrt werden. Aber schon hier lassen sich Abkürzungen ausfindig machen. —

Fig. 83 läßt sich auch durch die einfacher herzustellende Fig. 83a ersetzen, in der die Kreisbogen abwechselnd um  $A$  und  $B$  geschlagen werden und  $ABCD_1$  ein Quadrat mit Seite  $a$  ist. Der Schüler zeige, daß  $BD_1 = a\sqrt{2}$ ,  $AD_2 = a\sqrt{3}$ ,  $BD_3 = a\sqrt{4}$ ,  $AD_4 = a\sqrt{5}$ ,  $BD_5 = a\sqrt{6}$  usw. ist.

254) **Aufgabe.** Ein gegebenes Dreieck in ein flächengleiches Quadrat zu verwandeln.

**Auflösung.** Man betrachte eine Seite des Dreiecks als Grundlinie und bilde die zugehörige Dreieckshöhe. Das leicht zu zeichnende

Fig. 83 a.

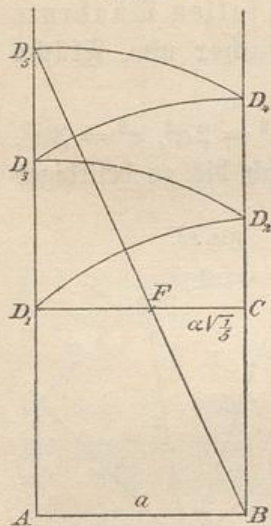
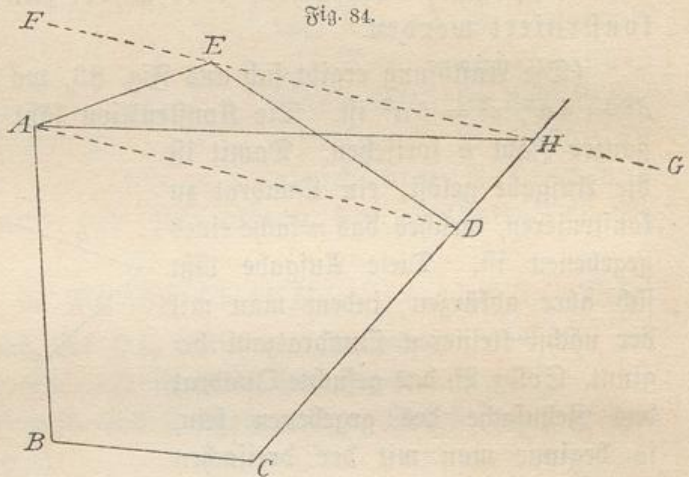


Fig. 84.



Rechteck aus der Höhe und der halben Grundlinie ist dann flächengleich mit dem Dreieck und nach Pythagoras in ein Quadrat zu verwandeln.

255) **Aufgabe.** Ein gegebenes  $n$ -Eck in ein flächengleiches Quadrat zu verwandeln.

**Auflösung.** Handelt es sich z. B. um ein gegebenes Fünfeck  $ABCDE$  (Fig. 84), so schneide man durch eine Diagonale, z. B.  $AD$ , ein Dreieck  $ADE$  ab. Durch  $E$  lege man eine Parallele  $FG$  zur Diagonale. Dann verlängere man z. B. die anstoßende Seite  $CD$  bis zur Parallelen und verbinde den Schnittpunkt  $H$  mit  $A$ . Dann wird behauptet, das Viereck  $ABCH$  sei ebenso groß, wie das Fünfeck.



Der Beweis liegt darin, daß  $\triangle ADH = \triangle ADE$  ist.

In entsprechender Weise ist das Viereck durch Abschneiden eines Dreiecks durch eine Diagonale in ein Dreieck zu verwandeln. Das Dreieck ist nach § 300 in ein Quadrat zu verwandeln. — Demnach läßt sich jedes  $n$ -Eck in ein flächengleiches Quadrat verwandeln.

**Bemerkung.** Der Schüler führe die Aufgaben dieser Art mit möglichster Ersparrung von Linien aus. So ist es z. B. nicht nötig, das Rechteck vollständig zu zeichnen.

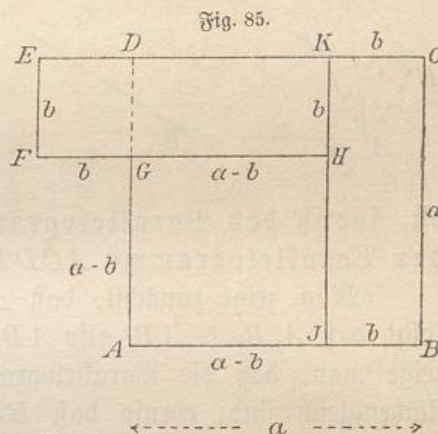
256a) In Fig. 81c ist das Quadrat über der Geraden  $(a+b)$  so zerlegt worden, daß es aus dem Quadrate über  $a$ , dem Quadrate über  $b$  und zwei Rechtecken mit den Seiten  $a$  und  $b$  besteht. Daraus ergibt sich der Satz:

Das Quadrat über der Summe zweier Geraden ist gleich der Summe der Quadrate über den einzelnen Geraden, vermehrt um das doppelte Rechteck aus beiden Geraden.

**Bemerkung.** Setzt man im Anschluß an den Vorkursus (§ 63 und § 66) voraus, daß der Rechtecksinhalt gleich dem Produkte aus zwei aneinander stoßenden Seiten dieses Gebildes ist, so kann man den Satz durch folgende Formel ausdrücken:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.*)$$

256b) In Fig. 85 ist eine Gerade  $AB = a$  und eine Gerade  $JB = b$  gegeben, sodaß  $AJ = (a-b)$  ist. Über  $(a-b)$  ist ein Quadrat  $AJHG$  errichtet, ebenso ein Quadrat  $ABCD$  über  $AB = a$ , und als  $DEFG$  ist oben links das Quadrat über  $b$  angelegt. Dadurch ist erreicht, daß auch diese Figur das Rechteck aus  $a$  und  $b$  zweimal enthält, als  $JBCK$  und als  $EFHK$ .



Die Fläche der Gesamtfigur ist gleich der Summe der Quadrate über  $a$  und über  $b$ . Zieht man davon die beiden genannten Rechtecke ab, so bleibt übrig das Quadrat  $AJHG$  über  $(a-b)$ . Daraus folgt der Satz:

Die Fläche der Gesamtfigur ist gleich der Summe der Quadrate über  $a$  und über  $b$ . Zieht man davon die beiden genannten Rechtecke ab, so bleibt übrig das Quadrat  $AJHG$  über  $(a-b)$ . Daraus folgt der Satz:

\*) In der Arithmetik wird in der Tat gezeigt, daß  $(a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + b^2 + 2ab$  ist. Beispiel:  $(3+5)(3+5) = 9 + 15 + 15 + 25 = 64$ . Probe:  $8 \cdot 8 = 64$ .



Das Quadrat über der Differenz zweier Geraden ist gleich der Summe der Quadrate über den einzelnen Geraden, vermindert um das doppelte Rechteck aus beiden Geraden.

**Bemerkung.** Der Satz entspricht der Formel

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab.*)$$

257) **Aufgabe.** Die folgende, von Pappus gefundene Verallgemeinerung des Pythagoreischen Lehrsatzes zu beweisen:

In Fig. 86 sind über den Seiten  $AC$  und  $BC$  eines beliebigen Dreiecks ganz beliebige Parallelogramme  $ACDE$  und  $BCFG$  nach außen errichtet, deren Seiten  $ED$  und  $GF$

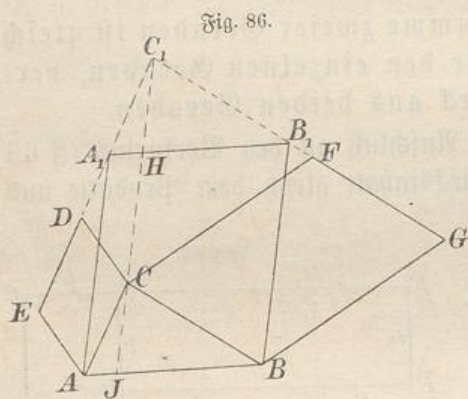


Fig. 86.

bis zum Durchschnitt  $C_1$  verlängert, die Gerade  $C_1CJ$  gezogen, dann  $AA_1$  und  $BB_1$  parallel zu  $CC_1$  bis zum Durchschnitt  $A_1$  bzw.  $B_1$  mit  $EC_1$  und  $GC_1$  gezogen, worauf noch  $A_1B_1$  gezogen ist. Es soll gezeigt werden, daß auch  $ABB_1A_1$  ein Parallelogramm ist, dessen Teil  $AJHA_1 = ACDE$  ist, während  $BJHB_1 = BCFG$

ist, sodaß das Parallelogramm  $ABB_1A_1$  gleich der Summe der Parallelogramme  $ACDE$  und  $BCFG$  ist.

(Man zeige zunächst, daß  $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle ABC$  ist. Daraus folgt, daß  $A_1B_1 \parallel AB$ , also  $ABB_1A_1$  ein Parallelogramm ist. Dann zeige man, daß die Parallelogramme  $AJHA_1$ ,  $ACC_1A_1$ ,  $ACDE$  flächengleich sind, ebenso daß  $BJHB_1$ ,  $BCC_1B_1$ ,  $BCFG$  flächengleich sind, usw.)

**Bemerkung.** Der Satz des Pappus enthält den des Pythagoras als einen besonderen Fall in sich. Macht man die Fig. 86 für das bei  $C$  rechtwinklige Dreieck und für Quadrate statt der Parallelogramme, so läßt sich der Satz des Pythagoras in neuer Art beweisen.

258) Zwei andere Verallgemeinerungen vom Satze des Pythagoras.

\*) In der Arithmetik wird gezeigt, daß  $(a - b)(a - b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 + b^2 - 2ab$  ist. Beispiel:  $(5 - 3)(5 - 3) = 25 - 15 - 15 + 9 = 4$ . Probe  $2 \cdot 2 = 4$ .



a) Das Quadrat über einer Dreiecksseite, die einem spitzen Winkel gegenüberliegt, ist gleich der Summe der Quadrate über den beiden anderen Seiten, vermindert um das doppelte Rechteck aus einer dieser Seiten und der Projektion der anderen auf diese. (Verallgemeinerter Pythagoreischer Lehrsatz.)

**Beweis.** Zeige an Fig. 86 a (wie bei dem gewöhnlichen Pythagoreischen Lehrsatz), daß folgende Rechtecke gleich sind:  $ADKL = APOJ$ , \*)  $KEBL = FMNB$ ,  $NMGC = CPOH$ , daß also  $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - (CPOH + NMGC)$ , oder  $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot CPOH$  ist. Hier ist aber

$CPOH$  das Rechteck aus  $AC$  und der Projektion  $CP$  von  $CB$  auf  $CA$ . Ebenso ist  $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot CNMG$ , wo  $CN$  die Projektion von  $AC$  auf  $BC$  ist.

**Bemerkung.**

Setzt man die obigen arithmetischen Schreibweisen voraus, so läßt sich die Richtigkeit des Satzes an Fig. 87 bestätigen, wo  $c$  einem spitzen Winkel gegenüberliegt und die zu  $b$  gehörige Höhe  $h$  gezeichnet ist, sodaß man  $p$  als die Projektion von  $a$  auf  $b$  zu betrachten hat. Nach Pythagoras ist  $c^2 = (b-p)^2 + h^2 = b^2 + p^2 - 2bp + h^2$ . Setzt man dabei  $p^2 + h^2 = a^2$ , so erhält man  $c^2 = b^2 + a^2 - 2bp$ .

b) Das Quadrat über einer Dreiecksseite, die einem stumpfen Winkel gegenüberliegt, ist gleich der Summe der Quadrate

\*) Ziehe die Hilfslinien  $JB$  und  $CD$ , für die anderen Rechtecke entsprechende Hilfslinien.

Fig. 86 a.

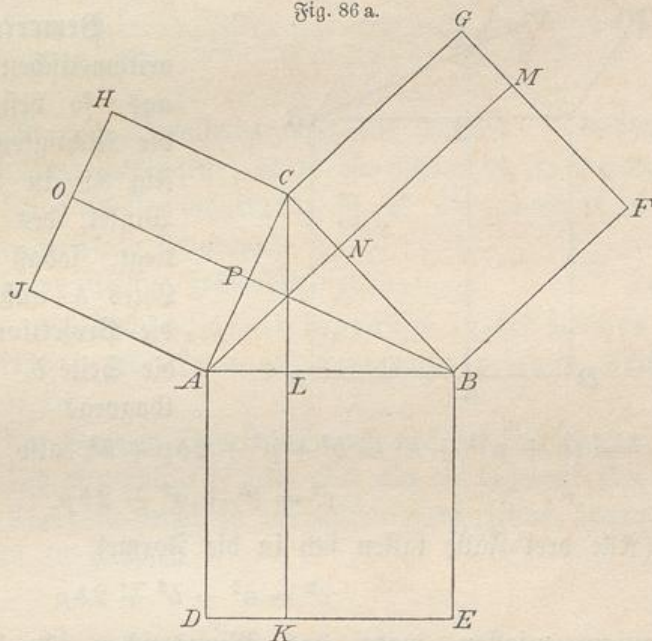
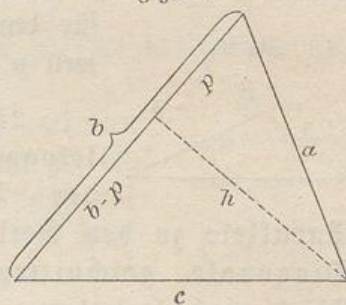


Fig. 87.





über den beiden anderen Seiten, vermehrt um das doppelte Rechteck aus einer dieser Seiten und der Projektion der anderen auf diese.

**Beweis.** Zeige an Fig. 88 (wie an Fig. 86a), daß die mit denselben Buchstaben bezeichneten Rechtecke gleich sind, wie beim Falle a).

Da jedoch hier die Quadrate über  $AC$  und  $BC$  vergrößert werden, so erhält man statt des Obigen  $\overline{AB^2} = \overline{AC^2} + \overline{BC^2} + (CPOH + NMGC) = \overline{AC^2} + \overline{BC^2} + 2 \cdot CPOH$ .

**Bemerkung.** Setzt man die arithmetischen Schreibweisen voraus, so bestätigt sich auch hier die Richtigkeit des Satzes an der Fig. 89, in der  $c$  dem stumpfen Winkel des Dreiecks gegenüber liegt, sodaß der Fußpunkt des Lotes  $h$  außerhalb fällt, ebenso die Projektion  $p$  der Seite  $a$  auf die Seite  $b$ . Hier wird nach Pythagoras

$$c^2 = (b + p)^2 + h^2 = b^2 + p^2 + 2bp + h^2, \text{ also, da } p^2 + h^2 = a^2 \text{ ist,}$$

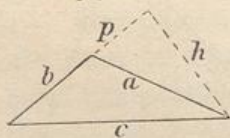
$$c^2 = b^2 + a^2 + 2bp.$$

(Alle drei Fälle lassen sich in die Formel

$$c^2 = a^2 + b^2 \mp 2bp$$

zusammenfassen, wobei das Minuszeichen für den Fall des spitzen Winkels, das Pluszeichen für den des stumpfen Winkels gilt, während für den rechten Winkel das letzte Glied wegfällt, weil  $p = 0$  wird.)

Fig. 89.



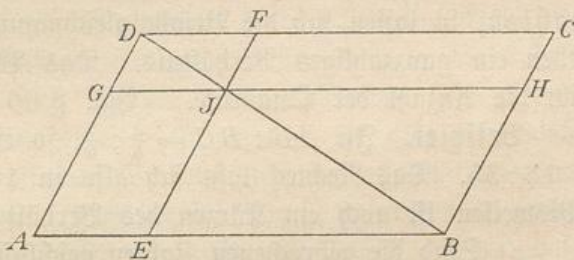
259) Satz von den Ergänzungsparelogrammen. Zieht man durch einen Punkt der Diagonale eines Parallelogramms Parallele zu den Seiten, so entstehen zwei nicht von der Diagonale geschnittene Parallelogramme, die gleichen Flächeninhalt haben.

**Beweis.** In Fig. 90 sei  $ABCD$  das Parallelogramm und  $J$  der Punkt der Diagonale, durch den  $EF$  und  $GH$ , die Parallelen zu den Seiten, gehen. Hier ist  $\triangle ABD = \triangle BCD$ . Vom ersten



Dreiecke ziehe man  $\triangle BEJ$ , von dem anderen das gleiche Dreieck  $BHJ$  ab, sodann von dem ersten noch  $\triangle DGJ$ , vom anderen das gleiche Dreieck  $DEJ$ , dann müssen von jedem der großen Dreiecke flächengleiche Stücke übrig bleiben, sodaß  $\square AEJG = \square JHCF$  ist. [Man nennt die beiden Parallelelogramme Ergänzungsparallelelogramme, weil sie nötig sind, um die beiden von der Diagonale geschnittenen Parallelelogramme zum ganzen Parallelelogramm  $ABCD$  zu ergänzen.]

Fig. 90.



**Bemerkung.** Ist das Parallelelogramm ein Rechteck, so erhält man flächengleiche Ergänzungsrechtecke; ist es ein Rhombus, so werden die Ergänzungsparallelelogramme kongruent; ist es ein Quadrat, so werden die Ergänzungsrechtecke kongruent.

Der Satz führt zur Lösung folgender

**Aufgabe.** Ein gegebenes Parallelelogramm in ein flächengleiches mit denselben Winkeln zu verwandeln, von dem eine Seite gegeben ist.

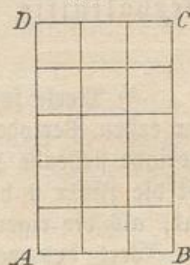
Man betrachte das gegebene Parallelelogramm als das Ergänzungsparallelelogramm der Fig. 90 und  $JH$  oder  $JF$  als die gegebene Seite des gesuchten. Die Figur ist leicht zu vervollständigen, jedoch braucht man nicht alle Linien zu zeichnen.

### e) Längen- und Flächenberechnungen an geradlinigen Gebilden.

260) Zerlegung des Rechtecks in gleiche Quadrate und Formel für die Rechtecksfläche.

a) Hat ein Rechteck Seiten, die sich verhalten wie zwei ganze Zahlen  $m$  und  $n$ , so läßt es sich insoviel Quadrate zerlegen, wie das Produkt der Zahlen angibt, also in  $m \cdot n$  Quadrate. (Vgl. § 63 des Vorkurses.) Man nehme dabei an, daß  $m$  und  $n$  keinen gemeinschaftlichen Teiler haben. Das Auffuchen des größten gemeinschaftlichen Teilers gehört in die Arithmetik.

Fig. 91.



**Beispiel.** Ist  $AB:BC = 3:5$ , so handelt es sich um  $3 \cdot 5 = 15$



Quadrate. Dasselbe gilt für die Verhältnisse  $6:10$ ,  $9:15$  usw. Man verlangt stets die möglichst kleine Anzahl von Quadraten. (Fig. 91.)

Es fragt sich jedoch, ob die Einteilung in Quadrate auch für nicht ganze Zahlen möglich ist.

b) Verhalten sich die Rechtecksseiten wie zwei gebrochene Zahlen, so lassen sich die Brüche gleichnamig machen, und die Zähler geben ein ganzzahliges Verhältnis. Das Produkt der neuen Zahlen gibt die Anzahl der Quadrate. (Vgl. § 66 des Vorkurses.)

**Beispiel.** Ist  $AB:BC = \frac{3}{5}:\frac{7}{6}$ , so ist auch  $AB:BC = \frac{18}{30}:\frac{35}{30} = 18:35$ . Das Rechteck läßt sich also in  $18 \cdot 35$  Quadrate einteilen. (Bisweilen ist noch ein Kürzen des Verhältnisses möglich.)

c) Sind die gebrochenen Zahlen geschlossene Dezimalbrüche, so ist das ganzzahlige Verhältnis leicht zu finden; z. B.  $AB:BC = 1,23:2,156$  gibt  $1230:2156$ . Es kann noch in  $615:1078$  gekürzt werden. Die Anzahl der Quadrate ist  $615 \cdot 1078$ .

d) Verhalten sich die Rechtecksseiten so, daß im Verhältnisse ein oder zwei endlose periodische Dezimalbrüche vorkommen, so verwandelt man diese in gewöhnliche Brüche und verfährt wie vorher.

**Beispiel.** Das Verhältnis sei  $2:5,23815481548154 \dots$

Man setze den Dezimalbruch gleich  $x$ , sodaß

$$1\,000\,000x = 5\,238\,154,81548154 \dots, \text{ und}$$

$$100x = 523,81548154 \dots, \text{ also durch}$$

beiderseitige Subtraktion

$$999\,900x = 5\,237\,631,00000000 \dots, \text{ und demnach}$$

der Dezimalbruch  $x = \frac{5\,237\,631}{999\,900}$  ist. \*) Setzt ist das Verhältnis der Rechtecksseiten  $2:\frac{5\,237\,631}{999\,900}$ , oder  $1\,999\,800:5\,237\,631$ . Die Anzahl der Quadrate ist demnach das Produkt der beiden letzten Zahlen. Dabei sei vorausgesetzt, daß Kürzungen nicht mehr möglich sind.

In allen diesen Fällen war das Verhältnis in ein ganzzahliges zu verwandeln, und die Quadratteilung war theoretisch möglich. Solche Verhältnisse nennt man rationale Verhältnisse. Die Seite des gefundenen Quadrates heißt das ge-

\*) Merke folgende kurzgefaßte Regel: Schreibe die Zahl bis zum Schluß der ersten Periode als ganze Zahl hin, ziehe von ihr ab die vor der ersten Periode stehende Zahl, und dividiere den Rest durch eine Zahl, die vorn so oft die Ziffer 9 hat, als die Periode Stellen zählt, und hinten soviel Nullen hat, als die eigentliche Vorperiode Stellen zählt. Der entstehende Bruch ist der Wert des periodischen Dezimalbruchs in gewöhnlicher Bruchform und kann häufig noch gekürzt werden. Der Beweis für die Richtigkeit des Verfahrens ergibt sich aus dem obigen Beispiele.



gemeinschaftliche Maß der beiden Rechtecksseiten. Sind die möglichen Kürzungen durchgeführt, so handelt es sich um das größte gemeinschaftliche Maß.

[e] Unmöglich wird die Einteilung des Rechtecks in kleine Quadrate, sobald das Verhältnis kein rationales, also ein irrationales ist. Dies findet z. B. statt, wenn die eine Zahl eine ganze, die andere ein endloser Dezimalbruch ohne Periode, d. h. eine Irrationalzahl ist. Solche sind z. B. die Quadratwurzeln aus den Primzahlen, die Kubikwurzeln usw. aus solchen und die durch Multiplikation mit ganzen Zahlen aus diesen Irrationalzahlen entstehenden. Es gibt aber noch Irrationalzahlen, die nicht mit der Wurzelausziehung zusammenhängen. Eine solche ist z. B. die mit dem Kreisumfange zusammenhängende Zahl  $\pi = 3,141\,592\,653\,589\,793\ldots$ . Der Nachweis dafür, daß eine Zahl der letzteren Gruppe eine Irrationalzahl ist, läßt sich nur schwierig führen und geht über den Standpunkt der Klasse hinaus. Man kann  $\pi$  als einen Dezimalbruch mit unendlich langer Periode, aber auch als Dezimalbruch mit unendlich langer Vorperiode betrachten. Im ersteren Falle kann man daher  $\pi = \frac{314\,159\,265\ldots}{99\,999\,999\ldots}$  setzen, was einen Bruch gibt, der im Zähler und im Nenner unendlich viele Stellen hat. Denkt man sich die letzte (unendlich fern liegende) 9 gestrichen, so erhält man als gleichwertig  $\pi = \frac{314\,195\,265\ldots}{100\,000\,000\ldots}$ . Auch hier sind Zähler und Nenner bis ins Unendliche fortzusetzen. Ein irrationales Verhältnis kann also nicht als Verhältnis zweier endlicher ganzen Zahlen dargestellt werden.

Stehen demnach die Seiten eines Rechtecks in einem irrationalen Verhältnis, so müßte jede Seite in unendlich viele unendlich kleine Teile zerlegt werden, wenn man eine Einteilung in kleine Quadrate erzielen wollte, die Quadrate würden unendlich klein und unendlich zahlreich werden. Die beiden Seiten haben also kein gemeinschaftliches Maß von endlicher Größe, man nennt sie daher inkommensurabel. So sind z. B. zwei Gerade von den Längen 1 und  $\sqrt{2}$  inkommensurabel.

In solchen Fällen begnügt man sich im praktischen Leben mit Annäherungswerten. Entweder beschränkt man den Dezimalbruch auf eine endliche Anzahl von Stellen, was z. B. bei  $1:\pi$  auf  $100:314$ , oder auf  $1\,000\,000:3\,141\,593$ , oder auf  $1\,000\,000\,000:3\,141\,592\,654$  usw. führt. Oder man sucht Näherungswerte, wie  $\frac{22}{7} = 3,142\,857\ldots$ , was allerdings zu groß ist, oder wie  $\frac{355}{113} = 3,141\,592\,9\ldots$ , was nur sehr wenig abweicht. Der Wert  $\frac{22}{7}$  war schon dem Archimedes bekannt. Zur Auffindung des zweiten und anderer Näherungswerte gibt die Arithmetik geeignete Methoden an.]



f) Als Flächenmaß kann man ein Quadrat von beliebiger Seitenlänge wählen. Im praktischen Leben wählt man die Seitenlänge als eine der Längeneinheiten des metrischen Systems. Quadrate von 1, 2, 3, 4, ... cm Seitenlänge haben dabei Flächen von  $1 \cdot 1 = 1$ ,  $2 \cdot 2 = 4$ ,  $3 \cdot 3 = 9$ ,  $4 \cdot 4 = 16$ , ... qcm oder  $1^2$ ,  $2^2$ ,  $3^2$ ,  $4^2$ , ... qcm oder  $\text{cm}^2$ . Ein Quadrat von vierfacher Fläche erhält man durch geeignetes Anlegen von drei Quadraten derselben Größe, ein Quadrat von neunfacher Fläche durch geeignetes Anlegen von noch fünf solchen Quadraten an das vorige usw. So ergibt sich folgende Tabelle der Quadratzahlen:

$$\begin{aligned} 1^2 &= 1 \\ 2^2 &= 1 + 3 \\ 3^2 &= 1 + 3 + 5 \\ 4^2 &= 1 + 3 + 5 + 7 \\ 5^2 &= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 \\ &\vdots \end{aligned}$$

sodas jede Quadratzahl gleich einer Summe aufeinander folgender ungerader Zahlen ist. Die Arithmetik lehrt, daß, wenn  $n$  eine beliebige ungerade Zahl ist,  $1 + 3 + 5 + \dots + n = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$  ist, was an der Tabelle auf die Richtigkeit erprobt werden kann. (Darüber und über die Anwendungen vergleiche man den Vorkursus § 58 bis § 61.)

g) Ist das Rechteck in kleine Quadrate zerlegt, sodaß z. B. die Grundlinie in 3, die Höhe in 5 gleiche Teile zerlegt ist, also  $3 \cdot 5 = 15$  Quadrate vorhanden sind, und betrachtet man jedes Quadrat als Flächeneinheit, so handelt es sich um  $3 \cdot 5 = 15$  Flächeneinheiten. Ist allgemeiner die Grundlinie des Rechtecks von der Länge  $b$ , die Höhe von der Länge  $h$ , beides in Zentimetern gegeben, so ist die Fläche gleich  $bh$  Quadratcentimetern, oder, wie man einfacher sagt,

$$F = bh.$$

Diese Formel\*) gilt nach obigem auch für gebrochene Zahlen. Ist z. B.  $b = 3\frac{1}{2} \text{ cm} = \frac{7}{2} \text{ cm}$ ,  $h = 5\frac{2}{3} \text{ cm} = \frac{17}{3} \text{ cm}$ , so mache man die Brüche gleichnamig, sodaß  $b = \frac{21}{6} \text{ cm}$ ,  $h = \frac{34}{6} \text{ cm}$  ist. Jetzt teile

\*) Da zu jedem Rechteck oder Parallelogramm, überhaupt zu jeder geradlinig begrenzten Fläche ein gleich großes Quadrat gehört, dessen Seite gleich  $f$ , dessen Fläche gleich  $f^2$  sei, so wird statt  $F$  vielfach geschrieben  $f^2$ , sodaß die Formel lautet  $f^2 = bh$ . Dadurch wird angedeutet, daß es sich links, wie rechts, um einen Ausdruck zweiter Dimension handelt. Diese sehr zu empfehlende Schreibweise ist leider noch nicht allgemein geworden.



man  $b$  in 21,  $h$  in 34 gleiche Teile ein und konstruiere die zugehörigen  $21 \cdot 34 = 714$  Quadrate von je  $\frac{1}{6}$  cm Seitenlänge, also von  $\frac{1}{36}$  qcm Fläche. Das ganze Rechteck hat also  $\frac{714}{36}$  qcm  $= \frac{21}{6} \cdot \frac{34}{6}$  qcm  $= \frac{7}{2} \cdot \frac{17}{3}$  qcm  $= bh$  Quadratcentimeter Fläche. Die Formel  $F = bh$  gilt also auch für gebrochene „Maßzahlen“  $b$  und  $h$ , also auch für endliche Dezimalbrüche und für unendliche Dezimalbrüche mit Periode, also für rationales Verhältnis  $b : h$ .

[Für irrationales Verhältnis kann man sie ebenfalls als streng richtig beweisen, hier aber soll im Anschluß an e) nur gesagt werden, daß sie um so richtiger ist, je mehr Dezimalstellen man bei  $b$  und  $h$  berücksichtigt.]

261) Jedes Parallelogramm ist inhaltsgleich einem Rechteck von derselben Grundlinie  $b$  und derselben Höhe  $h$ . Sein Inhalt ist daher ebenfalls gegeben durch

$$F = bh.$$

262) a) Jedes Dreieck von der Grundlinie  $b$  und der Höhe  $h$  ist die Hälfte eines entsprechenden Parallelogramms bzw. Rechtecks. Die Inhaltsformel ist also

$$(1) \quad F = \frac{bh}{2}.$$

b) Bezeichnet man die Dreiecksseiten als  $a, b, c$ , die zugehörigen Höhen als  $h_1, h_2, h_3$ , so folgt, daß  $\frac{ah_1}{2} = \frac{bh_2}{2} = \frac{ch_3}{2}$  oder  $ah_1 = bh_2 = ch_3$  ist. Daraus aber folgt

$$(2) \quad a : b = h_2 : h_1, \quad b : c = h_3 : h_2, \quad c : a = h_1 : h_3,$$

d. h. zwei Seiten eines Dreiecks verhalten sich umgekehrt wie die zugehörigen Höhen.

c) Statt der ersten dieser Proportionen kann man auch schreiben:

$$a : b = 1 : \frac{h_1}{h_2} \quad \text{oder} \quad a : b = \frac{h_1}{h_1} : \frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{h_1} : \frac{1}{h_2},$$

demnach lassen sich diese Proportionen in folgende gemeinschaftliche Formel zusammenfassen:

$$(3) \quad a : b : c = \frac{1}{h_1} : \frac{1}{h_2} : \frac{1}{h_3},$$

d. h. die Seiten eines Dreiecks verhalten sich wie die umgekehrten (reziproken) Werte der Höhen oder wie  $h_2 h_3 : h_3 h_1 : h_1 h_2$ .

d) Sind  $a, b, c$  die Seiten eines Dreiecks, und ist  $\rho$  der Radius des Inkreises, so ergibt sich eine weitere Flächenformel. Verbindet man nämlich in Fig. 65 den Mittelpunkt  $M$  des Kreises mit den



Ecken  $A, B, C$  des Dreiecks und mit den Berührungspunkten, so wird  $\triangle AMB = \frac{a\varrho}{2}$ ,  $\triangle BMC = \frac{b\varrho}{2}$ ,  $\triangle CMA = \frac{c\varrho}{2}$ , der Gesamtinhalt wird also  $\frac{a\varrho}{2} + \frac{b\varrho}{2} + \frac{c\varrho}{2} = \frac{(a+b+c)\varrho}{2}$ , wofür man, da  $a+b+c$  gleich dem Umfange  $u$  ist, auch schreiben kann  $F = \frac{u\varrho}{2}$ . Der Ausdruck  $\frac{a+b+c}{2}$  war aber dort mit  $p$  bezeichnet, also ist der Dreiecksinhalt auch

$$(4) \quad F = \frac{a+b+c}{2} \varrho = \frac{u}{2} \varrho = p\varrho.$$

(In Worten?)

e) Verbindet man in Fig. 66 den Mittelpunkt  $M_1$  des die Seite berührenden An-Kreises, dessen Radius  $\varrho_1$  sei, mit den Ecken des Dreiecks und den Berührungspunkten, so ist

$$\begin{aligned} \triangle ABC &= \triangle BMC + \triangle CMA - \triangle BMC = \frac{b\varrho_1}{2} + \frac{c\varrho_1}{2} - \frac{a\varrho_1}{2} \\ &= \frac{\varrho_1}{2} (b+c-a). \end{aligned}$$

Der Ausdruck  $\frac{b+c-a}{2}$  wurde aber dort mit  $p_1$  bezeichnet, also ist

$$(5) \quad F = \frac{b+c-a}{2} \varrho_1 = p_1 \varrho_1.$$

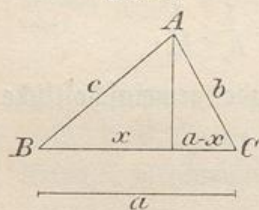
Ebenso ist es mit  $p_2, p_3$ , bzw.  $\varrho_2, \varrho_3$ . Man hat also die Gesamtformel

$$(6) \quad F = p\varrho = p_1\varrho_1 = p_2\varrho_2 = p_3\varrho_3$$

oder

$$(6)^* \quad F = \frac{a+b+c}{2} \varrho = \frac{-a+b+c}{2} \varrho_1 = \frac{a-b+c}{2} \varrho_2 = \frac{a+b-c}{2} \varrho_3.$$

Fig. 92.



f) Daraus ergibt sich noch eine andere Formel:\*) Fig. 92 stellt ein Dreieck mit der Höhe  $h_1 = AD$  dar.\*\*\*) Diese soll aus den Seiten  $a, b, c$  berechnet werden. Man setze  $BD = x$ , also  $DC = a - x$  dann ist nach

Pythagoras in den rechtwinkligen Dreiecken

\*) Der Abschnitt f) kann vorläufig zurückgestellt werden, wenn die Lehre von den Quadratwurzeln noch nicht besprochen ist.

\*\*) D ist in die Zeichnung einzutragen.



$$x^2 = c^2 - h_1^2$$

$$(a - x)^2 = b^2 - h_1^2$$

oder

$$a^2 + x^2 - 2ax = b^2 - h_1^2.$$

Setzt man hier den Wert von  $x^2$  aus der ersten Gleichung ein, so folgt

$$a^2 + c^2 - h_1^2 - 2ax = b^2 - h_1^2,$$

oder, wenn man  $h_1^2$  beiderseits streicht,

$$a^2 + c^2 - 2ax = b^2.$$

Daraus folgt

$$x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}.$$

Dies setze man ein in die erste Gleichung, die sich auch schreiben läßt als

$$h_1^2 = c^2 - x^2 = (c + x)(c - x)^*$$

$$= \left[ c + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \right] \cdot \left[ c - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \right].$$

Macht man die Ausdrücke in jeder Klammer gleichnamig, so erhält man

$$h_1^2 = \frac{2ac + a^2 + c^2 - b^2}{2a} \cdot \frac{2ac - a^2 - c^2 + b^2}{2a}$$

$$= \frac{[(a + c)^2 - b^2] \cdot [b^2 - (a - c)^2]}{4a^2}.$$

In jeder Klammer steht die Differenz zweier Quadrate, die sich wieder in Summe mal Differenz der Grundzahlen zerlegen läßt, und so folgt

$$h_1^2 = \frac{(a + c + b)(a + c - b)(b + a - c)(b - a + c)^*}{4a^2}$$

oder

$$h_1^2 = \frac{16}{4a^2} \cdot \frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{-a+b+c}{2} \cdot \frac{a-b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} = \frac{4}{a^2} p p_1 p_2 p_3.$$

Demnach ist die Höhe  $h_1$ 

$$7) \quad h_1 = \frac{2}{a} \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{-a+b+c}{2} \cdot \frac{a-b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2}}$$

$$= \frac{2}{a} \sqrt{p p_1 p_2 p_3}.$$

Ebenso ist

$$h_2 = \frac{2}{b} \sqrt{p p_1 p_2 p_3}, \quad h_3 = \frac{2}{c} \sqrt{p p_1 p_2 p_3}.$$

Schafft man in Gleichung (7)  $\frac{2}{a}$  nach links, so steht dort  $\frac{a h_1}{2} = F$ ,

\*) Summe mal Differenz zweier Zahlen gibt die Differenz ihrer Quadrate.



also die Fläche des Dreiecks. So erhält man die berühmte Heronische Formel für den Inhalt des Dreiecks:

$$(8) \quad F = \sqrt{pp_1p_2p_3} \\ = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$

Vergleicht man diese mit

$$F = pq = p_1q_1 = p_2q_2 = p_3q_3,$$

so findet man zunächst

$$pq = \sqrt{pp_1p_2p_3} \quad \text{oder} \quad q = \frac{1}{p} \sqrt{pp_1p_2p_3} = \sqrt{\frac{p_1p_2p_3}{p^2}} = \sqrt{\frac{p_1p_2p_3}{p}}.$$

In ähnlicher Weise sind die anderen Formeln zu behandeln. Im ganzen ergibt sich

$$(9) \quad q = \sqrt{\frac{p_1p_2p_3}{p}}, \quad q_1 = \sqrt{\frac{pp_2p_3}{p_1}}, \quad q_2 = \sqrt{\frac{pp_1p_3}{p_2}}, \quad q_3 = \sqrt{\frac{pp_1p_2}{p_3}},$$

wo für die  $p$  die aus den Seiten hergestellten Ausdrücke  $\frac{a+b+c}{2}$  usw. eingesetzt werden können. Man halte dabei fest, daß nach den Fig. 65 und 66  $p$  den halben Umfang des Dreiecks,  $p_1, p_2, p_3$  einfache Tangentenlängen bedeuten.

**Bemerkung.** Bildet man aus (9) das Produkt der vier Radien und kürzt man den entstehenden Bruch, so läßt sich die Wurzel ausziehen und es entsteht

$$qq_1q_2q_3 = pp_1p_2p_3 = F^2$$

oder

$$(10) \quad F = \sqrt{qq_1q_2q_3} = \sqrt{pp_1p_2p_3},$$

sodaß sich die Fläche des Dreiecks auch aus den Radien der Berührungskreise berechnen läßt und das Produkt der Radien gleich dem Produkte der  $p$  ist. — Noch andere Formeln lassen sich durch Multiplikation und Division finden, z. B.  $qq_1 = p_2p_3$ ,  $\frac{q}{q_1} = \frac{p_1}{p}$  usw.

Ferner ist nach (7)

$$h_1h_2h_3 = \frac{8}{abc} \sqrt{(pp_1p_2p_3)^3} = \frac{8}{abc} \sqrt{(qq_1q_2q_3)^3} = \frac{8}{abc} F^3,$$

sodaß z. B.

$$F = \frac{1}{2} \sqrt[3]{abch_1h_2h_3} \text{ ist.}$$

Die Heronische Formel soll in der Ähnlichkeitslehre kürzer abgeleitet werden. Sie bedeutet einen großen Fortschritt in der Lehre vom Dreieck.

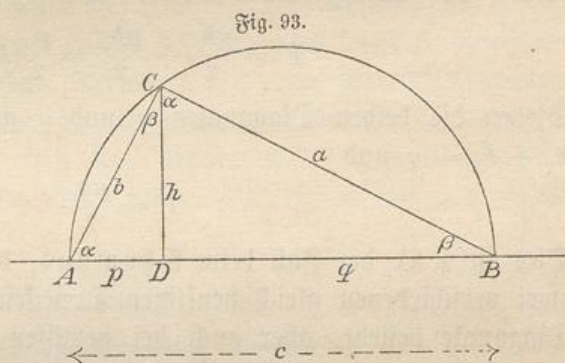


263) Eine Eigenschaft des gleichseitigen Dreiecks. Fällt man von einem beliebigen Punkte  $P$  innerhalb eines gleichseitigen Dreiecks Lote  $l_1, l_2, l_3$  auf dessen Seiten und verbindet man  $P$  mit den Ecken des Dreiecks, so ist die Fläche des Dreiecks  $F = \triangle ABP + \triangle BCP + \triangle CAP = \frac{al_1}{2} + \frac{al_2}{2} + \frac{al_3}{2} = \frac{a}{2}(l_1 + l_2 + l_3)$ . Also ist  $l_1 + l_2 + l_3 = \frac{2F}{a} = h$ . Folglich gilt der Satz:

Die Summe der von einem beliebigen Punkte innerhalb des gleichseitigen Dreiecks auf dessen Seite gefällten Lote ist konstant und zwar gleich der Höhe des Dreiecks.

Liegt der Punkt  $P$  außerhalb des Dreiecks, so ist entweder eins der Lote, oder es sind zwei solche von außen her auf die Dreiecksseiten zu fällen. Dann bleibt der Satz bestehen, sobald man diese Lote als negativ auffaßt. (Man versuche den Satz auch ohne Rechnung, d. h. rein geometrisch zu beweisen.)

264) Eine Eigenschaft des rechtwinkligen Dreiecks. Fig. 93 stelle ein rechtwinkliges Dreieck mit der Höhe  $h$  (auf der Hypotenuse) dar.



Die Abschnitte der Hypotenuse bezeichne man mit  $p$  und  $q$ . Dabei ist

$$h^2 = a^2 - q^2,$$

$$h^2 = b^2 - p^2,$$

also durch beiderseitige Addition

$$2h^2 = a^2 + b^2 - p^2 - q^2 = c^2 - p^2 - q^2$$

oder, da  $c = p + q$  ist,

$$2h^2 = (p + q)^2 - (p^2 + q^2) = p^2 + q^2 + 2pq - (p^2 + q^2) = 2pq.$$

Daraus folgt  $h^2 = pq$ , d. h.:

Das Produkt aus den Abschnitten der Hypotenuse ist gleich dem Quadrate der Höhe.

Aus  $h \cdot h = p \cdot q$  folgt  $\frac{p}{h} = \frac{h}{q}$  oder  $p : h = h : q$ . Daher nennt man  $h$  die mittlere Proportionale zu  $p$  und  $q$ . Diese kann daher konstruiert werden, indem man  $p$  und  $q$  aneinanderlegt, darüber einen Halbkreis zeichnet und im Teilpunkte ein bis zum Kreise reichendes



Lot errichtet. Eine Proportion, in der das zweite und dritte Glied übereinstimmen, nennt man eine stetige Proportion.

In Fig. 82 war das Quadrat über  $BC$  gleich dem Rechteck aus der Hypotenuse und dem anliegenden Abschnitte der letzteren. In der Bezeichnungsweise der Fig. 93 folgt also  $a^2 = q \cdot c$  und  $b^2 = p \cdot c$ . Demnach ist  $a$  mittlere Proportionale zu  $p$  und  $c$ ; ebenso ist  $b$  mittlere Proportionale zu  $p$  und  $c$ . Dies gibt eine neue Konstruktion der mittleren Proportionale zweier Geraden. (Welche?)

(In der Ähnlichkeitslehre ergeben sich diese Sätze in sehr einfacher Weise.)

265) Das allgemeine Viereck gewöhnlicher Art läßt sich durch jede Diagonale in zwei Dreiecke zerlegen. Seine Fläche läßt sich z. B. berechnen, wenn die Diagonale  $BD = p$  und die von  $A$  und  $C$  auf diese gefällten Lote  $h_1$  und  $h_3$  bekannt sind. Dann ist

$$F = \frac{ph_1}{2} + \frac{ph_3}{2} = \frac{p}{2}(h_1 + h_3).$$

Stehen die beiden Diagonalen  $p$  und  $q$  aufeinander senkrecht, so ist  $h_1 + h_3 = q$  und

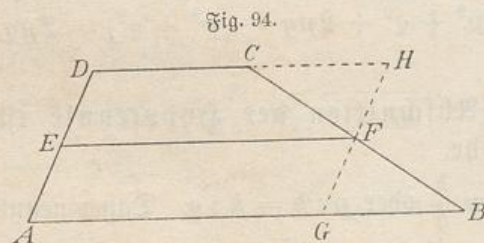
$$F = \frac{pq}{2}.$$

Dies ist z. B. der Fall beim Rhombus, beim Deltoid, welches aus zwei verschiedenen gleichschenkligen Dreiecken über bzw. unter derselben Diagonale besteht, aber auch bei gewissen unsymmetrischen Vierecken.

Sind von einem Viereck die Seiten  $a, b, c, d$  und die eine Diagonale gegeben, so läßt sich jedes durch die letztere abgeschnittene Dreieck nach der Heronischen Dreiecksformel berechnen, also ist auch die Vierecksfläche bekannt.

266) Über das Trapez, bei dem ein paralleles Seitenpaar vorhanden ist, muß für die Flächenberechnung folgendes als bekannt vorausgesetzt werden: Halbirt man in einem Trapez die nicht parallelen Seiten, und zieht man die Verbindungslinie der

Halbierungspunkte, so ist diese zu dem anderen Seitenpaare parallel und gleich der halben Summe dieser Seiten.



der nicht parallelen Seiten  $AD$  und  $BC$ . Man lege durch  $F$  eine Parallele  $GH$  zu  $AD$  von der einen Parallelen bis zur Verlängerung

**Beweis.** In Fig. 94 sei  $ABCD$  das Trapez,  $E$  und  $F$  seien die Halbierungspunkte



der anderen, dann ist  $\triangle FBG \cong \triangle FCH$  (zweiter Kongruenzsatz), also  $GF = FH$  und somit  $EF$  Mittellinie des Parallelogramms  $AGHD$ . Daraus folgt  $EF \parallel AG \parallel DH$ . Ferner ist

$$EF = DC + CH,$$

und zugleich

$$EF = AB - GB,$$

folglich durch beiderseitige Addition  $2EF = AB + DC + (CH - GB)$ , oder, da  $CH - GB = 0$  ist,  $2EF = AB + DC$

$$\text{und} \quad EF = \frac{AB + DC}{2}.$$

Man nennt  $\frac{AB + DC}{2}$  das arithmetische Mittel der beiden Grundlinien  $AB$  und  $DC$  oder auch die mittlere Grundlinie. Sind  $AB = a$ ,  $DC = b$  und die Höhe  $h$  (der Abstand der beiden Parallelen) bekannt, so ist die Fläche des Trapezes leicht zu berechnen. Denkt man sich nämlich das Dreieck  $FHC$  von Parallelogrammen abgeschnitten und in der Form des kongruenten Dreiecks  $FGB$  an  $FG$  angelegt, so erkennt man, daß das Trapez  $ABCD$  dem Parallelogramm flächengleich ist. Da aber  $AG = EF$  ist, so folgt als Fläche für beide Figuren

$$F = \frac{a + b}{2} h.$$

Die Trapezfläche ist also gleich dem Produkte aus der mittleren Grundlinie und der Höhe.

Zu den Trapezen gehört ein gegen die Mittellinie symmetrisches, das Antiparallelogramm oder gleichschenklige Trapez.

267) Das gewöhnliche Tangentenviereck. Hat das Tangentenviereck den Umfang

$$u = a + b + c + d, \text{ wobei}$$

$$a + c = b + d = \frac{u}{2} \text{ ist, und}$$

hat sein Inkreis den Radius  $\varrho$ , so läßt sich seine Fläche leicht berechnen. Denn es ist  $\triangle AMB$

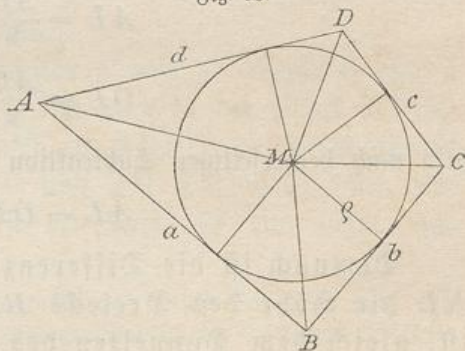
$$+ \triangle BMC + \triangle CMD$$

$$+ \triangle DMA = \frac{a\varrho}{2} + \frac{b\varrho}{2} + \frac{c\varrho}{2}$$

$$+ \frac{d\varrho}{2}, \text{ also ist die Gesamtfläche}$$

$$F = \frac{\varrho}{2} (a + b + c + d) = \frac{\varrho}{2} u = \varrho(a + c) = \varrho(b + d).$$

Fig. 95.





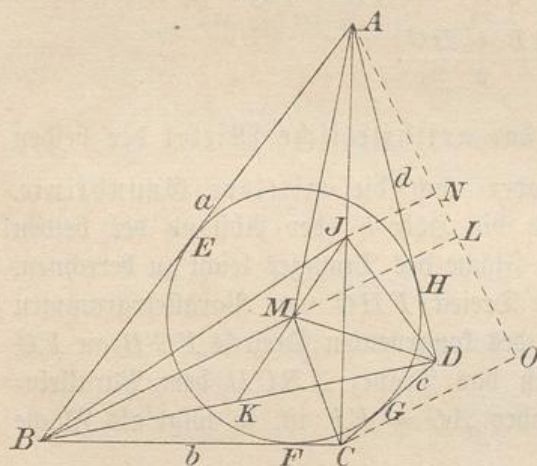
268) Eine merkwürdige Eigenschaft des Tangenten-  
vierecks ergibt sich aus dem Verhalten der vier Teilvierecke.

In Fig. 96 ist

$$(1) \quad \triangle AMB - \triangle CMB = \frac{a \varrho}{2} - \frac{b \varrho}{2} = \frac{\varrho}{2} (a - b),$$

$$(2) \quad \triangle AMD - \triangle CMD = \frac{d \varrho}{2} - \frac{c \varrho}{2} = \frac{\varrho}{2} (d - c).$$

Fig. 96.



Aus  $a + c = b + d$  folgt  
aber  $a - b = d - c$ , folg-  
lich stimmen beide Dif-  
ferenzen überein. (Vgl.  
Nr. 286.)

Ist nun  $J$  der Hal-  
bierungspunkt der Diago-  
nale  $AC$ , so wird behaup-  
tet, daß die Differenz (1)  
das Doppelte vom Dreieck  
 $BMJ$  sei.

Fällt man nämlich  
von  $A$  aus ein Lot  $AL$   
auf die Verlängerung

von  $BM$ , so ist  $\triangle ABM = \frac{BM \cdot AL}{2}$ . Fällt man von  $C$  ein Lot  
 $CO$  auf  $AL$ , so ist  $OL$  die Höhe des Dreiecks  $BMC$  für die Grund-  
linie  $BM$ , also  $\triangle BMC = \frac{BM \cdot OL}{2}$ . Die Differenz (1) ist also  
gleich  $\frac{BM \cdot AL}{2} - \frac{BM \cdot OL}{2} = \frac{BM(AL - OL)}{2}$ . Fällt man von  $J$   
aus ein Lot  $JN$  auf  $AO$ , so ist  $AN = \frac{AO}{2}$ , also

$$AL = \frac{AO}{2} + NL,$$

$$OL = \frac{AO}{2} - NL,$$

also nach beiderseitiger Subtraktion

$$AL - OL = 2NL.$$

Demnach ist die Differenz (1) gleich  $BM \cdot NL$ , oder, da  
 $NL$  die Höhe des Dreiecks  $BMJ$  für die Grundlinie  $BM$   
ist, gleich dem Doppelten des Dreiecks  $BMJ$ .

Ganz ebenso läßt sich mit Hilfe der entsprechenden Hilfs-  
linien beweisen, daß die Differenz (2) gleich dem Doppelten des



Dreiecks  $DMJ$  ist. Da aber beide Differenzen übereinstimmen, so folgt, daß

$$(3) \quad \triangle BMJ = \triangle DMJ \text{ ist.}$$

Ist nun  $K$  die Mitte der Diagonale  $BD$ , so ist auch  $\triangle BKM = \triangle DKM$ . Wäre also  $JMK$  eine gebrochene Linie, so würde Viereck  $BKMJ =$  Viereck  $DKMJ$  sein. Zieht man aber die Gerade  $KJ$ , so ist auch  $\triangle BKM = \triangle DKM$ . Folglich muß  $M$  auf  $JK$  liegen. (Läge nämlich  $M$  rechts vor  $KJ$ , so würde  $BKMJ > DKMJ$  sein, läge es links von  $JK$ , so würde es kleiner als dieses sein.) Oder:  $\triangle JMK$  hat den Inhalt Null, demnach liegen  $J$ ,  $K$  und  $M$  auf einer Geraden.

Folglich gilt der Satz:

Die Verbindungslinie der Diagonalenmitten eines Tangentenvierecks geht stets durch den Mittelpunkt des In-Kreises.\*)

**Bemerkungen.** a) Ist der Winkel bei  $D$  ein solcher von  $180^\circ$ , so wird das Tangentenviereck zum Tangentendreieck und  $D$  wird Berührungspunkt des In-Kreises. Jetzt wird  $J$  der Halbierungspunkt der Dreiecksseite  $AC$ . Daraus folgt:

Die Mitte der Berührungstransversale ( $BD$ ) eines Dreiecks und die Mitte der zugehörigen Dreiecksseite ( $AC$ ) haben eine Verbindungslinie, die durch den Mittelpunkt des In-Kreises geht. Dort also schneiden einander die drei entsprechenden Verbindungslinien für das ganze Dreieck.

b) Bezeichnet man die vier Teildreiecke  $AMB$ ,  $BMC$ ,  $CMD$ ,  $DMA$  des Tangentenvierecks als  $J_1$ ,  $J_2$ ,  $J_3$ ,  $J_4$ , so folgt aus ihren Inhaltsformeln  $J_1 : J_2 : J_3 : J_4 = a : b : c : d$ . Aus der obigen Formel  $J_1 - J_2 = J_4 - J_3$  folgt noch  $J_1 + J_3 = J_2 + J_4$ . Man beweise noch, daß  $\angle AMB + \angle CMD = 180^\circ$  ist, ebenso  $\angle BMC + \angle DMA = 180^\circ$ . (Vgl. Nr. 286.)

c) Verlängert man die Gegenseiten  $a$  und  $c$ , ebenso  $b$  und  $d$  bis zum Durchschnitte  $P$  bzw.  $Q$ , so hat man in der Figur  $APCQ$  ein Viereck mit einspringendem Winkel, in  $BPDQ$  ein überschlagenes Viereck. Bei dem ersteren sind  $AC$  und  $PQ$  Diagonalen, bei dem anderen  $PD$  und  $PQ$ . Beiden ist der Kreis  $M$  ein- bzw. an-

\*) Dies scheint der einfachste Elementarbeweis dieses Satzes zu sein. In Teil III, 2. Auflage dieses Lehrbuchs ist ein umständlicherer Nachweis geliefert. Der Satz ist ein Sonderfall eines Satzes von Gauß über die drei Diagonalenmitten des vollständigen Vierseits und über die Mittelpunkte der einem Vierseit einbeschriebenen Kegelschnitte. (Vgl. Teil III.)

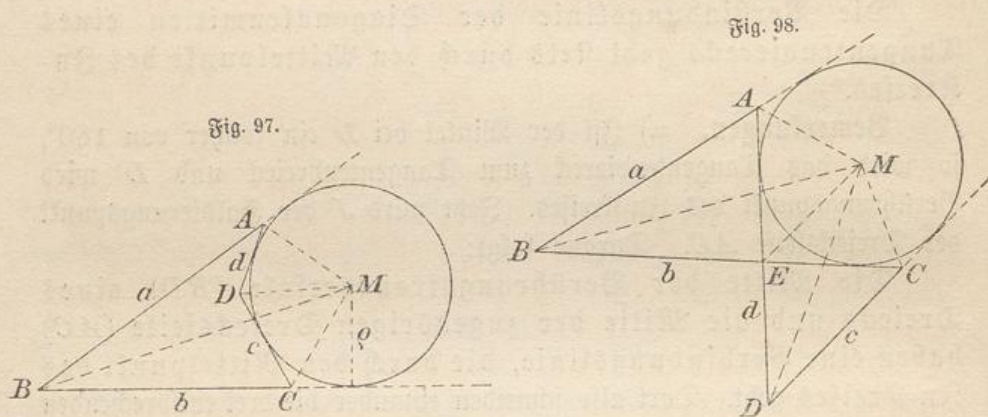


beschrieben. Man versuche ebenso zu zeigen, daß die Halbierungspunkte aller drei Diagonalen  $AC$ ,  $BD$  und  $PQ$  auf der durch  $M$  gehenden Geraden  $JK$  liegen. (Gaußsche Gerade.)

269) Flächen der drei Arten anbeschriebener Tangentenvierecke.

a) Für das Tangentenviereck mit einspringendem Winkel (bei  $D$ ) ist  $F = \triangle AMB + \triangle BMC - \triangle CMD - \triangle DMA = a \frac{\rho}{2} + b \frac{\rho}{2} - c \frac{\rho}{2} - d \frac{\rho}{2} = \frac{\rho}{2}(a + b - c - d)$ . (Vgl. Fig. 97.)

b) Das überschlagene Tangentenviereck  $ABCD$  hat keinen Inhalt im gewöhnlichen Sinne. Man versteht unter seinem Inhalte den



Unterschied der Dreiecke  $ABE$  und  $CDE$ . (Die Fläche des einen Dreiecks wird gewissermaßen als negativ aufgefaßt.) Dann ist wieder  $F = \triangle AMB + \triangle BMC - \triangle CMD - \triangle AMD = \frac{\rho}{2}(a + b - c - d) = \triangle ABE - \triangle CDE$ . (Vgl. Fig. 98.)

c) Auch für die dritte Art von Tangentenvierecken, bei der keine Seite unmittelbar berührt, gilt die genannte Flächenformel. (Vgl. Fig. 72.)

370) Die Fläche jedes einem Kreise umbeschriebenen Vielecks gewöhnlicher Art ist

$$F = \frac{\rho}{2}(a + b + c + d + \dots) = \frac{\rho}{2}u.$$

Verbindet man die Ecken eines allgemeinen konvexen Vielecks ( $n$ -Ecks) mit einem Punkte  $P$  seines Innern, so zerlegt man es in  $n$  Dreiecke. Sind  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  die Seiten,  $h_1, h_2, h_3, \dots, h_n$  die zugehörigen Höhen der Dreiecke, so ist die Fläche

$$F = \frac{1}{2}[a_1 h_1 + a_2 h_2 + a_3 h_3 + \dots + a_n h_n].$$



## 271) Bemerkungen über Pythagoreische Zahlen.

Im Vorkursus § 72 wurde eine Reihe von Gruppen ganzer Zahlen zu je dreien angegeben, von denen jede den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks entsprechen konnte. Diese Pythagoreischen Zahlen sollen hier wiederholt und ergänzt werden.

|              |              |              |              |
|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 3, 4, 5      | 16, 63, 65   | 27, 364, 365 | 36, 77, 85   |
| 5, 12, 13    | 17, 144, 145 | 28, 45, 53   | 36, 323, 325 |
| 7, 24, 25    | 19, 180, 181 | 28, 195, 197 | 37, 684, 685 |
| 8, 15, 17    | 20, 21, 29   | 29, 420, 421 | 39, 80, 89   |
| 9, 40, 41    | 20, 99, 101  | 31, 480, 481 | 39, 760, 761 |
| 11, 60, 61   | 21, 220, 221 | 32, 255, 257 | 40, 399, 401 |
| 12, 35, 37   | 23, 264, 265 | 33, 56, 65   | 41, 840, 841 |
| 13, 84, 85   | 24, 143, 145 | 33, 544, 545 | 43, 924, 925 |
| 15, 112, 113 | 25, 312, 313 | 35, 612, 613 | 44, 117, 125 |
|              |              |              | 44, 483, 485 |

Multipliziert man die Zahlen einer solchen Gruppe mit einer beliebigen ganzen Zahl, so erhält man wieder eine solche Gruppe, die aber nichts neues bietet. Nur unabhängige Pythagoreische Zahlen sind hier bis zur Zahl 44 für die kleinste Seite angegeben.

Die im Vorkursus angegebene vorläufige Regel, für jede beliebige Zahl  $n (> 5)$  zwei zugehörige größere zu finden, wird jetzt verständlich sein.

a) Ist  $n$  ungerade, so setze man in  $p^2 - q^2 = n^2$  die Zahl  $p = q + 1$ . Dann wird  $(q + 1)^2 - q^2 = n^2$  oder  $2q + 1 = n^2$ , d. h.  $q = \frac{n^2 - 1}{2}$ ,  $p = \frac{n^2 - 1}{2} + 1 = \frac{n^2 - 1 + 2}{2} = \frac{n^2 + 1}{2}$ . Die Lösung gibt also die Zahlengruppe  $n, \frac{n^2 - 1}{2}, \frac{n^2 + 1}{2}$ .

b) Ist  $n$  gerade, so setze man in  $p^2 - q^2 = n^2$  die Zahl  $p = q + 2$ . Dann wird  $(q + 2)^2 - q^2 = n^2$  oder  $4q + 4 = n^2$ , d. h.  $q = \frac{n^2 - 4}{4}$ ,  $p = \frac{n^2 - 4}{4} + 2 = \frac{n^2 + 4}{4}$ . Die Lösung ist also  $n, \frac{n^2 - 4}{4}, \frac{n^2 + 4}{4}$ .

Man findet aber dabei nicht sämtliche unabhängigen Pythagoreischen Zahlen, sondern nur solche Gruppen, bei denen die beiden größeren Zahlen nur um 1 oder 2 voneinander unterschieden sind. (Beispiele findet man im Vorkursus.) Eine allgemeinere Lösung gibt folgendes:

c) Sind  $a$  und  $b$  beliebig gegebene ganze Zahlen und ist dabei  $a > b$ , so ist leicht zu zeigen, daß die Zahlen

$$(a^2 - b^2), (2ab), (a^2 + b^2)$$

eine Gruppe Pythagoreischer Zahlen sind. Es ist nämlich:

$$(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2 = (a^2 + b^2)^2,$$







Da  $\sqrt{3} = 1,732051 \dots$ , also  $2 - \sqrt{3} = 0,267949 \dots$  und daher  $AC = \sqrt{0,267949 \dots} = 0,5176380 \dots$  ist, so folgt als halber Umfang des regelmäßigen Zwölfecks das Sechsfache davon, d. h.  $3,10528 \dots$ . Dies ist schon ein besserer Näherungswert für  $\pi$  als die Zahl 3.

Setzt halbiere man den Bogen  $AC$ , was  $F$  gibt, dann wird durch  $FM$  die Sehne  $AC$  in  $E$  halbiert, und es wird

$$AE = \frac{AC}{2} = 0,2588190 \dots,$$

$$EM = \sqrt{AM^2 - AE^2} = \sqrt{1 - AE^2},$$

$$FE = 1 - EM = 1 - \sqrt{1 - AE^2},$$

also die Sehne

$$\begin{aligned} AF &= \sqrt{AE^2 + FE^2} = \sqrt{AE^2 + (1 - \sqrt{1 - AE^2})^2} \\ &= \sqrt{AE^2 + 1 + 1 - AE^2 - 2\sqrt{1 - AE^2}} = \sqrt{2(1 - \sqrt{1 - AE^2})}. \end{aligned}$$

Hier ist  $AE^2 = 0,06698728 \dots$ , also  $1 - AE^2 = 0,9330127 \dots$  und  $AF = \sqrt{2(1 - \sqrt{0,9330127 \dots})}$ , oder, da  $\sqrt{0,9330127 \dots} = 0,9659258 \dots$  ist,  $AF = \sqrt{2 \cdot 0,0340742 \dots} = \sqrt{0,0681484 \dots} = 0,2610525 \dots$ . Der halbe Umfang des 24-Ecks ist das Zwölffache davon oder  $3,132630$ , was noch näher an  $\pi$  liegt. So kann man, die Halbierung der Bogen wiederholend, fortfahren.

In derselben Weise kann man den halben Umfang der umbeschriebenen regelmäßigen Vielsecke der angegebenen Seitenzahl berechnen. Während die einbeschriebenen Vielsecke einen zu kleinen Näherungswert geben, geben die umbeschriebenen einen zu großen, aber  $\pi$  wird immer enger zwischen zwei Zahlen eingeschnürt. Die Resultate bis zur sechsten Stelle sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

|          | Einbeschrieben: | Umbeschrieben: |         | Folglich:              |
|----------|-----------------|----------------|---------|------------------------|
| 6-Eck    | 3,00000         | 3,46410        | 3       | $< \pi < 3,4 \dots$    |
| 12-Eck   | 3,10583         | 3,21539        | 3,1     | $< \pi < 3,2 \dots$    |
| 24-Eck   | 3,13263         | 3,15966        | 3,13    | $< \pi < 3,15 \dots$   |
| 48-Eck   | 3,13935         | 3,14609        | 3,139   | $< \pi < 3,146 \dots$  |
| 96-Eck   | 3,14103         | 3,14271        | 3,1410  | $< \pi < 3,142 \dots$  |
| 192-Eck  | 3,14145         | 3,14187        | 3,1414  | $< \pi < 3,1418 \dots$ |
| 384-Eck  | 3,14156         | 3,14166        | 3,14156 | $< \pi < 3,14166$      |
| 768-Eck  | 3,14158         | 3,14161        | 3,14158 | $< \pi < 3,14161$      |
| 1536-Eck | 3,14159         | 3,14160        | 3,14159 | $< \pi < 3,14160$      |

Damit ist  $\pi = 3,14159$  auf sechs Stellen richtig berechnet.]

regelmäßiger Vielecke, deren ein- oder umbeschriebener Kreis den Radius 1 hat. Ist das Wurzelauziehen noch nicht geübt, so ist dieser Paragraph zu überspringen.



### f) **Schlußbemerkungen zur planimetrischen Lehraufgabe der Quarta und Untertertia.**

a) Ein wesentlicher Bestandteil der Planimetrie liegt in den Erklärungen (Definitionen) der in ihr zu behandelnden Begriffe. Diese Begriffe sind entweder Grundbegriffe oder zusammengesetzte Begriffe.

Grundbegriffe sind z. B. Punkt, Linie, Fläche.

Zusammengesetzte Begriffe sind z. B. rechtwinkliges Dreieck, Parallelogramm.

Eine Erklärung soll alles Notwendige enthalten, aber nur das Notwendige. Sie ist entweder eine sachliche Erklärung (Realerklärung) oder eine Entstehungserklärung (genetische Erklärung). So kann man z. B. die Gerade folgendermaßen erklären: Die Gerade ist die kürzeste Verbindungslinie zwischen zwei Punkten. Man kann aber auch sagen: Die Gerade entsteht durch die Bewegung eines stets in derselben Richtung wandernden Punktes.

Aus der Erklärung eines planimetrischen Gebildes müssen sich dessen wesentliche Eigenschaften ableiten lassen. Die Ableitung der Eigenschaften der Gebilde ist eine Hauptaufgabe der Mathematik. Sie muß in streng logischer Weise erfolgen. (Die Logik ist die Wissenschaft, die sich mit den Denkformen, besonders mit den Schlußfolgerungen beschäftigt.)

b) Dasjenige, was über einen planimetrischen (allgemeiner einen mathematischen) Begriff ausgesagt wird, nennt man einen Satz. Ein solcher Satz kann eine allgemein anerkannte Grundwahrheit (ein Axiom) sein oder ein des Beweises bedürftiger Lehrsatz.

α) Als allgemeine Grundsätze werden in der Regel folgende angegeben. \*)

- 1) Wenn zwei Größen einer dritten gleich sind, so sind sie untereinander gleich. Ist  $a = c$  und  $b = c$ , so ist  $a = b$ .
- 2) Gleiches zu Gleichem addiert gibt Gleiches. Ist  $a = a_1$  und  $b = b_1$ , so ist  $a + b = a_1 + b_1$ .
- 3) Gleiches von Gleichem subtrahiert gibt Gleiches. Ist  $a = a_1$  und  $b = b_1$ , so ist  $a - b = a_1 - b_1$ .
- 4) Gleiches mit Gleichem multipliziert gibt Gleiches. Ist  $a = a_1$  und  $b = b_1$ , so ist  $a \cdot b = a_1 \cdot b_1$ .

\*) Als erster Grundsatz wird häufig folgender angegeben: „Jede Größe ist sich selbst gleich.“ Da jedoch zur Gleichheit mindestens zwei Größen gehören, wird er besser übergangen.



- 5) Gleiches durch Gleiches dividiert gibt Gleiches. Ist  $a = a_1$  und  $b = b_1$ , so ist  $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}$ .

Jedem dieser Gleichheitssätze kann ein Ungleichheitssatz zur Seite gestellt werden, z. B. Gleiches zu Ungleichem addiert gibt Ungleiches. Ist z. B.  $a = a_1$ , aber  $b > b_1$ , so ist  $a + b > a_1 + b_1$ ; ist  $a = a_1$ , aber  $b < b_1$ , so ist  $a + b < a_1 + b_1$ .

Dem ersten Grundsatz wird häufig folgender Ungleichheitssatz zur Seite gestellt:

- 6) Ist von zwei gleichen Größen die eine größer (bezw. kleiner) als eine dritte, so ist auch die andere größer (bezw. kleiner) als die dritte.

Im Bereiche der positiven Größen gilt noch folgender Grundsatz:

- 7) Der Teil ist kleiner als das Ganze, oder das Ganze ist größer als jeder seiner Teile.

Diese Grundsätze sind teils schon zur Anwendung gekommen, teils werden sie noch Anwendung finden.

Jeder der ersten sechs Sätze enthält eine Bedingung, unter der das Ausgesagte richtig ist. Die Bedingung nennt man die Voraussetzung, die Aussage heißt die Behauptung. Auf einen Beweis der letzteren wird, wie schon gesagt, verzichtet, weil es sich um allgemein als richtig anerkannte Denkformen (Schlußfolgerungen) handelt.

- β) Neben den allgemeinen Grundsätzen gibt es planimetrische Grundsätze (planimetrische Axiome), bei denen auch auf einen Beweis verzichtet wird. So sagt man z. B.: „In der Ebene lassen sich durch jeden Punkt unendlich viele gerade Linien legen.“

[Bei manchen Sätzen solcher Art können Zweifel herrschen, ob sie zu den Grundsätzen oder zu den eines Beweises bedürftigen Lehrsätzen gehören. \*) Gerade in neuerer Zeit sind in dieser Beziehung über die Grundlagen der Geometrie umfangreiche Untersuchungen scharfsinnigster Art gemacht worden. Zu allgemeiner Einigung ist man noch nicht gelangt. Die Schule kann auf diese kritischen Streitfragen nicht eingehen. Sie nimmt daher manche Sätze als planimetrische Axiome an, die vielleicht später von der strengen Systematik nicht als solche anerkannt werden.

Unter diesen Axiomen hat das sogenannte erste Axiom des Euklid eine hervorragende Rolle gespielt. Es handelt sich um

\*) Die eingeklammerten Bemerkungen können vorläufig überschlagen werden, müssen aber dann später besprochen werden.



den bekannten Satz, daß, wenn bei zwei von einer dritten geschnittenen Geraden korrespondierende Winkel gleich sind, die letzteren Geraden einander nicht schneiden können, wie weit man sie auch verlängere. Zweitausend Jahre lang haben auch bedeutende Mathematiker den Satz streng zu beweisen versucht. Erst Gauß und einige seiner Zeitgenossen haben erkannt, daß ein strenger Beweis des Satzes unmöglich ist, daß also jener scharfsinnige Grieche ihn mit vollem Rechte als Axiom hingestellt hat. (Nimmt man diesen Satz nicht als richtig an, so kommt man auf die verschiedenen Formen nichteuklidischer Geometrien.) Der Satz kann übrigens durch den Satz ersetzt werden, daß die Winkelsumme im Dreieck gleich zwei Rechten sei. Geschieht dies, so ist dieser Satz als Axiom zu betrachten.

Im allgemeinen wird anerkannt, daß die Schule eine größere Anzahl von Axiomen nötig hat als die Wissenschaft.

- γ) Bei einem Lehrsatz dagegen handelt es sich um Voraussetzung, Behauptung und Beweis.

Soll z. B. bewiesen werden, daß gleichen Seiten eines Dreiecks gleiche Winkel gegenüberliegen, so wird z. B. vorausgesetzt, daß  $ABC$  ein Dreieck und daß  $AC = BC$  ist. Behauptet wird, daß  $\angle \beta = \angle \alpha$  sei. Um den Beweis zu liefern, hat man im vorliegenden Falle eine Hilfskonstruktion nötig. Entweder fällt man von  $C$  aus auf die Gegenseite ein Lot oder man verbindet  $C$  mit der Mitte der Gegenseite oder man halbiert den Winkel bei  $C$ . Dann beweist man, daß durch die Hilfslinie das Dreieck in zwei kongruente Teile zerlegt wird. Daraus folgt die Gleichheit der homologen Winkel  $\beta$  und  $\alpha$ .

So ergibt sich für jeden Lehrsatz ein bestimmtes Schema:

- 1) Der Lehrsatz selbst, 2) die Voraussetzung, 3) die Behauptung, 4) die etwa nötige Hilfskonstruktion, 5) der Beweis.

Zur Übung im streng logischen Denken ist es durchaus erforderlich, dieses Schema an vielen Beispielen durchzuführen. Auch ist alles, was im Beweise gesagt wird, zu begründen, sei es durch Verweisung auf den entsprechenden Grundsatz oder durch Angabe eines bereits bewiesenen Lehrsatzes. Im obigen Beispiele ist z. B. der angewandte Kongruenzsatz zu nennen. Nur der Kürze halber ist in diesem Buche das angegebene Schema nicht durchgängig angewandt.

Der Beweis ist entweder ein unmittelbarer, d. h. ein direkter Beweis, oder ein mittelbarer, d. h. ein indirekter Beweis. Bei dem ersteren wird der Nachweis der Richtigkeit wirk-



lich geführt; bei dem letzteren dagegen wird gezeigt, daß, wenn man die Behauptung als falsch annimmt, man auf etwas Unge-  
reimtes, auf einen Widerspruch kommt, sodaß nichts übrig bleibt,  
als die Behauptung als richtig anzuerkennen. Auch dazu sind Bei-  
spiele bereits gegeben.

Bisweilen ergibt sich aus dem Beweise der Behauptung gleich-  
zeitig anderes, was nicht behauptet war. Man pflegt einen solchen  
beiläufig gefundenen Satz als einen Zusatz (Ergänzungssatz, Ko-  
rollarium) zu bezeichnen.

c) Ein weiterer Bestandteil der Planimetrie sind die einfachsten  
Konstruktionsforderungen oder Postulate, über die das Nötige  
in Nr. 66 bis 68 gesagt ist. An sie schließen sich die Grundkonstruk-  
tionen an. (Vgl. 70 bis 77.)

Zusammengesetztere und schwierige Konstruktionsaufgaben sind  
auf diese zurückzuführen. (Vgl. 96 bis 170 und 196 bis 209.) Wie  
den Lehrsäßen und den zugehörigen Beweisen, so ist auch den Kon-  
struktionsübungen ein bestimmtes Schema zugrunde zu legen. Darüber  
ist in Nr. 196 bis 200 das Nötige gesagt worden.

d) Hand in Hand mit den Konstruktionsaufgaben gehen die  
Berechnungsaufgaben, sodaß sich in dem hier behandelten Bereiche  
jeder der ersteren eine der letzteren anschließen läßt. Auf einem höheren  
Standpunkte aber werden Berechnungsaufgaben gelöst, die mit den  
gewöhnlichen Hilfsmitteln der Konstruktion, d. h. mit Zirkel und Lineal,  
nicht lösbar sind.

## B. Planimetrische Lehraufgabe der Obertertia und Unterssekunda.

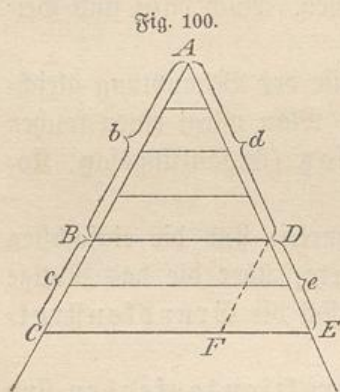
### I. Ähnlichkeitslehre für geradlinige Gebilde.

273) Werden die Schenkel eines Winkels (oder ihre  
Verlängerungen über den Scheitel hinaus) durch zwei Pa-  
rallelen geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte des einen  
Schenkels wie die des anderen.

**Beweis.** In Fig. 100 mögen die Teile  $AB$  und  $BC$  ein  
rationales Verhältnis haben. Man verwandle dieses (wie in Nr. 306)  
in ein ganzzahliges Verhältnis  $m:n$ . Setzt denke man sich  $AB$  in  $m$ ,  
 $BC$  in  $n$  gleiche Teile eingeteilt. Durch die Teilpunkte lege man  
Parallele zu den beiden gegebenen Parallelen  $BD$  und  $CE$ . Dadurch



wird (nach Nr. 93)  $AD$  in  $m$ ,  $DE$  in  $n$  gleiche Teile eingeteilt, und damit gezeigt, daß sich  $AD$  zu  $DE$  ebenfalls wie  $m : n$  verhält. Die Teile von  $AD$  und  $DE$  sind nämlich ebenfalls von derselben Größe.



Ist das Verhältnis ein irrationales, wie z. B.  $1 : \pi$ , so führt man den Nachweis mit beliebiger Genauigkeit, indem man statt des endlosen Bruches  $\pi$  den auf beliebig viele Stellen abgekürzten Dezimalbruch nimmt, wobei der Fehler verschwindend klein gemacht werden kann. (Vgl. Nr. 306.)

274) Ist das Verhältnis zweier Größen gleich dem Verhältnisse zweier anderen, so sagt man, die Größen stehen in Proportion oder seien einander proportioniert. In Fig. 100 finden folgende Proportionen statt:

- a)  $AB : BC = AD : DE$  oder  $b : c = d : e$ ,
- b)  $AB : AC = AD : AE$  oder  $b : (b + c) = d : (d + e)$ ,
- c)  $AC : BC = AE : DE$  oder  $(b + c) : c = (d + e) : e$ .

Jede kann nach Art von 273 bewiesen werden.\*) Man schließt daraus: Besteht in Fig. 99 die Proportion  $b : c = d : e$ , so besteht die Proportion d)  $(b + c) : (d + e) = b : d$ . Setzt man  $b + c = k$  und  $d + e = l$ , so gilt auch die Proportion c)  $k : c = l : e$ . Proportion a) lautet dann  $(k - c) : c = (l - e) : e$  oder  $(k - c) : (l - e) = c : e$ . Allgemein folgt:

Ist  $m : n = m_1 : n_1$ , so ist auch  $(m + n) : (m_1 + n_1) = m : m_1$ , ferner ist auch  $(m - n) : (m_1 - n_1) = m : m_1$ , folglich auch  $(m + n) : (m - n) = (m_1 + n_1) : (m_1 - n_1)$ . (Mache die Probe, ob in jeder dieser Proportionen die Produkte der äußeren und inneren Glieder gleich sind, und versuche den Satz in Worten auszudrücken.)

\*) Die Möglichkeit der verschiedenen Umstellungen jeder Proportion wird als bekannt vorausgesetzt. Im anderen Falle ist zu zeigen, daß aus  $\frac{b}{c} = \frac{d}{e}$  folgt:  $be = cd$ , d. h. daß das Produkt der inneren Glieder gleich dem der äußeren ist.  $\frac{b}{c} = \frac{d}{e}$  ist nämlich nur eine andere Schreibweise für  $b : c = d : e$ . (Dies abgekürzt: „ $b$  zu  $c$  wie  $d$  zu  $e$ “.) Alle Umstellungen haben so zu erfolgen, daß  $b$  und  $e$  beide innen, oder beide außen stehen. Für das Folgende werde noch folgender Satz vorausgesetzt: Stimmen zwei Proportionen in den drei ersten Gliedern überein, so stimmen sie auch im vierten Gliede überein.



Außerdem folgt aus Fig. 100 folgender Satz:

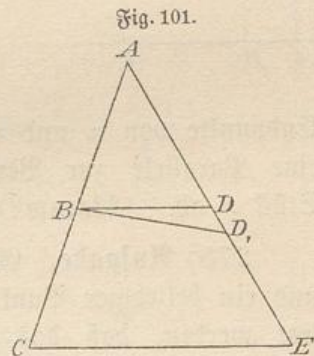
275) Werden die Schenkel eines Winkels (oder ihre Verlängerungen über den Scheitel hinaus) von zwei Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Parallelen (von Schenkel zu Schenkel gemessen) wie die Abschnitte jedes Schenkels (vom Scheitel aus gemessen).

Zum Beweise ziehe man in Fig. 100  $DF \parallel AC$ , dann ist nach vorigem Satze  $CF:CE = AD:AE$ , oder, da  $CF = BD$  ist,  $BD:CE = AD:AE$ , also auch  $BD:CE = AB:AC$ .

Man kann diese drei Proportionen in folgender Schreibweise vereinigen, bei der jedes Dreieck in demselben Sinne umkreist wird:

$$AB:BD:DA = AC:CE:EA.$$

276) Umkehrung: Werden die Schenkel eines Winkels von zwei Geraden so geschnitten, daß die Abschnitte des einen Schenkels sich so verhalten, wie die des anderen, so sind die Geraden parallel.



**Beweis.** Zu Fig. 101 sei  $AB:AC = AD:AE$ . Angenommen  $BD$  wäre nicht parallel zu  $CE$ , so ließe sich eine Linie  $BD_1$  parallel zu  $CE$  ziehen. Dann würde  $AB:AC = AD_1:AE$  sein, d. h. die gleichnamigen Brüche  $\frac{AD}{AE}$  und  $\frac{AD_1}{AE}$  würden beide gleich  $\frac{AB}{AC}$  sein, obwohl der Zähler  $AD_1$  verschieden vom Zähler  $AD$  ist. Dies ist aber unmöglich, also ist die Annahme,  $BD$  sei nicht parallel zu  $CE$ , falsch.

**Bemerkung.** Für jede Art von Parallelprojektion (schräge oder gerade) folgt aus 273):

Die Verhältnisse zweier Abschnitte einer Geraden sind gleich den Verhältnissen der entsprechenden Abschnitte auf der Projektion der Geraden, oder: Bei der Parallelprojektion gehen die Verhältnisse auf jeder Geraden ungeändert auf die Projektion über. So ist z. B. in Fig. 102:  $AB:BC = A_1B_1:B_1C_1$ . (Lege zum Beweise durch  $A_1$  eine Parallele zu  $AC$ .) Dasselbe gilt von den Projektionen proportionaler Stücke zweier paralleler Geraden auf eine andere Gerade.

277) **Aufgabe.** Zu drei gegebenen Geraden  $a, b, c$  die vierte Proportionale  $x$  zu konstruieren.



**Auflösung.** Schneide vom Scheitel eines Winkels aus auf dessen Schenkeln  $a$  bzw.  $c$  ab und verlängere  $a$  um  $b$ , verbinde die

Fig. 102.

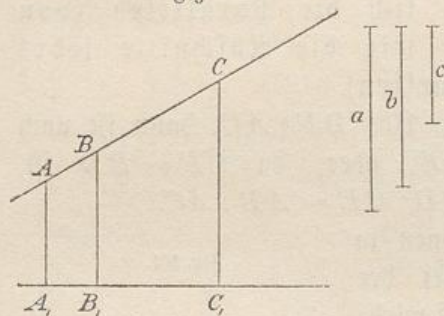
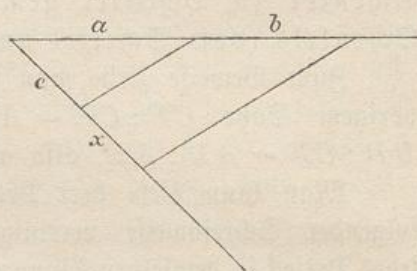


Fig. 103.



Endpunkte von  $a$  und  $c$  und lege durch den freien Endpunkt von  $b$  eine Parallele zur Verbindungslinie. Diese schneidet das gesuchte Stück  $x$  ab. (Warum?). (Vgl. Fig. 103.)

**278) Aufgabe.** Gegeben seien zwei einander schneidende Geraden und ein beliebiger Punkt. Durch den Punkt soll eine Gerade so gelegt werden, daß das zwischen den beiden Geraden liegende Stück durch den Punkt halbiert ist.

**Auflösung.**  $P$  sei der gegebene Punkt,  $B$  der Schnittpunkt der Geraden  $AB$  und  $CB$ . Man lege durch  $P$  eine Parallele zu  $AB$  bis zum Schnittpunkte  $D$  mit  $BC$ . Man mache auf  $BC$  das Stück  $DE = BD$ , wobei  $DE$  Verlängerung von  $BD$  über  $D$  hinaus sein soll, dann ist  $EP$  die eine Hälfte der gesuchten Geraden.

**Bemerkung.** Statt die Halbierung der Geraden zu verlangen, kann man eine Teilung im beliebigen Verhältnis  $m : n$  fordern.

**279)** Stimmen zwei Vielecke in allen gleichliegenden (homologen) Winkeln und in den Verhältnissen je zweier aufeinander folgenden Seiten überein, so sagt man, sie seien einander ähnlich ( $\sim$ ).

Ist z. B. in Fig. 104  $\sphericalangle A = \sphericalangle A_1$ ,  $\sphericalangle B = \sphericalangle B_1$  usw. und ist  $\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}$ ,  $\frac{BC}{CD} = \frac{B_1C_1}{C_1D_1}$  usw., oder ist, was dasselbe bedeutet,  $AB : BC : CD : DE : EA = A_1B_1 : B_1C_1 : C_1D_1 : D_1E_1 : E_1A_1$ , so sind die Vielecke ähnlich, und das eine ist die gesetzmäßige Vergrößerung bzw. Verkleinerung des anderen. Man hat in einem Dreieck nur nötig, eine Parallele zu einer Seite zu ziehen, um ein ihm ähnliches Dreieck zu erhalten. Denn beide haben übereinstimmende Winkel und die Seiten sind nach § 275 proportional. Die Ähnlichkeit zweier Vielecke folgt schon aus der Übereinstimmung in einer geringeren An-



zahl von „Stücken“, die teils Seitenverhältnisse, teils Winkel (oder auch andere Stücke) sein können. Die Ähnlichkeitsätze geben an, wie groß die Anzahl der übereinstimmenden Stücke sein muß. Für das Dreieck sollen die wichtigsten Ähnlichkeitsätze, die den Kongruenzsätzen entsprechen, der Reihe nach bewiesen werden.

280) Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie übereinstimmen in einem Winkel und im Verhältnis der einschließenden Seiten. (Erster Ähnlichkeitsatz.)

**Beweis.** In Fig. 105 sei  $\gamma = \gamma_1$  und  $AC:BC = A_1C_1:B_1C_1$ . Man mache  $CA_2 = C_1A_1$  und  $CB_2 = C_1B_1$  und ziehe  $A_2B_2$ . Dann folgt aus  $A_2C:B_2C = AC:BC$ , daß  $A_2B_2 \parallel AB$  ist. Nach

275) sind dann alle Seiten der Dreiecke  $ABC$  und  $A_2B_2C_2$  proportional, und außerdem ist  $\alpha = \alpha_2$  und  $\beta = \beta_2$ . Diese Dreiecke sind also ähnlich. Da aber  $\triangle A_2B_2C \cong \triangle A_1B_1C_1$  ist (erster Kongruenzsatz), so folgt, daß  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$  ist.

281) Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in zwei Winkeln übereinstimmen. (Zweiter Ähnlichkeitsatz.)

**Beweis.** In Fig. 105 sei  $\gamma = \gamma_1$  und  $\alpha = \alpha_1$ , also auch  $\beta = \beta_1$ . Man mache  $CA_2 = C_1A_1$  und ziehe  $A_2B_2 \parallel AB$ . Dann ist wie vorher  $\triangle ABC \sim \triangle A_2B_2C$ . Da aber  $\triangle A_2B_2C \cong \triangle A_1B_1C_1$  ist (zweiter Kongruenzsatz), so folgt  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ .

282) Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn zwei Seitenverhältnisse des einen mit zwei Seitenverhältnissen des anderen übereinstimmen. (Dritter Ähnlichkeitsatz.)

**Beweis.** In Fig. 105 sei  $AB:BC:CA = A_1B_1:B_1C_1:C_1A_1$ . Man mache  $CA_2 = C_1A_1$  und  $CB_2 = C_1B_1$  und ziehe  $A_2B_2$ . Dann ist, wie vorher,  $\triangle ABC \sim \triangle A_2B_2C$ . Folglich ist  $CB:BA = CB_2:B_2A_2$ , es war aber  $CB:BA = C_1B_1:B_1A_1$ . Diese Pro-

Fig. 104.

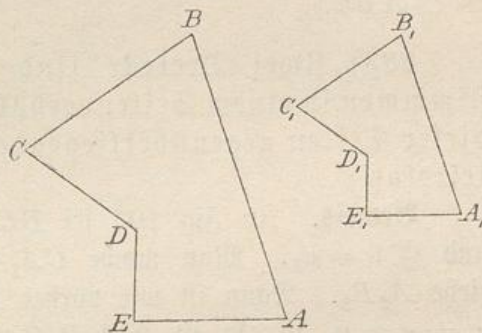
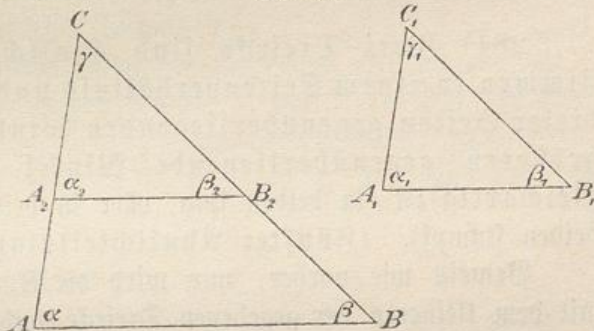


Fig. 105.





portionen stimmen in den drei ersten Gliedern überein, folglich ist auch  $B_2A_2 = A_1B_1$ . Demnach stimmen die kleinen Dreiecke (nach dem dritten Kongruenzsatz) überein. Es ist also auch  $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$ .

283) Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie übereinstimmen in einem Seitenverhältnis und in dem der größeren dieser Seiten gegenüberliegenden Winkel. (Vierter Ähnlichkeitsatz.)

**Beweis.** In Fig. 105 sei  $BC:CA = B_1C_1:C_1A_1$ ,  $BC > CA$  und  $\angle \alpha = \alpha_1$ . Man mache  $CA_2 = C_1A_1$  und  $CB_2 = C_1B_1$  und ziehe  $A_2B_2$ . Dann ist wie vorher  $\triangle A_2B_2C \sim \triangle ABC$ . Da aber  $\alpha_2 = \alpha = \alpha_1$  ist, so ist  $\triangle A_2B_2C \cong \triangle A_1B_1C_1$  (vierter Kongruenzsatz) und daher  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ .

284) Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie übereinstimmen in einem Seitenverhältnis und in dem der kleineren dieser Seiten gegenüberliegenden Winkel, und wenn der der größeren gegenüberliegende Winkel in beiden Dreiecken gleichartig ist (in beiden spitz, oder in beiden ein rechter, oder in beiden stumpf). (Fünfter Ähnlichkeitsatz.)

**Beweis** wie vorher, nur wird die Kongruenz des Hilfsdreiecks mit dem kleineren der gegebenen Dreiecke nach dem fünften Kongruenzsatz bewiesen. (Wird die letztgenannte Bedingung unterlassen, so treten die beim fünften Kongruenzsatz besprochenen beiden Möglichkeiten ein.)

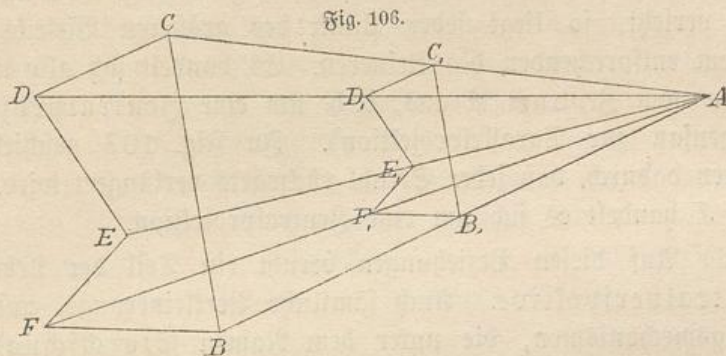
**Aufgabe.** Die fünf Ähnlichkeitsbeweise sollen in folgender gemeinschaftlicher Form geführt werden: Man mache  $CA_2 = CA_1$  und ziehe  $A_2B_2 \parallel AB$ , was ein dem größeren Dreieck ähnliches gibt. Dann zeige man mit Hilfe des entsprechenden Kongruenzsatzes, daß dieses dem kleinen Dreieck kongruent ist.

285) **Aufgabe.** Zu einem gegebenen Vieleck ein ähnliches in vorgeschriebenem Maßstabe zu zeichnen (z. B. Verkleinerung der Seiten auf  $\frac{1}{2}$  der gegebenen).

**Auflösung.** Verbinde die Eckpunkte des gegebenen Vielecks  $BCDEF$  in Fig. 106 mit einem beliebigen Punkte  $A$ . Darauf mache z. B.  $AB_1 = \frac{1}{2} AB$ , ziehe  $B_1C_1 \parallel BC$ ,  $C_1D_1 \parallel CD$ ,  $D_1E_1 \parallel DE$ ,  $E_1F_1 \parallel EF$ , und verbinde  $F_1$  mit  $B_1$ , dann ist  $B_1C_1D_1E_1F_1$  das gesuchte Vieleck und zwar das im halben Maßstabe gezeichnete. Entsprechend verfährt man beim Maßstabe  $\frac{1}{n}$ . (Warum ist die Konstruktion richtig?)

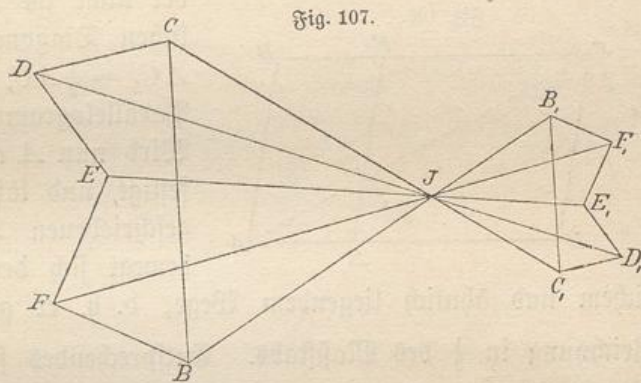


**Bemerkung.** Man nennt  $A$  den äußeren Ähnlichkeitspunkt der beiden ähnlichen und in ähnlicher Lage befindlichen Vielecke.



Für das gesuchte Vieleck ist noch eine zweite Lage möglich, wie aus der folgenden Konstruktion hervorgeht.

Man verbinde sämtliche Ecken des gegebenen Vielecks  $BCDEF$  (Fig. 107) mit einem beliebigen Punkte  $J$ , verlängere jede der Verbindungslinien über  $J$  hinaus, mache z. B. die Verlängerung  $JB_1 = \frac{1}{2}BJ$ , ziehe  $B_1C_1 \parallel BC$ ,  $C_1D_1 \parallel CD$ ,  $D_1E_1 \parallel DE$ ,  $E_1F_1 \parallel EF$  und verbinde  $F_1$  mit  $B_1$ , dann ist  $B_1C_1D_1E_1F_1$  das gesuchte Vieleck (warum?), jedoch ist es gegen das andere um  $180^\circ$  gedreht.



Man nennt  $J$  den inneren Ähnlichkeitspunkt der ähnlichen und entgegengesetzt ähnlich liegenden Vielecke.\*) Der Umlaufssinn ist dabei derselbe. Klappt man die zweite Figur einmal um, so wird der Umlaufssinn der entgegengesetzte. Dann gibt es aber keine Ähnlichkeitspunkte.

Ähnliche Vielecke lassen sich stets in ähnliche oder in entgegengesetzt ähnliche Lagen bringen. Gegebenenfalls ist dabei ein Umklappen erforderlich, ähnlich wie beim Decken kongruenter Figuren. Eine solche Lage ist erreicht, wenn die Verbindungslinien

\*) Man kann diese Lage auch als „verkehrt ähnliche“ bezeichnen. Die beiden angegebenen Konstruktionen sind sehr brauchbar, da sich die Parallelen mit Hilfe des Rechtwinkellineals sehr bequem ziehen lassen.

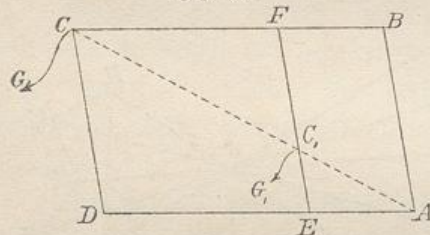


entsprechender Punkte sämtlich durch einen Punkt gehen. Beide Arten von ähnlichen Lagen faßt man zusammen unter dem Namen perspektivische Lage. Denkt man sich nämlich in Fig. 106 das Auge nach  $A$  versetzt, so liegt jeder Punkt des größeren Vielecks genau hinter dem entsprechenden des kleineren. Es handelt sich also um eine Projektion vom Zentrum  $A$  aus, d. h. um eine Zentralprojektion (im Gegensatz zur Parallelprojektion). In Fig. 107 geschieht das Projizieren dadurch, daß jeder Strahl rückwärts verlängert wird. Also auch bei  $J$  handelt es sich um eine Zentralprojektion.

286) Auf diesen Beziehungen beruht ein Teil der Lehre von der Zentralperspektive. Auch sämtliche Verkleinerungs- und Vergrößerungsmechanismen, die unter dem Namen Storchschnabel in der Industrie und im Kunstgewerbe und auch in der Feldmeßkunst vielfach Anwendung finden, gründen sich auf die Lehre von der ähnlichen Lage ähnlicher Gebilde.

In Fig. 108 z. B. ist ein gelenkiges Parallelogramm  $ABCD$  gezeichnet und die gleichfalls eingelenkte Parallele  $EF$  so gelegt, daß z. B.  $AE = \frac{1}{3}AD$  (und  $BF = \frac{1}{3}BC$ ) ist. Bringt man nun den Zeichenstift in  $C_1$  an, wobei  $EC_1 = \frac{1}{3}EF$  sein soll, so liegt  $C_1$  auf

Fig. 108.



der nicht im Mechanismus befindlichen Diagonale  $AC$  und es ist  $AC_1 = \frac{1}{3}AC$ , wie man auch das Parallelogramm in sich bewege. Wird nun  $A$  auf der Unterlage befestigt, und läßt man  $C$  einen vorgeschriebenen Weg zurücklegen, so bewegt sich der Stift  $C_1$  auf ähn-

lichem und ähnlich liegendem Wege, d. h. er gibt die entsprechende Zeichnung in  $\frac{1}{3}$  des Maßstabs. Entsprechendes findet beim Werte  $\frac{1}{n}$  des Verhältnisses statt.  $C$  und  $C_1$  können ihre Rollen vertauschen. So erkennt man die Möglichkeit von Mechanismen, die gesetzmäßige Vergrößerung oder Verkleinerung bewerkstelligen sollen.

287) In ähnlichen Gebilden sind homologe Linien untereinander proportional, und homologe Winkel gleich.

In ähnlichen Dreiecken z. B. verhalten sich homologe Höhen wie homologe Seiten, ebenso ist es mit homologen Mittellinien, Mittelsenkrechten, Winkelhalbierenden, mit den Radien des Umkreises, des Inkreises, der homologen Ankreise. Sämtliche von homologen Linien dieser Arten gebildeten Winkel sind gleich. (Führe den Beweis an Beispielen.)

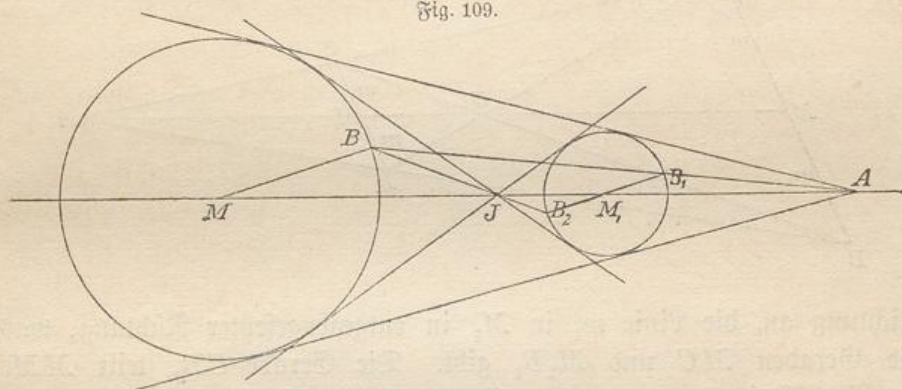


288) In ähnlichen Gebilden sind homologe Flächenstücke proportional den Quadraten homologer Seiten.

Ist z. B. das eine Gebilde im dritten Teile des Maßstabs gezeichnet, und denkt man sich zwei homologe Flächenteile in Quadrate verwandelt, so hat das kleinere Quadrat Seiten von  $\frac{1}{3}$  der Seitenlänge des größeren Quadrates, die Inhalte verhalten sich also wie  $1 : \frac{1}{9}$ . Ebenso ist bei dem Maßstabverhältnis  $1 : n$  das Verhältnis homologer Flächenstücke  $1 : n^2$ . Zugleich ist damit gezeigt, daß Paare von homologen Flächenstücken ähnlicher Figuren untereinander proportional sind. (Bei ähnlichen Körpern ist das Verhältnis der homologen Linien  $1 : n$ , das der homologen Flächen  $1 : n^2$ , das der homologen Raumteile  $1 : n^3$ .)

289) Regelmäßige Vielecke derselben Seitenzahl sind einander ähnlich. Folglich sind auch Kreise einander ähnlich. Je zwei Kreise einer Ebene befinden sich stets in ähnlicher und zugleich in entgegengesetzt ähnlicher Lage. Folglich: Zwei Kreise haben stets einen inneren und einen äußeren Ähnlichkeitspunkt.

Fig. 109.



(Vgl. Nr. 285 und 181.) Diese Punkte werden, wenn die Kreise auseinander liegen, bequem durch die gemeinschaftlichen Tangenten bestimmt. Für alle gegenseitigen Lagen beider Kreise findet man die Ähnlichkeitspunkte A und J folgendermaßen. Zieht man parallele und gleichgerichtete Radien  $MB$  und  $M_1B_1$ , so schneidet  $BB_1$  die Zentrale  $MM_1$  im äußeren Ähnlichkeitspunkte A. Zieht man dagegen die Radien  $MB$  und  $M_1B_2$  entgegengesetzt parallel, so gibt  $BB_2$  auf der Zentrale den inneren Ähnlichkeitspunkt J.

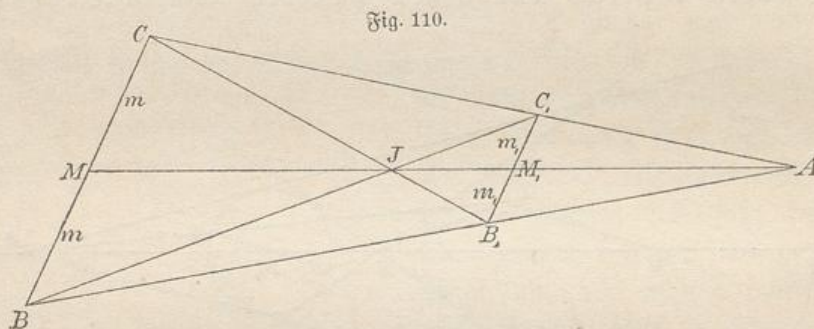
290) Auch zwei parallele Geraden haben stets zwei Ähnlichkeitspunkte A und J, die z. B. durch Verbindung der gleichliegenden und der entgegengesetzt liegenden Endpunkte gefunden werden. (Vgl.



Fig. 110.)  $A$  und  $J$  liegen auf der Verbindungslinie der Halbierungspunkte der Parallelen, denn die letzteren lassen sich als Durchmesser von Kreisen betrachten, die mit den Radien  $MC$  und  $M_1C_1$  um  $M$  bzw.  $M_1$  gelegt sind. (Vgl. Fig. 109.) Ist  $BC$  in lauter gleiche Teile geteilt und verbindet man die Teilpunkte mit  $A$  oder  $J$ , so wird auch  $B_1C_1$  in gleiche Teile geteilt. Teilt man  $BC$  in beliebigem Verhältnis, so wird durch dieselben Verbindungslinien auch  $B_1C_1$  (oder  $C_1B_1$ ) in demselben Verhältnis geteilt. Folglich: Bei der Zentralprojektion einer Geraden auf eine parallele Gerade werden alle Teilungsverhältnisse der einen unverändert auf die andere übertragen. (Wichtig für die Perspektive.)

291) **Aufgabe.** Eine Gerade  $MM_1$  im gegebenen Verhältnisse  $m:m_1$  zu teilen. ( $m$  soll zu  $M$ ,  $m_1$  zu  $M_1$  gehören;  $m$  und  $m_1$  mögen als Geraden von bestimmter Länge gegeben sein.)

**Auflösung.** a) Innere Teilung. Ist  $MM_1$  (Fig. 110) die gegebene Gerade, so lege man die Linie  $m$  in  $M$  unter beliebiger



Richtung an, die Linie  $m_1$  in  $M_1$  in entgegengesetzter Richtung, was die Geraden  $MC$  und  $M_1B_1$  gibt. Die Gerade  $CB_1$  teilt  $MM_1$  im Verhältnis  $m:m_1$ . (Beweise mit Hilfe ähnlicher Dreiecke, daß  $MJ:M_1J = m:m_1$  ist.)

b) Äußere Teilung. Bilde wie vorher  $MC = m$  und ziehe  $M_1C_1 = m_1$  als gleichgerichtete Parallele.  $CC_1$  gibt dann auf der Verlängerung von  $MM_1$  den äußeren Teilpunkt  $A$ . (Beweise mit Hilfe ähnlicher Dreiecke, daß  $MA:M_1A = m:m_1$  ist.)

**Bemerkung.** Aus  $MJ:M_1J = m:m_1$  und  $MA:M_1A = m:m_1$  folgt:  $MJ:M_1J = MA:M_1A$ . Beide Teilungen harmonisieren miteinander. Diese Doppelteilung nennt man die harmonische Teilung einer gegebenen Geraden.\*)  $M, M_1, J, A$  nennt man har-

\*) Die Alten bezeichneten diese Teilung aus musikalischen Gründen als eine harmonische. Saiten von gleicher Beschaffenheit und Spannung geben

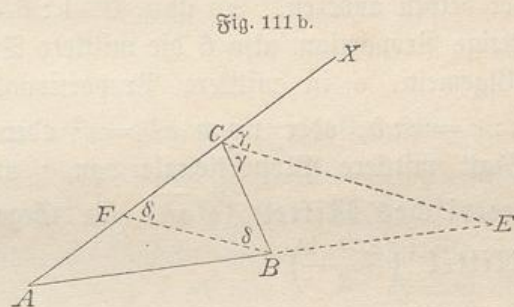
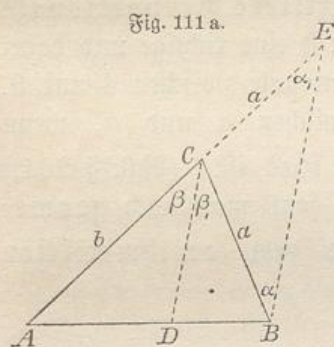


monische Punkte.  $M$  und  $M_1$  heißen zugeordnete Punkte, ebenso  $J$  und  $A$ . Schlägt man mit  $m$  und  $m_1$  Kreise um  $M$  und  $M_1$ , so hat man die Zeichnung der Kreise mit ihren Ähnlichkeitspunkten. Die Mittelpunkte zweier Kreise und ihre beiden Ähnlichkeitspunkte sind also harmonische Punkte.

**Aufgabe.** Zu drei gegebenen Punkten, von denen zwei zugeordnete sind, den vierten harmonischen zu finden. (Suche aus  $M, M_1$  und  $J$ , oder aus  $M, M_1$  und  $A$  den nötigen Teil von Fig. 110 herzustellen.)

292) **Satz.** Die Halbierungslinien eines Dreieckswinkels und seines Nebenwinkels teilen die Gegenseite harmonisch und zwar im Verhältnis der anliegenden Dreiecksseiten.

**Beweis.** In Fig. 111a sei  $ABC$  ein Dreieck mit der Winkelhalbierenden  $CD$ . Man verlängere  $AC$  über  $C$  hinaus um  $a$ , dann



wird  $BCE$  ein gleichschenkeliges Dreieck, also  $\sphericalangle \alpha = \alpha_1$ . Nach dem Satze vom Außenwinkel ist  $\beta + \beta_1 = \alpha + \alpha_1$ , und demnach  $\beta = \alpha_1$ , folglich  $CD \parallel EB$ , und  $AC : CE = AD : DB$ , folglich auch  $AC : BC = AD : BD$ .

In Fig. 111b ist der Außenwinkel  $BCX$  des Dreiecks  $ABC$  durch  $CE$  halbiert, also  $\gamma = \gamma_1$ . Man mache  $CF = BC$ , sodaß  $\triangle BCF$  gleichschenkelig ist und  $\delta = \delta_1$  wird. Als Außenwinkel ist  $\gamma + \gamma_1$

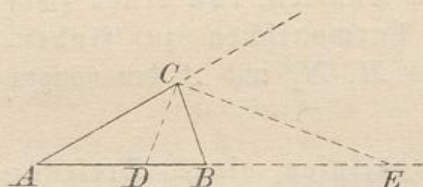
den Dreieckswinkel (z. B.  $\epsilon, e, g$ ), wenn ihre Längen sich wie  $15 : 12 : 10$  verhalten. Markiert man auf einer Geraden von der Länge 15 die den Zahlen 10 und 12 entsprechenden Punkte, so ist die harmonische Teilung im geometrischen Sinne hergestellt, denn es ist  $10 : 2 = 15 : 3$ . Dies ist ein Sonderfall der „musikalischen Proportion“  $a : \frac{a+b}{2} = \frac{2ab}{a+b} : b$ , die Pythagoras aus Babylon nach Griechenland gebracht haben soll. (Für den Unterricht ist die im Texte angegebene Deutung vorzuziehen.)



$= \delta + \delta_1$ , folglich  $\gamma_1 = \delta_1$ , folglich  $CE \parallel FB$ , und  $AC:FC = AE:BE$ , also auch  $AC:BC = AE:BE$ .

Aus  $AC:BC = AD:DB$  und  $AC:BC = AE:BE$  folgt, wenn die Dreiecke  $ABC$  übereinstimmen,  $AD:DB = AE:BE$ , und dies ist, wenn man das Ganze in einer Fig. 111c vereinigt, eine harmonische Teilung.

Fig. 111 c.



dem Rechteck aus Mittelstück und ganzer Linie. Dies gilt von jeder harmonischen Teilung einer Geraden.

**Bemerkung.** Aus dieser Proportion folgt für Fig. 110c  $AD \cdot BE = DB \cdot AE$ , d. h. das Rechteck aus den Außenstücken ist gleich

293) Schon in § 264 war folgendes angedeutet: Stimmen in einer Proportion die inneren Glieder überein, so heißt die Proportion eine stetige, und das Mittelglied heißt die mittlere Proportionale der beiden anderen. So ist z. B.  $4:6 = 6:9$  eine richtige und dabei stetige Proportion, also 6 die mittlere Proportionale zwischen 4 und 9. Allgemein:  $c$  ist mittlere Proportionale zwischen  $a$  und  $b$ , wenn  $a:c = c:b$ , oder wenn  $ab = c^2$  oder  $c = \sqrt{ab}$  ist. (Vgl. § 264.) Statt mittlere Proportionale von  $a$  und  $b$  sagt man auch geometrisches Mittel ( $\sqrt{ab}$ ) im Gegensatz zum arithmetischen Mittel  $\left(\frac{a+b}{2}\right)$ .

294) Einfach bestätigt sich hier der in § 264 genannte Satz: Die zur Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks gehörige Höhe ist mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten der Hypotenuse; jede Kathete ist mittlere Proportionale zwischen der Hypotenuse und dem anliegenden Abschnitte derselben. (Vgl. § 252 und 264.)

**Beweis.** In Fig. 112 sei  $ABC$  das rechtwinklige Dreieck und  $CD$  die Höhe  $h$  auf der Hypotenuse, dann ist  $\triangle ACD \sim \triangle ABC$ , denn sie stimmen im gemeinsamen Winkel  $\alpha$  und im rechten Winkel überein; ferner ist  $\triangle BCD \sim \triangle BAC$ , denn sie stimmen im gemeinsamen Winkel  $\beta$  und im  $\angle 90^\circ$  überein. Folglich ist auch  $\triangle ACD \sim \triangle BCD$ , und alle drei Dreiecke sind einander ähnlich. Folglich ist a)  $p:h = h:q$  und  $h^2 = p \cdot q$ ; b)  $q:a = a:c$ , folglich  $a^2 = q \cdot c$ ; c)  $p:b = b:c$ , folglich  $b^2 = p \cdot c$ . Demnach ist  $h = \sqrt{pq}$ ,  $a = \sqrt{qc}$ ,  $b = \sqrt{pc}$ .



**Bemerkung.** Aus  $a^2 = q \cdot c$  und  $b^2 = p \cdot c$  folgt durch Addition  $a^2 + b^2 = pc + qc = c(p + q) = c \cdot c = c^2$ , oder  $a^2 + b^2 = c^2$ .

Dies ist der dritte und einfachste Beweis des Pythagoreischen Lehrsatzes.

Als vierter Beweis läßt sich noch folgender angeben:

In Fig. 112 sind die drei vorhandenen Dreiecke einander ähnlich, ihre Flächen verhalten sich also, wie die Quadrate der Hypotenusen. Ist also die von  $\triangle ACD = nb^2$ , so ist die von  $\triangle BCD = na^2$  die von  $\triangle ABC = nc^2$ . Nun ist aber die Summe der beiden ersten Dreiecke gleich dem dritten, also folgt

$$na^2 + nb^2 = nc^2,$$

also ist auch

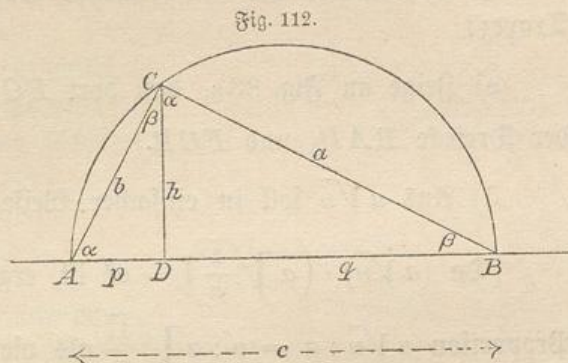
$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Damit sollen die Beweise dieses Satzes abgeschlossen sein.

Er gilt nicht nur von Quadraten, sondern von ähnlichen Figuren überhaupt, die über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks errichtet werden, seien es ähnliche Vielecke, Halbkreise oder sonstige ähnliche Gebilde. Sind z. B.  $F_a$ ,  $F_b$  und  $F_c$  die Flächen ähnlicher Figuren, für welche  $AB = c$ ,  $BC = a$  und  $CA = b$  homologe Seiten sind, so ist  $F_a : F_b : F_c = a^2 : b^2 : c^2$ . Aus  $F_a = F_c \frac{a^2}{c^2}$  und  $F_b = F_c \frac{b^2}{c^2}$  folgt durch Addition  $F_a + F_b = F_c \frac{a^2}{c^2} + F_c \frac{b^2}{c^2} = F_c \frac{a^2 + b^2}{c^2} = F_c$ , denn der Zähler des Bruches ist gleich dem Nenner, der Wert des Bruches also gleich 1. Drücke den Satz in Worten aus.

295) **Übungsaufgaben.** a) Soll sich einem symmetrischen Trapez (Antiparallelogramm) ein Kreis einbeschreiben lassen, so muß die Höhe die mittlere Proportionale der parallelen Seiten sein.

(Man zeige, daß, wenn  $AB$  eine Schrägseite ist,  $\angle AMB = 90^\circ$  ist, daß also  $\frac{a}{2} : q = q : \frac{b}{2}$  sein muß. Die nicht parallelen Seiten sind das arithmetische Mittel der parallelen, die Höhe ist das geome-





trische Mittel.) Das Viereck ist ein bizentrisches, d. h. es hat einen einbeschriebenen und einen umbeschriebenen Kreis.

b) Wie lautet der entsprechende Satz für das unsymmetrische Trapez?

c) Zeige an Fig. 83 a, daß dort  $FC = a \sqrt{\frac{1}{5}}$  ist. (Ähnlichkeit der Dreiecke  $BAD_5$  und  $FCB$ .)

d) Aus  $a\sqrt{n}$  soll in einfacher Weise  $a\sqrt{\frac{1}{n}}$  konstruiert werden.

[Da  $(a\sqrt{n}) \cdot (a\sqrt{\frac{1}{n}}) = a^2$  ist, ergibt sich  $a\sqrt{\frac{1}{n}}$  aus der Proportion  $a\sqrt{n} : a = a : a\sqrt{\frac{1}{n}}$  als vierte Proportionale. Da die Proportion stetig ist, kann Fig. 112 benutzt werden.]

e) Aus den Geraden  $a$  und  $b$  soll die Gerade von der Länge  $\sqrt{ab}$  konstruiert werden.

f) Zieht man in einem Trapez eine Parallele zu den Grundlinien, die von Seite zu Seite gemessen die Länge  $\sqrt{ab}$  hat, so ist jedes der beiden entstehenden Trapeze gleich einem der aus dem gegebenen Trapeze durch eine Diagonale entstehenden Dreiecke.

g) Man zeichne ein Dreieck  $ABC$  mit den Höhen. Dadurch erhält man drei Paare ähnlicher Dreiecke. Die Abschnitte der Seiten  $a, b, c$  bezeichne man der Reihe nach mit  $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ , die oberen und unteren Abschnitte der Höhen  $h_1, h_2, h_3$  der Reihe nach mit  $o_1, u_1, o_2, u_2, o_3, u_3$ . Man stelle drei Proportionen zwischen den Seitenabschnitten und den  $u$  auf und bilde die entsprechenden Gleichungen. Durch beiderseitige Multiplikation und Hebung gleicher Faktoren erhält man dann die Gleichung  $a_1 b_1 c_1 = a_2 b_2 c_2$ . Statt der  $u$  kann man auch die  $o$  benutzen. Das Produkt der einen Gruppe nicht zusammenhängender Stücke ist gleich der anderen. Der Satz ist Sonderfall eines allgemeineren, der z. B. auch für die Mittellinien des Dreiecks und dessen Berührungstransversalen für die vier Berührungskreise gilt.

296) Die in 145) bis 153) behandelten Vergrößerungsaufgaben sollen vom Standpunkte der Ähnlichkeitslehre aus wiederholt werden. — Dasselbe soll mit einigen der in § 218 bis 223 durchgeführten Aufgaben über Figuren geschehen, die anderen in gewissem Sinne einbeschrieben sind.

297) Berechnungsübungen am Tangentenviereck. In einem Tangentenviereck mit den Seiten  $a, b, c, d$  ( $AB = a$ ) seien die



Verbindungslinien der Ecken mit dem Mittelpunkte gezeichnet, deren Längen  $q_1, q_2, q_3, q_4$  seien. Das von  $A$  aus auf  $BM$  gefällte Lot sei  $AJ = h_1$ , das von  $C$  auf  $DM$  gefällte Lot sei  $CK = h_3$ . Da  $\angle AMB$  der Supplementwinkel von  $\angle CMD$  ist, so sind die rechtwinkligen Dreiecke  $MJA$  und  $MKC$  ähnlich, folglich ist

$$(1) \quad \frac{h_1}{q_1} = \frac{h_3}{q_3}.$$

Nun ist aber die doppelte Fläche von  $\triangle AMB$  gleich  $a q = h_1 q_2 = q_1 q_2 \frac{h_1}{q_1}$ ,

also ist  $\frac{h_1}{q_1} = \frac{a q}{q_1 q_2}$ . Ebenso ist  $2 \triangle CMD = c q = q_4 h_3 = q_3 q_4 \cdot \frac{h_3}{q_3}$ ,

also folgt  $\frac{h_3}{q_3} = \frac{c q}{q_3 q_4}$ . Nach (1) ist also  $\frac{a q}{q_1 q_2} = \frac{c q}{q_3 q_4}$  oder

$$(2) \quad \frac{q_1 q_2}{q_3 q_4} = \frac{a}{c}.$$

Ebenso ist

$$(3) \quad \frac{q_2 q_3}{q_4 q_1} = \frac{b}{d}.$$

Die Sätze (2) und (3) sind leicht in Worte zu fassen. (Man kann die  $q$  als die Zentralstrahlen des Tangentenvierecks bezeichnen.)

Durch beiderseitige Multiplikation folgt aus (2) und (3):

$$\frac{q_1 q_2^2 q_3}{q_3 q_4^2 q_1} = \frac{ab}{cd}$$

oder

$$(4) \quad \frac{q_2^2}{q_4^2} = \frac{ab}{cd}, \quad \frac{q_2}{q_4} = \sqrt{\frac{ab}{cd}}.$$

Ebenso ist

$$(5) \quad \frac{q_1^2}{q_3^2} = \frac{da}{bc}, \quad \frac{q_1}{q_3} = \sqrt{\frac{da}{bc}}.$$

Auch die Sätze (4) und (5) sind leicht in Worte zu fassen.

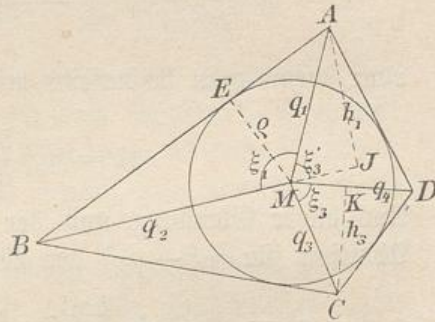
[Setzt man  $JM = p_1$  und  $KM = p_3$ , so folgt (bei  $a > c$ ) für das stumpfwinklige Dreieck  $AMB$  und das spitzwinklige  $CMD$

$$a^2 = q_1^2 + q_2^2 + 2p_1 q_2$$

$$c^2 = q_3^2 + q_4^2 - 2p_3 q_4.$$

Da aber  $q_3^2 = q_1^2 \frac{bc}{ad}$ ,  $q_4^2 = q_2^2 \frac{cd}{ab}$ , und (wegen der Ähnlichkeit der

Fig. 113.





Dreiecke  $AME$  und  $FM C$ )  $\frac{p_3}{q_3} = \frac{p_1}{q_1}$  ist, so geht die letztere Gleichung über in

$$c^2 = q_1^2 \frac{bc}{ad} + q_2^2 \frac{cd}{ab} - \frac{2p_1 q_3 q_4}{q_1} = q_1^2 \frac{bc}{ad} + q_2^2 \frac{cd}{ab} - 2p q_2 \frac{c}{a}$$

oder, wenn man beiderseits mit  $\frac{a}{c}$  multipliziert, in

$$ac = q_1^2 \frac{b}{d} + q_2^2 \frac{d}{b} - 2p_1 q_2.$$

Aus dieser Gleichung und der erstgenannten folgt durch beiderseitige Addition für  $(a^2 + ac)$  der Wert

$$a(a + c) = q_1^2 \left(1 + \frac{b}{d}\right) + q_2^2 \left(1 + \frac{d}{b}\right) = q_1^2 \frac{b + d}{d} + q_2^2 \frac{b + d}{b},$$

oder wenn man beiderseits durch  $a + c = b + d$  dividiert,

$$a = \frac{q_1^2}{d} + \frac{q_2^2}{b}.$$

So erhält man für die Seiten das Gleichungssystem

$$(6) \quad a = \frac{q_1^2}{d} + \frac{q_2^2}{b}, \quad b = \frac{q_2^2}{a} + \frac{q_3^2}{c}, \quad c = \frac{q_3^2}{b} + \frac{q_4^2}{d}, \quad d = \frac{q_4^2}{c} + \frac{q_1^2}{a}$$

oder

$$(7) \quad \begin{aligned} dab &= bq_1^2 + dq_2^2, & abc &= cq_2^2 + aq_3^2, \\ bcd &= dq_3^2 + bq_4^2, & cda &= aq_4^2 + cq_1^2, \end{aligned}$$

wobei sich  $c$  durch  $q_1$  und  $q_2$ ,  $d$  durch  $q_2$  und  $q_3$  ausdrücken läßt.

Wie sich, wenn  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $q$  gegeben und damit  $d = a + c - b$  und  $J = (a + c)q$  bestimmt sind, das Verhältnis

$$\frac{q_1^2}{q_2^2} = J^2 \frac{bc + ad \pm 2\sqrt{abcd} - J^2}{ad[(bc - ad)^2 + 4J^2]}$$

und damit die Gestalt des Dreiecks  $AME$  und damit der Winkel  $\frac{\alpha}{2}$  ergibt, soll später gezeigt werden. Der höchste Wert, den  $J$  annehmen darf, ist  $\sqrt{abcd}$ , da sonst unter der Wurzel Negatives stehen würde, was Imaginäres gibt. Dieser Höchstwert wird, wie sich dann zeigen soll, erreicht, wenn  $q = \frac{\sqrt{abcd}}{a + c}$  ist und das Tangentenviereck ein Tangenten-Sehnenviereck wird. Man hat sich das Tangenten-Viereck mit den Seiten  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  als Gelenkviereck zu denken.]\*)

\*) Weitere Übungen aus diesem Gebiete folgen in Bd. II.

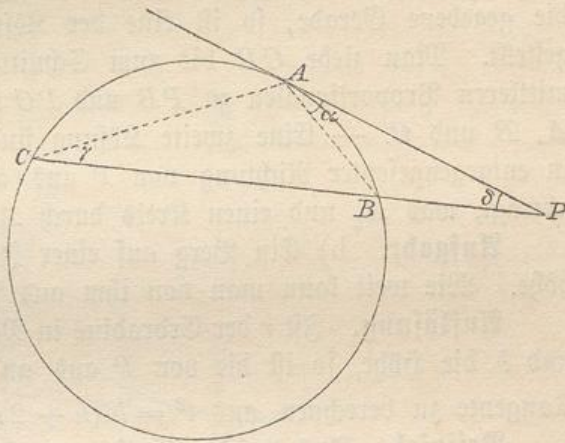
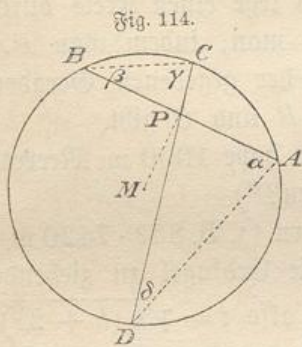


## II. Proportionen und Ähnlichkeitsbeziehungen am Kreise, die stetige Teilung und ihre Anwendung; Berechnungen am Kreise.

298) **Satz.** Zieht man durch einen Punkt innerhalb des Kreises beliebig viele Sehnen, so ist das Produkt (Rechteck) aus den Abschnitten jeder Sehne gleich dem Quadrate über der Hälfte der kleinsten Sehne, die durch den Punkt gelegt werden kann.

**Beweis.**  $AB$  in Fig. 114 ist die kleinste mögliche Sehne durch  $P$ , wenn sie senkrecht auf dem durch  $P$  gelegten Durchmesser steht. (Warum?) Dabei ist  $AP = BP$ . Aus  $\alpha = \gamma$  und  $\delta = \beta$  (Peripherie-

Fig. 115.



winkel über gleichen Bogen) folgt, daß  $\triangle ADP \sim \triangle CBP$  ist. Folglich ist  $DP : AP = BP : CP$  oder  $DP : AP = AP : CP$ , folglich:  $DP \cdot CP = AP^2$ . ( $AP$  ist also mittlere Proportionale zu  $CP$  und  $DP$ .)

299) **Satz.** Zieht man von einem Punkte außerhalb eines Kreises beliebig viele Sekanten, so ist das Produkt (Rechteck) aus jeder Sekante und ihrem äußeren Abschnitte gleich dem Quadrate der von dem Punkte aus an den Kreis gelegten Tangente.

**Beweis.** Verbindet man in Fig. 115  $A$  mit  $B$  und  $C$ , so ist  $\triangle PAB \sim \triangle PCA$ , denn  $\delta$  ist gemeinschaftlicher Winkel und  $\alpha = \gamma$  nach dem Satze vom Tangenten-Sehnenwinkel. Folglich ist  $PB : PA = PA : PC$  und  $PB \cdot PC = PA^2$ . (Die Tangente ist also mittlere Proportionale zu  $PB$  und  $PC$ .)



**Bemerkung.** Versuche die Sätze 298) und 299) in einen zusammenzufassen. Der in beiden auftretende konstante Ausdruck  $PA^2$  kann dabei als Potenz des Punktes  $P$  in bezug auf den Kreis bezeichnet werden. (Jedoch pflegt man nach Steiner  $PA^2$  nur dann zu schreiben, wenn  $P$  außerhalb liegt, und  $-PA^2$ , wenn  $P$  innerhalb liegt, weil dann die Stücke  $PA$  und  $PB$  nach entgegengesetzten Richtungen gehen. Ist  $PA^2 = \pm 1$ , so wird das eine Mal  $CP = -\frac{1}{DP}$ , das andere Mal  $CP = \frac{1}{BP}$ , d. h. diese Längen werden reziproke.) Einige der früher ausgeführten Berührungskonstruktionen lassen sich von hier aus übersichtlicher als früher durchführen.

[300) **Aufgabe.** a) Einen Kreis zu konstruieren, der durch zwei gegebene Punkte geht und eine gegebene Gerade berührt.

**Auflösung.** Sind  $B$  und  $C$  die gegebenen Punkte und  $AP$  die gegebene Gerade, so ist eine der Lösungen durch Fig. 115 dargestellt. Man ziehe  $CB$  bis zum Schnitte  $P$ , mache  $PA$  gleich der mittleren Proportionalen zu  $PB$  und  $PC$  und lege einen Kreis durch  $A$ ,  $B$  und  $C$ . — Eine zweite Lösung findet man, indem man  $PA$  in entgegengesetzter Richtung von  $P$  aus auf der gegebenen Geraden abträgt, was  $A_1$  und einen Kreis durch  $A_1$ ,  $B$  und  $C$  gibt.

**Aufgabe.** b) Ein Berg auf einer Insel habe 1000 m Meereshöhe. Wie weit kann man von ihm aus sehen?\*)

**Auflösung.** Ist  $r$  der Erdradius in Metern (z. B.  $859 \cdot 7420$  m), und  $h$  die Höhe, so ist die von  $P$  aus an die Erdoberfläche zu ziehende Tangente zu berechnen aus  $t^2 = h(h + 2r)$ , also  $t = \sqrt{h(h + 2r)}$ .

**Beispiel.** Aus welcher Entfernung kann von dem 30 m hohen Mast eines Schiffes das Feuer eines (auf einem Berge stehenden) Leuchtturmes von 100 m Meereshöhe gesehen werden?

Die Gerade  $PA$  ist soweit zu verlängern, bis der neue Endpunkt 30 m von der Erdoberfläche entfernt ist. Es wird  $e = t_1 + t_2 = \sqrt{h_1(h_1 + 2r)} + \sqrt{h_2(h_2 + 2r)}$ .

301) **Satz.** Gehen durch zwei Punkte beliebig viele Kreise, so sind die von jedem äußeren Punkte der gemein-

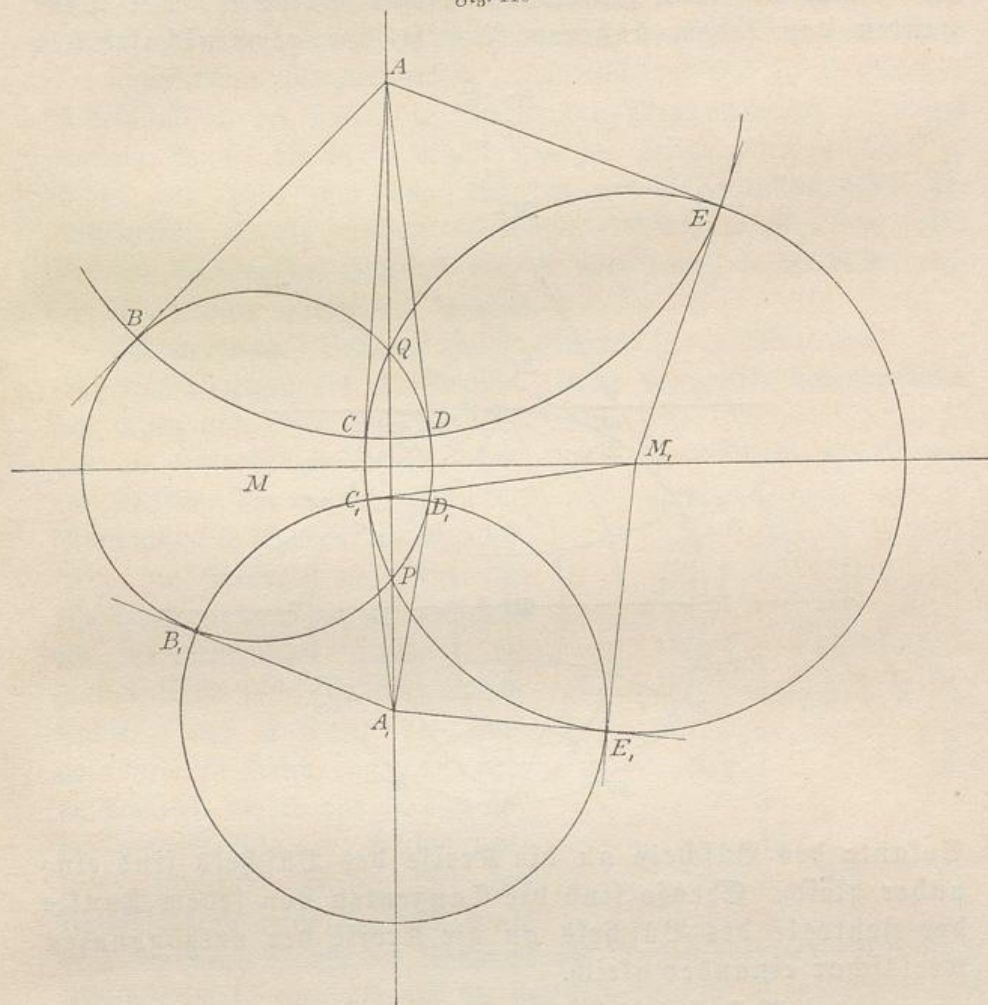
\*) Auf manchen Land- oder Seekarten sind die Grenzen für die Sichtbarkeit von Leuchfeuern durch Kreise angegeben. — Wenn  $h$  klein gegen  $2r$  ist, kann man sich bei Aufgabe b) auf  $t = \sqrt{2rh}$  beschränken. Dann ist die Entfernung (nahezu) proportional der Quadratwurzel aus der Höhe. Bei der folgenden Aufgabe wird dann  $e = \sqrt{2rh_1} + \sqrt{2rh_2}$ . Man erprobe den Einfluß der Vernachlässigung an den beiden Beispielen.



schaftlichen Sekante aus an die Kreise gezogenen Tangenten einander gleich.

**Beweis.** In Fig. 116 gehen die Kreise  $M$  und  $M_1$  durch  $P$  und  $Q$ . Vom Punkte  $A$  der Sekante  $PQ$  aus sind an die beiden Kreise vier Tangenten gelegt. Dabei ist das Quadrat jeder dieser

Fig. 116

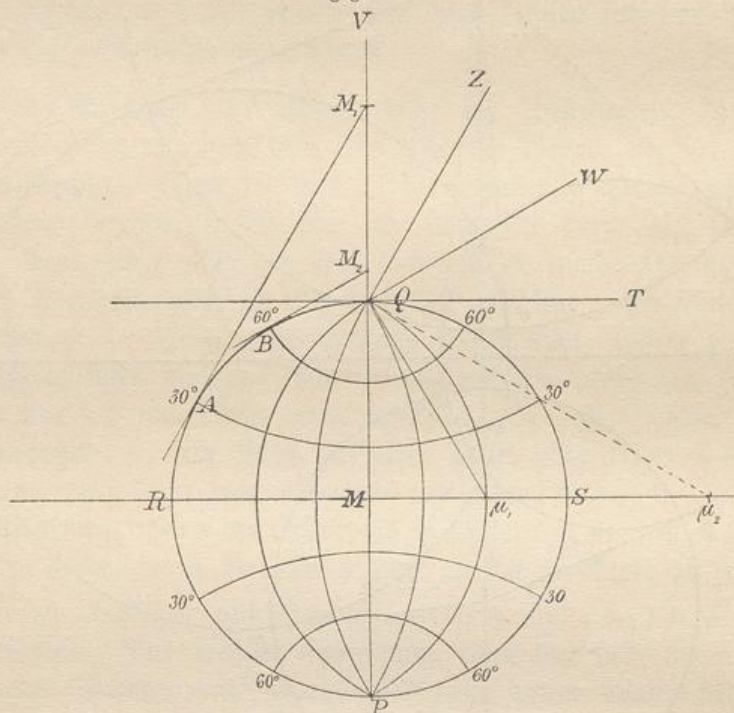


Tangenten gleich  $AQ \cdot AP$ , also sind diese Tangenten einander gleich. Dies gilt für beliebig viele durch  $P$  und  $Q$  gehende Kreise.

**Bemerkung.** Der um  $A$  mit Radius  $AB$  geschlagene Kreis schneidet das durch  $P$  und  $Q$  gehende Kreisbüschel rechtwinklig, denn Radius  $M_1E$  steht senkrecht auf Tangente  $AE$ ; ebenso ist es an den andern Schnittstellen. Schlägt man also um einen andern Punkt  $A_1$  der Sekante  $PQ$  noch einen andern Kreis mit der entsprechenden



Fig. 117.



[301a) **Aufgabe.** Die Karte der östlichen oder westlichen Halbkugel mit Meridianen und Parallellkreisen im Abstände von  $15^{\circ}$  zu  $15^{\circ}$  genau zu zeichnen.\*)

\*) Der projektivische Grund zu der anzugebenden Lösung kann hier nur veranschaulicht, noch nicht streng mathematisch mitgeteilt werden. Es handelt sich also nur um eine vorläufige Anleitung zum Zeichnen der Halbkugelfarten.



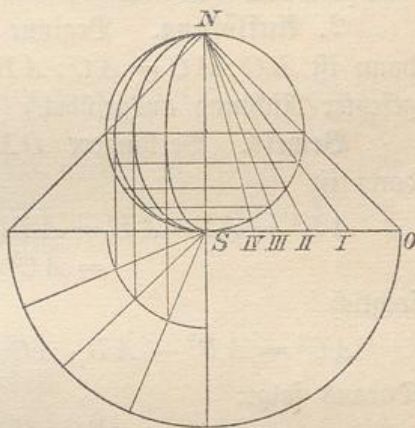
$PQ$  und  $RS$ , die beide zu verlängern sind. In Fig. 117 ist der Viertelskreis  $RQ$  in drei Bogen von je  $30^\circ$  geteilt, was die Punkte  $A$  und  $B$  gibt. Die Tangenten in  $A$  und  $B$  geben die Mittelpunkte  $M_1$  und  $M_2$  für die Parallelkreise  $30^\circ$  und  $60^\circ$ . Entsprechend sind die Parallelkreise  $15^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $75^\circ$  zu konstruieren. — Durch  $Q$  lege man eine Tangente  $QT$ , sodaß  $\angle TQV = 90^\circ$  ist. Durch  $QW$  und  $QZ$  werde dieser Winkel in Winkel von je  $30^\circ$  eingeteilt. Das Lot auf  $QW$  in  $Q$  gibt den Mittelpunkt  $\mu_1$  des den Grenzkreis unter  $30^\circ$  schneidenden Meridiankreises. Das Lot auf  $QZ$  in  $Q$  gibt den Mittelpunkt  $\mu_2$  des unter  $60^\circ$  schneidenden Meridiankreises. Halbirt man die Winkel bei  $Q$ , so erhält man die Teilung von  $\angle TQV$  in Winkel von  $15^\circ$ . Die Lote auf den neuen Teillinien geben die Mittelpunkte für die anderen Meridiane. (Diese Konstruktion rührt von dem Astronomen Hipparch her, sie wird jedoch in der Regel nach dem Geographen Ptolemäus benannt.)

[**Bemerkung.** Auch die Halbkugelfarten der größten Land- oder Wassermasse zeigen ein Kreisbüschel (durch exzentrisch liegende Pole von denen nur einer gezeichnet ist) und die senkrecht schneidende Schar von Kreisen. Die ersteren stellen die Meridiane, die letzteren die Parallelkreise der Erdkugel dar. Bei der Polararte ist statt des Kreisbüschels ein Strahlenbüschel gegeben, die Parallelkreise sind also konzentrische Kreise. Das Entstehen der Südpolararte ist durch Fig. 118 veranschaulicht, wobei von  $N$  aus auf die gegenüberliegende Berührungsebene projiziert wird. Bei der Halbkugelfarte nach Fig. 117 denke man sich einen Punkt des Äquators als Projektionspunkt. Die Projektion geschieht ebenfalls auf die gegenüberliegende Berührungsebene.]

302) **Aufgabe.** Eine Gerade  $AB$  so zu teilen, daß der größere Teil mittlere Proportionale zwischen der ganzen Linie und dem kleineren Teile ist. (Stetige Teilung oder goldener Schnitt, oder nach Kepler: *sectio divina*.)

**1. Auflösung.** Errichte im Endpunkte  $B$  der gegebenen Geraden  $AB$  (Fig. 119) ein Lot  $BM = \frac{1}{2}AB$ , schlage mit  $BM$  um  $M$  einen Kreis und lege durch  $M$  die Sekante  $AE$ . Durch  $D$  ziehe eine Parallele zu  $EB$ , die in  $C_1$  schneidet, dann ist  $C_1$  der gesuchte Teilpunkt.

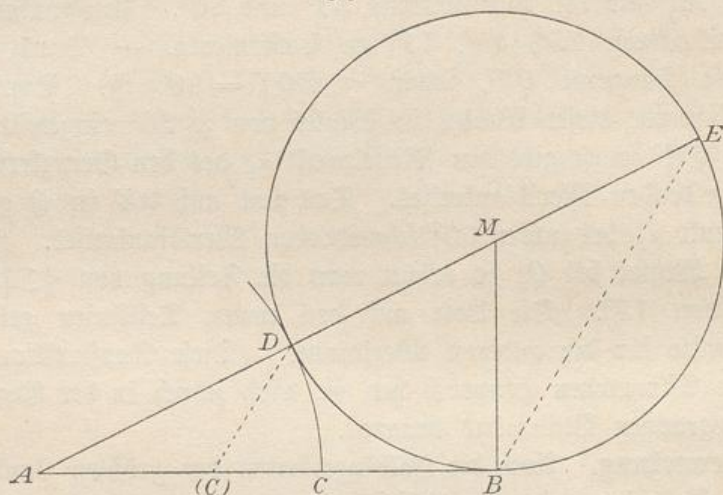
Fig. 118.





**Beweis.** Nach Nr. 299 ist  $AD : AB = AB : AE$ , hier ist aber  $AB = DE$ , folglich  $AD : DE = DE : AE$ , also ist zunächst  $AE$

Fig. 119.



in  $D$  stetig geteilt. Da nun  $DC_1 \parallel EB$ , so ist auch  $AC_1 : C_1B = C_1B : AB$  (warum?).

**2. Auflösung.** Beginne wie vorher und mache  $AC = AD$ , dann ist  $BC : AC = AC : AB$ . (Die Teilung ist jetzt in entgegengesetzter Richtung ausgeführt.)

**Beweis.** Verlängere  $DM$  bis zum Punkte  $E$  der Peripherie, dann ist

$$\begin{aligned} AB^2 &= AD \cdot AE = AD(AD + DE) = AC(AC + AB) \\ &= AC^2 + AB \cdot AC, \end{aligned}$$

folglich

$$AC^2 = AB^2 - AB \cdot AC = AB(AB - AC) = AB \cdot BC.$$

Daraus folgt:

$$BC : CA = CA : BA.$$

[Anderer Beweis.  $AE : AB = AB : AD$ , folglich  $(AE - AB) : (AB - AD) = AB : AD$  oder  $AC : BC = AB : AC$ , also auch

$$BC : AC = AC : AB.]$$

**Bemerkung.** Aus der Figur folgt, daß  $BC_1 = AD$ ,  $AC_1 = DE - AD$ , daß also das Abschneiden des kleineren Teils vom größeren ebenfalls eine stetige Teilung gibt. Dasselbe gilt vom Ansetzen des größeren Teils an die ganze Linie.

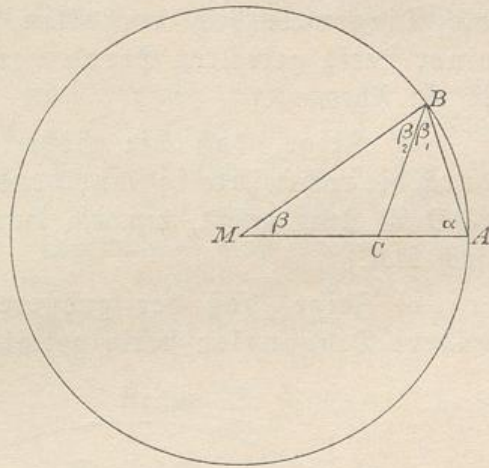
**303) Aufgabe.** In einen Kreis ein regelmäßiges Zehneck einzuzichnen.



**Auflösung.** Teile den Radius nach dem goldenen Schnitt, dann ist der größere Teil die Seite des regelmäßigen Zehnecks.

**Beweis.** Ist  $MA$  in  $C$  stetig geteilt, und ist  $AB = MC$  (Fig. 120), so ist  $AC : CM = CM : AM$  oder  $AC : AB = AB : AM$ , außerdem ist  $\angle \alpha$  den Dreiecken  $ABC$  und  $BAM$  gemein, folglich ist  $\triangle ABC \sim \triangle BAM$  (erster Ähnlichkeitsatz), und da  $AMB$  gleichschenkelig ist, so ist auch  $ABC$  gleichschenkelig, folglich auch  $MC = BC$ . Daraus folgt  $\angle \beta = \beta_2$ . Aus der bewiesenen Ähnlichkeit der Dreiecke folgt  $\beta = \beta_1$ , also ist  $\angle MBA = 2\beta$  und auch der andere Basiswinkel  $\alpha = 2\beta$ . So hat man im Dreieck  $MAB$  fünfmal den Winkel  $\beta$ . Folglich ist  $5\beta = 180^\circ$ , also  $\beta = 36^\circ = \frac{360^\circ}{10}$ . Demnach läßt sich  $AB$  zehnmal auf der Peripherie abtragen.

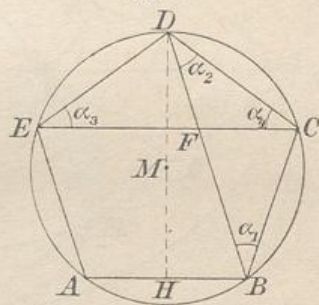
Fig. 120.



304) **Aufgabe.** Ein regelmäßiges Fünfeck in einen Kreis einzuzichnen.

**Auflösung.** Man teile den Kreis, wie vorher, in 10 gleiche Teile ein und überschlage beim Ziehen der Sehnen jedesmal einen Punkt. Der Zentriwinkel wird gleich  $72^\circ$ , ist also der des regelmäßigen Fünfecks.

Fig. 121.



305) **Übungsaufgaben.\*)** a) Berechne alle beim regelmäßigen Fünfeck und seinen Diagonalen vorkommenden Winkel.

b) Zeige, daß im regelmäßigen Fünfeck je zwei Diagonalen einander stetig teilen.

(Die gleichschenkligen Dreiecke  $BCD$  und  $CDE$  sind kongruent, folglich die Winkel  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  einander

\*) Die hier genannten stetigen Teilungen geben Aufschluß über die in §§ 99 bis 103 und 151 bis 156 des Vorkurses behandelten Modelle. Es handelt sich also um Vorübungen für einen wichtigen Abschnitt der Stereometrie.



gleich, also ist auch  $\triangle CDF$  gleichschenkelig und ähnlich  $\triangle CED$ . Daraus folgt  $CF:CD = ED:CE$ , also da  $EF = AB = DE = DC$  ist, auch

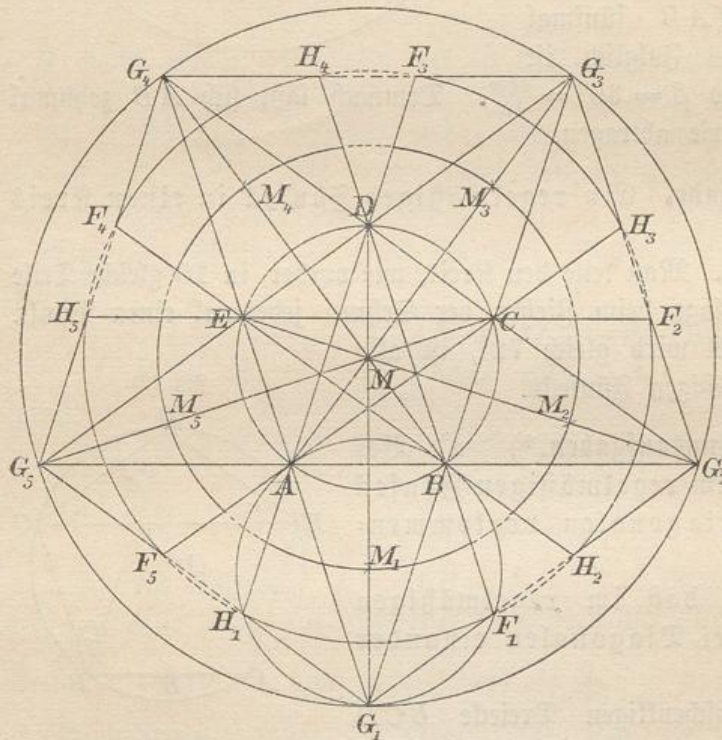
$$CF:EF = EF:CE.)$$

c) Zeige, daß im regelmäßigen Fünfeck die Seite und die Diagonale sich verhalten, wie der größere Abschnitt einer stetig geteilten Geraden zur ganzen Geraden. ( $ABFE$  ist ein Rhombus.)

d) Zeige, daß die Höhe des regelmäßigen Fünfecks durch die rechtwinklig schneidende Diagonale stetig geteilt ist. ( $BD$  ist stetig geteilt, demnach durch die Parallelen  $FE$  und  $HB$  auch  $DH$ .)

e) Zeige, daß der größere Teil der Höhe durch zwei andere Diagonalen stetig geteilt ist (z. B. durch  $EB$  und  $AC$ ).

Fig. 122.



Ist  $K$  der Teilpunkt, so ist  $DEKC$  ein Rhombus, also ist vom größeren Teile der Höhe der kleinere Teil der vorigen Höhenteilung abgeschnitten.)

[f) Suche stetige Teilungen an Fig. 122 auf, die nach dem Vorkursus die Hälfte vom Netz des regelmäßigen Zwölfflachs darstellt und

gib sonstige Eigenschaften dieser Figur an, in der auch regelmäßige Zehnecke vorkommen.]

g) Suche stetige Teilungen am regelmäßigen Zehneck auf und berechne die bei ihm und seinen Diagonalen vorkommenden Winkel.







oder

$$p_3 : q = q_1 : p_2$$

(1)

$$q q_1 = p_2 p_3.$$

Ferner ist  $\triangle AME \sim \triangle AM_1 G$ , folglich

$$p_1 : p = q : q_1$$

oder

$$(2) \quad \frac{q}{q_1} = \frac{p_1}{p}.$$

Durch beiderseitige Multiplikation folgt aus Gleichung (1) und (2), da sich  $q_1$  dabei weghebt,

$$q^2 = \frac{p_1 p_2 p_3}{p}$$

oder

$$(3) \quad q = \sqrt{\frac{p_1 p_2 p_3}{p}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{a+b+c}}.$$

Durch beiderseitige Division folgt aus (1) und (2)

$$(4) \quad q_1^2 = \frac{p p_2 p_3}{p_1}.$$

Entsprechend findet man  $q_2^2 = \frac{p p_1 p_3}{p_2}$  und  $q_3^2 = \frac{p p_1 p_2}{p_3}$ .Wie daraus die Heronische Inhaltsformel  $F = \sqrt{p p_1 p_2 p_3}$  folgt, ist in § 262 gezeigt.Die Höhen  $h_1, h_2, h_3$  ergeben sich hier einfach aus  $\frac{a h_1}{2} = F$  usw.als  $h_1 = \frac{2}{a} F = \frac{2}{a} \sqrt{p p_1 p_2 p_3}$  usw.

308) **Aufgabe.** Aus dem Radius  $r$  eines Kreises und dem Radius  $q$  des ihm eingeschriebenen regelmäßigen  $n$ -Ecks den Radius  $q'$  des ihm eingeschriebenen regelmäßigen  $2n$ -Ecks zu berechnen.

**Auflösung.** In Fig. 124 sei  $AB$  die Seite des  $n$ -Ecks,  $MD = r$  der Radius des ihm umbeschriebenen,  $MC$  der des ihm eingeschriebenen Kreises,  $D$  der Halbierungspunkt des Bogens  $AB$ ,  $AD$  also die Seite des  $2n$ -Ecks,  $ME$  der gesuchte Radius  $q'$ ,  $EF \perp EM$ , so daß  $F$  Halbierungspunkt von  $CD$  ist. Aus letzterem

dortigen Bezeichnungen sind in Fig. 123 festgehalten, so daß z. B.  $AG = p$ ,  $AE = p_1$ ,  $CF = CG = p_2$ ,  $CD = CE = p_3$  ist, wobei  $p = \frac{a+b+c}{2}$ ,  $p_1 = \frac{-a+b+c}{2}$ ,  $p_2 = \frac{a-b+c}{2}$ ,  $p_3 = \frac{a+b-c}{2}$  war.



folgt  $MF = \frac{r+e}{2}$ . Nach Pythagoras ist aber  $ME^2 = MF \cdot MD$ , also  $e'^2 = \frac{r+e}{2} \cdot r$ , d. h.  $e'$  mittlere Proportionale zu  $MF$  und  $MD$ . Demnach ist

$$(1) \quad e' = \sqrt{\frac{(r+e)r}{2}}.$$

Für  $r=1$  vereinfacht sich die Formel zu

$$(2) \quad e' = \sqrt{\frac{1+e}{2}}.$$

**Bemerkungen.** Für das Sechseck ist im letzteren Falle  $e_6 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ , für das Zwölfeck also  $e_{12} = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$ . Es folgen

$$e_{24} = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}},$$

$$e_{48} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$$

usw., sodaß bei  $6 \cdot 2^n$  die Zahl 2 im Ganzen  $n$ -mal unter den Wurzeln erscheint.

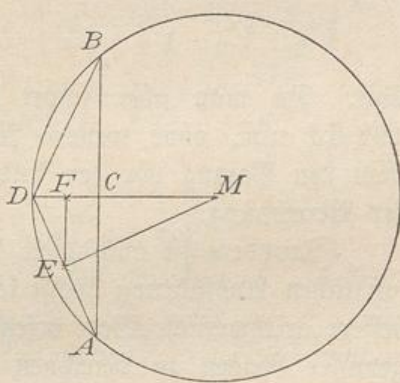
Die zugehörigen Vielecksseiten sind allgemein von der Länge  $s_n = 2\sqrt{r^2 - e_n^2} = 2\sqrt{1 - e_n^2}$ . Demnach ist z. B.  $s_6 = 1$ ,  $s_{12} = 2\sqrt{1 - \frac{1}{4}(2+\sqrt{3})} = \sqrt{2-\sqrt{3}}$ ,  $s_{24} = 2\sqrt{1 - \frac{1}{4}[2+\sqrt{2+\sqrt{3}}]} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ ,  $s_{48} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$  usw., sodaß  $s_{12}$  sich von  $e_{12}$  nur um ein Vorzeichen und das Wegfallen des Faktors  $\frac{1}{2}$  unterscheidet und von dort ab stets dasselbe stattfindet.

Die Seiten der umbeschriebenen Vielecke werden allgemein im Verhältnis  $\frac{r}{e}$ , hier im Verhältnis  $\frac{1}{e}$  größer. Dies gibt, wenn man sie als Berührende mit  $t$  bezeichnet, z. B.

$$t_6 = s_6 \cdot \frac{1}{e_6} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = 2\sqrt{\frac{1}{3}}, \quad t_{12} = s_{12} \cdot \frac{1}{e_{12}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}} = 2\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}},$$

$$t_{24} = 2\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}, \quad t_{48} = 2\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}} \text{ usw.}$$

Fig. 124.





Für die beiden 48-Ecke folgt, daß  $\pi$  zwischen den Werten

$$\frac{u}{2} = 24 \sqrt[4]{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} \text{ und } \frac{u'}{2} = 48 \sqrt[4]{\frac{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}$$

$$= \frac{u}{\sqrt[4]{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}$$

liegt. Da man aber sofort die Näherungswerte für das 96-Eck, 192-Eck usw. ohne weitere Rechnung hinschreiben kann, so erkennt man den Vorzug vor der früher behandelten Pythagoreischen Methode der Berechnung.

(Trotzdem ist auch diese Methode zur Berechnung von  $\pi$  in der wirklichen Ausführung höchst langwierig und erst in neuerer Zeit durch bessere arithmetische Wege ersetzt worden, bei denen nur wenige Glieder gewisser Reihen zu berechnen sind, um eine Genauigkeit bis z. B. 7 Stellen zu erhalten.)

309). **Aufgabe.** Die Werte  $q_4, q_8, q_{16}, \dots, s_4, s_8, s_{16}, \dots, t_4, t_8, t_{16}, \dots, F_4, F_8, F_{16}, \dots$  in derselben Weise wie in der vorigen Bemerkung die von dem Sechseck ausgehenden zu berechnen.

Man beginne mit  $q_4 = \sqrt{\frac{1}{2}}, s_4 = \sqrt{2}, t_4 = 2$ .

310) **Aufgabe.** Die Werte  $q_{10}, q_{20}, q_{40}, \dots, s_{10}, s_{20}, s_{40}, \dots, t_{10}, t_{20}, t_{40}, \dots, F_{10}, F_{20}, F_{40}, \dots$  vom Zehneck aus zu berechnen.\*)

Man beginne mit der stetigen Teilung des Radius 1, indem man den größeren Teil, die Seite des Zehnecks, mit  $x$ , den Rest mit  $(1 - x)$  bezeichne. Dann ist

$$(1 - x) : x = x : 1,$$

oder  $x^2 = 1 - x$ , d. h.

$$x^2 + x = 1.$$

Die Auflösung dieser Gleichung gibt

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Von diesen Werten ist der mit dem negativen Wurzelzeichen zu verwerfen, da er eine hier nicht verlangte äußere Teilung der Geraden 1 bedeutet. Demnach ist

\*) Bei nicht hinreichender Übung im Wurzelrechnen können die über das Zehneck, Fünfeck und Fünfzehneck gestellten Aufgaben einer der oberen Klassen überwiesen werden. Sie bieten interessantes Übungsmaterial zum Umformen der Wurzelansdrücke.  $F$  soll die Fläche des Vielecks bedeuten.



$$s_{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

von wo aus  $q_{10}$  und  $t_{10}$  leicht mittels der Gleichungen  $s_{10} = 2\sqrt{1-q_{10}^2}$  oder  $q_{10} = \frac{1}{2}\sqrt{4-s_{10}^2} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$  und  $t_{10} = \frac{s_{10}}{q_{10}}$  zu gewinnen sind.

$$\begin{aligned} t_{10} &= \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}} = \sqrt{\frac{\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}}{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}} = \sqrt{2 \frac{6-2\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}} \\ &= 2 \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}} = 2 \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} \cdot \frac{5-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}} = 2 \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{10} &= \frac{10}{2} \cdot s_{10} \cdot q_{10} = \frac{10}{2} \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} = \frac{5}{2} \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} (\sqrt{5}-1)^2 \\ &= \frac{5}{2} \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}. \end{aligned}$$

In dieser Weise ist fortzufahren.

311) **Aufgabe.** Die Werte  $q_5$ ,  $s_5$ ,  $t_5$  zu berechnen.

Man kann damit beginnen, die zu  $AC$  gehörige Höhe des Dreiecks  $ABC$  in (Fig. 120) zu berechnen, welche die Hälfte von  $s_5$  ist. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} h^2 &= AB^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2. \text{ Dabei ist } AC = 1-x = 1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \\ \text{womit der kleinere Teil der stetig geteilten Geraden 1 gefunden ist.} \\ \text{Einsetzung der Werte von } AB \text{ und } AC \text{ ergibt} \\ h^2 &= \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{4}\right)^2 = \frac{4(5+1-2\sqrt{5}) - (9+5-6\sqrt{5})}{16} \\ &= \frac{24-8\sqrt{5}-14+6\sqrt{5}}{16} = \frac{5-\sqrt{5}}{8}. \end{aligned}$$

Demnach ist

$$s_5 = 2 \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}.$$

Damit ist fortzufahren, wie beim Zehneck, also  $q_5 = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}$ ,

$$t_5 = 2 \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}} = 2\sqrt{5-2\sqrt{5}};$$

$$J_5 = \frac{5}{2} \cdot s_5 \cdot q_5 = \frac{5}{2} \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}} = \frac{5}{4} \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}.$$







durch beiderseitige Subtraktion folgt

$$x^2 + y^2 - 2xy = 4 - 2s_n \quad \text{oder} \quad x - y = \sqrt{4 - 2s_n}.$$

Ist nun  $y > x$ , wie in der Figur (was bei  $n > 2$  stets der Fall ist), so ist in der letzten Formel das negative Wurzelzeichen zu wählen, in der vorletzten für positives  $x$  und  $y$  das positive. Durch beiderseitige Subtraktion und Halbierung folgt dann für  $x = s_{2n}$

$$s_{2n} = \frac{1}{2} [\sqrt{4 + 2s_n} - \sqrt{4 - 2s_n}] = \sqrt{1 + \frac{s_n}{2}} - \sqrt{1 - \frac{s_n}{2}}.$$

Jetzt ist  $s_{2n}$  durch zwei einfache Wurzeln dargestellt, bildet man aber oben und hier das Quadrat, so erkennt man die Übereinstimmung der Werte.

314) **Einige Aufgaben.** a) Den Flächeninhalt des regelmäßigen  $n$ -Ecks für den Radius 1 des einbeschriebenen Kreises zu berechnen.

b) Den Flächeninhalt des regelmäßigen Fünfecks für den Radius 1 des einbeschriebenen Kreises zu berechnen.

c) Den Flächeninhalt des regelm. Fünfecks für den Radius 1 des einbeschriebenen Kreises zu berechnen.

d) Dieselben Aufgaben für das regelm. 5-, 10-, 15-Eck von der Seite  $a$  zu lösen.

e) Dieselben Aufgaben für beliebige regelm.  $n$ -Ecke zu lösen, wo  $n$  von der Form  $2^n$ ,  $3 \cdot 2^n$ ,  $5 \cdot 2^n$ ,  $15 \cdot 2^n$  ist.

315) **Aufgabe.** Die Kreisfläche zu berechnen.

**Auflösung.** Der Kreis läßt sich, wie schon im Vorkursus § 141 gezeigt wurde, als regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen Seiten betrachten. Die Fläche des regelmäßigen Vielecks war  $F = \rho \frac{u}{2}$ , wenn  $u$  der Umfang,  $\rho$  der Radius des einbeschriebenen Kreises war. Für unendlich viele Seiten streben aber  $\rho$  und  $r$  derselben Grenze zu, sodaß man beide vertauschen kann. Der Kreisumfang aber ist beim Radius 1 von der Länge  $2\pi$ , beim Radius  $r$  von der Länge  $u = 2r\pi$ , also ist der Kreisinhalt  $F = r\pi \frac{2r}{2} = \pi r^2$ , wo  $\pi$  der schon mehrfach angegebene Wert ist.

316) **Berechnung von Kreisbogen und Teilen der Kreisfläche.**

a) Der Kreisbogen vom Zentrivinkel  $\alpha^\circ$  ist, wie schon in Nr. 56 gezeigt wurde, von der Länge

$$\widehat{a} = 2\pi r \frac{\alpha^\circ}{360^\circ} = \pi r \frac{\alpha^\circ}{180^\circ}.$$



b) Der zugehörige Kreissector hat die Fläche

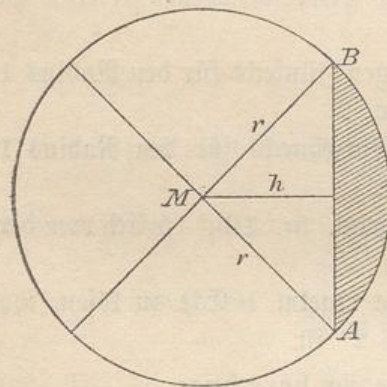
$$F = \pi r^2 \frac{\alpha^\circ}{360^\circ},$$

denn auf jeden Grad kommt der 360<sup>te</sup> Teil der Kreisfläche. Alle zu gleichen Zentriwinkeln verschiedener Kreise gehörigen Sektoren sind einander ähnlich.

c) Das zugehörige Kreissegment hat als Fläche den Unterschied des zugehörigen Sektors und des von der Sehne und den Grenzradien gebildeten Dreiecks. Alle zu gleichen Zentriwinkeln gehörigen Segmente verschiedener Kreise sind einander ähnlich.

**Bemerkung.** Manche Segmente lassen sich leicht berechnen. So handelt es sich in Fig. 126 um das zum Winkel 90° gehörige Segment. Dabei ist der Sektor

Fig. 126.



$$ABM = \pi r^2 \cdot \frac{90}{360} = \frac{\pi r^2}{4}. \text{ Das Dreieck}$$

$MAB$  würde allgemein aus der Grundlinie  $AB$  und der Höhe  $h$  zu berechnen sein, hier aber ist es bequemer, die Grundlinie  $r$  und die Höhe  $r$  zu nehmen, also  $r \cdot \frac{r}{2} = \frac{r^2}{2}$ .

Folglich ist:

$$\begin{aligned} \text{Segment} &= \text{Sektor} - \text{Dreieck} \\ &= \frac{\pi r^2}{4} - \frac{r^2}{2} = \frac{r^2}{2} \left[ \frac{\pi}{2} - 1 \right] = ? \text{.)}^* \end{aligned}$$

Das große Segment hat die Fläche

$$\pi r^2 - \frac{r^2}{2} \left[ \frac{\pi}{2} - 1 \right] = \frac{3}{4} \pi r^2 + \frac{r^2}{2} = \frac{r^2}{4} [3\pi + 2].$$

Kann man eine Kreisteilung mit Zirkel und Lineal durchführen, so lassen sich auch die entsprechenden Segmente leicht nach den obigen Methoden berechnen.

**317) Aufgabe.** In Fig. 127 sei  $ABC$  ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck, dem ein Kreis umbeschrieben ist; außerdem ist um  $C$  ein Kreisbogen mit dem Radius  $CA$  gelegt, der ein (schraffiertes) Kreisbogenzweieck, die sog. **Lunula des Hippokrates**, abgeschnitten hat. Es soll be-

\*) Die Klammer kann mit beliebiger Genauigkeit berechnet werden, je nachdem man  $\pi = 3,14$  oder gleich  $3,14156$  oder gleich den angegebenen Näherungswerten  $\frac{22}{7}$  oder  $\frac{355}{113}$  macht.



wiesen werden, daß diese mondförmige Figur denselben Inhalt hat wie das Dreieck.

Die drei unschraffierten Kreissegmente gehören zum Zentriwinkel  $90^\circ$ , sind demnach ähnlich, das über  $AB$  stehende ist also nach Pythagoras die Summe der beiden anderen. Zieht man also das größere von dem oberen Halbkreise ab, die beiden anderen von dem unteren, so müssen die übrigbleibenden Reste gleich groß sein. Demnach ist die Lunula von derselben Fläche wie das Dreieck.

**Bemerkung.** Mit Hilfe dieses Satzes hoffte man der „Quadratur des Kreises“ näher zu kommen, d. h. der Konstruktion eines Quadrates, welches dieselbe Fläche haben soll, wie der Kreis. Prüft man aber den Satz durch Rechnung, so erkennt man, wie haltlos diese Hoffnung war. Setzt man nämlich  $MA = r$ ,  $CA = \rho = r\sqrt{2}$ , so ist der Halbkreis von der Fläche  $F = \frac{r^2\pi}{2}$ , das Segment  $AEB$  nach vorigem Beispiele von der Fläche  $F_1 = \frac{\rho^2}{2} \left[ \frac{\pi}{2} - 1 \right] = \frac{2r^2}{2} \left[ \frac{\pi}{2} - 1 \right] = \left( \frac{r^2\pi}{2} - r^2 \right)$ . Demnach ist  $F - F_1 = \frac{r^2\pi}{2} - \left( \frac{r^2\pi}{2} - r^2 \right) = r^2$ , d. h. gleich dem Inhalte des Dreiecks  $ABC$ , und gerade der den Faktor  $\pi$  enthaltende Teil ist weggefallen.

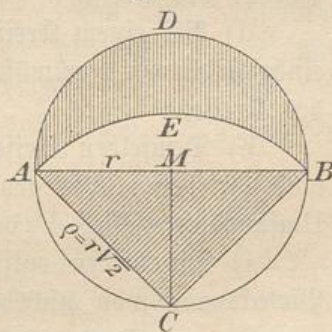
[Erst in neuester Zeit ist durch Lindemann bewiesen worden, daß die Konstruktion der Kreisquadratur mit Zirkel und Lineal unmöglich ist.]

318) **Aufgabe.** Setzt man den Kreis  $AEB$  nach unten fort, so entsteht eine neue größere Lunula, deren Berechnung ausgeführt und zu den Restsegmenten des kleineren Kreises in Beziehung gesetzt werden soll. —

319) **Einige Übungsaufgaben.** Bei den nachstehenden Aufgaben ist zu raten, zunächst die umgekehrte Aufgabe durch Rechnung zu lösen. Aus dem Resultate ist dann die Lösung der gestellten Aufgabe leicht abzuleiten.

a) Bei einem regelmäßigen  $n$ -Eck sei der Umfangsunterschied  $d$  des Um- und des In-Kreises gegeben. Wie groß ist die Seite des  $n$ -Ecks? (Die Fälle  $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, \dots$  sollen durchgeführt werden.)

Fig. 127.





b) Bei einem regelmäßigen  $n$ -Eck sei der Flächenunterschied des Um- und des In-Kreises gegeben. Wie groß ist die Seite des  $n$ -Ecks? (Dieselben Fälle sollen behandelt werden.)

c) Bei einem Kreise sei der Umfangsunterschied des um- und des einbeschriebenen regelmäßigen  $n$ -Ecks bekannt. Wie groß ist der Radius des Kreises? (Dieselben Fälle.)

d) Bei einem Kreise sei der Flächenunterschied des um- und des einbeschriebenen regelmäßigen  $n$ -Ecks bekannt. Wie groß ist der Radius des Kreises?

e) Demselben Kreise sei ein regelmäßiges Dreieck und ein Quadrat einbeschrieben. Wie groß ist der Radius des Kreises, wenn a) der Umfangsunterschied, b) der Flächenunterschied dieser Vielecke bekannt ist?

f) Die beiden entsprechenden Aufgaben für andere regelmäßige Vieleckspaare von nicht übereinstimmender Seitenzahl zu lösen, z. B.  $n = 3, n_1 = 5, 6, 10, \dots; n = 4, n_1 = 5, 6, 10$  usw.

g) Demselben Kreise sei ein regelmäßiges Dreieck und ein Quadrat umbeschrieben. Wie groß ist der Kreisradius, wenn a) der Umfangsunterschied, b) der Flächenunterschied beider Vielecke bekannt ist?

h) Die beiden entsprechenden Aufgaben für andere regelmäßige Vieleckspaare von nicht übereinstimmender Seitenzahl zu lösen.

i) Demselben Kreise sei ein gleichseitiges Dreieck einbeschrieben, ein Quadrat umbeschrieben. Wie groß ist der Kreisradius, wenn a) der Umfangsunterschied, b) der Inhaltsunterschied der beiden Figuren bekannt ist?

k) Dieselben Aufgaben für andere regelmäßige Figuren von nicht übereinstimmender Seitenzahl zu lösen.

l) Der Umfangsunterschied eines Kreises und des umbeschriebenen Fünfecks sei bekannt. Wie groß ist der Kreisradius und die Fünfecksseite?

m) Der Inhaltsunterschied eines Kreises und des einbeschriebenen Fünfecks sei bekannt. Wie groß ist der Kreisradius und die Fünfecksseite?

n) Dieselben Aufgaben für andere regelmäßige Vielecke zu lösen.

### III. Anwendungen der Algebra auf die Geometrie.

#### a) Geometrische Deutung und Konstruktion algebraischer Ausdrücke.

320) In diesem Abschnitte sollen  $a, b$  und  $c$  stets Geraden von gegebener Länge bedeuten,  $x$  die Länge der gesuchten Geraden. Dann gelten folgende Beziehungen:



a)  $x = a + b$  bedeutet die Summe,  $x = a - b$  die Differenz der Geraden  $a$  und  $b$  in Bezug auf ihre Länge.

b) Ist  $n$  eine ganze oder gebrochene unbenannte Zahl, so bedeutet  $x = na$  eine Gerade, welche die  $n$ -fache Länge hat, wie  $a$ . [Bei einer Irrationalzahl  $n$  ist im allgemeinen nur angenäherte Konstruktion möglich, so z. B. bei  $a\sqrt[3]{2}$ ,  $a\sqrt[5]{2}$ ,  $\dots$ , was nicht konstruierbare algebraische Irrationalitäten sind, oder bei  $a\pi$ , wo  $\pi$  eine transzendente Irrationalität ist, die nicht mit Hilfe von Wurzeln aus der Einheit darstellbar ist. Dagegen ist  $a\sqrt{2}$ ,  $a\sqrt[4]{2}$ ,  $a\sqrt[8]{2}$  aus der Einheit konstruierbar.

c)  $x = a\sqrt{n}$  bedeutet die mittlere Proportionale zwischen  $a$  und  $na$ , denn aus  $a : x = x : na$  folgt  $x^2 = na^2$  oder  $x = a\sqrt{n}$ . Genaue Konstruktion ist stets möglich, wenn  $na$  konstruiert werden kann.  $n$  ist wieder eine ganze oder gebrochene unbenannte Zahl.

d)  $x = \frac{ab}{c}$  bedeutet die vierte Proportionale zu  $c$ ,  $a$  und  $b$ , denn aus  $c : a = b : x$  folgt  $x = \frac{ab}{c}$ . Zugleich ist  $x$  die zweite Seite eines Rechtecks, dessen eine Seite gleich  $c$  und dessen Inhalt gleich  $ab$  ist.

e)  $x = \frac{a^2}{b}$  bedeutet die vierte Proportionale in der Proportion  $b : a = a : x$  und zugleich die zweite Seite eines Rechtecks, dessen erste Seite gleich  $b$  und dessen Inhalt gleich  $a^2$  ist.

f)  $x = \sqrt{ab}$  ist die mittlere Proportionale zwischen  $a$  und  $b$ , denn aus  $a : x = x : b$  folgt  $x^2 = ab$  oder  $x = \sqrt{ab}$ .

g)  $x = \sqrt{a^2 + b^2}$  bedeutet die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten  $a$  und  $b$ , denn in diesem ist  $x^2 = a^2 + b^2$ .

h)  $x = \sqrt{a^2 - b^2}$  bedeutet die zweite Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen erste Kathete gleich  $b$ , dessen Hypotenuse gleich  $a$  ist.

**Bemerkungen.** Steht links  $x$ , was von der ersten Dimension ist, so muß auch rechts ein Ausdruck erster Dimension stehen. Ist dies scheinbar nicht der Fall, so kann man links oder rechts einen Faktor bzw. Divisor von der Größe 1 anbringen, der die Angelegenheit ordnet. So kann man die scheinbar diesem Gesetze widersprechende Gleichung  $x = ab$  dadurch in Ordnung bringen, daß man schreibt  $x \cdot 1 = ab$  oder  $x = \frac{ab}{1}$ . In beiden Fällen handelt es sich dann um die Proportion  $1 : a = b : x$ , sodaß  $x$  als vierte Proportionale konstruiert werden kann. Dann bedeutet  $x$  die Seite eines Rechtecks, dessen andere Seite



gleich 1 ist, und dessen Inhalt ebenso groß ist, wie der des Rechtecks aus  $a$  und  $b$ . Allgemeiner gilt der Satz: In jeder geometrischen Gleichung müssen beide Seiten von derselben Dimension sein.

321) Einige häufiger vorkommende algebraische Ausdrücke erster Dimension, durch die sich gewisse Lösungen erleichtern lassen, sind folgende, aus den früheren Berechnungen zu entnehmenden.

$x = a\sqrt{2}$  ist die Diagonale eines Quadrates von der Seite  $a$ .

$x = a\sqrt{\frac{1}{2}}$  ist die Seite eines Quadrates von der Diagonale  $a$ .

$x = \frac{a}{2}\sqrt{3}$  ist die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks von der Seite  $a$ .

$x = 2a\sqrt{\frac{1}{3}}$  ist die Seite eines gleichseitigen Dreiecks von der Höhe  $a$ .

$x = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$  ist der größere Teil einer stetig geteilten Geraden von der Länge  $a$  und zugleich die Seite des regelmäßigen Zehneckes im Kreise mit Radius  $a$ .

$\left[ x = \frac{a}{2}(3 - \sqrt{5}) \right]$  ist der kleinere Teil einer stetig geteilten Geraden von der Länge  $a$ .

$x = \frac{2a}{\sqrt{5} - 1} = \frac{2a(\sqrt{5} + 1)}{5 - 1} = \frac{a}{2}(\sqrt{5} + 1)$  ist der Radius des einem Zehneck von der Seite  $a$  umbeschriebenen Kreises. Zugleich ist es die Länge einer stetig geteilten Geraden, deren größerer Teil die Länge  $a$  hat, während der kleinere die Länge  $\frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$  hat, sodaß das Produkt des Ganzen und des kleineren Teils gleich  $a^2$  ist.

$x = \frac{2a}{3 - \sqrt{5}} = \frac{2a(3 + \sqrt{5})}{9 - 5} = \frac{a}{2}(3 + \sqrt{5})$  ist die Länge einer stetig geteilten Geraden, deren kleinerer Teil die Länge  $a$  hat, während der größere die Länge  $\frac{a}{2}(\sqrt{5} + 1)$  hat.\*)

$x = a\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}$  ist die Seite des regelmäßigen Fünfecks im Kreise mit Radius  $a$ .

$x = a\sqrt{\frac{2}{5 - \sqrt{5}}} = a\sqrt{\frac{2(5 + \sqrt{5})}{25 - 5}} = a\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}$  ist der Radius des einem regelmäßigen Fünfeck von der Seite  $a$  umbeschriebenen Kreises.]

\*) Aus den beiden letzten Angaben folgt: Verlängert man eine stetig geteilte Gerade um den längeren Teil, so ist die gesamte Gerade wieder stetig



322) Einige Ausdrücke zweiter Dimension.

$a^2$  ist die Fläche eines Quadrates von der Seite  $a$ ;  $ab$  ist die Fläche eines Rechtecks von den Seiten  $a$  und  $b$ .

$na^2$ , wo  $n$  eine beliebige unbenannte Zahl ist, bedeutet die Fläche eines Quadrates von der Seite  $a\sqrt{n}$ .

$\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$  bedeutet die Fläche eines gleichseitigen Dreiecks von der Seite  $a$ .

$\left[\frac{5a^2}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\right]$  bedeutet die Fläche eines regelmäßigen Zehnecks im Kreise vom Radius  $a$ .

$\frac{5a^2}{4}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$  bedeutet die Fläche eines regelmäßigen Fünfecks im Kreise vom Radius  $a$ .]

323) Bisweilen hat man Ausdrücke zu konstruieren, die aus Proportionen wie  $x:c = a^2:b^2$  hervorgehen, also  $x = \frac{ca^2}{b^2}$ . Auch solche sind erster Dimension. Man schreibe sie zur Konstruktion in der Form  $x = \frac{\left(\frac{ca}{b}\right)a}{b}$ , konstruiere zunächst die Hilfsgröße  $y = \frac{ca}{b}$  und dann  $x = \frac{ya}{b}$ .

Ebenso ist es mit  $x:c = a^3:b^3$  oder  $x = \frac{ca^3}{b^3} = \frac{\left(\frac{ca^2}{b^2}\right)a}{b}$ . Hier ist erst die Hilfsgröße  $y = \frac{ca^2}{b^2}$  nach vorigem Beispiel zu konstruieren usw.

Ebenso folgt aus  $x:c = a^3:b^2d$   $x = \frac{ca^3}{b^2d} = \frac{\left(\frac{ca^2}{b^2}\right)a}{d}$ .

Handelt es sich um  $x:c = \sqrt{a}:\sqrt{b}$  oder  $x = c\sqrt{\frac{a}{b}}$ , so schreibe man  $x = \sqrt{\frac{ac^2}{b}} = \sqrt{\left(\frac{ac}{b}\right)c}$ , d. h. man konstruiere die Hilfsgröße  $y = \frac{ac}{b}$  und dann  $x = \sqrt{yc}$ , d. h. die mittlere Proportionale zwischen  $y$  und  $c$ .

324) Beziehungen solcher Art erleichtern oft die Lösung von Konstruktionsaufgaben. Geschieht die Analysis einer Konstruktionsaufgabe auf rechnendem Wege, so nennt man sie eine algebraische Analysis. Ein Beispiel möge dies aufklären.

geteilt. Zieht man vom größeren Teile einer stetig geteilten Geraden den kleineren Teil ab, so ist der größere Teil wieder stetig geteilt.



**Aufgabe.** Ein gleichseitiges Dreieck zu konstruieren, dessen Fläche dreimal so groß sein soll, wie die eines gegebenen Quadrates.

**Algebraische Analysis.** Wird die Seite des gesuchten Dreiecks gleich  $x$  gesetzt, so ergibt sich die Höhe nach Pythagoras aus  $h^2 = x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}x^2$  als  $h = \frac{x}{2}\sqrt{3}$ , die Dreiecksfläche als  $F = \frac{xh}{2} = \frac{x^2}{4}\sqrt{3}$ . Ist  $a^2$  die Fläche des gegebenen Quadrates, so ist die des Dreiecks dreimal so groß, also  $\frac{x^2}{4}\sqrt{3} = 3a^2$ , also  $x^2 = 12a^2\sqrt{\frac{1}{3}} = 4a^2\sqrt{3}$ , also  $x = \sqrt{4a \cdot a\sqrt{3}}$ , d. h. gleich der mittleren Proportionale aus  $4a$  und  $a\sqrt{3}$ . Von den Größen ist  $4a$  leicht zu konstruieren,  $a\sqrt{3}$  aber ist die größere Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks von der Hypotenuse  $2a$  und der kleineren Kathete  $a$ .

Die Ausführung und die Beschreibung der Konstruktion bleibe dem Schüler überlassen.

325) Die algebraische Analysis einer Aufgabe klärt auch häufig darüber auf, wie man auf den Weg zu irgend einer Konstruktion, die vorher den Eindruck eines bloßen Kunstgriffes machte, überhaupt gelangt ist. Als Beispiel diene die früher gelöste Aufgabe: Eine gegebene Gerade  $a$  stetig zu teilen.

**Algebraische Analysis.** Ist die gegebene Gerade gleich  $a$ , so setze man z. B. den größeren der gesuchten Teile gleich  $x$ , den kleineren also gleich  $a - x$ . Die stetige Proportion ist dann

$$(a - x) : x = x : a,$$

was die Gleichung

$$x^2 = a(a - x) = a^2 - ax$$

oder

$$x^2 + ax = a^2$$

gibt. Die Auflösung dieser Gleichung gibt

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}.$$

Der Wert mit positivem Wurzelzeichen ist

$$x_1 = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{a}{2}.$$

Die Konstruktion dieses Ausdrucks ist die eine der in Nr. 302 durchgeführten. Der Ausdruck läßt sich einfacher schreiben in der Form

$$x_1 = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1). \quad (\text{Der kleinere Teil ist } \frac{a}{2}(3 - \sqrt{5}). \text{ Ihn würde}$$



man erhalten haben, wenn man den kleineren Teil gleich  $x$  gesetzt hätte.)

Die Analysis hat aber noch eine zweite Lösung  $x_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = -\frac{a}{2}(\sqrt{5} + 1)$  gegeben. Schneidet man diesen Teil in entgegengesetzter Richtung ab, so verlängert man die Gerade  $a$  um die Länge  $\frac{a}{2}(\sqrt{5} + 1)$ . Dann ist die verlängerte Gerade von der Länge  $\frac{a}{2}(\sqrt{5} + 3)$ . Sie ist ebenfalls stetig geteilt, der größere Teil ist  $\frac{a}{2}(\sqrt{5} + 1)$ , der kleinere ist  $a$ , wie leicht zu zeigen ist.

Die algebraische Analysis hat also nicht nur den Konstruktionsweg der früheren Lösung gegeben, sondern außerdem neben der inneren stetigen Teilung noch eine äußere stetige Teilung gezeigt.

**Bemerkung.** Hätte man den kleineren Teil gleich  $x$  gesetzt, so wäre der größere gleich  $(a - x)$  gewesen. Die Proportion

$$x : (a - x) = (a - x) : a$$

hätte dann die Gleichung

$$ax = a^2 - 2ax + x^2$$

oder

$$x^2 - 3ax = -a^2$$

gegeben. Ihre Lösung ist

$$x = \frac{3a}{2} \pm \sqrt{\frac{9a^2}{4} - a^2} = \frac{a}{2}(3 \pm \sqrt{5}).$$

$x_1 = \frac{a}{2}(3 - \sqrt{5})$  ist der vorher berechnete kleinere Teil,  $x_2 = \frac{a}{2}(3 + \sqrt{5})$  gibt die Länge der vorher verlängerten Geraden. —

326) Man versuche eine Reihe früher gelöster Aufgaben mit Hilfe einer algebraischen Analysis neu zu lösen, z. B.:

a) Einem gleichschenkligen Dreieck ein auf der Basis stehendes Quadrat einzuzeichnen, von dem zwei Ecken in den Schenkeln liegen.

b) Einem Halbkreise ein Quadrat in entsprechender Weise einzuzeichnen.

c) Dieselben Aufgaben für den Fall zu lösen, daß die Grundlinie des Rechtecks die Hälfte der Höhe sei.

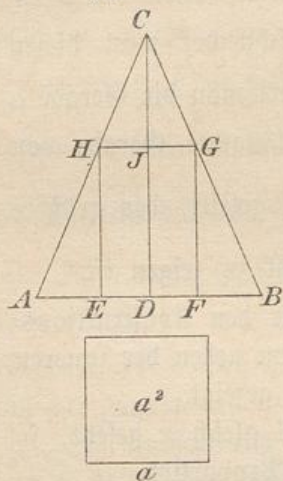
327) Als Beispiel einer Flächenaufgabe sei folgende durchgeführt:

In ein gegebenes gleichschenkliges Dreieck ein Rechteck einzustellen, dessen Inhalt gleich dem eines gegebenen Quadrates ist.



**Algebraische Analysis.**  $ABC$  sei das gegebene gleichschenklige Dreieck von der Höhe  $h$  und der Basis  $b$ ,  $a$  sei die Seite des gegebenen Quadrates. Setzt man die Grundlinie des gesuchten Rechtecks gleich  $x$ , die Höhe gleich  $y$ , so wird zunächst verlangt, daß

Fig. 128.



$$(1) \quad xy = a^2$$

sei. Ferner ist  $\triangle ABC \sim \triangle HGC$ , folglich ist

$$AB : HG = DC : JC$$

oder

$$b : x = h : (h - y),$$

also

$$bh - by = xh.$$

Daraus folgt

$$(2) \quad y = \frac{bh - xh}{b} = \frac{h(b - x)}{b}.$$

Setzt man den Wert von  $y$  in Gleichung (1)

ein, so hat man

$$\frac{xh(b - x)}{b} = a^2.$$

Dies formt sich um zu

$$x(b - x) = \frac{a^2 b}{h}$$

oder

$$x^2 - bx = -\frac{a^2 b}{h}.$$

Die Lösung dieser Gleichung ist

$$x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \frac{a^2 b}{h}} = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{b}{h}} a\right)^2},$$

oder auch

$$x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{b \left[ \frac{b}{4} - \frac{a^2}{h} \right]}.$$

Die Konstruktion der beiden Werte von  $x$  nach einem dieser Ausdrücke sei dem Schüler überlassen. — Da der Ausdruck unter der Wurzel nicht negativ werden darf, weil sonst der Wurzelwert imaginär sein würde, muß  $\frac{a^2}{h} < \frac{b}{4}$  oder  $a^2 < \frac{bh}{4}$  sein, d. h. das gegebene Quadrat darf höchstens halb so groß sein wie die Fläche des Dreiecks; oder das größte Rechteck, welches einem gleichschenkligen Dreieck eingeschrieben werden kann, ist das von halber Höhe. (Ist der Wurzelwert gleich Null, so wird in der Tat  $x = \frac{b}{2}$ .)



328) Einige andere Beispiele von Aufgaben.

a) Einem Halbkreise ein Rechteck gegebenen Umfangs einzubeschreiben.

b) Einem Halbkreise ein Rechteck von gegebener Fläche einzubeschreiben (welche letztere in Form eines Quadrates gegeben ist).

c) Gegeben sei ein Kreissegment, zu dem der Zentriwinkel  $120^\circ$  gehört. Dem Segmente soll 1) ein Rechteck gegebenen Umfangs, 2) ein Rechteck gegebenen Inhalts einbeschrieben werden.

d) Dieselbe Aufgabe für ein Segment vom Zentriwinkel  $90^\circ$  zu lösen.

e) In einen gegebenen Kreissektor vom Zentriwinkel  $90^\circ$  ein Rechteck gegebenen Umfangs oder gegebenen Inhalts so einzuzichnen, daß zwei Ecken auf dem Kreisbogen, zwei auf den Grenzradialen liegen.

329) Als letztes Beispiel soll eine schwierigere Aufgabe gelöst werden.

**Übungsaufgabe.** Ein gewöhnliches Tangentenviereck zu konstruieren aus den Seiten  $a, b, c$  und dem Radius  $\rho$  des In-Kreises.

**Algebraische Analysis.** Die vierte Seite  $d$  ergibt sich als  $d = a + c - b$ . Die vom Mittelpunkt  $\mu$  des In-Kreises nach  $A, B, C, D$  gezogenen Geraden seien, wie in Fig. 113,  $q_1, q_2, q_3, q_4$ , die Tangentenlängen  $t_1, t_2, t_3, t_4$ , sodaß  $AB = a = t_1 + t_2$  ist, usw. Nach den früher ausgeführten Betrachtungen (vgl. Nr. 297) ist  $\frac{q_3^2}{q_1^2} = \frac{bc}{ad}$ , zugleich ist  $q_1^2 = \rho^2 + t_1^2, q_3^2 = \rho^2 + t_3^2$ . Aus  $t_1 + t_2 = a$  und  $t_2 + t_3 = b$  folgt  $t_3 = t_1 - a + b$ .

Statt  $\rho^2 + t_3^2 = q_3^2$  ist also zu schreiben

$$(1) \quad \rho^2 + (t_1 - a + b)^2 = (\rho^2 + t_1^2) \frac{bc}{ad}.$$

Um  $t_1$  zu berechnen, bringe man die Gleichung auf die Form

$$t_1^2 \frac{ad - bc}{ad} - 2t_1(a - b) = \rho^2 \frac{bc - ad}{ad} - (a - b)^2$$

oder

$$(1)^* \quad t_1^2 - 2t_1 \frac{(a - b)ad}{ad - bc} = -\rho^2 - \frac{(a - b)^2 ad}{ad - bc}.$$

Der Nenner  $ad - bc$  geht, wenn man  $d = a + c - b$  setzt, über in  $(a - b)(a + c)$ . Setzt man dies ein, so gibt die Kürzung mit dem Faktor  $(a - b)$  der Gleichung die Form

$$(2) \quad t_1^2 - 2t_1 \frac{ad}{a + c} = -\rho^2 - \frac{(a - b)ad}{a + c}.$$



Der Ausdruck  $\frac{ad}{a+c}$  oder  $\frac{ad}{b+d}$  hat eine bestimmte Bedeutung. Teilt man nämlich die Seite  $a$  von  $A$  aus im Verhältnis  $b:d$ , und bezeichnet man den Teilpunkt mit  $K$ , so ist  $AK = \frac{ad}{b+d} = \frac{ad}{a+c}$ . Die Gleichung geht also über in

$$(2)^* \quad t_1^2 - 2t_1 \cdot AK - \varrho^2 - (a-b)AK,$$

und ihre Lösung ist

$$(3) \quad t_1 = AK \pm \sqrt{AK^2 - (a-b)AK - \varrho^2}.$$

Ist nun  $E$  der Berührungspunkt für die Seite  $a$ , so ist  $t_1 = AE = AK \pm KE$ . Folglich muß  $EK$  absolut gleich dem Werte der Wurzel sein. Diese erhält für den Fall  $BK < BE$  das positive, sonst das negative Zeichen. Ersteres werde hier angenommen. Dann ist

$$(3)^* \quad t_1 = AK + \sqrt{AK(AK - a + b) - \varrho^2} = AK + \sqrt{e^2 - \varrho^2},$$

wobei  $e$  die Länge der Verbindungslinie  $K\mu$  ist. Demnach ist

$$(4) \quad e^2 = \frac{ad}{a+c} \left[ \frac{ad}{a+c} - a + b \right] \\ = \frac{ad}{(a+c)^2} [a(a+c-b) - a^2 - ac + ab + bc] = \frac{abcd}{(a+c)^2}.$$

Denkt man sich also das Tangentenviereck als Gelenkviereck mit veränderlichen Winkeln, so ist  $e$  unveränderlich. Mit anderen Worten: Ist bei einem Gelenkviereck  $a+c=b+d$ , hält man  $a$  fest und bewegt man die übrigen Seiten, so läßt sich ihm stets ein Kreis einbeschreiben, der Mittelpunkt dieses Kreises aber bewegt sich auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt auf  $a$  liegt und diese Seite im Verhältnis  $d:b$  teilt und dessen Radius die Länge  $e = \frac{\sqrt{abcd}}{a+c}$  hat.

**Konstruktion.** Man konstruiere  $d = a + c - b$ . Man teile die Seite  $AB = a$  so, daß  $AK:KB = d:b$  wird. Man konstruiere  $e$  mit Hilfe der Proportion

$$(a+c): \sqrt{ab} = \sqrt{cd}: e,$$

(wobei die Wurzeln mittlere Proportionale zu  $a$  und  $b$  bzw.  $c$  und  $d$  sind). Um den Teilpunkt  $K$  schlage man mit  $e$  einen Halbkreis. Jetzt ziehe man zu  $a$  eine Parallele in der Entfernung  $\varrho$ . Schneidet diese den Kreis in zwei Punkten  $\mu$ , so wähle man einen dieser Punkte als Mittelpunkt des In-Kreises mit Radius  $\varrho$  und zeichne diesen Kreis. Von  $B$  aus ziehe man an ihn eine Berührende, der man die Länge  $BC = b$  gebe, von  $A$  aus eine zweite Berührende, der man die



Länge  $AD = d$  gebe. Die Verbindungslinie  $CD$  vollendet das gesuchte Viereck  $ABCD$ .

Der Beweis sei dem Schüler überlassen. Ebenso die Determination, bei der Grundbedingung ist, daß  $a + c - b$  positiv (also mindestens Null) ist. Je nachdem  $e = \varrho$  oder  $e > \varrho$  ausfällt, ist eine, oder sind zwei Lösungen möglich.

**Bemerkungen.** a) Ist  $a$  die größte Seite, also  $c$  die kleinste, so kann man das Viereck so weit bewegen, daß Winkel  $D$  oder Winkel  $C$  gleich  $180^\circ$  wird. Dadurch entstehen Dreiecke mit den Seiten  $a, b$  und  $(c + d)$  bzw. mit  $a, (b + c)$  und  $d$  als Sonderfälle des Vierecks. Denkt man sich diese Dreiecke gezeichnet und die Mittelpunkte  $\mu_1$  und  $\mu_2$  der In-Kreise konstruiert, so gibt die Mittelsenkrechte  $\mu_1\mu_2$  auf  $a$  den Teilpunkt  $K$ , und  $K\mu_1 = K\mu_2$  ist der Radius des Kreises, der der geometrische Ort für  $\mu$  ist.

b) Der Inhalt des Vierecks,  $J = (a + c)\varrho$  oder  $J = (b + d)\varrho$  ist proportional zu  $\varrho$ . Der größte Wert, den  $\varrho$  annehmen kann, ist  $\varrho = e$ . Der Höchstwert des Inhalts ist also  $J = (a + c) \frac{\sqrt{abcd}}{a + c} = \sqrt{abcd}$ . In diesem Falle gibt es nur ein einziges  $\mu$ . Die beiden unter a) besprochenen Dreiecke sind für konvexe Tangentenvierecke Grenzfälle, von denen jeder ein Minimum des Inhalts gibt. Die betreffenden Radien sind  $\varrho_1 = \sqrt{\frac{cd(a-d)}{a+c}}$  und  $\varrho_2 = \sqrt{\frac{(d-c)bc}{a+c}}$ , sodaß  $J_1 = \frac{a+b+c+d}{2} \sqrt{\frac{cd(a-d)}{a+c}}$  und  $J_2 = \frac{a+b+c+d}{2} \sqrt{\frac{(d-c)bc}{a+c}}$  ist. Dies folgt leicht aus den Heronischen Dreiecksformeln. und daraus  $K\mu = \frac{\sqrt{abcd}}{a+c}$ .

c) Für gewöhnliche Tangentenvierecke gilt also folgender Satz: Teilt man die Seiten im Verhältnis der anliegenden Seiten, so liegen die Teilpunkte auf einem zum In-Kreise konzentrischen Kreise. ( $BK_1 = a \frac{b}{b+d} = b \frac{a}{a+c} = BK_2$ ,  $BE_1 = BE_2 = t_2$ , folglich  $E_1K_1 = E_2K_2$ , folglich  $\triangle K_1\mu E_1 \cong \triangle K_2\mu E_2$ , also  $K_1\mu = K_2\mu$  und ebenso  $= K_3\mu = K_4\mu = e$ .) Der Radius  $e$  hängt nur von den Seiten ab. Ist also das Viereck ein Gelenkviereck, so bleibt es in sich beweglich, wenn man  $\mu$  gelenkig mit  $K_1, K_2, K_3, K_4$  verbindet.  $K_1K_2K_3K_4$  ist ein Sehnenviereck:  $E_1E_2$  und  $E_3E_4$  schneiden einander auf der Diagonale  $AC$  im äußeren Ähnlichkeitspunkte der um  $A$  und  $C$  mit  $AK_1$  und  $CK_3$  geschlagenen Kreise. Entsprechendes gilt von  $E_2E_3$  und  $E_4E_1$ .



d) **Einfachste Analysis.**  $\sphericalangle A\mu B = \frac{\gamma}{2} + \frac{\delta}{2}$ ,  $\sphericalangle B\mu C = \frac{\delta}{2} + \frac{\alpha}{2}$  usw. Man mache  $\sphericalangle A\mu K_1 = \frac{\gamma}{2}$ , also  $\sphericalangle B\mu K_1 = \frac{\delta}{2}$  und zerlege durch  $\mu K_2$  usw. die folgenden Winkel entsprechend. Dabei wird  $\mu K_1 = \mu K_2 = \mu K_3 = \mu K_4 = e$ . Ferner wird  $\triangle A\mu K_1 \sim \triangle \mu C K_3$ , also  $AK_1 : e = e : CK_3$  und  $e^2 = AK_1 \cdot CK_3 = BK_2 \cdot CK_4$  usw. Folglich  $\frac{AK_1}{BK_2} + 1 = \frac{DK_4}{CK_3} + 1$  oder  $\frac{AK_1 + BK_1}{BK_2} = \frac{DK_3 + CK_3}{CK_2}$  oder  $\frac{a}{BK_2} = \frac{c}{CK_2}$  oder  $\frac{BK_2}{CK_2} = \frac{a}{c}$ , d. h. Seite  $b$  ist im Verhältnis der anliegenden Seiten geteilt, ebenso die übrigen. Also ist  $AK_1 = a \frac{d}{b+d}$   $= \frac{ad}{a+c}$ ,  $CK_3 = c \frac{b}{b+d} = \frac{bc}{a+c}$ , folglich  $e^2 = \frac{abcd}{(a+c)^2}$ . —

Leicht sind nun  $t_1, q_1 \dots$  zu berechnen und die Rechnungen des § 297 einfacher durchzuführen.\*)

e) Für den Fall des Maximalvierecks fällt  $\mu K_1$  auf  $\mu E_1$ , sodaß  $\frac{\alpha}{2}$  und  $\frac{\gamma}{2}$  Komplementwinkel werden, also  $\alpha + \gamma = 180^\circ$ . Dann ist also das Tangentenviereck  $ABCD$  zugleich ein Sehnenviereck (bizen-trisches Viereck.)

f) Tangentenvierecke lassen sich auch konstruieren und berechnen aus  $a, b, c, J$ ;  $a, b, q, J$ ;  $a, b, u, J$ ;  $a, b, c, t_1$ ;  $a, b, c, q_1$ ;  $a, b, c, (t_1 + t_3)$ ;  $t_1, t_2, t_3, t_4$ ;  $q_1, q_2, q_3, q_4$ ;  $q_1, q_2, a, c$ .

**Schlußbemerkung.** Eine große Anzahl von Berechnungs- und Konstruktionsaufgaben, die hierher gehören, findet man in Band II 2. Aufl. dieses Lehrbuchs, Seite 1—33. Einige der dortigen Aufgaben sind in diesen Band einbezogen worden. Sie lehnen sich zum Teil an gewisse Sätze an: Satz des Ptolemäus vom Sehnenviereck, Satz des Brahmagupta vom Sehnenviereck, einige Konstruktionen nach Mascheroni; Formeln und Dreieckskonstruktionen, die mit  $q, q_1, q_2, q_3$  zusammenhängen. Formeln und Dreieckskonstruktionen, die mit  $r$  und den  $q$  zusammenhängen. Eulersche Gerade und Feuerbachscher Kreis. Beziehungen zwischen den Seiten, Höhen, Mittellinien und Winkelhalbierenden des Dreiecks. Die verschiedenen Konstruktionsmethoden werden dort im Zusammenhange in einem besonderen Kapitel besprochen.

\*) Das Beispiel zeigt, daß man sich mit dem Gelingen einer algebraischen Analysis nicht beruhigen soll. Man hat noch nach der einfachsten Herleitung der gefundenen Beziehungen zu suchen.



## Zweite Abteilung.

# Arithmetik.

### A. Vervollständigung der Untertertia.

#### I. Das Gebiet der gewöhnlichen (absoluten und ganzen) Zahlen.

1) Um angeben zu können, wie oft gleichartige Gegenstände vorhanden sind, erfand der Mensch die Zahl. Durch das Abzählen der Gegenstände entstand die Zahlenreihe. Die Reihenfolge, in der man die Gegenstände zählte, ergab sich als gleichgültig. Das Bedürfnis nach leichter Übersichtlichkeit veranlaßte die Zusammenstellung der Zahlen zu geordneten Gruppen. Wahrscheinlich war der Umstand, daß der Mensch 10 Finger\*) hat, an denen er abzuzählen und zu rechnen begann, der Grund dafür, daß die Gruppierung zu je 10, das Dezimalsystem, die Alleinherrschaft eroberte. [Auch andere Systeme waren in Gebrauch und haben auch, wie das Duodezimalsystem, wissenschaftliche Bearbeitung gefunden.]

2) Dieses System erforderte also 10 Zeichen oder Ziffern. Dabei erschien es aber zweckmäßig, auch für das Nichtvorhandensein (kein mal vorhanden) ein Wort und ein entsprechendes Zeichen festzustellen, die Zahl Null oder 0, und so zählte man die erste Gruppe nicht von 1 bis 10, sondern von 0 bis 9. Dies wurden die einstelligen Zahlen. Von 10 bis 99 folgten die zweistelligen Zahlen, von 100 bis 999 die dreistelligen, usw.

Setzte man nun fest, daß die vor die Zahl geschriebene Null die Zahl nicht ändert, so konnte man statt 7 auch 07 oder 007 schreiben, diese Zahl also als ein-, zwei-, dreistellig usw. auffassen, und so

\*) Man denke auch an die Zehen (10) an den Füßen des Menschen.



ergab sich, daß man die Anzahl der zweistelligen Zahlen als 100, die der dreistelligen als 1000 usw. betrachten durfte. [Diese Einfachheit war z. B. bei der Schreibweise der römischen Zahlen nicht vorhanden, denn dort erschien XIII als vierstellig, XXI als dreistellig, C als einstellig usw., sodaß ein einfaches Rechenschema gar nicht möglich war und sogar das Lesen größerer Zahlen Schwierigkeiten machte.]

3) Jede Zahl der Zahlenreihe ist größer ( $>$ ), als alle vorhergehenden und kleiner ( $<$ ), als alle folgenden, und zwar ist sie um die Einheit 1 größer bzw. kleiner, als die beiden Nachbarzahlen.

Als Einheiten galten zunächst die gezählten gleichartigen Gegenstände. So spricht man z. B. von 10 Bäumen, obwohl unter diesen recht auffallende Verschiedenheiten bemerkt werden können. Besser stimmen schon die aus dem Bedürfnis genaueren Vergleichens und Messens hervorgegangenen Maßeinheiten überein. So können z. B. zwei Metermaßstäbe in ihrer Länge oder zwei Kilogrammstücke in ihrem Gewichte so genau übereinstimmen, daß man mit gewöhnlichen Hilfsmitteln keinen Unterschied zwischen ihnen wahrnimmt. Wohl aber werden feinere Meß- bzw. Wägungsmethoden Unterschiede nachweisen. Zeigt doch z. B. die Physik, daß sogar derselbe Meterstab bei verschiedenen Temperaturen verschiedene Länge hat, und daß dasselbe Kilogrammstück an verschiedenen Orten und in verschiedenen Höhenlagen verschiedenes Gewicht zeigt. Dazu kommt auch noch die allmähliche Abnutzung der Maßstäbe und Gewichte.

Die angewandte Mathematik sieht von allen Unterschieden zufälliger Art ab und kennt nur genau übereinstimmende Maßeinheiten. Die reine Zahlenlehre aber beschäftigt sich nicht mit Maßeinheiten dieser oder jener Art, sondern nur mit ihrer Anzahl. (Benannte Zahlen, unbenannte Zahlen.) Wie die Zahl überhaupt nur etwas Gedachtes, nicht etwas wirklich Vorhandenes ist, so ist auch die absolute Einheit der Zahlenwelt, die Zahleneinheit, oder die unbenannte Zahl Eins, nur etwas Gedachtes. Jede Zahl, z. B.  $3 = 1 + 1 + 1$  bedeutet eine Mehrheit solcher untereinander absolut gleichen Zahleneinheiten. Erst durch das vollständige Entfernen aller Unterschiede der gezählten Einheiten entsteht die Möglichkeit, über die Idealwelt der Zahlen bestimmte Aussagen von untrüglicher Sicherheit zu machen.

4) Um gewisse Aussagen nicht nur für einzelne bestimmte Zahlen, sondern für jede beliebige Zahl machen zu können, führt man als neue Zeichen Buchstaben ein, z. B.  $a, b, c$  usw., die man als



allgemeine Zahlen betrachtet, da jede besondere Zahl für sie gesetzt werden kann. [Allgemein sind diese Zahlen auch in dem Sinne, als sie neben dem Dezimalsystem auch andere Systeme umfassen können.] Vorläufig beschränken wir uns auf die absoluten Zahlen, die eine Mehrheit von Einheiten darstellen, die also ganze, nicht gebrochene Zahlen und, von 0 und 1 abgesehen, sämtlich größer als 1 sind. Man nennt dieses Zahlengebiet auch das der ganzen, positiven Zahlen. Die Bedeutung der Worte absolut und positiv soll erst später erläutert werden.

5) Das Rechnen mit unbenannten Zahlen wird insoweit als bekannt vorausgesetzt, als es sich um die vier Grundrechnungsarten (vier Spezies) handelt, um das Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren. Über jede dieser Rechnungsarten sollen allgemeine Bemerkungen gemacht und dabei soll das Rechnen mit bestimmten Zahlen auf das Rechnen mit allgemeinen Zahlen übertragen werden.

6) Unter **Addieren** versteht man die Kunst, anzugeben, wie viele Einheiten mehrere Zahlen zusammen genommen enthalten. Dadurch erhält man die Summe der einzelnen Zahlen. Die letzteren heißen Glieder der Summe oder Summanden (d. h. zusammenzuzählende Zahlen).

So ist z. B.  $2 + 5 = 7$ , und zugleich  $5 + 2 = 7$ . Allgemein also gilt, wie sich aus der Gleichgültigkeit der Reihenfolge beim Abzählen erklärt, die Formel

$$a + b = b + a,$$

oder bei einer größeren Anzahl von Gliedern:

$$a + b + c + \dots = a + c + b + \dots = b + c + a + \dots \text{ usw.}$$

In Worten: Eine Summe ändert ihren Wert nicht, wenn man ihre Glieder beliebig umstellt.

7) Ist die Anzahl der Glieder eine größere, so kann man zunächst einzelne Gruppen summieren und dann die Summe der Einzelsummen bilden. Deutet man die Gruppen durch Klammern an, so ist z. B.

$$5 + 2 + 9 + 1 = (5 + 2) + (9 + 1) = 7 + 10 = 17.$$

Allgemeiner ist z. B.

$$\begin{aligned} a + b + c + d + e &= (a + b) + (c + d + e) \\ &= (a + b + d) + (c + e) = \text{usw.} \end{aligned}$$



Die Gruppierung kann eine ganz beliebige sein. So ist z. B.  
 $1521 + 342 + 13 + 2 = 1000 + (500 + 300) + (20 + 40 + 10)$   
 $+ (1 + 2 + 3 + 2) = 1000 + 800 + 70 + 8 = 1878.$

Hier wurden also die Einer, die Zehner u. s. w. in je einer Gruppe vereinigt. So entstand das gebräuchliche Additionschema, für unser Beispiel also

$$\begin{array}{r} 1521 \\ 342 \\ 13 \\ 2 \\ \hline 1878 \end{array}$$

[Bei der römischen Schreibweise der Zahlen würde ein so einfaches Schema nicht möglich sein.]

8) Unter **Subtrahieren** versteht man die Kunst, anzugeben wie viele Einheiten übrig bleiben, wenn man von einer zunächst größeren Anzahl von Einheiten eine (kleinere) Anzahl wegnimmt.

So ist z. B.  $7 - 5 = 2$ . Hier heißt 7 der Minuendus (die Zahl, die verkleinert werden soll), 5 der Subtrahendus (die Zahl, die abgezogen werden soll), 2 heißt der Rest, oder die Differenz (der Unterschied) der beiden Zahlen. Minuend und Subtrahend dürfen nicht umgestellt werden, jedoch können Subtrahend und Differenz ihre Stellen vertauschen. So ist z. B.  $7 - 5 = 2$  und zugleich  $7 - 2 = 5$ . Allgemein:

$$\text{Aus } a - b = c \text{ folgt } a - c = b.$$

9) Addiert man zur Differenz ( $7 - 5$ ) den Subtrahend 5, so erhält man die Anfangszahl 7. Also:

$$\text{Differenz} + \text{Subtrahend} = \text{Minuend},$$

oder:

$$(a - b) + b = a.$$

Ebenso ist

$$(a + b) - b = a.$$

Also: Addition und Subtraktion derselben Zahl heben sich gegenseitig auf.

Aus jeder der Gleichungen

$$a + b = c, \quad c - a = b, \quad c - b = a$$

folgen die beiden anderen. Oder:

$$\text{aus } a + b = c \text{ folgt } b = c - a \text{ und } a = c - b.$$



10) Hat man von einer Zahl mehrere andere abzuziehen, so kann dies Schritt für Schritt geschehen, man kann aber auch die Summe der abzuziehenden Zahlen bilden und diese Summe von der ersten genannten Zahl abziehen. So ist z. B.

$$12 - 5 - 3 = 7 - 3 = 4, \text{ aber auch } = 12 - (5 + 3) = 12 - 8 = 4.$$

Folglich ist allgemein:

$$a - b - c = a - (b + c).$$

Umgekehrt ergibt sich der Satz: Man subtrahiert eine Summe von einer Zahl, indem man die einzelnen Glieder subtrahiert.

11) Da das Summieren gruppenweise geschehen kann, so ist auch gruppenweises Abziehen gestattet, z. B.

$$\begin{aligned} 2978 - 1236 &= (2000 + 900 + 70 + 8) - (1000 + 200 + 30 + 6) \\ &= (2000 - 1000) + (900 - 200) + (70 - 30) + (8 - 6) \\ &= 1000 + 700 + 40 + 2 = 1742. \end{aligned}$$

Aus dieser Gruppierung der Einer, Zehner u. s. w. entspringt das bekannte Subtraktionschema, bei unserem Beispiele also:

$$\begin{array}{r} 2978 \\ 1236 \\ \hline 1742 \end{array}$$

[Auch dieses Schema ist bei der römischen Schreibweise nicht möglich.]

Aus der Willkürlichkeit der Gruppierung folgt:

$$a + (b - c) = (a + b) - c.$$

Also: Man addiert eine Differenz zu einer Zahl, indem man den Minuendus addiert und den Subtrahendus subtrahiert. Z. B.

$$8 + (5 - 3) = (8 + 5) - 3 = 13 - 3 = 10.$$

12) Dagegen ist  $8 - (5 - 3) = 8 - 2 = 6$  und zugleich  $8 - (5 - 3) = (8 - 5) + 3 = 3 + 3 = 6$ . Soll nämlich von 8 die Differenz  $(5 - 3)$  abgezogen werden, und zieht man zunächst 5 ab, so hat man 3 zuviel abgezogen und muß, um das richtige Resultat zu erhalten, 3 addieren. Allgemein folgt:

$$a - (b - c) = a - b + c.$$



Also: Man subtrahiert eine Differenz, indem man den Minuendus subtrahiert und den Subtrahendus addiert.

13) Einen zweigliedrigen Ausdruck nennt man ein Binom, einen dreigliedrigen ein Trinom, einen mehrgliedrigen Ausdruck überhaupt ein Polynom. Aus obigem ergibt sich für das Rechnen mit Polynomen folgendes: Es ist

$$a + (b + c - d + e - f - g) = a + b + c - d + e - f - g,$$

dagegen:

$$a - (b + c - d + e - f - g) = a - b - c + d - e + f + g.$$

Demnach kann bei der zu addierenden Klammer das Klammerzeichen einfach weggelassen werden; will man dagegen die abzuziehende Klammer entfernen, so sind alle Additionsglieder der Klammer zu subtrahieren, alle Subtraktionsglieder zu addieren. (Umkehrung der Vorzeichen.)

Dieses Entfernen des Klammerzeichens bezeichnet man als das Auflösen der Klammern.

14) Im Innern der Klammer können statt der Zahlen auch Klammern stehen. Dann giebt man, um Verwechslungen vorzubeugen, den Klammern verschiedene Gestalt, z. B.  $()$  oder  $[]$  oder  $\{\}$ . Beim Auflösen kann man erst die äußeren oder erst die inneren Klammern entfernen. So ist z. B.

$$\begin{aligned} & a - \{ b - [c + (d - e) - (f - g - h)] + i \} \\ &= a - \{ b - [c + d - e - f + g + h] + i \} \\ &= a - \{ b - c - d + e + f - g - h + i \} \\ &= a - b + c + d - e - f + g + h - i, \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} &= a - b + [c + (d - e) - (f - g - h)] - i \\ &= a - b + c + (d - e) - (f - g - h) - i \\ &= a - b + c + d - e - f + g + h - i. \end{aligned}$$

15) Unter **Multiplizieren** versteht man die Kunst, die Summe mehrerer Summanden von gleicher Größe in einfacher Weise zu finden.

Handelt es sich z. B. um  $7 + 7 + 7 + 7 = 28$ , so schreibt man einfacher  $4 \cdot 7 = 28$ . Der mehrfach wiederholte Summand heißt der Multiplikand (die Zahl, welche vervielfältigt werden soll), die Anzahl der gleichen Summanden heißt der Multiplikator



(die vervielfältigende Zahl). Das Resultat der Rechnung heißt Produkt; Multiplikand und Multiplikator heißen Faktoren des Produktes.

Dabei beobachtet man z. B., daß  $4 \cdot 3 = 12$  und auch  $3 \cdot 4 = 12$  ist.

• • • • In der That ist es gleichgültig, ob man die nebenstehenden  
• • • • zwölf Punkte als drei Horizontalreihen zu je 4 oder als  
• • • • vier Vertikalreihen zu je 3 betrachtet, was sich wiederum  
aus der Gleichgültigkeit der Reihenfolge beim Abzählen und Gruppieren  
erklärt. Allgemein ist also

$$a \cdot b = b \cdot a,$$

d. h. Multiplikator und Multiplikand können miteinander vertauscht werden, ohne daß das Produkt sich ändert.

Auf die Stellung der ersteren soll daher nicht mehr geachtet werden. Während zwischen zwei miteinander zu multiplizierenden Zahlen gewöhnlicher Art ein Punkt als Zeichen der Multiplikation stehen muß, kann er bei Buchstaben entbehrt werden, so daß z. B.  $ab$  dasselbe bedeutet wie  $a \cdot b$ . — Es ist  $a \cdot 1 = a$ , der Faktor 1 kann also weggelassen werden. Ferner ist  $a \cdot 0 = 0$ .

16) Sind mehrere Zahlen miteinander zu multiplizieren, so ist die Reihenfolge der Multiplikation gleichgültig, auch kann man dabei Klammern anwenden oder vorhandene Klammern weglassen. So ist z. B.

$$2 \cdot 3 \cdot 4 = (2 \cdot 3) \cdot 4 = 2 \cdot (3 \cdot 4) = 3 \cdot 2 \cdot 4 = 3 \cdot 4 \cdot 2 = \text{u. s. w.}$$

Allgemein also:

$$abc = (ab)c = a(bc) = acb = bac = bca = cab = cba,$$

d. h. der Wert eines Produktes ist unabhängig von der Reihenfolge der Faktoren. Man multipliziert ein Produkt mit einer Zahl, indem man einen seiner Faktoren mit ihr multipliziert; man multipliziert mit einem Produkt, indem man mit seinen einzelnen Faktoren multipliziert.

17) Auch eine Summe kann als Faktor auftreten. Z. B. ist

$$3(7 + 2) = (7 + 2) + (7 + 2) + (7 + 2) = 3 \cdot 9 = 27,$$

zugleich aber

$$3(7 + 2) = 3 \cdot 7 + 3 \cdot 2 = 21 + 6 = 27.$$

Allgemeiner ist

$$\begin{aligned} 3(a + b) &= (a + b) + (a + b) + (a + b) \\ &= (a + a + a) + (b + b + b) = 3a + 3b \end{aligned}$$



und ganz allgemein

$$(a + b)c = c(a + b) = ca + cb = ac + bc.$$

Folglich:

a) Man multipliziert eine Summe mit einer Zahl, indem man die einzelnen Glieder mit ihr multipliziert (und die entstandenen Produkte addiert).

b) Man multipliziert eine Zahl mit einer Summe, indem man sie mit den einzelnen Gliedern der Summe multipliziert (und die entstehenden Produkte addiert).

Aus  $ac + bc = c(a + b)$  folgt noch:

c) Kommt in einer Summe von Produkten derselbe Faktor in jedem Gliede vor, so kann man ihn absondern; d. h. man befreit jedes Glied von dem Faktor und multipliziert mit diesem die Summe der bleibenden Zahlen. (Absondern des gemeinschaftlichen Faktors.)

Beispiel zu a):

$$\begin{aligned} 2312 \cdot 3 &= (2000 + 300 + 10 + 2) 3 \\ &= 2000 \cdot 3 + 300 \cdot 3 + 10 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \\ &= 6000 + 900 + 30 + 6 = 6936. \end{aligned}$$

Darauf beruht das bekannte Multiplikationsschema:

$$\begin{array}{r} 2312 \\ 3 \\ \hline 6936 \end{array}$$

Beispiel zu c):

$$\begin{aligned} 17 \cdot 122 + 17 \cdot 340 + 17 \cdot 538 &= 17(122 + 340 + 538) \\ &= 17 \cdot 1000 = 17000. \end{aligned}$$

18) Aber auch beide Faktoren können Summen sein. Dann ist z. B.

$$(a + b)(c + d) = (a + b)c + (a + b)d = ac + bc + ad + bd,$$

oder auch

$$(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd,$$

was dasselbe ist. — Ähnlich ist es mit mehrgliedrigen Summen; z. B.

$$\begin{aligned} 123 \cdot 21 &= (100 + 20 + 3)(20 + 1) \\ &= (100 + 20 + 3) 20 + (100 + 20 + 3) 1 \\ &= (2000 + 400 + 60) + (100 + 20 + 3), \end{aligned}$$

oder (wenn man die mit gleichviel Nullen behafteten Glieder addiert)

$$= 2000 + 500 + 80 + 3 = 2583.$$



Daher kommt das Multiplikationsschema für dieses Beispiel:

$$\begin{array}{r} 123 \\ 21 \\ \hline 123 \\ 246 \\ \hline 2583 \end{array}$$

19) Ist dagegen ein Faktor des Produktes eine Differenz, so wird z. B. folgendermaßen verfahren:

$$\begin{aligned} (a - b) \cdot 3 &= (a - b) + (a - b) + (a - b) \\ &= (a + a + a) - (b + b + b) = 3a - 3b. \end{aligned}$$

Durch Umstellung folgt ebenso

$$3(a - b) = 3a - 3b.$$

Folglich:

a) Man multipliziert eine Differenz mit einer Zahl, indem man den Minuendus und den Subtrahendus für sich mit ihr multipliziert (und vom ersteren Produkte das letztere abzieht).

b) Man multipliziert eine Zahl mit einer Differenz, indem man die Zahl erst mit dem Minuendus, dann mit dem Subtrahendus multipliziert (und vom ersteren Produkte das letztere abzieht). Z. B.

$$(50 - 38)3 = 50 \cdot 3 - 38 \cdot 3 = 150 - 114 = 36. \text{ Probe: } 12 \cdot 3 = 36.$$

20) Ist einer der Faktoren eine Summe, der andere eine Differenz, so ist nach 17) und 19)

$$\begin{aligned} (a + b)(c - d) &= (a + b)c - (a + b)d \\ &= ac + bc - (ad + bd) = ac + bc - ad - bd. \end{aligned}$$

**Beispiel.**  $(5 + 2)(7 - 3) = 5 \cdot 7 + 2 \cdot 7 - 5 \cdot 3 - 2 \cdot 3$   
 $= 35 + 14 - 15 - 6 = 28. \text{ In der That ist } 7 \cdot 4 = 28.$

21) Sind beide Faktoren Differenzen, so wird

$$\begin{aligned} (a - b)(c - d) &= (a - b)c - (a - b)d = ac - bc - (ad - bd) \\ &= ac - bc - ad + bd. \end{aligned}$$

**Beispiel.**  $(5 - 2)(7 - 3) = 5 \cdot 7 - 2 \cdot 7 - 5 \cdot 3 + 2 \cdot 3$   
 $= 35 - 14 - 15 + 6 = 12. \text{ In der That ist } 3 \cdot 4 = 12.$



## 22) Einige Sonderfälle:

$$(a + b)(a + b) = aa + ba + ab + bb = aa + 2ab + bb.$$

Abgekürzt schreibt man  $a^2$  statt  $aa$  ( $a^2$  lies: „ $a$ -Quadrat“ oder „ $a$  hoch 2“).  
Dies gibt die Formel:

$$a) \quad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

in Worten: Das Quadrat der Summe zweier Zahlen ist gleich der Summe der Quadrate der einzelnen Zahlen, vermehrt um das doppelte Produkt aus beiden Zahlen. (Vergl. Geometrie Abschnitt 256 a.)

$$\text{Beispiel. } 1004^2 = (1000 + 4)^2 = 1000^2 + 2 \cdot 1000 \cdot 4 + 4^2 \\ = 1\,000\,000 + 8000 + 16 = 1\,008\,016.$$

Ebenso ist

$$b) \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

in Worten: Das Quadrat der Differenz zweier Zahlen ist gleich der Summe der Quadrate der einzelnen Zahlen, vermindert um das doppelte Produkt beider Zahlen. (Vergl. Geometrie Abschnitt 256 b.)

$$\text{Beispiel. } 997^2 = (1000 - 3)^2 = 1000^2 - 2 \cdot 1000 \cdot 3 + 3^2 \\ = 1\,000\,000 - 6000 + 9 = 994\,009.$$

$$c) \quad (a + b)(a - b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2.$$

Kurz ausgedrückt: Summe mal Differenz gleich der Differenz der Quadrate.

$$\text{Beispiel. } 1003 \cdot 997 = (1000 + 3)(1000 - 3) = 1000^2 - 3^2 \\ = 1\,000\,000 - 9 = 999\,991.$$

$$\text{Beispiel. } 8324^2 - 1676^2 = (8324 + 1676)(8324 - 1676) \\ = 10\,000 \cdot 6648 = 66\,480\,000.$$

**Beispiel.**

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2) = 4ab,$$

$$\text{z. B. } 1007^2 - 993^2 = (1000 + 7)^2 - (1000 - 7)^2 \\ = 4 \cdot 1000 \cdot 7 = 28\,000.$$

**Beispiel.**

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + (a^2 - 2ab + b^2) = 2(a^2 + b^2),$$

$$\text{z. B. } 821^2 + 779^2 = (800 + 21)^2 + (800 - 21)^2 = 2(800^2 + 21^2) \\ = 2(640\,000 + 441) = 2 \cdot 640\,441 = 1\,280\,882.$$



Nach a) wird

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b) = (a+b)^2(a+b) \\ = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

( $a^3 = aaa$ , lies „a hoch 3“, oder „a zur dritten“.) Also:

$$d) \quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

$$\text{z. B. } 1004^3 = (1000+4)^3 = 1000^3 + 3 \cdot 1000^2 \cdot 4 + 3 \cdot 1000 \cdot 4^2 + 4^3 \\ = 1\,000\,000\,000 \\ \quad \quad \quad 12\,000\,000 \\ \quad \quad \quad 48\,000 \\ \quad \quad \quad 64 \\ \hline 1\,012\,048\,064$$

Ebenso ergibt sich

$$e) \quad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3,$$

$$\text{z. B. } 996^3 = (1000-4)^3 = 1000^3 - 3 \cdot 1000^2 \cdot 4 + 3 \cdot 1000 \cdot 4^2 - 4^3 \\ = 1\,000\,000\,000 - 12\,000\,000 + 48\,000 - 64 = 998\,047\,936.$$

Beachte die abwechselnden Vorzeichen.

$$\text{Beispiel. } (a+b)^3 + (a-b)^3 = 2(a^3 + 3ab^2) = 2(a^2 + 3ab^2) \\ = 2a(a^2 + 3b^2).$$

$$\text{Beispiel. } (a+b)^3 - (a-b)^3 = 2(3a^2b + b^3) = 2b(3a^2 + b^2).$$

Bilde selbst Zahlenbeispiele zu den beiden letzteren Formeln, um die darin liegende Vereinfachung des Rechnens kennen zu lernen.

$$f) \quad (a+b+c+d+e)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + 2ab \\ + 2ac + 2ad + 2ae + 2bc + 2bd + 2be + 2cd + 2ce + 2de.$$

In Worten: Das Quadrat einer Summe ist gleich der Summe der Einzelquadrate vermehrt um die Summe der möglichen doppelten Produkte.

Wichtig ist noch folgende Anordnung, bei der schrittweise quadriert wird:

$$(a+b+c+d+e)^2 = a^2 + (2ab + b^2) + [2(a+b)c + c^2] \\ + [2(a+b+c)d + d^2] + [2(a+b+c+d)e + e^2].$$

Auf dieser Schreibweise, die leicht in Worten auszudrücken ist, beruht das später zu lehrende Ausziehen der Quadratwurzel.

**Aufgaben.** Zeige, daß:

$$(a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc,$$

$$(a-b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc,$$



$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + 6abc,$$

$$(a + b - c)^3 = a^3 + b^3 - c^3 + 3a^2b - 3a^2c + 3ab^2 - 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 - 6abc,$$

$$(a - b - c)^3 = a^3 - b^3 - c^3 - 3a^2b - 3a^2c + 3ab^2 - 3b^2c + 3ac^2 - 3bc^2 + 6abc,$$

$$(a^2 + ab + b^2)(a - b) = a^3 - b^3,$$

$$(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)(a - b) = a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)(a^2 - b^2),$$

$$(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)(a - b) = a^5 - b^5,$$

$$(a^2 - ab + b^2)(a + b) = a^3 + b^3,$$

$$(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3)(a + b) = a^4 - b^4,$$

$$(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)(a + b) = a^5 + b^5.$$

Setze in einzelne dieser Formeln für die Buchstaben größere Zahlen ein, um auch hier die Erleichterung des Rechnens kennen zu lernen. Man kann für jeden Buchstaben auch eine Klammer einsetzen, z. B.  $(2\alpha + 3\beta)$  an Stelle von  $a$  u. s. w., und zunächst mit der Klammer wie mit einem Buchstaben rechnen. Erst am Schluß, nach Erledigung aller Vereinfachungen, setzt man den Ausdruck für die Klammer ein und vollendet die Rechnung.

#### Beispiel.

$$[(2\alpha + 3\beta) + (3\gamma + 4\delta)]^2 - [(2\alpha + 3\beta) - (3\gamma + 4\delta)]^2 \\ = [a + b]^2 - [a - b]^2 = 4ab = 4(2\alpha + 3\beta)(3\gamma + 4\delta) = ?$$

23) Unter **Dividieren** versteht man die Kunst, diejenige Zahl zu finden, die, mit einer gegebenen Zahl multipliziert, eine andere gegebene Zahl gibt.

**Beispiel.** Welche Zahl gibt mit 3 multipliziert die Zahl 6?

**Auflösung.** 2, denn  $2 \cdot 3 = 6$ , oder  $\left(\frac{6}{3}\right) \cdot 3 = 6$ . Daher schreibt man  $6 : 3 = 2$  oder  $\frac{6}{3} = 2$  (lies: 6 durch 3 = 2).

Die gefundene Zahl 2 oder  $\frac{6}{3}$  gibt an, wie oft 3 in 6 enthalten ist (wie oft 3 in 6 aufgeht). Aus  $2 \cdot 3 = 6$  folgt  $3 \cdot 2 = 6$ , also ist auch  $\frac{6}{2} = 3$ , sodaß 2 und 3 in bezug auf ihre Stelle vertauscht werden können; 6 enthält die Zahl 2 dreimal als Teil in sich, dagegen die Zahl 3 nur zweimal.

Allgemein: Welche Zahl gibt, mit  $b$  multipliziert, die Zahl  $a$ ?

**Auflösung.** Die Zahl  $\left(\frac{a}{b}\right)$  oder  $(a : b)$ ; denn  $\left(\frac{a}{b}\right)b = a$ . Hierbei werde zunächst vorausgesetzt, daß  $a$  ein Vielfaches von  $b$  ist



(daß  $b$  in  $a$  aufgeht). Setzt man  $\frac{a}{b} = c$ , so ist  $c \cdot b = a$ , zugleich aber auch  $b \cdot c = a$ , folglich auch  $b = \frac{a}{c}$ . Demnach können  $b$  und  $c$  in bezug auf ihre Stelle vertauscht werden;  $b$  ist in  $a$   $c$ -mal,  $c$  in  $a$   $b$ -mal als Teil enthalten.

In  $\frac{a}{b} = c$  nennt man  $a$  den Dividendus (die Zahl, die geteilt werden soll),  $b$  den Divisor (die teilende Zahl),  $c$  oder  $\frac{a}{b}$  den Quotienten\*) der Zahlen  $a$  und  $b$  (die Zahl, welche angibt, wie oft  $b$  in  $a$  enthalten ist).

Aus jeder der Gleichungen

$$\frac{a}{b} = c, \quad a = bc, \quad \frac{a}{c} = b$$

folgen die beiden anderen. In Worten lauten sie:

Quotient = Dividend durch Divisor,

Dividend = Divisor mal Quotient,

Divisor = Dividend durch Quotient.

Divisor und Quotient können vertauscht werden, dagegen kann der Dividend nicht mit einer der anderen Größen in eine Vertauschung eintreten.

Aus  $a = a \cdot 1$  folgt  $\frac{a}{a} = 1$ , d. h. jede Zahl ist in sich selbst ein Mal enthalten. Außerdem folgt  $\frac{a}{1} = a$ , d. h. eine Zahl bleibt bei der Division durch 1 ungeändert. Der Divisor 1 darf also weggelassen werden.

Aus der obigen Erklärung  $\left(\frac{a}{b}\right)b = a$  folgt: Wird eine Zahl durch eine zweite dividiert und dann mit derselben multipliziert (oder umgekehrt), so bleibt sie ungeändert. Also: Multiplikation mit einer Zahl und Division durch dieselbe Zahl heben sich gegenseitig auf. (Dies folgt auch daraus, daß  $a \frac{b}{b} = a \cdot 1 = a$  ist.)

24) Es ist  $\frac{8}{4} \cdot 3 = 2 \cdot 3 = 6$ , aber auch  $\frac{24}{4} = \frac{8 \cdot 3}{4} = 6$ , folglich ist  $\frac{8 \cdot 3}{4} = \frac{8}{4} \cdot 3$ . Es ist also gleichgültig, ob man 8 erst mit 3

\*) Das Wort Bruch für Quotient wird vorläufig vermieden, weil das Aufgehen vorausgesetzt war. Danach richten sich vorläufig auch die Zahlenbeispiele.



multipliziert und dann durch 4 dividiert, oder ob man es erst durch 4 dividiert und dann mit 3 multipliziert. Allgemein ist also

$$\frac{ac}{b} = \frac{a}{b} c = c \frac{a}{b}.$$

Dies läßt sich folgendermaßen deuten:

a) Man dividiert ein Produkt durch eine Zahl, indem man einen der Faktoren durch sie dividiert (und den Quotienten mit dem anderen Faktor multipliziert).

b) Man multipliziert einen Quotienten mit einer Zahl, indem man den Dividendus mit ihr multipliziert (und das Produkt durch den Divisor dividiert).

c) Man multipliziert eine Zahl mit einem Quotienten, indem man sie mit dem Dividendus multipliziert und durch den Divisor dividiert.

25) Man kann 30 erst durch 2 und dann noch durch 3 dividieren, also auch unmittelbar durch  $2 \cdot 3 = 6$  teilen. Dabei ist

$$\frac{\left(\frac{30}{2}\right)}{3} = \frac{30}{2 \cdot 3} = \frac{\left(\frac{30}{3}\right)}{2} = 5.$$

Allgemeiner: Ist  $a$  erst durch  $b$  teilbar, und dann noch durch  $c$ , so ist

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c} = \frac{a}{bc} = \frac{\left(\frac{a}{c}\right)}{b}.$$

In Worten: a) Man dividiert einen Quotienten durch eine Zahl, indem man den Divisor mit der Zahl multipliziert.

b) Man dividiert eine Zahl durch ein Produkt, indem man sie erst durch den einen Faktor dividiert und dann den Quotienten durch den anderen Faktor teilt. Die Reihenfolge der Divisionen ist dabei gleichgültig.

26) Aus 24b) und 25c) folgt

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{bd} c = \frac{ac}{bd}.$$

Beispiel.

$$\frac{24}{4} \cdot \frac{6}{3} = \frac{24 \cdot 6}{4 \cdot 3} = 12.$$

In Worten: Man multipliziert einen Quotienten mit einem Quotienten, indem man die beiden Dividenden und ebenso die beiden Divisoren miteinander multipliziert.



27) Besonderer Fall:  $\frac{a}{b} \cdot \frac{n}{n} = \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}$ , folglich:

a) Multipliziert man den Dividenten und den Divisor mit derselben Zahl, so bleibt der Quotient ungeändert. (Erweitern des Quotienten.)

b) Läßt sich vom Divisor und vom Dividenten derselbe Faktor absondern, so kann dieser bei beiden gestrichen werden, ohne daß der Quotient sich ändert. (Kürzen des Quotienten.)

**Beispiel.**  $\frac{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{30}{10}$ ;  $\frac{90}{30} = \frac{10 \cdot 9}{10 \cdot 3} = \frac{9}{3}$ .

28) Es ist  $a \frac{bc}{bc} = \left(\frac{ac}{b}\right) \left(\frac{b}{c}\right) = a$ . Nun folgt aus  $k \cdot l = a$ , daß  $k = \frac{a}{l}$  ist, folglich ist auch

$$\frac{ac}{b} = \frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)}, \quad \text{oder:} \quad \frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)} = a \frac{c}{b}.$$

In Worten: Man dividiert durch einen Quotienten, indem man ihn umkehrt und dann multipliziert, d. h. indem man mit dem Divisor multipliziert und durch den Dividenten dividiert. (Selbstverständlich ist  $\frac{b}{c}$  in  $a$   $c$ -mal so oft enthalten, als  $b$ , welches  $\frac{a}{b}$ -mal darin aufgeht.)

3. B.  $\frac{18}{\left(\frac{6}{2}\right)} = \frac{18 \cdot 2}{6} = 3 \cdot 2 = 6$ .

Folglich ist auch  $\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$ .

**Beispiel:**  $\frac{\left(\frac{120}{12}\right)}{\left(\frac{10}{2}\right)} = \frac{120}{12} \cdot \frac{2}{10} = \frac{240}{120} = 2$ .

29) Es ist  $\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right)c = \frac{a}{c}c + \frac{b}{c}c = a + b$ . Nun folgt aus  $kc = (a + b)$   $k = \frac{a + b}{c}$ , setzt man also für  $k$  die Klammer  $\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right)$ , so folgt

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a + b}{c}.$$

**Beispiel:**  $\frac{8}{4} + \frac{12}{4} = \frac{8 + 12}{4} = \frac{20}{4} = 5 = 2 + 3$ .

In Worten: a) Man dividiert eine Summe durch eine Zahl, indem man jedes einzelne Glied durch sie dividiert.



b) Quotienten mit demselben Divisor werden addiert, indem man die Dividenten addiert (und die Summe durch den Divisor dividiert).

**Beispiel:**  $\frac{69}{3}$  oder  $\frac{60+9}{3} = \frac{60}{3} + \frac{9}{3} = 20 + 3$ . Hierauf beruht das Divisionschema

$$69 : 3 = 23$$

$$\begin{array}{r} 6 \overline{) 69} \\ \underline{9} \phantom{0} \\ 9 \phantom{0} \\ \underline{0} \phantom{0} \end{array}$$

Auf dieselbe Art wird bewiesen, daß

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

ist, was sich ebenfalls auf zweierlei Art in Worten ausdrücken läßt.

$$31) \text{ Es ist } \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}.$$

Folglich gelten die beiden Formeln

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd},$$

in denen die oberen Zeichen (+) und die unteren Zeichen (—) zusammengehören. In Worten: Zwei Quotienten mit ungleichem Divisor werden addiert, indem man jeden von beiden mit dem Divisor des anderen erweitert und dann die neuen Quotienten gleichen Divisors addiert. Dasselbe gilt vom Subtrahieren. (Gleichnamig machen. Multiplizieren übers Kreuz.)

**Beispiel:**  $\frac{8}{4} + \frac{12}{3} = \frac{8 \cdot 3}{4 \cdot 3} + \frac{4 \cdot 12}{4 \cdot 3} = \frac{8 \cdot 3 + 4 \cdot 12}{4 \cdot 3} = \frac{24 + 48}{12} = \frac{72}{12} = 6$ , wie aus  $2 + 4$  zu erwarten war.

32) Einige Übungsbeispiele.

$$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a+b} = \frac{(a+b)(a+b)}{a+b} = a+b.$$

$$\frac{a^2 - 2ab + b^2}{a-b} = \frac{(a-b)(a-b)}{a-b} = a-b.$$

$$\frac{a^2 - b^2}{a+b} = \frac{(a+b)(a-b)}{a+b} = a-b.$$

$$\frac{a^2 - b^2}{a-b} = \frac{(a+b)(a-b)}{a-b} = a+b.$$

$$\frac{ac + bc + ad + bd}{c+d} = \frac{c(a+b) + d(a+b)}{c+d} = \frac{(a+b)(c+d)}{c+d} = a+b.$$



$$\begin{aligned} \frac{10ac + 15bc + 14ad + 21bd}{2a + 3b} &= \frac{5c(2a + 3b) + 7d(2a + 3b)}{2a + 3b} \\ &= \frac{(2a + 3b)(5c + 7d)}{2a + 3b} = 5c + 7d. \\ \frac{a^2bc^2}{abc} &= ac. \end{aligned}$$

Übe an einzelnen geeigneten Beispielen schon jetzt das Divisionschema ein.

**Beispiel:**

$$\begin{array}{r} (a^2 + 2ab + b^2) : (a + b) = a + b \\ \underline{a^2 + ab} \phantom{+ b^2} \\ ab + b^2 \\ \underline{ab + b^2} \\ 0 \end{array}$$

**Beispiel:**

$$\begin{array}{r} (ac + bc + ad + bd) : (c + d) = a + b \\ \underline{ac + ad} \phantom{+ bc + bd} \\ bc + bd \\ \underline{bc + bd} \\ 0 \end{array}$$

## II. Erweiterung des Zahlengebietes durch Einführung der negativen und der gebrochenen Zahlen.

33) Bisher bezeichneten die Buchstaben  $a, b, c$  u. f. w. nur solche ganze Zahlen, die sich durch Addition aus der Zahl 1 herstellen lassen. Infolgedessen wurde die Subtraktionsformel  $a - b = c$  auf die Fälle beschränkt, wo  $b < a$  ist; und die Divisionsformel  $\frac{a}{b} = c$  auf die Fälle, wo  $a$  ein Vielfaches von  $b$  ist. Beide Beschränkungen engten die Wahl der Übungsbeispiele ein, und schon einfache Aufgaben des praktischen Lebens verlangen die Aufhebung dieser Schranken.

34) Jemand besitze 300 Mark und habe einen Geschäftsverlust von 400 Mark. Wie stellt sich sein Vermögen? Es ist  $300 - 400 = (300 - 300) - 100 = 0 - 100$ , also ergibt sich ein Vermögen von  $(0 - 100)$  Mark oder wie man kürzer schreibt, von  $-100$  Mark (lies: „minus hundert Mark“). Es handelt sich also um 100 Mark Schulden, wenn man das „negative“ Vermögen als Schuld bezeichnet.

In ähnlicher Weise gibt jede Differenz, deren Subtrahend größer ist, als der Minuend, eine Zahl, die sich als Differenz zwischen 0 und einer anderen herausstellt. So ist



$$\begin{aligned} 5 - 6 &= 0 - 1 = -1, & 8 - 10 &= 0 - 2 = -2, \\ 3 - 6 &= 0 - 3 = -3, & 5 - 9 &= 0 - 4 = -4. \end{aligned}$$

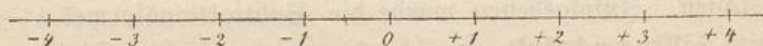
Man nennt jede Differenz, deren Minuend Null und deren Subtrahend größer als Null ist, eine negative Zahl, sodaß die Reihe der negativen Zahlen lautet:

$$-1, -2, -3, -4, -5, \text{ u. f. w.}$$

Im Gegensatz dazu nennt man die früher behandelten Zahlen positive und bezeichnet sie als  $+1, +2, +3, +4$ , u. f. w. Man nennt  $-5$  die entgegengesetzte Zahl von  $+5$ ,  $-a$  die entgegengesetzte von  $+a$ .

34) Zur Veranschaulichung der positiven und negativen ganzen Zahlen kann man eine Reihe von Punkten auf gerader Linie markieren, die in gleichen Abständen von einem Punkte 0 aus nach rechts und links aufeinander folgen. Nach rechts mögen sich die positiven Zahlen befinden. Geht man von 5 aus schrittweise nach links, so gelangt man über 4, 3, 2, 1 nach 0, der nächste Schritt führt nach  $-1$ , die folgenden nach  $-2, -3, -4$ , u. f. w. Schneidet man von 0 aus nach rechts  $+3$  ab, dann vom Endpunkte aus  $-5$  (d. h. 5 nach links), so gelangt man an die Stelle  $-2$ , und es ist wirklich  $3 - 5 = -2$ . In dieser Weise läßt sich an der geraden Linie jedes Addieren und Subtrahieren mit den Zahlen des erweiterten Zahlensystems prüfen. \*)

Fig. 129.



36) Wie  $8 - 13 = -5 = -(13 - 8)$  ist, so ist für  $b > a$  allgemein  $(a - b) = -(b - a)$ .

Dies steht im Einklange mit dem Vertauschungsgesetze der Addition, denn es ist  $a - b = -b + a$ , wobei letzteres mit  $-(b - a)$  übereinstimmt. Aus dem Bestehenbleiben dieses Gesetzes folgt für positives  $c$  und die negative Größe  $(-c)$  noch folgendes:

$$\begin{aligned} a + (-c) &= a + (0 - c) = (a + 0) - c = a - c, \\ a - (-c) &= a - (0 - c) = (a - 0) + c = a + c, \end{aligned}$$

d. h. Addition einer negativen Zahl bedeutet dasselbe, wie Subtraktion der entsprechenden positiven; Subtraktion der negativen dasselbe, wie Addition der positiven. (Prüfe

\*) Diese Einteilung der Geraden findet an jedem Quecksilberthermometer praktische Anwendung. Die positiven Zahlen bedeuten dort Wärme, die negativen dagegen Kälte.



dies an den Punkten der gezeichneten Geraden und an dem Beispiele von Vermögen und Schulden.)

Auch alle Gruppierungsgesetze der Addition bleiben für das erweiterte Zahlengebiet bestehen (denn alles Addieren und Subtrahieren negativer Zahlen ist auf das Subtrahieren und Addieren positiver zurückgeführt).

37) Hat Jemand 3 mal, d. h.  $(+ 3)$  mal, den Geschäftsverlust 400 Mark, so verliert er 1200 Mark, oder er gewinnt, was dasselbe ist,  $- 1200$  Mark. Es ist also verstandesgemäß

$(- 400) \cdot 3 = - 1200$ , also auch  $(- 400) (+ 3) = - 1200$  und allgemein

$$a) \quad (- a) \cdot (+ b) = - ab$$

zu setzen. Dies steht auch im Einklange mit der früheren Formel  $(c - a)(d + b) = cd - ad + cb - ab$ , denn setzt man hier  $c = 0$  und  $d = 0$ , so erhält man  $(0 - a)(0 + b) = 0 \cdot 0 - a \cdot 0 + 0 \cdot b - ab = - ab$ . Also gilt das Gesetz: Ist der Multiplikand negativ und der Multiplikator positiv, so ist das Produkt negativ.

38) Wird nun verlangt, daß das Vertauschungsgesetz der Multiplikation bestehen bleibt, so muß man setzen  $(+ 3) \cdot (- 400) = - 1200$  und allgemein:

$$b) \quad (+ b) \cdot (- a) = - ab.$$

[Praktisch deuten ließe sich das Multiplizieren von  $(+ 3)$  mit  $(- 400)$  etwa als ein 400 maliges Wegnehmen von  $(+ 3)$ , was ein Vermindern um 1200 bedeutet.] Setzt man dies fest, so ist man wieder im Einklange mit der früher nur für positive Faktoren bewiesenen Formel  $(d + b)(c - a) = dc + bc - ad - ab$  für  $d = 0$  und  $c = 0$ , und die genannte Festsetzung führt nicht auf Widersprüche. [Das Verlangen, bei der Erweiterung des Multiplikationsbegriffes mit den früheren Festsetzungen nicht in Widerspruch zu geraten, ist allerdings berechtigt, aber an sich durchaus keine logische Notwendigkeit. Es handelt sich bei der Formel b) nicht um einen beweisbaren Satz, sondern um eine zweckmäßige Festsetzung.] Die Formel b) besagt lediglich, daß man unter Multiplikation mit einer negativen Zahl dasselbe verstehen will, wie bei der Multiplikation mit einer positiven, jedoch soll dabei das Produkt das entgegengesetzte Vorzeichen haben, wie bei der letzteren Operation. Damit ist die Multiplikation mit einer negativen Zahl endgültig erklärt (definiert).



39) Hält man letzteres fest, so muß aus a) folgen:

$$c) \quad (-a)(-b) = +ab.$$

Auch dies steht im Einklange mit der früheren Formel  $(c-a)(d-b) = cd - ad - cb + ab$  für  $c=0$  und  $d=0$ . [Praktisch ließe sich die Formel c) beispielsweise und zur Not deuten als ein wiederholtes Vermindern oder Wegnehmen von Schulden, was einer Vermehrung des Vermögens gleichkommt. Wer 3 mal seine Schulden um je 400 Mark vermindert, bessert sein Vermögen um + 1200 Mark. Das eigentliche Wesen der Multiplikation negativer Größen miteinander wird jedoch durch solche Deutungen nicht hinreichend getroffen, denn diese erläutern auch nur die in der Formel  $(-1)(-b) = -(-b) = +b$  liegende Festsetzung.]

40) So ergibt sich für den erweiterten Multiplikationsbegriff folgende Vorzeichentabelle:

$$\begin{aligned} + \cdot + &= + \quad (\text{plus mal plus} = \text{plus}^*), \\ - \cdot + &= - \quad (\text{minus mal plus} = \text{minus}), \\ + \cdot - &= - \quad (\text{plus mal minus} = \text{minus}), \\ - \cdot - &= + \quad (\text{minus mal minus} = \text{plus}). \end{aligned}$$

41) Hält man ferner bei der Erweiterung des Multiplikationsbegriffes fest, daß aus  $a \cdot b = c$  folgen soll  $a = \frac{c}{b}$ , so gilt ebenso für die Division die Vorzeichentabelle:

$$\begin{aligned} + : + &= + \quad (\text{plus durch plus} = \text{plus}), \\ - : + &= - \quad (\text{minus durch plus} = \text{minus}), \\ + : - &= - \quad (\text{plus durch minus} = \text{minus}), \\ - : - &= + \quad (\text{minus durch minus} = \text{plus}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Demnach ist } \frac{-a}{+b} &= \frac{0-a}{+b} = -\frac{a}{b}; \quad \frac{+a}{-b} = \frac{+a}{0-b} = -\frac{a}{b}; \\ \frac{-a}{-b} &= \frac{0-a}{0-b} = +\frac{a}{b}. \end{aligned}$$

Jetzt ist das Rechnen mit negativen Zahlen auf das Rechnen mit positiven zurückgeführt, ohne daß Widersprüche mit den früheren Gesetzen entstanden sind. Die früheren Formeln behalten also ihre Geltung auch dann, wenn negative Differenzen auftreten oder die Buchstabengrößen selbst negative Zahlen sind. Die Zeichen + und - werden von jetzt ab Vorzeichen genannt. Der Zahlenwert heißt, wenn

\*) In den Klammern ist absichtlich eine abgekürzte Sprechweise angewandt, die sich dem Gedächtnis besser einprägt. Eigentlich müßte man sagen: Positives mit Positivem multipliziert, giebt Positives u. s. w.



man vom Vorzeichen absieht, der absolute Zahlenwert. Deshalb lautete die Überschrift des Abschnitts I: „Das Gebiet der gewöhnlichen (absoluten und ganzen) Zahlen.“ Die Sätze der Abschnitte 40 und 41 lassen sich jetzt für je zwei Zahlen folgendermaßen zusammenfassen: Beim Multiplizieren und Dividieren geben gleiche Vorzeichen „plus“, ungleiche geben „minus“.

42) Wird irgend eine Einheit (sei es eine Münz-, Gewichts- oder Längeneinheit u. dergl.) in 4 gleiche Teile zerlegt, so nennt man jeden Teil  $\frac{1}{4}$  der Einheit. Das 4-fache des Teiles gibt die ursprüngliche Einheit wieder, es ist also auch in der reinen Zahlenlehre  $\frac{1}{4} \cdot 4 = 1$ , und, wenn man festsetzt, daß das Gesetz  $ab = ba$  erhalten bleiben soll,  $4 \cdot \frac{1}{4} = 1$ .

Teilt man dagegen die Summe 3 Einheiten in 4 gleiche Teile, so bezeichnet man jeden Teil als  $(\frac{3}{4} \text{ Einheit})$ . Das 4-fache des Teils gibt die ursprünglichen 3 Einheiten wieder. Also ist auch in der reinen Zahlenlehre  $\frac{3}{4} \cdot 4 = 3$ , und bei Festhaltung des Vertauschungsgesetzes  $4 \cdot \frac{3}{4} = 3$ . Da aber jetzt das 3-fache der vorigen Einheit geteilt wurde, so muß jeder Teil der neuen Teilung drei mal so groß sein, als jeder der vorigen Teilung, d. h. es ist  $\frac{3}{4} = 3 \cdot \frac{1}{4}$ .

Allgemein: Ist  $b$  eine ganze Zahl, und soll die Zahleneinheit 1 in  $b$  gleiche Teile zerlegt werden, so bezeichnet man jeden Teil als  $\frac{1}{b}$ , und es ist  $b \cdot \frac{1}{b} = 1$ . Ist auch  $a$  eine ganze Zahl, und soll man diese in  $b$  gleiche Teile zerlegen, so bezeichnet man jeden Teil als  $\frac{a}{b}$ , und es ist  $b \cdot \frac{a}{b} = a$  und  $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$ .

Dabei darf  $b$  größer, kleiner oder gleich  $a$  sein, keine von beiden Zahlen braucht ein Vielfaches der anderen zu sein, beide können positiv, beide negativ, beide können verschiedenen Vorzeichens sein.

Man bezeichnet  $\frac{1}{b}$  als die umgekehrte Größe von  $b$  und ebenso  $b$  als die umgekehrte Größe von  $\frac{1}{b}$ . (Man sagt auch umgekehrter Wert.)

43) Da nun  $a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$  ist, so bedeutet die Multiplikation mit  $\frac{1}{b}$  dasselbe, wie die Division durch  $b$ . Da ferner  $b \cdot \frac{1}{b} = 1$ , also  $cb \cdot \frac{1}{b} = c$  ist, so folgt nach den früheren Formeln  $bc = \frac{c}{(\frac{1}{b})}$ . Ist



aber  $\frac{c}{\left(\frac{1}{b}\right)} = c \cdot b$ , so ist die Division durch  $\frac{1}{b}$  dasselbe, wie

die Multiplikation mit  $b$ . Ebenso ist die Multiplikation mit  $\frac{a}{b}$  dasselbe, wie die Multiplikation mit  $a$  und die Division durch  $b$ ; die Division durch  $\frac{a}{b}$  dasselbe, wie die Division durch  $a$  und die Multiplikation mit  $b$ .

Man nennt  $\frac{a}{b}$  eine gebrochene Zahl oder einen Bruch,  $a$  seinen Zähler,  $b$  seinen Nenner. Das Multiplizieren und Dividieren mit Brüchen bzw. durch Brüche läßt sich nach den obigen Festsetzungen auf das Multiplizieren und Dividieren mit ganzen Zahlen bzw. durch solche zurückführen, also treten keine neuen Formeln auf. Der Bruch ist ein Quotient, nur ist jetzt die frühere Beschränkung weggefallen, daß  $a$  ein Vielfaches von  $b$  sein soll; auch dürfen negative Zahlen auftreten. Mit Brüchen wird also ebenso gerechnet, wie mit Quotienten, auch kann man sie, wie diese, erweitern und kürzen.

44) Auch das Addieren und Subtrahieren der Quotienten läßt sich auf die Brüche übertragen. Betrachtet man nämlich z. B.  $\frac{1}{8}$  als eine neue Einheit, so ist  $3 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{8} = 5 \cdot \frac{1}{8}$ , ebenso  $2 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = 5 \cdot \frac{1}{8}$ , sodaß das Vertauschungsgesetz gilt; ebenso folgt aus  $5 \cdot \frac{1}{8} - 2 \cdot \frac{1}{8} = 3 \cdot \frac{1}{8}$ , daß  $5 \cdot \frac{1}{8} - 3 \cdot \frac{1}{8} = 2 \cdot \frac{1}{8}$  ist. Allgemein:  $a \frac{1}{b} + c \frac{1}{b} = (a + c) \frac{1}{b} = c \frac{1}{b} + a \frac{1}{b}$ ; aus  $a \frac{1}{b} - c \frac{1}{b} = (a - c) \frac{1}{b}$  folgt, daß  $a \frac{1}{b} - (a - c) \frac{1}{b} = c \frac{1}{b}$ .

Haben die Brüche verschiedene Nenner, so muß man, um das Addieren zu ermöglichen, eine neue Einheit suchen, den umgekehrten Wert des Hauptnenners. Dies geschieht, wie bei den früheren Quotienten, mit Hülfe der geeigneten Erweiterung.

So ist z. B.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{4+3}{3 \cdot 4} = \frac{7}{12},$$

allgemein also

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{b}{b} \cdot \frac{1}{a} + \frac{a}{a} \cdot \frac{1}{b} = \frac{b+a}{ab}.$$

Ebenso ist:

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{7} = \frac{7}{7} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{7 \cdot 2 + 3 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{14+15}{21} = \frac{29}{21},$$

und allgemein

$$\frac{c}{a} + \frac{d}{b} = \frac{b}{b} \cdot \frac{c}{a} + \frac{a}{a} \cdot \frac{d}{b} = \frac{bc+ad}{ab}.$$



45) Haben die Nenner gemeinschaftliche Faktoren, so braucht man als gemeinschaftlichen Nenner (als Hauptnenner) für die Addition nicht das Produkt der Einzelnenner zu nehmen, sondern man kann Vereinfachungen einföhren. B. B.

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{18} = \frac{1}{2 \cdot 6} + \frac{1}{3 \cdot 6} = \frac{3}{3} \cdot \frac{1}{2 \cdot 6} + \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{3 \cdot 6} = \frac{3+2}{2 \cdot 3 \cdot 6} = \frac{5}{36}.$$

Allgemein:

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} = \frac{c}{c} \cdot \frac{1}{ab} + \frac{b}{b} \cdot \frac{1}{ac} = \frac{c+b}{abc}$$

oder:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2bc} + \frac{1}{abc} + \frac{1}{ac^3} &= \frac{c^2}{c^2} \frac{1}{a^2bc} + \frac{ac^2}{ac^2} \frac{1}{abc} + \frac{ab}{ab} \frac{1}{ac^3} \\ &= \frac{c^2 + ac^2 + ab}{a^2bc^3}. \end{aligned}$$

Der kleinste Hauptnenner wird also gefunden, indem man jeden Nenner in seine Grundfaktoren (bei Zahlen die sogenannten Primfaktoren) zerlegt und jeden der letzteren so oft als Faktor hinschreibt, als er am häufigsten vorkommt. Das Produkt der Zahlen gibt dann den Hauptnenner. [Primzahlen sind solche ganze Zahlen, die durch keine ganze Zahl (von 1 und der Zahl selbst abgesehen) ohne Rest teilbar sind.]

**Zahlenbeispiel.**  $\frac{1}{12} + \frac{1}{18} + \frac{1}{15} + \frac{1}{20} + \frac{1}{8}.$

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$$

$$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$$

$$15 = 3 \cdot 5$$

$$20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$$

$$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$$

Durch Unterstreichen ist angezeigt, wo der betreffende Primfaktor am häufigsten vorkommt.

$$\text{Hauptnenner} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 8 \cdot 9 \cdot 5 = 360.$$

$$\text{Summe der Brüche} = \frac{30}{12 \cdot 30} + \frac{20}{18 \cdot 20} + \frac{24}{15 \cdot 24} + \frac{18}{18 \cdot 20} + \frac{45}{8 \cdot 45} = \frac{137}{360}.$$

Ebenso ist es, wenn die Zähler andere Zahlen, als 1 sind.

46) Beispiele.

$$\frac{c}{a+b} + \frac{d}{a-b} = \frac{c(a-b) + d(a+b)}{(a+b)(a-b)} = \frac{c(a-b) + d(a+b)}{a^2 - b^2};$$

$$\begin{aligned} \frac{c}{a+b} + \frac{d}{a^2 - b^2} &= \frac{c}{a+b} + \frac{d}{(a+b)(a-b)} \\ &= \frac{a-b}{a-b} \cdot \frac{c}{a+b} + \frac{d}{(a+b)(a-b)} = \frac{c(a-b) + d}{a^2 - b^2}; \end{aligned}$$



$$\frac{c}{a^2 + 2ab + b^2} + \frac{d}{a^2 - b^2} = \frac{c}{(a+b)(a+b)} + \frac{d}{(a+b)(a-b)}$$

$$= \frac{c(a-b) + d(a+b)}{(a+b)(a^2 - b^2)} = \frac{c(a-b) + d(a+b)}{a^3 + a^2b - ab^2 - b^3}.$$

Somit läßt sich das Addieren und Subtrahieren mit Brüchen genau so durchführen, wie bei den früher besprochenen Quotienten. Die Formeln des vorigen Kapitels gelten demnach auch für gebrochene, und, wie vorher gezeigt, auch für negative Zahlen.

[Stelle die für Quotienten gefundenen Rechnungsregeln für Brüche zusammen, und sage statt Dividend und Divisor jetzt Zähler bezw. Nenner.]

#### 47) Divisionsübungen. Das Divisionschema

$$2784 : 12 = 232$$

$$\begin{array}{r} 24 \overline{) 2784} \\ \underline{24} \phantom{00} \\ 38 \phantom{00} \\ \underline{36} \phantom{00} \\ 24 \phantom{00} \\ \underline{24} \phantom{00} \\ 0 \end{array}$$

ist eigentlich aus folgendem hervorgegangen\*):

$$\begin{array}{r} 2 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 4 : (10 + 2) = 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 2 \\ \underline{2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2} \phantom{00} \\ 3 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 \\ \underline{3 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10} \phantom{00} \\ 2 \cdot 10 + 4 \\ \underline{2 \cdot 10 + 4} \\ 0 \end{array}$$

Setzt man  $a$  statt 10, so erhält man als Beispiel für das allgemeinere Schema:

$$\begin{array}{r} a) \quad 2a^3 + 7a^2 + 8a + 4 : (a + 2) = 2a^2 + 3a + 2 \\ \underline{2a^3 + 4a^2} \phantom{00} \\ 3a^2 + 8a \\ \underline{3a^2 + 6a} \phantom{00} \\ 2a + 4 \\ \underline{2a + 4} \\ 0 \end{array}$$

Führe dieselbe Aufgabe durch in der umgekehrten Anordnung:

$$4 + 8a + 7a^2 + 2a^3 : (2 + a).$$

\*) Die den Dividenten zusammenfassende Klammer soll von jetzt ab weggelassen werden.



Wesentlich ist dabei die Reihenfolge der Glieder des Dividendus und des Divisors, indem  $a^3$ ,  $a^2$ ,  $a$  und das Glied ohne  $a$  aufeinander folgen, genau so, wie vorher  $10^3$ ,  $10^2$ ,  $10$  u. s. w. Bei jeder Aufgabe muß also rechts und links zunächst gleichmäßig geordnet werden. So ist z. B.

$$\begin{array}{r} \text{b) } 8a^3 + 18a^2b + 19ab^2 + 15b^3 : (2a + 3b) = 4a^2 + 3ab + 5b^2. \\ \underline{8a^3 + 12a^2b} \phantom{+ 19ab^2 + 15b^3} \\ 6a^2b + 19ab^2 \phantom{+ 15b^3} \\ \underline{6a^2b + 9ab^2} \phantom{+ 15b^3} \\ 10ab^2 + 15b^3 \\ \underline{10ab^2 + 15b^3} \\ 0 \end{array}$$

Sind Brüche dabei, so folgen z. B. aufeinander  $a^2$ ,  $a$ , Glied ohne  $a$ ,  $\frac{1}{a}$ ,  $\frac{1}{a^2}$ ,  $\frac{1}{a^3}$  u. s. w., z. B.

$$\begin{array}{r} \frac{2}{9}a^4 - \frac{8}{15}\frac{a^2}{b^2} + \frac{8}{25}\frac{1}{b^4} : \left(\frac{a^2}{3} - \frac{2}{5b^2}\right) = \frac{2}{3}a^2 - \frac{4}{5b^2} \\ \underline{\frac{2}{9}a^4 - \frac{4}{15}\frac{a^2}{b^2}} \phantom{+ \frac{8}{25}\frac{1}{b^4}} \\ -\frac{4}{15}\frac{a^2}{b^2} + \frac{8}{25b^4} \\ \underline{-\frac{4}{15}\frac{a^2}{b^2} + \frac{8}{25b^4}} \\ 0 \end{array}$$

Divisionen brauchen nicht immer aufzugehen. In den meisten Fällen bleibt ein Rest übrig. So ist z. B.  $\frac{12}{7} = 1 + \frac{5}{7}$ , d. h. die Division von 12 durch 7 läßt den Rest 5 übrig, der noch besonders durch 7 zu teilen ist, was neben der ganzen Zahl einen echten Bruch gibt.

Ähnlich bleibt in der Arithmetik häufig ein Restglied, z. B.

$$\begin{array}{r} 2a + 3b : (a + b) = 2 + \frac{b}{a + b} \\ \underline{2a + 2b} \\ \text{Rest: } b \end{array}$$

$$\text{Probe: } 2 + \frac{b}{a + b} = \frac{2a + 2b + b}{a + b} = \frac{2a + 3b}{a + b}.$$

#### 48) Bemerkung über die Primzahlen.

In Abschnitt 45 wurde von den Primfaktoren gesprochen, d. h. von den Primzahlen\*), in deren Produkt sich jede Zahl zerlegen läßt; z. B.  $120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ . Man findet die Reihe der Primzahlen beliebig weit durch das sogenannte

\*) Dieser Abschnitt ist im Rechenunterrichte zu behandeln, wo solcher auf IIIb gegeben wird.



„Sieb des Eratosthenes“. Schreibt man nämlich die Zahlenreihe hin, und streicht man von 2 ab jede zweite Zahl, so erhält man die Primzahlen bis zur Stelle  $3 \cdot 3 = 9$ . Streicht man darauf von 3 ab die dritten Zahlen, so erhält man die Primzahlen bis zu  $5 \cdot 5 = 25$ . Streichung der fünften Zahlen giebt die Primzahlen bis  $7 \cdot 7 = 49$  u. s. w. Also:

1, 2, 3, (4), 5, (6), 7, (8), (9), (10), 11, (12), 13, (14)  
 (15), (16), 17, (18), 19, (20), (21), (22), 23, (24), (25), (26)  
 (27), (28), 29, (30), 31, (32), (33), (34), (35), (36), 37, (38)  
 (39), (40), 41, (42), 43, (44), (45), (46), 47, (48), (49) usw.

Die hier stehengebliebenen Zahlen sind die absoluten Primzahlen bis 47 (bzw. 49). Viele Zahlen werden dabei mehrfach durchgestrichen. Aus der Anzahl der Striche erkennt man die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren, die jede Nicht-Primzahl enthält. Ferner ergibt sich, daß jede Zahl sich nur auf eine Art in Primfaktoren zerlegen läßt.

Unter relativen Primzahlen versteht man solche Zahlen, die, ohne absolute Primzahlen zu sein, keinen gemeinschaftlichen Teiler haben. So sind z. B. 12 und 35 relative Primzahlen, dagegen sind 12 und 15 keine solchen.

[48b) In jeder ganzen Quadratzahl ist jeder Primfaktor in gerader Anzahl vorhanden, z. B.  $100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5^2$ .

Ist der Quotient zweier ganzer Quadratzahlen eine ganze Zahl, so ist diese eine Quadratzahl.

**Beispiel.**  $\frac{15^2}{3^2} = \frac{225}{9} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5}{3 \cdot 3} = 5 \cdot 5 = 25$ .

Die beim Heben übrig bleibenden Primfaktoren müssen nämlich doppelt oder in gerader Anzahl vorhanden sein.

Ist der Quotient zweier ganzer Quadratzahlen keine ganze Quadratzahl, so ist er nicht eine andere ganze Zahl sondern das Quadrat eines Bruches.

**Beispiel.**  $\frac{100}{36} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{5 \cdot 5}{3 \cdot 3} = \frac{25}{9} = \left(\frac{5}{3}\right)^2$ .

Beim Heben bleibt nämlich nur noch ein Quotient relativer Primzahlen, deren jede doppelt oder in gerader Anzahl vorhanden ist. Hiervon wird später eine wichtige Anwendung gemacht.

(Wäre  $\frac{100}{36}$  gleich einer ganzen Zahl  $n$ , die nicht Quadratzahl ist, so ließe sich  $100 = 36n$  auf zwei verschiedene Arten in Primfaktoren zerlegen, was nach obigem unmöglich ist.)



48c) Um zu erkennen, ob zwei größere Zahlen relative Primzahlen sind, oder ob sie einen größeren gemeinschaftlichen Teiler als 1 haben, könnte man mit allen Primzahlen, die in der kleineren aufgehen, erproben, ob sie auch Teiler der größeren Zahl sind. Schneller kommt man auf folgendem Wege zum Ziele.

**Aufgabe.** Den größten gemeinschaftlichen Teiler zweier Zahlen zu finden.

**Auflösung** an einem Beispiele. Handelt es sich z. B. darum, den Bruch  $\frac{2737}{3689}$  sofort mit der größten möglichen Zahl zu kürzen, so verfähre man nach folgendem Divisionschema:

- 1)  $3689 : 2737 = 1 + \frac{952}{2737}$ , also  $3689 = 1 \cdot 2737 + 952$ ,
- 2)  $2737 : 952 = 2 + \frac{833}{952}$ , also  $2737 = 2 \cdot 952 + 833$ ,
- 3)  $952 : 833 = 1 + \frac{119}{833}$ , also  $952 = 1 \cdot 833 + 119$ ,
- 4)  $833 : 119 = 7$ , also  $833 = 7 \cdot 119$ .

Es wird behauptet, der letzte Divisor 119, bei dem kein Rest blieb, sei der größte gemeinschaftliche Teiler.

**Beweis** am Beispiele. 119 geht in 833 ohne Rest auf, folglich auch in

$$1 \cdot 833 + 119 = 952,$$

folglich auch in

$$2 \cdot 952 + 833 = 2737,$$

folglich auch in

$$1 \cdot 2737 + 952 = 3689.$$

Demnach ist

$$\frac{2737}{3689} = \frac{23}{31}.$$

**Bemerkung.** Man hat also die größere der beiden gegebenen Zahlen durch die kleinere zu teilen, die letztere durch den dabei bleibenden Rest, diesen durch den Rest der letzteren Division u. s. w. Geht schließlich eine Division ohne Rest auf, so ist der letzte Divisor der gesuchte Teiler. (Er kann auch 1 sein, dann sind die gegebenen Zahlen relative Primzahlen.)

Daß ein größerer Teiler nicht möglich ist, ergibt sich folgendermaßen: Angenommen, die größere Zahl  $n$  ginge in 3689 und 2737 auf, so müßte  $n$  nach der Folgerung bei 1) auch im Reste 952 aufgehen, folglich nach 2) auch im Reste 833, nach 3) auch im Reste 119. Dies ist aber unmöglich, wenn  $n > 119$  ist.]



### Zusammenstellung der wichtigsten Ergebnisse.

Die Reihenfolge der Glieder ist bei der Addition gleichgültig.

$$a + b = b + a; \quad a - b = -b + a.$$

Dasselbe gilt von der Multiplikation;  $ab = ba$ .

Aus  $a + b = c$  folgt  $b = c - a$  und  $a = c - b$ .

Aus  $a - b = c$  folgt  $-b = c - a$  und  $a = b + c$ .

$$a + (b - c) = a + b - c; \quad a - (b - c) = a - b + c.$$

$$(a + b)c = ac + bc; \quad (a - b)c = ac - bc.$$

$$(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd.$$

$$(a + b)(c - d) = ac + bc - ad - bd.$$

$$(a - b)(c - d) = ac - bc - ad + bd.$$

$$+ \cdot + = + \quad + : + = +$$

$$- \cdot + = - \quad - : + = -$$

$$+ \cdot - = - \quad + : - = -$$

$$- \cdot - = + \quad - : - = +$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

Aus  $\frac{a}{b} = c$  folgt  $a = bc$  und  $b = \frac{a}{c}$ .

$$\frac{ac}{b} = \frac{a}{b}c = \frac{c}{b}a; \quad \left(\frac{a}{b}\right) \frac{a}{c} = \frac{a}{bc} = \left(\frac{a}{c}\right) \frac{a}{b}.$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}; \quad \frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a + b}{c}, \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a - b}{c}.$$

### III. Dezimalbrüche.\*)

49) Es ist  $\frac{271}{100} = 2 + \frac{7}{10} + \frac{1}{100}$ , oder in bekannter Schreibweise  $= 2,71$ .

\*) Dieses Kapitel, dessen schon in der Geometrie gedacht wurde, ist mög-



Ein Bruch, dessen Nenner 10 oder 100 oder 1000 oder eine andere daraus durch Multiplikation mit 10 entstehende Zahl ist, läßt sich so ordnen, daß erst die Ganzen, dann die Zehntel, Hundertstel u. s. w. geschrieben werden. Man nennt ihn Dezimalbruch. Durch Ansetzen von Nullen hinter dem Komma wird er nicht geändert. (Die ganze Zahl, bei der man hinter das Komma eine Reihe von Nullen setzt, kann auch als Dezimalbruch aufgefaßt werden.)

50) Eine Summe solcher Brüche giebt stets wieder einen Dezimalbruch.

$$\text{Beispiel. } 3 + \frac{4}{1000} + \frac{6}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{2}{10} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{100} \\ = 3 + \frac{2}{10} + \frac{7}{100} + \frac{8}{1000} = 3,278.$$

$$\text{Additionsschema: } \begin{array}{r} 5,98300 \\ 2,72861 \\ \hline 8,71161 \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{r} 5,983 \\ 2,72861 \\ \hline 8,71161 \end{array}$$

Man setze Komma unter Komma.

51) Eine Differenz von Dezimalbrüchen ist stets wieder ein Dezimalbruch.

$$\text{Beispiel. } 5,4631 - 2,132 = 5 \frac{4631}{10\,000} - 2 \frac{1320}{10\,000} = 3 \frac{3311}{10\,000} = 3,3311.$$

$$\text{Subtraktionschema: } \begin{array}{r} 5,4631 \\ 2,1320 \\ \hline 3,3311 \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{r} 5,4631 \\ 2,132 \\ \hline 3,3311 \end{array}$$

52) Rückt man das Komma eines Dezimalbruchs um eine, zwei, drei Stellen u. s. w. nach rechts, so ist er mit 10, 100, 1000 u. s. w. multipliziert worden; z. B.

$$5296,21 = 5,29621 \cdot 1000.$$

Rückt man das Komma um 1, 2, 3 u. s. w. Stellen nach links, so ist der Bruch durch 10, 100, 1000 u. s. w. dividiert worden, z. B.

$$31,9826 = 31982,6 : 1000$$

53) Die Multiplikation der Dezimalbrüche geschieht wie die der ganzen Zahlen, nur werden zum Schluß von rechts her so viele Stellen durch das Komma abgeschnitten, als beide Brüche zusammen Dezimalstellen hatten. (Denn es ist z. B.  $\frac{1}{100} \cdot \frac{1}{1000} = \frac{1}{100\,000}$ , die

nicht dem Rechenunterrichte zuzuweisen; das über die Irrationalzahl Gesagte muß aber in der Arithmetik zur Sprache kommen.



Anzahl der Nullen im Nenner des Produktes ist gleich der Anzahl der Nullen in beiden Faktoren zusammengekommen.)

$$\begin{array}{r}
 \text{Multiplikationsschema:} \quad 0,5388 \qquad 0,231 \\
 \qquad \qquad \qquad 22,3 \qquad \qquad 0,012 \\
 \qquad \qquad \qquad \hline
 \qquad \qquad \qquad 16164 \qquad \qquad 462 \\
 \qquad \qquad \qquad 10776 \qquad \qquad 231 \\
 \qquad \qquad \qquad \hline
 \qquad \qquad \qquad 10776 \qquad \qquad 0,002772 \\
 \qquad \qquad \qquad \hline
 \qquad \qquad \qquad 12,01524
 \end{array}$$

Reicht die Anzahl der Stellen zum Abschneiden nicht aus, so sind Nullen in hinreichender Zahl vorzusetzen.

54) Nicht aufgehende Division ganzer Zahlen durcheinander kann dezimal fortgesetzt werden. Dasselbe gilt von der Division eines Dezimalbruchs durch eine ganze Zahl.

$$\begin{array}{r}
 \text{z. B. } 107 : 4 = 26,75 \qquad 10,7 : 4 = 2,675 \qquad 1,07 : 4 = 0,2675. \\
 \begin{array}{r}
 8 \overline{) 107} \\
 \underline{27} \\
 24 \\
 \underline{30} \\
 28 \\
 \underline{20} \\
 20
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 8 \overline{) 10,7} \\
 \underline{27} \\
 24 \\
 \underline{30} \\
 28 \\
 \underline{20} \\
 20
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 0, \overline{) 1,07} \\
 \underline{10} \\
 8 \\
 \underline{27} \\
 24 \\
 \underline{30} \\
 28 \\
 \underline{20} \\
 20
 \end{array}
 \end{array}$$

55) In derselben Weise wird jeder gewöhnliche Bruch in einen Dezimalbruch verwandelt.

$$\frac{3}{8} \text{ z. B. giebt } 3 : 8 = 0,375.$$

$$\begin{array}{r}
 0 \\
 \underline{30} \\
 24 \\
 \underline{60} \\
 56 \\
 \underline{40} \\
 40
 \end{array}$$

56) Geht die Division jenseits des Kommas nach so häufiger Wiederholung, als verschiedene Reste möglich sind, nicht auf, so wiederholen sich die Reste periodisch. Der Dezimalbruch wird dann endlos und periodisch. (Die Periode kann aber schon früher beginnen.)



**Beispiele.**  $\frac{5}{6}$  giebt  $5 : 6 = 0,8333 \dots$

$$\begin{array}{r} 0 \\ 50 \\ \underline{48} \\ 20 \\ 18 \\ \underline{20} \end{array}$$

$\frac{5}{7}$  giebt  $5 : 7 = 0,714285 714285 \dots$

Ebenso ist:

$$\frac{28733}{99900} = 0,28761761 \dots$$

Der Dezimalbruch heißt rein periodisch, wenn unmittelbar hinter dem Komma die Periode beginnt. Beginnt sie später, so heißt er unrein periodisch. Die Stellen zwischen dem Komma und der Periode bilden die sogenannte Vorperiode.

57) Einen rein periodischen Dezimalbruch verwandelt man in einen gewöhnlichen Bruch, indem man die Periode als Zähler schreibt und als Nenner so oft die Ziffer 9 setzt, als die Periode Stellen hat.\*)

**Beispiel.**  $0,843843843 \dots = \frac{843}{999} = \frac{281}{333}$

**Beweis.** Den Wert des Bruches setze man gleich  $x$ , dann ist im Beispiele

$$\begin{array}{r} 1000x = 843,843843 \dots \\ x = 0,843843 \dots \\ \hline \end{array}$$

durch Subtraktion  $999x = 843,000000 \dots$

$$\text{d. h. } x = \frac{843}{999} = \frac{281}{333}$$

58) Einen unrein periodischen Dezimalbruch verwandelt man in einen gewöhnlichen, indem man Vorperiode und Periode als eine Zahl hintereinander schreibt und die Vorperiode abzieht. Dies gibt den Zähler. Als Nenner schreibt man so oft 9, als die Periode Ziffern zählt und schließt so oft Null an, als die Vorperiode Ziffern hat.)\*

**Beispiel.**  $0,28463463463 \dots$

$$\begin{array}{r} 28463 \\ 28 \\ \hline x = \frac{28435}{99900} = \frac{5687}{19980} \end{array}$$

\*) Vgl. Seite 118.



**Beweis.** Setzt man den Wert des Bruches  $= x$ , so ist im Beispiele

$$100\,000\,x = 28\,463,463\,463\ldots$$

$$100\,x = 28,463\,463\ldots$$

$$\text{durch Subtraktion } 99\,900\,x = 28\,435,000\,000\ldots$$

$$\text{also } x = \frac{28\,435}{99\,900} = \frac{5687}{19\,980}.$$

[59) Hat der Dezimalbruch keine Periode, und ist er trotzdem unendlich lang, so läßt er sich nicht in einen gewöhnlichen Bruch verwandeln. Denn wäre er aus einem gewöhnlichen Bruche entstanden, so müßte er periodisch sein, da die Reste sich schließlich doch wiederholen würden. Betrachtet man ihn als rein periodisch, jedoch mit unendlich langer Periode, so erhält der Zähler unendlich viele Stellen und der Nenner ebenso oft die Zahl 9. Statt dessen kann man ihn, wie es gewöhnlich geschieht, auch als gewöhnlichen Bruch schreiben, dessen Nenner 1 mit unendlich vielen Nullen ist. Einen solchen Bruch nennt man eine Irrationalzahl. Als eine solche ist z. B.  $\pi = 3,14159265\ldots$  von Lambert nachgewiesen worden (vergl. Geometrie), was nun als  $\frac{314159265\ldots}{99999999\ldots}$  oder als  $\frac{314159265\ldots}{100000000\ldots}$  aufzufassen ist\*), jedoch mit endlosem Zähler und Nenner. Die ganzen Zahlen, die gewöhnlichen Brüche, die endlichen und die endlosen periodischen Dezimalbrüche nennt man Rationalzahlen. Mit ihnen kann man absolut genau rechnen. Beim Rechnen mit Irrationalzahlen dagegen berücksichtigt man nur eine beliebige Anzahl von Stellen. Durch Einführung der Irrationalzahlen wird es erreicht, daß jedem Punkte der geraden Linie eine bestimmte Zahl entspricht und umgekehrt jeder Zahl ein Punkt der Geraden.]

60) Die Division eines Dezimalbruchs durch einen Dezimalbruch kann geschehen, indem man in beiden Zahlen das Komma so lange nach rechts schiebt, bis der Divisor eine ganze Zahl wird.

**Beispiel.**  $\frac{13,75}{0,125} = \frac{13\,750}{125} = 110.$

$$\frac{1,51}{0,7} = \frac{15,1}{7}, \text{ worauf die Division wie gewöhnlich erfolgt.}$$

61) Schema der abgekürzten Multiplikation für 5-stelliges Rechnen, erläutert durch Vergleich mit der gewöhnlichen Ausführung:

\*) Vgl. Seite 119. Streichen der letzten 9.



|        |            |
|--------|------------|
| 125,21 | 125,21     |
| 28,345 | 28,345     |
| 25042  | 25042      |
| 10017  | 100168     |
| 376    | 37563      |
| 50     | 50084      |
| 6      | 62605      |
| 3549,1 | 3549,07745 |

Alles rechts vom Strich Stehende ist dabei überflüssige Rechnung.

62) Schema der abgekürzten Division für 5-stelliges Rechnen, erläutert durch Vergleich mit der gewöhnlichen Ausführung:

|                           |                              |
|---------------------------|------------------------------|
| 3549,1 : 125,21 = 28,345. | 3549,1 : 125,21 = 28,345 ... |
| 25042                     | 25042                        |
| 10449                     | 104490                       |
| 10017                     | 100168                       |
| 432                       | 43220                        |
| 376                       | 37563                        |
| 56                        | 56570                        |
| 50                        | 50084                        |
| 6                         | 64860                        |
|                           | 62605                        |
|                           | .....                        |

#### IV. Proportionen.\*)

63) Der Quotient  $\frac{a}{b}$  wird auch als das Verhältnis der Größe  $a$  zur Größe  $b$  bezeichnet. Sind zwei Verhältnisse einander gleich, so nennt man die entsprechende Gleichung eine Proportion. So sind z. B. die Quotienten  $\frac{6}{3}$  und  $\frac{8}{4}$  gleich, also ist  $\frac{6}{3} = \frac{8}{4}$  eine Proportion. Man schreibt dieselbe auch folgendermaßen:

$$6 : 3 = 8 : 4$$

(lies: es verhält sich 6 zu 3 wie 8 zu 4). Hier heißen 6 und 4 die äußeren Glieder, 3 und 8 die inneren. Im Beispiele ist das Produkt der äußeren Glieder gleich dem der inneren.

\*) Auf Schulen, die auf Tertia Rechenunterricht haben, kann auch dieses Kapitel dem Rechnen überwiesen werden. Einiges ist bereits in der Geometrie behandelt worden. Vgl. Seite 138.



Allgemein sei

$$a : b = c : d \quad \text{oder} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

eine richtige Proportion; dann folgt aus der letzten Gleichung durch beiderseitige Multiplikation mit  $bd$

$$\frac{a}{b}bd = \frac{c}{d}bd \quad \text{oder} \quad ad = bc.$$

Folglich: Ist eine Proportion richtig, so ist das Produkt der äußeren Glieder gleich dem der inneren. (Umkehrung?)

64) **Aufgabe.** Die drei ersten Glieder einer Proportion seien gegeben; das vierte soll berechnet werden.

**Auflösung.** Aus  $a : b = c : x$  folgt  $ax = bc$ , also, wenn beiderseits durch  $a$  dividiert wird,

$$x = \frac{bc}{a}.$$

**Beispiel.**

$$5 : 9 = 4 : x.$$

**Auflösung.**

$$x = \frac{4 \cdot 9}{5} = \frac{36}{5} = \frac{72}{10} = 7,2.$$

65) **Aufgabe.** Stelle die Proportion  $6 : 3 = 8 : 4$  auf alle möglichen Arten so um, daß sie richtig bleibt, d. h. so, daß das Produkt der inneren Glieder gleich dem der äußeren bleibt; z. B.  $6 : 8 = 3 : 4$ , wobei die genannte Bedingung erfüllt ist. Im ganzen sind acht verschiedene Schreibweisen möglich, aus denen sich ergibt, welche Umstellungen gestattet sind.

66) Aus jeder Proportion lassen sich andere Proportionen ableiten. Aus  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  folgt nämlich  $\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$  oder  $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ , oder durch Umstellung der Proportion:

$$a) \quad \frac{a+b}{c+d} = \frac{b}{d}, \quad \text{oder} \quad (a+b) : (c+d) = b : d.$$

Ebenso ist  $\frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1$  oder  $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ , oder durch Umstellung der Proportion

$$b) \quad \frac{a-b}{c-d} = \frac{b}{d}, \quad \text{oder} \quad (a-b) : (c-d) = b : d.$$

Aus a) und b) folgt, da die rechten Seiten übereinstimmen:

$$(a+b) : (c+d) = (a-b) : (c-d),$$

oder auch

$$c) \quad (a+b) : (a-b) = (c+d) : (c-d).$$



So folgt z. B. aus  $9 : 7 = 18 : 14$

$$(9 + 7) : (18 + 14) = 9 : 18, \text{ oder } 16 : 32 = 9 : 18 = 7 : 14,$$

$$(9 - 7) : (18 - 14) = 9 : 18, \text{ oder } 2 : 4 = 9 : 18 = 7 : 14,$$

$$(9 + 7) : (9 - 7) = (18 + 14) : (18 - 14), \text{ oder } 16 : 2 = 32 : 4.$$

Also: In jeder Proportion verhält sich die Summe des ersten und zweiten Gliedes zur Summe des dritten und vierten Gliedes wie das zweite zum vierten (oder das erste zum dritten). Dasselbe gilt von den entsprechenden Differenzen. Außerdem verhält sich die Summe der beiden ersten Glieder zu ihrer Differenz, wie die Summe der beiden letzten zu ihrer Differenz.

Aus  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  und  $\frac{a_1}{b_1} = \frac{c_1}{d_1}$  folgt durch Multiplikation der rechten und linken Seiten:

$$\frac{aa_1}{bb_1} = \frac{cc_1}{dd_1}.$$

Also: Multipliziert man die gleichstelligen Glieder zweier Proportionen miteinander, so entsteht eine neue Proportion.

Sprich das Entsprechende für die Division solcher Glieder aus.

Statt  $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$  kann man schreiben  $a : b : c = a_1 : b_1 : c_1$ , denn in letzterem sind folgende Proportionen enthalten:

$$a : b = a_1 : b_1, \quad a : c = a_1 : c_1, \quad b : c = b_1 : c_1,$$

von denen die letzte eine Folge der beiden ersten ist. (Zuwiefern?)

[67] Sind drei Verhältnisse einander gleich, z. B.  $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$ , und ist jeder Quotient  $= n$ , so ist  $a = na_1$ ,  $b = nb_1$ ,  $c = nc_1$ , folglich  $a + b + c = na_1 + nb_1 + nc_1 = n(a_1 + b_1 + c_1)$ , und  $\frac{a + b + c}{a_1 + b_1 + c_1} = n = \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$ . Folglich: Aus  $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$  folgt  $\frac{a + b + c}{a_1 + b_1 + c_1} = \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$ . In Worten: Sind mehrere Brüche (Verhältnisse) einander gleich, so ist das Verhältnis der Summe der Zähler zur Summe der Nenner gleich jedem der gegebenen Brüche (Verhältnisse).

So folgt z. B. aus  $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{10}{15}$ , daß  $\frac{2+4+10}{3+6+15} = \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{10}{15}$  ist.]

Anwendungen der Proportionen bietet die Ähnlichkeitslehre der Geometrie. Dort spielt eine besondere Rolle die stetige Proportion  $a : b = b : c$ , aus welcher folgt  $b^2 = ac$ . Hier heißt  $b$  die mittlere Proportionale zwischen  $a$  und  $c$ . (Pythagor. Lehrsatz; goldner Schnitt.)



## V. Gleichungen vom ersten Grade.

68) In jeder Gleichung kann man gewisse Umstellungen machen, die ihre Richtigkeit fortbestehen lassen. Ist z. B.  $a + b = c$ , so folgt daraus, wie schon früher gezeigt wurde, durch Subtraktion von  $b$  auf beiden Seiten  $a = c - b$ . Folglich:

Schafft man in einer Gleichung einen Summanden auf die andere Seite, und gibt man ihm das entgegengesetzte Vorzeichen, so bleibt die Gleichung richtig. (Dabei kann es vorkommen, daß sich Glieder wegheben.)

69) Ist ferner  $a(b + c) = d$ , so folgt daraus durch Division beider Seiten durch  $a$

$$b + c = \frac{d}{a}.$$

Ebenso folgt aus  $a(b + c) = d + e$   $b + c = \frac{d + e}{a}$ .

Folglich: Macht man in einer Gleichung einen Faktor der ganzen einen Seite zum Divisor der ganzen anderen Seite, so bleibt die Gleichung richtig.

Ebenso läßt sich jeder Divisor als Multiplikator auf die andere Seite schaffen (Dabei kann es vorkommen, daß Faktoren sich aufheben.)

70) Es gibt Gleichungen, die für jeden Zahlenwert richtig sind. So ist z. B. für jeden beliebigen Wert von  $x$  und  $b$

$$(x + b)^2 = x^2 + 2bx + b^2.$$

Eine solche Gleichung heißt eine identische Gleichung.

71) Andere Gleichungen gibt es, die nur für bestimmte Werte gelten. So ist z. B. die Gleichung  $x + 5 = 10$  nur dann möglich, wenn  $x = 5$  ist. Die Kunst, die Werte einer Größe  $x$  aufzufinden, für welche eine mit  $x$  behaftete und nicht identische Gleichung richtig ist, heißt das Auflösen der Gleichung. Gleichungen solcher Art heißen Bestimmungsgleichungen. Die zu bestimmende Größe nennt man die unbekannte Größe. Es wird sich zeigen, daß auch mehrere Unbekannte vorhanden sein dürfen, wobei jedoch zur Bestimmung der Unbekannten ebenso viele Gleichungen erforderlich sind.

72) Kommt die Unbekannte nur in der Form  $x$  in der Gleichung vor, so heißt die letztere eine Gleichung vom ersten Grade. Kommt



$x$  auch in der Form  $x^2$  vor, so ist die Gleichung vom zweiten Grade, kommt  $x$  auch in der Form  $x^3$  vor, so ist die Gleichung vom dritten Grade.

73) Die Normalform der Bestimmungsgleichung ersten Grades ist  $ax = b$ , ihre Lösung ist  $x = \frac{b}{a}$ . Jede Gleichung ersten Grades läßt sich auf diese Form zurückführen. Man hat nur nötig, die Glieder mit  $x$  auf die linke Seite, die Glieder ohne  $x$  auf die rechte zu bringen.

Ist z. B.

$$2x - 3 = 5(2 - x) + 3(x - 4),$$

so löse man zunächst die Klammern, in denen  $x$  steht, auf und führe dann das oben Verlangte durch. Also:

$$2x - 3 = 10 - 5x + 3x - 12,$$

$$2x + 5x - 3x = 10 - 12 + 3,$$

oder

$$4x = 1, \text{ d. h. } x = \frac{1}{4}.$$

Ob abgesehen von  $x$  wirkliche Zahlen, oder allgemeine durch Buchstaben dargestellte, oder ob beide Arten von Zahlen in der Gleichung stehen, ist gleichgültig. Die Buchstaben werden dabei dem Anfang des Alphabets entnommen; z. B.

$$2ax + 3x(a + b) + 5(ax - b) = 2c + dx,$$

oder  $2ax + 3x(a + b) + 5ax - 5b = 2c + dx,$

„  $2ax + 3x(a + b) + 5ax - dx = 5b + 2c,$

„  $x(2a + 3a + 3b + 5a - d) = 5b + 2c,$

„  $x(10a + 3b - d) = 5b + 2c,$

folglich  $x = \frac{5b + 2c}{10a + 3b - d}.$

Geht sich die Unbekannte weg, so ist die Gleichung nur scheinbar eine Bestimmungsgleichung, sie ist also entweder eine identische oder eine falsche, mit einem Widerspruch behaftete Gleichung, z. B.

$$2(x + 3) = \frac{12 + 4x}{2} \text{ gibt } 4x + 12 = 12 + 4x \text{ oder } 12 = 12,$$

was selbstverständlich ist. [Dagegen würde

$$2(x + 3) = 7 + 2x \text{ oder } 2x + 6 = 7 + 2x \text{ in } 6 = 7$$

übergehen, was falsch ist. Die Gleichung war also eine unmögliche.]



Bezüglich der Übungsbeispiele wird auf die gebräuchlichen Aufgabensammlungen verwiesen.

## B. Lehraufgabe der Obertertia.

### I. Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten.\*)

74) Es seien zwei Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten  $x$  und  $y$  gegeben, die sich auf folgende Normalform bringen lassen:

$$1) \quad ax + by = c,$$

$$2) \quad a_1x + b_1y = c_1,$$

dann sind verschiedene Fälle möglich. Erstens kann die zweite Gleichung die umgeformte erste sein (z. B. bei  $a_1 = 2a$ ,  $b_1 = 2b$ ,  $c_1 = 2c$ ), so daß sie gar nichts neues gibt. Dann hat man zwei Unbekannte, aber nur eine Gleichung. Es gibt demnach unendlich viele Lösungen, denn jedem willkürlichen Werte von  $x$  entspricht ein bestimmter Wert von  $y$ .

Ein anderer Fall ist der, daß beide Unbekannte sich entfernen lassen und nur richtiges oder falsches übrig bleibt. Ist z. B. gegeben

$$4x + 6y = 12,$$

$$2x + 3y = 7,$$

so ergibt Multiplikation beider Seiten der zweiten Gleichung mit 2 die Gleichung  $4x + 6y = 14$ . Diese Gleichung kann man durch Subtraktion mit der ersten vereinigen, was  $12 = 14$  geben würde. Weil dies falsch ist, widersprechen einander beide Gleichungen.

Der dritte Fall ist der, in dem die Lösung durchführbar ist. Die Lösung kann dann auf verschiedene Arten geschehen.

75) a) Substitutionsmethode (Einführungsmethode).

Aus Gleichung 1) folgt  $x = \frac{c - by}{a}$ . Einsetzung dieses Wertes in die zweite Gleichung, giebt  $a_1 \frac{c - by}{a} + b_1y = c_1$ . Daraus folgt

\*) Dieses Kapitel kann im Anschluß an die Lehrpläne auch etwas später behandelt werden.



$\frac{a_1 c - a_1 b y}{a} + b_1 y = c_1$ , oder, wenn man beiderseits mit  $a$  multipliziert,  $a_1 c - a_1 b y + a b_1 y = a c_1$ ,  $y(a b_1 - a_1 b) = a c_1 - a_1 c$ , also

$$3) \quad y = \frac{a c_1 - a_1 c}{a b_1 - a_1 b}.$$

Einführung dieses Wertes in die obige Hilfsgleichung  $x = \frac{c - b y}{a}$

$$\text{gibt } x = \frac{c - b \frac{a c_1 - a_1 c}{a b_1 - a_1 b}}{a} = \frac{a b_1 c - a_1 b c - a b c_1 + a_1 b c}{a(a b_1 - a_1 b)} \text{ oder}$$

$$4) \quad x = \frac{b_1 c - b c_1}{a b_1 - a_1 b}.$$

In 3) und 4) hat man die Auflösung beider Gleichungen.

Bei Zahlengleichungen rechnet man aus 3) erst  $y$  fertig aus und benutzt den einfachen Wert zur Berechnung von  $x$ . Z. B.

$$5x + 7y = 31$$

$$2x + 3y = 13$$

$$\text{gibt } y = \frac{a c_1 - a_1 c}{a b_1 - a_1 b} = \frac{5 \cdot 13 - 2 \cdot 31}{5 \cdot 3 - 2 \cdot 7} = \frac{65 - 62}{15 - 14} = \frac{3}{1} = 3. \text{ Einführung}$$

$$\text{in } x = \frac{c - b y}{a} \text{ gibt } x = \frac{31 - 7 \cdot 3}{5} = \frac{31 - 21}{5} = \frac{10}{5} = 2.$$

Setzt man  $x = 2$  und  $y = 3$  in die gegebenen Gleichungen ein, so stimmt die Probe.

76) b) Kombinationsmethode (Gleichsetzungsmethode).

Sind die gegebenen Gleichungen die früheren (Abschnitt 74), so berechne man aus beiden  $x$ . Dies gibt

$$x = \frac{c - b y}{a} \quad \text{und} \quad x = \frac{c_1 - b_1 y}{a_1}.$$

Da jetzt die linken Seiten dieser Gleichungen übereinstimmen, sind auch die rechten gleich, d. h. es ist

$$\frac{c - b y}{a} = \frac{c_1 - b_1 y}{a_1}.$$

Hieraus ergibt sich für  $y$  derselbe Wert, wie vorher, und  $x$  wird entsprechend gefunden.

Das vorige Zahlenbeispiel erledigt sich folgendermaßen: Aus  $x = \frac{31 - 7y}{5}$  und  $x = \frac{13 - 3y}{2}$  folgt  $\frac{31 - 7y}{5} = \frac{13 - 3y}{2}$ . Hier-

aus folgt  $y = 3$ . Dies ist wie vorher in  $x = \frac{31 - 7y}{5}$  einzusetzen und gibt  $x = 2$ .



77) c) Die Additions- bezw. Subtraktionsmethode.

Man multipliziere, um  $y$  zu entfernen, beide Seiten der ersten Gleichung mit  $b_1$ , beide der zweiten Gleichung mit  $b$ . Dies gibt

$$ab_1x + bb_1y = b_1c,$$

$$a_1bx + bb_1y = bc_1.$$

Durch Subtraktion erhält man

$$x(ab_1 - a_1b) = b_1c - bc_1,$$

woraus für  $x$  derselbe Wert wie vorher folgt. Setzt man den Wert von  $x$  in eine der gegebenen Gleichungen ein, so kann man  $y$  berechnen, oder man gewinnt  $y$ , indem man oben mit  $a_1$ , unten mit  $a$  multipliziert.

Im vorigen Zahlenbeispiele ist zur Entfernung von  $y$  die erste Gleichung mit dem Faktor 3, die zweite mit dem Faktor 7 zu erweitern. Aus den entstehenden Gleichungen

$$15x + 21y = 93$$

$$14x + 21y = 91$$

folgt durch Subtraktion  $x = 2$ . Dies ist in eine der gegebenen Gleichungen einzusetzen und führt auf  $y = 3$ .

Verlangen es die Vorzeichen, so entfernt man die eine Unbekannte durch Addition, statt durch Subtraktion. —

Sind die Multiplikationen überflüssig, so führt diese Methode am schnellsten zum Ziele. Z. B. aus

$$x + y = a$$

$$x - y = b$$

folgt durch Addition  $2x = a + b$ ,  $x = \frac{a+b}{2}$ , durch Subtraktion  $2y = a - b$ ,  $y = \frac{a-b}{2}$ .

[78) Bei drei Gleichungen ersten Grades mit drei Unbekannten  $x$ ,  $y$  und  $z$  berechne man zunächst  $z$  aus der einen und setze den Wert in die beiden anderen ein, so daß nur noch zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten bleiben, deren Behandlung die vorige ist. Neues bietet sich dabei nicht, und so kann auf die Übungsbücher verwiesen werden.]



## II. Die rein quadratischen Gleichungen und das Ausziehen der Quadratwurzel.

79) Gleichungen, die  $x$  nur in der Form  $x^2$  (oder  $ax^2$  oder  $\frac{x^2}{a}$ ) enthalten, nicht aber in der Form  $x$ , nennt man rein quadratische Gleichungen. Würde außerdem die Form  $x$  in der Gleichung vorkommen, so würde letztere eine gemischt quadratische heißen.

Manche Gleichungen sehen auf den ersten Blick wie Gleichungen ersten Grades aus, sind aber doch solche zweiten Grades, z. B.

$$a) \quad x + \frac{1}{x} = a$$

gibt durch beiderseitige Multiplikation mit  $x$

$$x^2 + 1 = ax \quad \text{oder} \quad x^2 - ax = -1,$$

was eine gemischt quadratische Gleichung ist. Diese Art von Gleichungen wird erst später behandelt.

Andere sehen wie quadratische Gleichungen aus, sind aber in Wahrheit solche vom ersten Grade, da das Glied  $x^2$  beim Umformen verschwindet, z. B.

$$b) \quad (x + a)^2 - (x - b)^2 = c^2$$

gibt

$$x^2 + 2ax + a^2 - x^2 + 2bx - b^2 = c^2$$

oder

$$2x(a + b) = b^2 + c^2 - a^2, \quad \text{d. h.} \quad x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2(a + b)}.$$

Andere endlich sehen wie gemischt quadratische Gleichungen aus, sind aber trotzdem rein quadratische, z. B.

$$c) \quad a^2(x^2 - 1) - 2(x + 1)^2 = \frac{1}{a^2}(1 - 4a^2x - x^2)$$

gibt

$$a^2x^2 - a^2 - 2x^2 - 4x - 2 = \frac{1}{a^2} - 4x - \frac{x^2}{a^2},$$

oder, da  $-4x$  sich weghebt:

$$x^2\left(a^2 - 2 + \frac{1}{a^2}\right) = a^2 + 2 + \frac{1}{a^2} \quad \text{oder} \quad x^2\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2$$

oder

$$x^2 = \frac{\left(a + \frac{1}{a}\right)^2}{\left(a - \frac{1}{a}\right)^2}.$$



Eine rein quadratische Gleichung läßt sich also stets auf die Form

$$x^2 = a$$

zurückführen.

80) Ist  $x^2 = a$ , so nennt man  $x$  die Quadratwurzel aus  $a$ , wofür man schreibt  $x = \sqrt{a}$ , sodaß  $x \cdot x = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$  ist.

So ist z. B.

$$x^2 = 49 = 7 \cdot 7 = x \cdot x,$$

also

$$x = \sqrt{49} = 7.$$

Zugleich ist aber

$$x^2 = 49 = (-7)(-7) = x \cdot x,$$

also auch

$$x = \sqrt{49} = -7,$$

folglich

$$x = \sqrt{49} = \pm 7.$$

Ist allgemeiner  $x^2 = a$ , so hat  $x$  die beiden Werte  $x = \pm \sqrt{a}$ .

Demnach gibt es stets zwei entgegengesetzte Zahlen, die, mit sich selbst multipliziert, eine gegebene Zahl geben. Beide sind Quadratwurzeln der letzteren. Das Auffinden dieser Zahlen nennt man das Ausziehen der Quadratwurzel.

So ist  $(+\sqrt{a}) \cdot (+\sqrt{a}) = a$ , und ebenso  $(-\sqrt{a}) \cdot (-\sqrt{a}) = a$ , oder

$$(+\sqrt{a})^2 = (-\sqrt{a})^2 = a.$$

Zieht man also aus einer Zahl die Quadratwurzel aus, und erhebt man die letztere zum Quadrat, so erhält man wieder die ursprüngliche Zahl.

Ist  $x^2 = a^2$ , so ist  $x = \pm a$ , denn aus letzterer Gleichung folgt  $x^2 = (+a)(+a) = a^2$  und ebenso  $(-a)(-a) = a^2$ . Es ist also

$$\sqrt{a^2} = \pm a.$$

Erhebt man demnach eine Zahl zum Quadrat, und zieht man dann die Quadratwurzel aus, so erhält man, abgesehen vom Vorzeichen, wieder die ursprüngliche Zahl.

Im Sinne der beiden letzten Sätze kann man sagen: Das Quadrieren und das Ausziehen der Quadratwurzel heben sich gegenseitig auf, das eine ist die Umkehrung des anderen.



81) Ist

$$x^2 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

so folgt

$$x = \pm (a + b) = \pm \sqrt{a^2 + 2ab + b^2}.$$

Ist

$$x^2 = (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

so folgt

$$x = \pm (a - b) = \pm \sqrt{a^2 - 2ab + b^2}.$$

Auf die beiden möglichen Vorzeichen soll nur noch aufmerksam gemacht werden, wenn es nötig ist. Man merke also

$$a) \quad \sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = a + b,$$

$$b) \quad \sqrt{a^2 - 2ab + b^2} = a - b.$$

Ferner ist

$$c) \quad \sqrt{a} \sqrt{b} = \sqrt{ab},$$

denn quadriert man beide Seiten, so folgt  $ab = ab$ , was selbstverständlich ist.

Ebenso ist

$$d) \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}},$$

weil beiderseitige Quadrierung Übereinstimmendes gibt. Wie lauten

c) und d) in Worten?

Folglich ist z. B.

$$\sqrt{a^2 b} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b} = a \sqrt{b},$$

ebenso

$$\sqrt{a^2 (b + c)} = \sqrt{a^2} \sqrt{b + c} = a \sqrt{b + c}$$

und

$$\sqrt{\frac{b + c}{a^2}} = \frac{\sqrt{b + c}}{\sqrt{a^2}} = \frac{\sqrt{b + c}}{a} = \frac{1}{a} \sqrt{b + c}.$$

Läßt sich also unter der Wurzel ein quadratischer Faktor vom ganzen Ausdrucke absondern, so kann man aus ihm die Wurzel besonders ausziehen.

### Zahlenbeispiele.

$$\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \sqrt{2} = 2 \sqrt{2},$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{2},$$

$$\sqrt{0,75} = \sqrt{0,25 \cdot 3} = 0,5 \sqrt{3},$$



$$\sqrt{a^3 + 2a^2b + ab^2} = \sqrt{a(a^2 + 2ab + b^2)} = (a + b)\sqrt{a}.$$

Umgekehrt: Man kann einen Faktor der Wurzel unter die Wurzel setzen, indem man ihn quadriert. z. B.

$$a\sqrt{b} = \sqrt{a^2} \sqrt{b} = \sqrt{a^2b}; \quad \text{oder} \quad \frac{1}{8}\sqrt{8} = \sqrt{\frac{8}{64}} = \sqrt{\frac{1}{8}}.$$

**Bemerkung.** Man vermeide den naheliegenden Fehler,  $\sqrt{a^2 + b^2}$  gleich  $a + b$  zu setzen, der als solcher sofort einleuchtet, wenn man beiderseits quadriert

82) In manchen Ausdrücken lassen sich die Wurzeln entfernen, sodaß ihre Ausrechnung nicht nötig ist, z. B.

$$(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b}) = a^2 - (\sqrt{b})^2 = a^2 - b.$$

Es lassen sich auch Wurzeln aus dem Nenner in den Zähler schaffen, z. B.

$$\frac{1}{a + \sqrt{b}} = \frac{1}{a + \sqrt{b}} \cdot \frac{a - \sqrt{b}}{a - \sqrt{b}} = \frac{a - \sqrt{b}}{a^2 - b},$$

was eine unmittelbare Folge des vorigen Ausdrucks ist.

Andere häufige Umformungen sind:

$$(a + \sqrt{b})^2 = a^2 + b + 2a\sqrt{b},$$

$$(a - \sqrt{b})^2 = a^2 + b - 2a\sqrt{b},$$

folglich:

$$(a + \sqrt{b})^2 + (a - \sqrt{b})^2 = 2(a^2 + b),$$

$$(a + \sqrt{b})^2 - (a - \sqrt{b})^2 = 4a\sqrt{b}.$$

Ferner:

$$\begin{aligned} \left[ \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}} \right]^2 &= \frac{a+c}{2} + \frac{a-c}{2} \pm 2\sqrt{\frac{a+c}{2} \cdot \frac{a-c}{2}} \\ &= a \pm \sqrt{a^2 - c^2}, \end{aligned}$$

folglich

$$+ \sqrt{a \pm \sqrt{a^2 - c^2}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}.$$

Setzt man hier  $a^2 - c^2 = b$ , also  $c = \sqrt{a^2 - b}$ , so folgt:

$$+ \sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}.$$



## 83) Das Ausziehen der Quadratwurzel.

Es ist  $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ . Daraus ergibt sich folgendes vorläufige Rechenchema:

$$\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = a + b^*) \quad \text{z. B.} \quad \sqrt{529} = 20 + 3 = 23$$

|       |       |             |
|-------|-------|-------------|
| $a^2$ | $a^2$ | $a^2 = 400$ |
| $2a$  | $2a$  | $2a = 40$   |
| $2ab$ | $2ab$ | $2ab = 120$ |
| $b^2$ | $b^2$ | $b^2 = 9$   |

Ebenso war nach Nr. 22

$$(a + b + c)^2 = a^2 + (2ab + b^2) + [2(a + b)c + c^2],$$

also gilt folgendes Rechenchema:

$$\sqrt{a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2} = a + b + c$$

|       |       |             |       |
|-------|-------|-------------|-------|
| $a^2$ | $a^2$ | $2(a + b)c$ | $c^2$ |
| $2a$  | $2a$  | $2(a + b)c$ | $c^2$ |
| $2ab$ | $2ab$ | $2(a + b)c$ | $c^2$ |
| $b^2$ | $b^2$ | $2(a + b)c$ | $c^2$ |
| $b^2$ | $b^2$ | $2(a + b)c$ | $c^2$ |

z. B.  $\sqrt{104976} = 300 + 20 + 4$

|             |             |                    |
|-------------|-------------|--------------------|
| $a^2$       | $a^2$       | $a^2 = 90000$      |
| $2a$        | $2a$        | $2a = 600$         |
| $2ab$       | $2ab$       | $2ab = 12000$      |
| $b^2$       | $b^2$       | $b^2 = 400$        |
| $2(a + b)$  | $2(a + b)$  | $2(a + b) = 640$   |
| $2(a + b)c$ | $2(a + b)c$ | $2(a + b)c = 2560$ |
| $c^2$       | $c^2$       | $c^2 = 16$         |

oder abgefürzt  $\sqrt{104976} = 324$

|     |     |      |      |      |     |       |       |      |      |
|-----|-----|------|------|------|-----|-------|-------|------|------|
| $9$ | $9$ | $14$ | $12$ | $29$ | $4$ | $257$ | $256$ | $16$ | $16$ |
|-----|-----|------|------|------|-----|-------|-------|------|------|

\*)  $2a | 2ab$  soll heißen  $2a$  in  $2ab$ , also dasselbe wie  $2ab : 2a$ . Diese Umstellung ist hier aus Raumgründen zweckmäßig.



Man zieht also die erste Wurzel  $a$  aus, dividiert sodann das zweite Glied durch  $2a$ , was  $b$  gibt, worauf  $b^2$  abgezogen wird. Jetzt steht rechts  $a + b$ , man dividiert durch  $2(a + b)$ , was  $c$  gibt, worauf  $c^2$  abgezogen ist. Abwechselnd wird also durch das doppelte Resultat dividiert und das Quadrat der zuletzt gefundenen Zahl abgezogen.

84) Bilde ebenso die Wurzel aus den folgenden Ausdrücken und Zahlen.

$$\sqrt{a^2 + (2ab + b^2) + [2(a + b)c + c^2] + [2(a + b + c)d + d^2]},$$

$$\sqrt{a^2 + (2ab + b^2) + [2(a + b)c + c^2] + [2(a + b + c)d + d^2] + [2(a + b + c + d)e + e^2]}.$$

$$\sqrt{5|49|90|25} = 2345 \quad \text{oder auch:} \quad \sqrt{5|49|90|25} = 2345$$

|   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 4 | 1 | 4 | 9 | 0 | 2 | 5 |
|   | 4 | 1 | 4 | 9 | 0 | 2 | 5 |
|   | 1 | 2 | 9 | 0 | 2 | 5 | 0 |
|   | 2 | 9 | 0 | 2 | 5 | 0 | 0 |
|   | 9 | 0 | 2 | 5 | 0 | 0 | 0 |
|   | 4 | 6 | 8 | 5 | 6 | 2 | 5 |
|   | 1 | 8 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 |
|   | 2 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
|   | 1 | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
|   | 4 | 6 | 8 | 5 | 6 | 2 | 5 |
|   | 2 | 3 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 |
|   | 2 | 3 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 |
|   | 2 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
|   | 2 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

**Regel.** Teile die Zahl von rechts anfangend, in Gruppen zu zweien ein. Ist sie ein Dezimalbruch, so teile vom Komma aus nach rechts und links in Gruppen zu zweien ein. (Steht nämlich vorn 52, so weiß man zunächst nicht, ob man mit  $\sqrt{5}$  oder  $\sqrt{52}$  beginnen soll. Bei 526 liegt aber die erste Wurzel zwischen 20 und 30, dagegen bei 5263 zwischen 70 und 80. Das eine mal hatte man die Gruppierung 5 25 und begann mit  $\sqrt{5}$ , das zweite mal 52 63 und begann mit  $\sqrt{52}$ .) — Kann man gelegentlich das Quadrat nicht abziehen, so ist die letzte Rechnung mit dem um 1 niedrigeren Quotienten zu wiederholen, was bisweilen mehrfach geschehen muß. Dies geschieht z. B. im folgenden Beispiele bei der ersten Division durch 2, bei der man weder 6 noch 5 gebrauchen kann.



$$\sqrt{224,3896} = 14,979 \dots$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 2 \overline{)12} \\ \underline{8} \\ 44 \\ 16 \\ 28 \overline{)283} \\ \underline{252} \\ 318 \\ 81 \\ 298 \overline{)2379} \\ \underline{2086} \\ 2936 \\ 49 \\ 2994 \overline{)28870} \\ \underline{26946} \\ 19240 \\ 81 \\ \dots \end{array}$$

Kürzer:

$$\sqrt{224,3896} = 14,979 \dots$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 24 \overline{)124} \\ \underline{96} \\ 289 \overline{)2838} \\ \underline{2601} \\ 2987 \overline{)23796} \\ \underline{20909} \\ 29949 \overline{)288700} \\ \underline{269541} \\ \dots \end{array}$$

Geht die Rechnung nicht auf, so rechnet man unter Anhängung von Nullen weiter. Geübte Rechner können sich einiges Schreibwerk ersparen.

Schema für abgekürzte Ausziehung der Quadratwurzel bei sechsstelligem Rechnen:

$$\sqrt{26,6821} = 5,16546$$

$$\begin{array}{r} 25 \quad ||| \\ 101 \overline{)168} \\ \underline{101} \\ 1026 \overline{)6721} \\ \underline{6156} \\ 103 \overline{)565} \\ \underline{516} \\ 10 \overline{)49} \\ \underline{40} \\ 1 \overline{)9} \\ \underline{6} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Probe.} \quad 5,16546 \\ \quad 5,16546 \\ \quad 25 \, 8273 \\ \quad \quad 5164 \\ \quad \quad 3099 \\ \quad \quad 258 \\ \quad \quad 20 \\ \quad \quad 3 \\ \hline \quad 26,6817 \end{array}$$

Die Ungenauigkeit am Schluß beruht auf den angewandten Abkürzungen. Sie ist als geringfügig zu betrachten.



[85) Die Quadratwurzel aus einer Primzahl ist stets ein endloser Dezimalbruch ohne Periode, d. h. eine Irrationalzahl.

Wäre z. B.  $\sqrt{7}$  ein endlicher Dezimalbruch, oder ein endloser mit Periode, also ein rationaler Bruch, so ließe dieser sich als  $\frac{m}{n}$  darstellen (vergl. 58), wo  $m$  und  $n$  ganze Zahlen sind, die man durch Kürzung zu relativen Primzahlen gemacht hat. Dann wäre  $\sqrt{7} = \frac{m}{n}$ , also  $7 = \frac{m^2}{n^2}$ .

Dies ist aber nach Abschnitt 48b) unmöglich, da  $\frac{m^2}{n^2}$  keine ganze Zahl sein kann, folglich ist  $\sqrt{7}$  irrational. \*) Überhaupt ist die Quadratwurzel aus jeder ganzen Zahl, die nicht Quadratzahl ist, eine Irrationalzahl. Beim Ausziehen der Quadratwurzel aus ganzen Zahlen ist die Irrationalzahl nicht die Ausnahme, sondern die Regel, ihre Einführung ist also nicht etwas Willkürliches und Überflüssiges, sondern eine unbedingte Notwendigkeit. — Die durch Wurzelanziehung entstehenden Irrationalzahlen heißen algebraische Irrationalzahlen im Gegensatz zu den später auftretenden transzendenten, zu denen  $\pi$  gehört.

Handelt es sich um Quadratwurzeln (oder um Quadratwurzeln aus Quadratwurzeln) gewöhnlicher Zahlen, so kann man sie geometrisch darstellen, d. h. mit Zirkel und Lineal konstruieren, und zwar als mittlere Proportionale zwischen der gegebenen Zahl und 1.

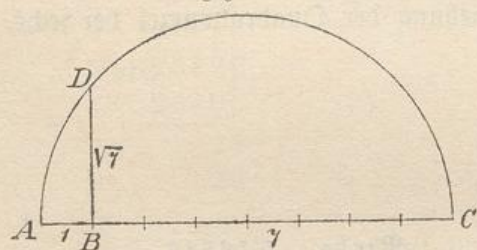


Fig. 130.

Ist z. B. in Fig. 109  $AB = 1$ ,  $BC = 7$ , so ist  $BD = \sqrt{7}$ , denn  $1:BD = BD:7$ ,  $BD^2 = 7$ , also  $BD = \sqrt{7}$ . (Vgl. Geometrie 264.) Aus

jeder Zahl also, die sich aus der Länge  $AB = 1$  konstruieren läßt, kann man geometrisch die Quadratwurzel ausziehen, aus dieser Wurzel wiederum die Quadratwurzel, usw.

\*) Auf feinere zahlentheoretische Untersuchungen wird hier verzichtet. Es handelt sich nur darum, auf die zunehmende Wichtigkeit der Irrationalzahlen aufmerksam zu machen.



### III. Grundform der gemischt quadratischen Gleichung mit einer Unbekannten.

86) Zur Lösung gemischt quadratischer Gleichungen vereinige man zunächst alle Glieder mit  $x^2$ , sodann alle Glieder mit  $x$ , zuletzt alle Glieder ohne  $x$ . Die so gewonnene Form  $a_1 x^2 + b_1 x = c_1$  bringe man durch beiderseitige Division durch  $a_1$  noch auf die Form  $x^2 + \frac{b_1}{a_1} x = \frac{c_1}{a_1}$  oder auf die Normalform

$$1) \quad x^2 + ax = b.$$

Man kann vorläufig den Kunstgriff anwenden,  $ax$  als ein doppeltes Produkt  $2 \frac{a}{2} x$  zu schreiben und dadurch, daß man rechts und links  $\left(\frac{a}{2}\right)^2$  addiert, die linke Seite in ein vollständiges Quadrat zu verwandeln, also:

$$x^2 + 2 \frac{a}{2} x + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b,$$

wofür man schreiben kann

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b.$$

Beiderseitige Ausziehung der Quadratwurzel gibt, da man die Vorzeichen der beiden Wurzeln auf zweierlei Art kombinieren kann,

$$x + \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b},$$

also ist die Lösung

$$2) \quad x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b}.$$

[Bezeichnet man in Gleichung 1)  $\frac{a}{2}$  als den halben Faktor (von  $x$ ), so kann man als Lösung kurz merken:

$$x = -\text{halber Faktor} \pm \sqrt{\text{halber Faktor zum Quadrat} + \text{rechte Seite.}]$$

Es giebt also zwei Lösungen:

$$x_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b}$$

und

$$x_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b}.$$



**Beispiel.**  $x^2 + x = 12$  gibt, da der Faktor von  $x$  gleich 1 ist,

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 12} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 12} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{7}{2},$$

also

$$x_1 = \frac{6}{2} = 3, \quad x_2 = -\frac{8}{2} = -4.$$

**Probe.**  $3^2 + 3 = 9 + 3 = 12$ ,  $(-4)^2 - 4 = 16 - 4 = 12$ .

Die beiden möglichen Lösungen (Wurzeln) sind also gefunden.

**Beispiel.**

$$x^2 - 5x = -6 \text{ gibt } x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2},$$

also

$$x_1 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = \frac{6}{2} = 3, \quad x_2 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Wiederhole an beiden Beispielen den allgemeinen Entwicklungsgang. Beachte auch, daß im ersten Beispiele die Summe der Lösungen  $3 + (-4) = -1$ , ihr Produkt  $3 \cdot (-4) = -12$  ist, d. h. abgesehen vom Vorzeichen den Faktor von  $x$  bzw. die rechte Seite gibt, während im zweiten Beispiele  $3 + 2 = 5$ ,  $3 \cdot 2 = 6$  ist. Auch bei der allgemeinen Lösung ist  $x_1 + x_2 = -a$ ,  $x_1 x_2 = -b$ . — Eingehendere Besprechung der Gleichung zweiten Grades erfolgt später. Übungsmaterial bieten die Aufgabensammlungen.

#### IV. Potenzen und Wurzeln mit ganzen positiven Exponenten.

87) Werden zwei Faktoren  $a$  miteinander multipliziert, so bezeichnet man das Produkt mit  $a^2$ , bei drei Faktoren  $a$  schreibt man  $a^3$ , bei vier Faktoren  $a^4$  [lies:  $a$  hoch 4 (oder  $a$  zur vierten Potenz)], bei  $n$  Faktoren  $a^n$ , also

$$1) \quad a \cdot a \cdot a \cdot a \cdots a = a^n.$$

Der Ausdruck  $a^n$  heißt die  $n^{\text{te}}$  Potenz von  $a$ , die Zahl  $a$  heißt Grundzahl oder Basis der Potenz,  $n$  heißt der Potenzexponent.

88) Da  $a^2 \cdot a^3 = (aa) \cdot (aaa) = aaaaa = a^5$  ist, so folgt  $a^2 \cdot a^3 = a^{2+3} = a^5$ . Allgemein folgt für ganzes  $m$  und  $n$

$$2) \quad a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Da  $\frac{a^5}{a^3} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a} = a \cdot a = a^2$  ist, so folgt  $\frac{a^5}{a^3} = a^2 = a^{5-3}$ . Allgemein ist



$$3) \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},$$

wobei zunächst  $m > n$  sein soll.

[Aus 2) konnte man folgern:  $a^m = \frac{a^{m+n}}{a^n}$ , also  $\frac{a^{m+n}}{a^n} = a^{(m+n)-n}$ .]

Da  $(a^2)^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = a^{2+2+2} = a^6$  ist, also  $(a^2)^3 = a^{2 \cdot 3}$ ,  
so folgt allgemein

$$4) \quad (a^m)^n = a^{m \cdot n}.$$

Aus 2), 3) und 4) folgen für ganzzahlige positive Exponenten folgende Regeln:

a) Potenzen derselben Grundzahl werden miteinander multipliziert, indem man ihre Exponenten addiert.

b) Eine Potenz wird durch eine andere derselben Grundzahl dividiert, indem man den Exponenten der letzteren von dem der ersteren abzieht. (Dabei soll vorläufig der Exponent der ersteren Potenz größer als der der zweiten sein.)

c) Eine Potenz wird potenziert, indem man die beiden Exponenten miteinander multipliziert.

Bei a) und c) ist die Reihenfolge gleichgültig, also z. B.

$$a^m a^n a^q = a^{m+n+q} = a^{n+m+q} = a^{q+m+n} \text{ usw.},$$

$$[(a^m)^n]^q = a^{mnq} = a^{qm n} = a^{nqm} \text{ usw.}$$

$$89) \text{ Es ist } \frac{a^3}{a^5} = \frac{a a a}{a a a a a} = \frac{1}{a a} = \frac{1}{a^2}, \text{ also } \frac{a^3}{a^5} = \frac{1}{a^{5-3}}.$$

Allgemeiner ist

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}},$$

sobald zunächst  $n > m$  ist.

Wird also eine Potenz durch eine andere von derselben Grundzahl dividiert, deren Exponent größer ist, so dividiert man 1 durch die Potenz, deren Exponent die positive Differenz der beiden gegebenen Exponenten ist.

90) Ferner ist

$$(ab)^3 = (ab)(ab)(ab) = a a a b b b = a^3 b^3,$$

allgemein

$$5) \quad (abc)^n = a^n b^n c^n.$$

Ähnlich ist

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^3}{b^3},$$



allgemein

$$6) \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Daraus entspringen die Regeln:

d) Man potenziert ein Produkt, indem man die einzelnen Faktoren potenziert.

e) Man potenziert einen Bruch, indem man den Zähler und den Nenner potenziert.

91) Der Ausdruck  $x = \sqrt[n]{a}$  gilt als Auflösung der Gleichung  $x^n = a$ . Ebenso gilt  $x = \sqrt[3]{a}$  (lies: dritte Wurzel aus  $a$ ) als Auflösung der Gleichung  $x^3 = a$ . (Von der Möglichkeit, daß mehrere Wurzelwerte existieren können, soll hier abgesehen werden.) Allgemein:

$$1) \quad x = \sqrt[n]{a} \text{ ist die Auflösung der Gleichung } x^n = a.$$

Hier heißt  $\sqrt[n]{a}$  die  $n^{\text{te}}$  Wurzel aus  $a$ ,  $n$  der Wurzelexponent, der zunächst eine ganze positive Zahl sein soll, die Zahl  $a$  heißt der Radikand (die Zahl, aus der die Wurzel ausgezogen werden soll).

Nach dieser Erklärung ist

$$2) \quad (\sqrt[n]{a})^n = a.$$

92) Ist  $x = \sqrt[n]{a}$ , so folgt  $x^n = a$ , ist ferner  $y = \sqrt[n]{b}$ , so folgt  $y^n = b$ .

Durch Multiplikation ergibt sich aus den neuen Gleichungen  $x^n y^n = ab$ , oder  $(xy)^n = ab$ , folglich  $xy = \sqrt[n]{ab}$ , oder

$$3) \quad \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}, \text{ allgemeiner: } \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} \sqrt[n]{c} \dots = \sqrt[n]{abc \dots}$$

Durch Division dagegen hätte man gefunden  $\frac{x^n}{y^n} = \frac{a}{b}$  oder

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{a}{b}, \text{ d. h. } \frac{x}{y} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \text{ oder}$$

$$4) \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Folglich gelten die Regeln:

a) Wurzeln mit gleichen Exponenten werden miteinander multipliziert, indem man die Radikanden multipliziert (und aus dem Produkte die Wurzel auszieht). Und umgekehrt:



b) Die Wurzel wird aus einem Produkte ausgezogen, indem man sie aus den einzelnen Faktoren auszieht (und das Produkt der Einzelwurzeln bildet).

c) Eine Wurzel wird durch eine andere mit demselben Exponenten dividiert, indem man den Radikanden der ersten durch den der zweiten dividiert (und aus dem Bruche die Wurzel auszieht). Und umgekehrt:

d) Ein Bruch wird radiziert, indem man Zähler und Nenner einzeln radiziert (und die erste der entstandenen Wurzeln durch die zweite dividiert).

93) Aus  $\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{a} \dots = \sqrt[n]{a \cdot a \cdot a \dots}$   
folgt

$$5) \quad (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}, \text{ also:}$$

e) Man potenziert eine Wurzel, indem man den Radikanden potenziert (und aus der entstandenen Potenz die Wurzel auszieht); und umgekehrt:

f) Man zieht die Wurzel aus einer Potenz aus, indem man sie aus der Grundzahl auszieht (und die so entstandene Wurzel zur entsprechenden Potenz erhebt). Oder:

g) Hat man eine Zahl zu potenzieren und zugleich zu radizieren, so ist die Reihenfolge gleichgültig.

94) Ist  $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = x$ , so folgt  $\sqrt[n]{a} = x^m$ , folglich  $a = (x^m)^n = x^{mn}$ .

Aus  $x^{mn} = a$  folgt aber  $x = \sqrt[mn]{a}$ . Einsetzung in die Anfangsgleichung gibt

$$6) \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a},$$

und allgemeiner:

$$6*) \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}} = \sqrt[mnp]{a}.$$

Also: h) Soll eine Zahl mehrfach nacheinander radiziert werden, so kann man sie mit dem Produkte der Exponenten radizieren. Umgekehrt:

i) Man radiziert eine Zahl durch ein Produkt, indem man mit den einzelnen Exponenten nacheinander radiziert. Bei beiden Operationen ist die Reihenfolge gleichgültig.

95) Es war  $\sqrt[n]{x^n} = x$ . Setzt man  $a^p$  für  $x$  ein, so erhält man

$$\sqrt[n]{(a^p)^n} = a^p \quad \text{oder} \quad \sqrt[n]{a^{pn}} = a^p.$$



Zieht man beiderseits die  $q^{\text{te}}$  Wurzel aus, so ergibt sich

$$7) \quad \sqrt[q]{a^{qn}} = \sqrt[q]{a^n}.$$

Folglich: k) Die Wurzel aus einer Potenz bleibt ungeändert, wenn man die beiden Exponenten mit derselben Zahl multipliziert; dasselbe gilt, wenn man beide Exponenten durch dieselbe Zahl dividiert. Vorläufig wird dabei vorausgesetzt, daß diese Division einen ganzzahligen Exponenten gibt.

Übungsbeispiele siehe in den Aufgabensammlungen.

#### 96) Ausziehung der Kubikwurzel.

Es ist  $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ . Daraus ergibt sich als Rechenchema:

$$\begin{array}{r} \sqrt[3]{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3} = a + b \\ \underline{a^3} \phantom{+ 3a^2b + 3ab^2 + b^3} \\ 3a^2 \phantom{+ 3a^2b + 3ab^2 + b^3} \phantom{=} \\ \underline{3a^2b} \phantom{+ 3ab^2 + b^3} \\ 3ab^2 \phantom{+ b^3} \\ \underline{3ab^2} \phantom{+ b^3} \\ b^3 \\ \underline{b^3} \end{array}$$

Beispiel.

$$\begin{array}{r} \sqrt[3]{12167} = 20 + 3. \\ 20^3 = 8000 \\ 3 \cdot 20^2 = 1200 \overline{) 4167} \\ 3 \cdot 1200 = 3600 \\ \phantom{3 \cdot 1200 = 3600} 567 \\ 3 \cdot 20 \cdot 3^2 = 540 \\ \phantom{3 \cdot 20 \cdot 3^2 = 540} 27 \\ 3^3 = 27 \end{array}$$

Oder abgekürzt geschrieben:

$$\begin{array}{r} \sqrt[3]{12167} = 23 \\ \phantom{12}8 \phantom{167} \\ 3 \cdot 2^2 = 12 \overline{) 41} \\ \phantom{12}36 \\ \phantom{12}56 \\ 3 \cdot 2 \cdot 3^2 = 54 \\ \phantom{3 \cdot 2 \cdot 3^2 = 54} 27 \\ 3^3 = 27 \end{array}$$



Ferner ist:

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + 6abc,$$

was sich folgendermaßen ordnen läßt:

$$(a + b + c)^3 = a^3 + (3a^2b + 3ab^2 + b^3) + [3(a + b)^2c + 3(a + b)c^2 + c^3].$$

Das entsprechende Rechenchema ergibt sich aus folgendem Beispiele:

$$\begin{array}{r} \sqrt[3]{14348907} = 200 + 40 + 3 \\ a^3 = 200^3 = \quad \quad \quad 8000000 \\ \cdot 3a^2 = 120000 \quad | \quad 6348907 \\ 3a^2b = \quad \quad \quad 4800000 \\ \quad \quad \quad 1548907 \\ 3ab^2 = \quad \quad \quad 960000 \\ \quad \quad \quad 588907 \\ b^3 = \quad \quad \quad 64000 \\ 3(a + b)^2 = 172800 \quad | \quad 524907 \\ 3(a + b)^2c = \quad \quad \quad 518400 \\ \quad \quad \quad 6507 \\ 3(a + b)c^2 = \quad \quad \quad 6480 \\ \quad \quad \quad 27 \\ c^3 = 27 \end{array}$$

Abgekürzt:

$$\begin{array}{r} \sqrt[3]{14348907} = 243 \\ a^3 = 2^3 = 8 \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \\ 3a^2 = 12 \quad 6 \quad 3 \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \\ \quad \quad \quad 48 \\ 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = \quad 5824 \\ 3(a + b)^2 = 1728 \quad | \quad 5249 \quad | \\ \quad \quad \quad 07 \\ 3(a + b)^2c + 3(a + b)c^2 + c^3 = \quad 524907 \end{array}$$

Hilfsrechnungen und Erläuterung:

$$\begin{array}{r} 3a^2b = 3 \cdot 4 \cdot 4 = 48 \\ 3ab^2 = 3 \cdot 2 \cdot 16 = 96 \\ b^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64 \\ \hline 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 5824 \end{array}$$



$$3(a+b)^2 = 3 \cdot 24^2 = 1728$$

$$3(a+b)^2 c = 1728 \cdot 3 = 5184$$

$$3(a+b)c^2 = 3 \cdot 24 \cdot 9 = 648$$

$$c^3 = 3^3 = 27$$

$$3(a+b)^2 c + 3(a+b)c^2 + c^3 = 524907$$

Das Schema geht weiter:

$$\begin{aligned} (a+b+c+d+\dots)^3 &= a^3 + (3a^2b + 3ab^2 + b^3) \\ &\quad + [3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3] \\ &\quad + [3(a+b+c)^2d + 3(a+b+c)d^2 + d^3] + \dots \end{aligned}$$

**Regel.** Abgeteilt wird zu dreien von rechts ab, bei Dezimalbrüchen vom Komma ab nach rechts und links zu dreien.

Quadrat- und Kubikwurzeln werden aus geordneten algebraischen Ausdrücken ebenso wie aus Zahlen ausgezogen. Z. B.

$$\sqrt[3]{a^2x^4 + 4abx^2 + 4b^4 + 6ac + \frac{12bc}{x^2} + \frac{9c^2}{x^4}} = ax^2 + 2b + \frac{3c}{x^2}$$

|              |                          |                          |                    |                    |                    |
|--------------|--------------------------|--------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $a^2x^4$     | $4abx^2$                 | $4b^4$                   | $6ac$              | $\frac{12bc}{x^2}$ | $\frac{9c^2}{x^4}$ |
| $2ax^2$      | $4abx^2$                 | $4b^4$                   | $6ac$              | $\frac{12bc}{x^2}$ | $\frac{9c^2}{x^4}$ |
| $2ax^2$      | $4abx^2$                 | $4b^4$                   | $6ac$              | $\frac{12bc}{x^2}$ | $\frac{9c^2}{x^4}$ |
| $2ax^2 + 4b$ | $6ac + \frac{12bc}{x^2}$ | $6ac + \frac{12bc}{x^2}$ | $\frac{9c^2}{x^4}$ | $\frac{9c^2}{x^4}$ | $\frac{9c^2}{x^4}$ |
| $2ax^2 + 4b$ | $6ac + \frac{12bc}{x^2}$ | $6ac + \frac{12bc}{x^2}$ | $\frac{9c^2}{x^4}$ | $\frac{9c^2}{x^4}$ | $\frac{9c^2}{x^4}$ |

Die geometrische Darstellung von Zahlenwerten wie  $\sqrt[3]{2}$ ,  $\sqrt[3]{3}$ ,  $\sqrt[3]{5}$  usw. ist im allgemeinen mit Zirkel und Lineal nicht durchführbar.

[In ähnlicher Weise, wie bei den Quadratwurzeln, kann gezeigt werden, daß die Kubikwurzeln aus ganzen Zahlen, die nicht Kubikzahlen sind, Irrationalzahlen sein müssen. So ist z. B.  $\sqrt[3]{10}$ , ebenso  $\sqrt[3]{100}$  eine Irrationalzahl. Soll bei ganzem positiven  $n$  die dritte Wurzel aus  $10^n$  eine ganze Zahl sein, so muß  $\frac{n}{3}$  eine ganze Zahl sein. Entsprechendes gilt von den 4<sup>ten</sup>, 5<sup>ten</sup>, ...  $n^{\text{ten}}$  Wurzeln.]



Später wird gezeigt werden daß, wenn  $n$  eine ganze Zahl ist, im ganzen  $n$  verschiedene  $n^{\text{te}}$  Wurzeln aus jeder Zahl existieren, die zu der hier berechneten einen Wurzel in einfacher Beziehung stehen. Dazu ist jedoch die Einführung einer neuen Art von Zahlen erforderlich.

Man kann die 4., 8., 16. Wurzel ausziehen, indem man aus der Quadratwurzel die Quadratwurzel, aus dieser wieder die Quadratwurzel auszieht u. s. w. Die 6. Wurzel zieht man aus, indem man aus der 3. Wurzel die Quadratwurzel auszieht, die 9. Wurzel, indem man aus der Kubikwurzel die Kubikwurzel auszieht usw.

Für die 5., 7., 11. Wurzel u. s. w. könnte man sich die Rechnungsschemata ebenfalls aufstellen, diese werden aber so umständlich, daß man andere, später zu behandelnde Methoden vorzieht.]

### Zusammenstellung der wesentlichsten Ergebnisse über Proportionen, Gleichungen, Potenzen und Wurzeln.

Die Proportion  $a : b = c : d$  ist eine richtige, wenn  $ad = bc$  ist. Aus ihr folgt:

- 1)  $(a + b) : (c + d) = a : c = b : d,$
- 2)  $(a - b) : (c - d) = a : c = b : d,$
- 3)  $(a + b) : (a - b) = (c + d) : (c - d).$

Multiplikation der entsprechenden Glieder zweier Proportionen gibt wieder eine richtige Proportion. Dasselbe gilt von der Division.

Aus  $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$  oder  $a : b : c = a_1 : b_1 : c_1$  folgt

$$\frac{a + b + c}{a_1 + b_1 + c_1} = \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}.$$

Aus  $ax = b$  folgt

$$x = \frac{b}{a}.$$

Aus  $ax + by = c$  und  $a_1x + b_1y = c_1$  folgt

$$x = \frac{b_1c - bc_1}{ab_1 - a_1b} \quad \text{und} \quad y = \frac{ac_1 - a_1c}{ab_1 - a_1b}.$$

Aus  $x^2 + ax = b$  folgt

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} = -\frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4b}}{2}.$$



$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = \frac{1}{a^{n-m}}; \quad (a^m)^n = a^{m \cdot n};$$

$$(ab)^n = a^n b^n; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n};$$

$$\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}; \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}; \quad (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m};$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}; \quad \sqrt[q]{\sqrt[n]{a^p}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

### C. Lehraufgabe der Untersekunda.

#### I. Gleichungen zweiten Grades.\*)

97) Als Normalform der schon behandelten Gleichung zweiten Grades diene jetzt die folgende:

$$1) \quad x^2 - ax + b = 0.$$

Man kann sie folgendermaßen umformen:

$$x^2 - 2 \frac{a}{2} x + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} + b = 0$$

oder

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \left[\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right]^2 = 0.$$

Nun läßt sich aber die Differenz zweier Quadrate in Summe mal Differenz der Grundzahlen zerlegen, also ist jetzt

$$\left[x - \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right] \cdot \left[x - \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right] = 0.$$

Soll das Produkt zweier Größen gleich Null sein, so muß entweder der erste Faktor, oder der zweite gleich Null sein. Setzt man die einzelnen Klammern gleich Null, so hat man zwei Gleichungen ersten Grades, aus denen sich die beiden Lösungen ergeben, nämlich

\*) Dieses Kapitel kann auch an den Schluß der Lehraufgabe der Untersekunda gestellt werden, wenn der Unterrichtsbetrieb der Trigonometrie wegen eine frühere Einführung in die Lehre von den Logarithmen erfordert.



$$2) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}, \\ x_2 = \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}. \end{cases}$$

98) An Stelle des früher angewandten Kunstgriffs ist also die Eigenschaft jedes Ausdrucks vom zweiten Grade getreten, sich in zwei Faktoren ersten Grades zerlegen zu lassen [eine Faktorenzerlegung, die in allgemeinerer Gestalt bei allen Gleichungen möglich ist, die  $x$  nur in Potenzen mit ganzen positiven Exponenten enthalten].

Addiert man die Werte der Lösungen (die sogenannten Wurzeln der Gleichung), so erhält man

$$3) \quad x_1 + x_2 = a;$$

multipliziert man die Lösungswerte, so ergibt sich

$$\begin{aligned} x_1 x_2 &= \left[ \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \right] \cdot \left[ \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \right] \\ &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b, \end{aligned}$$

oder

$$4) \quad x_1 x_2 = b.$$

Folglich gilt der Satz:

In der Gleichung

$$x^2 - ax + b = 0$$

ist der Koeffizient von  $-x$  gleich der Summe der Wurzeln, das Glied ohne  $x$  gleich dem Produkte der Wurzeln.

99) Dieser merkwürdige Satz ergibt sich als selbstverständlich auf folgendem Wege:

Die Gleichung  $(x - a)(x - b) = 0$  ist offenbar erfüllt für die Werte  $x_1 = a$  und  $x_2 = b$ , denn bei der Einsetzung eines solchen wird der betreffende Faktor gleich Null. Multipliziert man nun die linke Seite aus, so ergibt sich:

$$x^2 - (a + b)x + ab = 0,$$

der Koeffizient von  $-x$  ist also wirklich die Summe der Wurzeln, das sogenannte absolute Glied (ohne  $x$ ) gleich dem Produkte der Wurzeln.

100) Man kann also leicht Gleichungen aufstellen, die gegebene Wurzeln haben sollen. Sollen z. B. die Wurzeln einer Gleichung 3 und 8 sein, so lautet sie:

$$(x - 3)(x - 8) = 0,$$



oder  $x^2 - (3 + 8)x + 3 \cdot 8 = 0$ , oder  $x^2 - 11x + 24 = 0$ .

Sollen die Wurzeln  $-3$  und  $+8$  sein, so lautet die Gleichung:

$x^2 - (-3 + 8)x + (-3)(+8) = 0$ , oder  $x^2 - 5x - 24 = 0$ .

Die gewöhnliche Auflösungsart bestätigt die Richtigkeit.

[101] Bei der Lösung  $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$  kann nun der Fall eintreten, daß  $b > \left(\frac{a}{2}\right)^2$  ist, sodaß unter der Wurzel Negatives steht. Dann nennt man die Lösung der Gleichung eine imaginäre (oder unmögliche). Bisher nämlich sind uns nur Quadratwurzeln aus positiven Zahlen entgegengetreten. Wir wußten z. B., daß  $\sqrt{49} = \pm 7$  war, dagegen kannten wir bisher keine Zahl, die mit sich selbst multipliziert  $-49$  giebt, sodaß  $\sqrt{-49}$  vorläufig als etwas Unmögliches, als imaginär zu betrachten ist. Im Gegensatz dazu heißen die bisher behandelten Zahlen reelle Zahlen. Erst in der zweiten Hälfte des achtzehnten Jahrhunderts wagte man es, diese sogenannten unmöglichen Zahlen eingehender zu untersuchen, wobei sich bald zeigte, daß nur mit ihrer Hilfe eine gewisse Abrundung des mathematischen Lehrgebäudes und ein übersichtlicher Ausbau desselben ermöglicht wurde. Erst jetzt lernte man beweisen, daß jede Gleichung  $n^{\text{ten}}$  Grades  $n$  Wurzeln haben muß, erst jetzt wurde eine wissenschaftliche Kartographie möglich usw. Man setzt z. B.  $\sqrt{-49} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{-1} = \pm 7\sqrt{-1}$  und bezeichnet die Größe  $\pm \sqrt{-1}$  (als die imaginäre Einheit) mit  $i$ , sodaß  $\sqrt{-49} = \pm 7 \cdot i$  ist, allgemein  $\sqrt{-a^2} = \sqrt{a^2} \sqrt{-1} = \pm a \cdot i$ . Ferner ist  $(\sqrt{-1})^2 = -1$ , also  $i^2 = -1$  usw. Zahlen von der Form  $a + bi$  werden komplexe Zahlen genannt. Wir gehen auf diesen Gegenstand noch nicht näher ein und erinnern nur an folgendes:

Die Subtraktion zwang zur Einführung der negativen Zahlen.

Die Division zwang zur Einführung der gebrochenen Zahlen. Bis hierher reichte das Gebiet der rationalen Zahlen.

Die Wurzelausziehung zwang zur Einführung der (zunächst algebraischen) Irrationalzahlen.

Bis hierher reichte das Gebiet der reellen Zahlen.

Die Wurzelausziehung zwingt aber auch zur Einführung der imaginären Zahlen. Denn will man den Begriff des Radizierens ganz allgemein auffassen, so muß unter der Wurzel auch Negatives



gedacht werden können. Die imaginären Zahlen, mit den reellen zusammengefaßt, geben das Gebiet der komplexen Zahlen. Zu ihrer geometrischen Darstellung ist auf der früher besprochenen Geraden, die durch die Rational- und Irrationalzahlen (algebraische und transzendente) stetig erfüllt ist, kein Raum mehr vorhanden. Auf einer höheren Stufe soll gezeigt werden, daß man mit den komplexen Zahlen eine ganze Ebene stetig erfüllen kann. Diese geometrische Darstellungsweise ist für die Entwicklung der Mathematik von außerordentlicher Bedeutung geworden.]

102) Hat man eine Gleichung zweiten Grades mit zwei Unbekannten von der Form

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

und eine zweite Gleichung ersten Grades mit zwei Unbekannten von der Form

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0,$$

so kann man  $y$  aus der zweiten berechnen, den Wert in die erste einsetzen und die so entstehende Gleichung zweiten Grades auflösen, was zwei Werte für  $x$  gibt. Jeder von diesen, in die zweite Gleichung eingesetzt, ermöglicht die Berechnung der beiden zugehörigen Werte für  $y$ .

Auch  $xy$  ist als Ausdruck zweiten Grades zu betrachten.

Handelt es sich um zwei Gleichungen zweiten Grades mit je zwei Unbekannten, so gibt die Entfernung (Elimination) von  $y$  im allgemeinen eine Gleichung vom vierten Grade, nur in besonderen Fällen läßt sich die Gleichung auf den zweiten Grad zurückführen.

Übungsmaterial findet sich in den Aufgabensammlungen.

## II. Potenzen mit negativen und gebrochenen Exponenten.

103) Es ist  $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ , sobald  $m > n$ , und  $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$ ,

sobald  $n > m$ . Ist  $m = n$ , so ist  $\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m}$ , also kann man, da

$\frac{a^m}{a^m} = 1$  und  $m - m = 0$  ist, schreiben:

$$1) \quad a^0 = 1.$$

Jede Zahl, zur 0ten Potenz erhoben, ist also gleich 1. Dies ist lediglich die Definition der Potenz mit dem Exponenten Null.



Demnach ist  $\frac{1}{a} = \frac{a^0}{a^1}$ , also, wenn man die frühere Schreibweise beibehält:  $\frac{a^0}{a^1} = a^{0-1} = a^{-1} = \frac{1}{a}$ , und ebenso findet man allgemein

$$2) \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m} \quad \text{und} \quad a^m = \frac{1}{a^{-m}}.$$

Eine Potenz mit negativem Exponenten soll demgemäß von jetzt ab bedeuten den umgekehrten Wert von der entsprechenden Potenz mit positivem Exponenten. Auch dies ist nur eine Definition.

Ist dies festgesetzt, so ergibt sich

$$a^{-m} \cdot a^n = \frac{1}{a^m} \cdot a^n = a^{n-m} = a^{-m+n},$$

d. h. der Satz für die Multiplikation von Potenzen gleicher Grundzahl gilt auch für negative Exponenten.

Ebenso ist

$$\frac{a^{-m}}{a^n} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-m-n}.$$

In gleicher Weise läßt sich zeigen, daß alle für positive ganze Exponenten bewiesenen Sätze auch für negative Exponenten gelten, z. B.

$$\frac{a^{-m}}{a^{-n}} = a^{-m+n}, \quad a^{-m} \cdot a^{-n} = a^{-m-n}, \quad \frac{a^m}{a^{-n}} = a^{m+n},$$

$$a^{-m} b^{-m} = (ab)^{-m}, \quad \frac{a^{-m}}{b^{-m}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m, \quad (a^{-m})^n = a^{-mn},$$

$$(a^m)^{-n} = a^{-mn}, \quad (a^{-m})^{-n} = a^{mn}.$$

104) In Abschnitt 95 wurde gezeigt, daß  $\sqrt[n]{a^{np}} = a^p$  ist, also, wenn man  $np = m$ , folglich  $p = \frac{m}{n}$  setzt,

$$1) \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$$

Dort war angenommen, daß  $\frac{m}{n}$  ganz war. Jetzt wird festgesetzt, daß auch dann, wenn  $\frac{m}{n}$  nicht ganz ist,  $a^{\frac{m}{n}}$  die  $n^{\text{te}}$  Wurzel aus  $a^m$  bedeuten soll, sodaß Gleichung 1) auch dann fortbesteht. So ist z. B.



$a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$ ,  $a^{\frac{3}{2}} = \sqrt{a^3}$ . Dann kann der Exponent auch negativ und gebrochen sein, z. B. ist

$$a^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{a^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{a^2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{a^2}} = \sqrt[3]{a^{-2}}.$$

Die frühere Gleichung (Abschnitt 95, Nr. 7)  $\sqrt[p]{a^{\frac{n}{q}}} = \sqrt[p]{a^{\frac{n}{q}}}$  läßt sich dann schreiben  $a^{\frac{n}{q}} = a^{\frac{p}{q}}$ , sodaß der gebrochene Exponent erweitert oder gekürzt werden kann, ohne daß der Potenzwert sich ändert.

Auch der Satz über die Multiplikation von Potenzen gleicher Grundzahl bleibt bestehen, denn

$$\begin{aligned} a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{p}{q}} &= \sqrt[n]{a^m} \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{pn}} = \sqrt[nq]{a^{mq+pn}} = \sqrt[nq]{a^{m+np}} \\ &= a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}. \end{aligned}$$

Also gelten, wie früher, die Sätze:

$$a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}},$$

$$a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}},$$

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} = (ab)^{\frac{m}{n}},$$

$$a^{\frac{m}{n}} : b^{\frac{m}{n}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}},$$

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mp}{nq}},$$

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{-\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}},$$

$$a^{\frac{m}{n}} : a^{-\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}},$$

usw.,

sodaß sämtliche für Potenzen mit ganzen positiven Exponenten bewiesenen Sätze auch für negative und gebrochene Exponenten unbeschränkte Geltung haben.



### III. Die gemeinen oder Briggschen Logarithmen.

105) Aus  $a = b^m$  folgt  $b = a^{\frac{1}{m}}$ . Es fragt sich, ob man aus der ersteren Gleichung nicht nur  $b$ , sondern statt dessen auch  $m$  berechnen kann. Wir beschränken uns vorläufig auf die Grundzahl 10 und setzen folgendes fest: Ist  $10^\alpha = a$ , so nennt man  $\alpha$  den gemeinen\*) oder Briggschen Logarithmus von  $a$ , geschrieben  $\lg a$ ;  $a$  heißt der Numerus zum Logarithmus  $\alpha$ .

Also 1) aus  $10^\alpha = a$  folgt  $\alpha = \lg a$ .

In Worten: Der gemeine Logarithmus einer Zahl  $a$  ist der Exponent, mit dem man die Grundzahl 10 potenzieren muß, um jene Zahl zu erhalten.

106) So ist z. B.

|                |          |                |
|----------------|----------|----------------|
| $10^0 = 1,$    | folglich | $0 = \lg 1$    |
| $10^1 = 10,$   | folglich | $1 = \lg 10$   |
| $10^2 = 100,$  | folglich | $2 = \lg 100$  |
| $10^3 = 1000,$ | folglich | $3 = \lg 1000$ |
| .              | .        | .              |
| .              | .        | .              |
| .              | .        | .              |

Ebenso

|                                     |          |                  |
|-------------------------------------|----------|------------------|
| $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0,1$      | folglich | $-1 = \lg 0,1$   |
| $10^{-2} = \frac{1}{100} = 0,01,$   | folglich | $-2 = \lg 0,01$  |
| $10^{-3} = \frac{1}{1000} = 0,001,$ | folglich | $-3 = \lg 0,001$ |
| .                                   | .        | .                |
| .                                   | .        | .                |
| .                                   | .        | .                |

Die Logarithmen der Potenzen von 10 mit positiven ganzen und negativen ganzen Exponenten sind also leicht zu finden.

107) Man kann auch gewisse andere Logarithmen bezw. Numerus leicht bestimmen. Es ist z. B.

$$10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10} = 3,1622 \dots,$$

folglich ist

$$\frac{1}{2} = 0,5 = \lg 3,1622 \dots$$

\*) Logarithmen mit anderen Grundzahlen werden später bekannt gegeben.



Ferner ist

$$10^{\frac{3}{2}} = 10^{1+\frac{1}{2}} = 10 \cdot \sqrt{10} = 31,622 \dots,$$

folglich

$$\frac{3}{2} = 1,5 = \lg 31,622 \dots$$

Ebenso:

$$10^{\frac{5}{2}} = 10^{2+\frac{1}{2}} = 100 \sqrt{10} = 316,22 \dots,$$

folglich

$$\frac{5}{2} = 2,5 = \lg 316,22 \dots$$

Ähnlich kann man für  $10^{\frac{1}{3}}, 10^{\frac{2}{3}}, 10^{\frac{1}{4}}, 10^{\frac{3}{4}}, 10^{\frac{1}{6}}, 10^{\frac{5}{6}}, 10^{\frac{1}{8}}, 10^{\frac{3}{8}}, 10^{\frac{5}{8}}, 10^{\frac{7}{8}}$  u. s. w. und ihre 10-fachen, 100-fachen, 1000-fachen Werte und für die umgekehrten Werte aller dieser Zahlen die logarithmischen Folgerungen ziehen.

Schon so erkennt man die Möglichkeit, für ganze Reihen von Zahlen festzustellen, von welchen anderen Zahlen sie die Logarithmen sind, man erkennt die Möglichkeit logarithmischer Tabellen, der sogenannten Logarithmentafeln, obwohl diese auf anderem Wege berechnet worden sind. Schaltet man die neugefundenen Beziehungen an geeigneter Stelle in die Tabelle unter 106) ein, so erkennt man folgendes:

Die Logarithmen positiver einstelliger Zahlen beginnen mit 0,

|   |   |   |               |   |   |   |        |
|---|---|---|---------------|---|---|---|--------|
| " | " | " | zweistelliger | " | " | " | 1,     |
| " | " | " | dreistelliger | " | " | " | 2,     |
| " | " | " | vierstelliger | " | " | " | 3,     |
| . | . | . | .             | . | . | . | .      |
| . | . | . | .             | . | . | . | .      |
| . | . | . | .             | . | . | . | .      |
| " | " | " | n-stelliger   | " | " | " | (n-1). |

Die Logarithmen echter Brüche sind negativ, und zwar gilt folgendes:

|                                  |                                           |
|----------------------------------|-------------------------------------------|
| Liegt die Zahl zwisch. 0 u. 0,1, | so liegt der Logarithmus zwisch. 0 u. -1, |
| " " " 0,1 u. 0,01, " " "         | " -1 u. -2,                               |
| " " " 0,01 u. 0,001, " " "       | " -2 u. -3,                               |
| usw.                             |                                           |

[108) Oben waren zu gewissen Logarithmen die Numerus berechnet; umgekehrt kann gefragt werden, wie man zu einem Numerus den Logarithmus findet. Die Möglichkeit dazu soll an einem Beispiele nachgewiesen werden.



[Aufgabe.  $x$  aus der Gleichung  $10^x = 2$  zu berechnen, d. h. den Logarithmus der Zahl 2 aufzufinden.]

Auflösung. 2 liegt zwischen  $10^0 = 1$  und  $10^1 = 10$ , also ist

$$10^0 < (10^x = 2) < 10^1, \text{ folglich ist } 0 < x < 1,$$

daraus folgen (durch wiederholtes Quadrieren des in der Klammer Stehenden) die „Ungleichungen“

$$10^0 < (10^{2x} = 4) < 10^1 \quad \text{folglich } 0 < 2x < 1 \text{ und } 0 < x < \frac{1}{2}$$

$$10^1 < (10^{4x} = 16) < 10^2 \quad \text{folglich } 1 < 4x < 2 \text{ und } \frac{1}{4} < x < \frac{2}{4}$$

$$10^2 < (10^{8x} = 256) < 10^3 \quad \text{folglich } 2 < 8x < 3 \text{ und } \frac{2}{8} < x < \frac{3}{8}$$

$$10^4 < (10^{16x} = 65536) < 10^5 \quad \text{folglich } 4 < 16x < 5 \text{ und } \frac{4}{16} < x < \frac{5}{16}.$$

So fortfahrend kann man  $x$  zwischen engere und engere Grenzen einschließen, diese in Dezimalbrüchen darstellen und durch die Vergleichung der zusammengehörigen Werte erkennen, bis auf wie viele Stellen man den Wert von  $\lg 2$  gefunden hat. Oben ist erst gezeigt, daß  $x$  zwischen 0,25 und 0,312 liegt, und es dauert ziemlich lange, bis man gezeigt hat, daß  $\lg 2 = 0,3010300$  ist. (Man berechnet jetzt die Logarithmen auf besserem Wege weit schneller mit großer Genauigkeit.)

Sind  $m$  und  $n$  ganze Zahlen und ist  $m > n$ , so gibt  $10^{\frac{m}{n}}$  nur dann eine ganze Zahl, und zwar eine Potenz von 10 mit ganzem Exponenten, wenn  $n$  in  $m$  ohne Rest aufgeht. Ist letzteres

nicht der Fall, so ist  $10^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{10^m}$  eine Irrationalzahl (vgl. Abschnitt 85 und 96). Setzt man also  $10^x = a$ , und ist  $a$  eine ganze Zahl, aber keine Potenz von 10 mit ganzem positiven Exponenten, so muß  $x$  irrational sein. (Denn wäre  $x$  gebrochen rational, also gleich  $\frac{m}{n}$ , so wäre  $\sqrt[n]{10^m} = a$  irrational.) Folglich sind die ge-

meinen Logarithmen aller ganzen Zahlen, die nicht Potenzen von 10 mit ganzem positiven Exponenten sind, Irrationalzahlen. Die Bedeutung der Irrationalzahlen wird also durch die Einführung der Logarithmen ganz erheblich gesteigert. Sie bilden auch hier für das praktische Rechnen die Regel, die Rationalzahlen dagegen eine verschwindende Ausnahme.

Ist der Logarithmus einer positiven reellen Zahl weder ganz, noch rational, noch algebraisch irrational, so handelt es sich um eine transzendente Irrationalität, d. h. um eine solche, die



über das Gebiet der algebraischen Zahlen hinausgeht und so eine neue Zahlenwelt eröffnet.]

In den meisten Logarithmentafeln befindet sich eine Anweisung zum Aufschlagen des zu einem Numerus gehörigen Logarithmus und des zu einem Logarithmus gehörigen Numerus.

Wir beschränken uns auf die Logarithmen positiver Zahlen. [Die Logarithmen von negativen Zahlen kommen in den oben abgeleiteten Tabellen nicht vor. Der Grund ergibt sich sofort.]

109) Die Grundformeln für das Rechnen mit Logarithmen.

$$\begin{array}{l} \text{Ist} \\ \text{ist} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \alpha = \lg a, \text{ so folgt } 10^\alpha = a \\ \beta = \lg b, \text{ so folgt } 10^\beta = b \end{array} \right\} \quad 1)$$

also durch Multiplikation  $10^\alpha \cdot 10^\beta = ab$  oder  $10^{\alpha+\beta} = ab$  folglich ist  $\alpha + \beta = \lg(ab)$  oder  $\lg a + \lg b = \lg(ab)$ . Merke

$$2) \quad \lg(ab) = \lg a + \lg b,$$

d. h.: Der Logarithmus eines Produktes ist gleich der Summe der Logarithmen\*),  $\lg(abc \dots) = \lg a + \lg b + \lg c + \dots$

**Regel.** Man logarithmiert ein Produkt, indem man die Logarithmen der einzelnen Faktoren addiert.

Dagegen hätte man durch Division aus den Gleichungen 1) erhalten

$$\frac{10^\alpha}{10^\beta} = \frac{a}{b}, \text{ oder } 10^{\alpha-\beta} = \frac{a}{b}, \text{ d. h. } \alpha - \beta = \lg \frac{a}{b}$$

oder

$$\lg a - \lg b = \lg \frac{a}{b}.$$

Man merke:

$$3) \quad \lg \frac{a}{b} = \lg a - \lg b,$$

d. h.: Der Logarithmus eines Bruches ist der Logarithmus des Zählers vermindert um den des Nenners.

\*) Um zu sehen, wie es mit den Logarithmen negativer Zahlen steht, wähle man für den Faktor  $-1$  die positive Schreibweise  $+i^2$ . Da z. B.  $(-10) = ii \cdot 10$  ist, so folgt, wenn man das Multiplikationsgesetz gelten läßt,  $\lg(-10) = \lg i + \lg i + \lg 10 = 2 \lg i + 1$ , also  $\lg(-10) = 1 + 2 \lg i = 1 + 2 \lg \sqrt{-1}$ . Allgemein:  $\lg(-a) = \lg a + 2 \lg i$ . So erkennt man, daß die Logarithmen negativer reeller Zahlen nur durch die imaginären Zahlen erklärt werden können, worauf wir hier nicht eingehen. Wiederum zeigt sich, daß man die imaginären Größen notwendig einführen muß, wenn man die mathematischen Operationen ganz allgemein auffassen will.



**Regel.** Man logarithmiert einen Bruch, indem man vom Logarithmus des Zählers den des Nenners subtrahiert.

Ist  $\alpha = \lg a$ , so folgt  $10^\alpha = a$ , und, wenn man links und rechts zur  $n^{\text{ten}}$  Potenz erhebt,  $(10^\alpha)^n = a^n$ , d. h.  $10^{n\alpha} = a^n$ , folglich  $n\alpha = \lg a^n$  oder  $n \lg a = \lg(a^n)$ . Man merke:

$$4) \quad \lg(a^n) = n \lg a,$$

d. h.: Der Logarithmus einer Potenz ist das Produkt aus dem Exponenten und dem Logarithmus der Grundzahl.

**Regel.** Man logarithmiert eine Potenz, indem man den Logarithmus der Grundzahl mit dem Exponenten multipliziert.

Ist  $\alpha = \lg a$ , so folgt  $10^\alpha = a$ , und, wenn man beiderseits die  $n^{\text{te}}$  Wurzel auszieht,  $\sqrt[n]{10^\alpha} = \sqrt[n]{a}$ , oder  $10^{\frac{\alpha}{n}} = \sqrt[n]{a}$ , also  $\frac{\alpha}{n} = \lg \sqrt[n]{a}$  oder  $\frac{1}{n} \lg a = \lg \sqrt[n]{a}$ . Man merke:

$$5) \quad \lg \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \lg a,$$

d. h.: Der Logarithmus einer Wurzel ist der Quotient aus dem Logarithmus des Radikanden und dem Wurzelexponenten.

**Regel.** Man logarithmiert eine Wurzel, indem man den Logarithmus des Radikanden durch den Wurzelexponenten dividiert.

110) Diese Formeln führen in Verbindung mit den Logarithmentafeln auf ganz außerordentliche Rechenerleichterungen, wozu einige Beispiele gegeben sein mögen (fünfstellige Logarithmen). Besonders das Ausziehen höherer Wurzeln wird ermöglicht bzw. erleichtert; z. B. ist  $\lg \sqrt[5]{a} = \frac{1}{5} \lg a = 0,2 \lg a$ , wozu der Numerus aufzuschlagen ist, wenn man  $\sqrt[5]{a}$  erhalten will.

$$\text{Aufgabe.} \quad \frac{51,263^2 \cdot 5,7821^3}{\sqrt{772,45} \cdot 0,98216} \quad \text{oder} \quad \frac{a^2 \cdot b^3}{\sqrt{c} \cdot d}.$$

$$\text{Auflösung.} \quad \lg \frac{a^2 b^3}{\sqrt{c} \cdot d} = [2 \lg a + 3 \lg b] - \left[ \frac{1}{2} \lg c + \lg d \right].$$

$$\lg a = 1,70980 \quad 2 \lg a = 3,41960$$

$$\lg b = 0,76209 \quad 3 \lg b = 2,28627$$

$$\lg \text{ des Zählers: } \lg Z = 5,70587$$



$$\begin{aligned}
 \lg c &= 2,88787 & \frac{1}{2} \lg c &= 1,44394 \\
 & & \lg d &= 0,99218 - 1 \\
 \lg \text{ des Nenners: } & \lg N &= 1,43612 \\
 \lg \frac{Z}{N} &= \lg Z - \lg N &= 4,26975 \\
 \frac{Z}{N} &= 18610.
 \end{aligned}$$

**Bemerkung.** Mit Hilfe der Logarithmen verwandelt man das Multiplizieren in Addieren, das Dividieren in Subtrahieren, das Potenzieren in Multiplizieren, das Wurzelausziehen in Dividieren. Dagegen sind die Logarithmen nicht brauchbar für die Vereinfachung der Addition und Subtraktion (man müßte denn durch Absonderung gemeinschaftlicher Faktoren oder durch sonstige Zerlegung in Produkte, z. B.  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ , Vorteile finden). Die negativen Logarithmen schreibt man positiv, zieht jedoch von dem Dezimalbruch (Mantisse) die ganzzahlige Charakteristik (Kennziffer) ab. So war im vorigen Beispiele  $\lg d = 0,99218 - 1$ , was dasselbe ist wie  $-0,000782$ .

Sind Wurzeln aus echten Brüchen auszuziehen, z. B.  $\sqrt[3]{0,98216}$ , so ist nach obigem der Logarithmus durch den Exponenten zu dividieren, und dabei kann die abziehende Kennziffer, die mit zu dividieren ist, eine gebrochene Zahl werden, was nicht mehr in das gebräuchliche Rechenchema paßt. Um dies zu vermeiden, vermehrt man den Logarithmus und die abziehende Kennziffer um dieselbe Zahl, und zwar so, daß jene Division aufgeht. So wird im letzten Beispiele geschrieben  $\lg d = 2,99218 - 3$ , sodaß  $\frac{1}{3} \lg d = 0,99739 - 1$  wird. Demnach ist

$$\sqrt[3]{0,98216} = 0,99401.$$

111) Aber nicht nur Rechenerleichterungen finden statt, sondern es werden auch ganz neue Gebiete eröffnet, z. B. das der Exponentialgleichungen, bei denen die Unbekannte in einem Exponenten steht.

**Aufgabe.**  $x$  aus der Gleichung  $2^x = 3$  zu berechnen.

**Auflösung.**  $\lg(2^x) = \lg 3$ , folglich  $x \lg 2 = \lg 3$ , folglich  $x = \frac{\lg 3}{\lg 2}$  und  $\lg x = \lg(\lg 3) - \lg(\lg 2)$ . Nun ist:

$$\lg 3 = 0,47712, \text{ also } \lg(\lg 3) = 0,67863 - 1$$

$$\lg 2 = 0,30103, \text{ also } \lg(\lg 2) = 0,47861 - 1$$

$$\lg x = \lg(\lg 3) - \lg(\lg 2) = 0,20002$$

folglich  $x = 1,5850$ .



**Aufgabe.**

$$a^x b^{2x} = c.$$

**Auflösung.**  $x \lg a + 2x \lg b = \lg c, x(\lg a + 2 \lg b) = \lg c,$ 

$$x = \frac{\lg c}{\lg a + 2 \lg b}.$$

Auf der Lösbarkeit der Exponentialgleichungen beruht z. B. die Lösbarkeit gewisser Aufgaben der Zinseszins- und Rentenrechnung. Jetzt soll nur auf die erstere eingegangen werden.

## 112) Zinseszinsrechnung.

Es sei  $c$  ein bestimmtes Anfangskapital, welches zu einem gewissen Prozentsatz  $p$  zinsbar angelegt wird. Da nun 100 Mark jährlich  $p$  Mark Zinsen geben, eine Mark also  $\frac{p}{100}$  Mark gibt, so geben  $c$  Mark  $c \frac{p}{100}$  Mark, und nach einem Jahre erhält man durch Zinszuschlag  $c + \frac{cp}{100}$  Mark als ein neues Kapital  $c_1 = c \left(1 + \frac{p}{100}\right)$ . Das vergrößerte Kapital verwandelt sich im zweiten Jahre in  $c_2 = c_1 \left(1 + \frac{p}{100}\right) = c \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$ , nach einem weiteren Jahre erhält man  $c_3 = c \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3$ . Nennt man also das Schlusskapital  $k$ , so hat man nach  $n$  Jahren, wenn man den Prozentsatz mit dem kaufmännischen Zeichen  $\%$  und die Klammer mit  $q$  bezeichnet:

$$1) \quad k = c \left(1 + \frac{\%}{100}\right)^n = c \cdot q^n,$$

folglich

$$2) \quad \lg k = \lg c + n \lg \left(1 + \frac{\%}{100}\right) = \lg c + n \lg q,$$

also zur Berechnung des Anfangskapitals bei gegebenem Endkapital

$$3) \quad \lg c = \lg k - n \lg \left(1 + \frac{\%}{100}\right) = \lg k - n \lg q.$$

Zur Berechnung des Prozentsatzes hat man zunächst  $n \lg \left(1 + \frac{\%}{100}\right) = \lg k - \lg c$ , oder

$$4) \quad \lg q = \lg \left(1 + \frac{\%}{100}\right) = \frac{1}{n} (\lg k - \lg c).$$

Bezeichnet man den Numerus, der zur rechten Seite gehört, als  $N \left(\frac{\lg k - \lg c}{n}\right)$ , so ergibt sich  $\left(1 + \frac{\%}{100}\right) = N \left(\frac{\lg k - \lg c}{n}\right)$ , also

$$4*) \quad \% = 100 \left[ N \left(\frac{\lg k - \lg c}{n}\right) - 1 \right] = 100 [N - 1].$$



Die Berechnung der Anzahl der Jahre beruht auf der Exponentialgleichung 1) und erfolgt, wie sich aus 2) ergibt, nach der Formel

$$5) \quad n = \frac{\lg k - \lg c}{\lg \left(1 + \frac{\%}{100}\right)} = \frac{\lg k - \lg c}{\lg q},$$

also

$$5*) \quad \lg n = \lg [\lg k - \lg c] - \lg \lg \left(1 + \frac{\%}{100}\right) = \lg [\lg k - \lg c] - \lg \lg q.$$

Diese letzte Lösung gilt nur für ganze Zahlen  $n$ , da der Zinszuschlag nicht mitten im Jahre, sondern nur am Jahreschluß erfolgt. Der etwaige Zeitüberschuß würde also eine besondere Vereinbarung nötig machen.

113) Werden die Zinsen halbjährlich zum Kapital geschlagen, so hat man die doppelte Anzahl der Termine, also bei  $n$  Jahren  $2n$  Termine, für diese aber den halben Prozentsatz. Dies gibt für  $n$  Jahre die Grundformel

$$6) \quad k = \left(1 + \frac{\%}{200}\right)^{2n},$$

aus der die anderen durch Logarithmierung usw. abzuleiten sind.

Bei monatlichem Zinszuschlag erhält man ebenso

$$7) \quad k = c \left(1 + \frac{\%}{1200}\right)^{12n},$$

also bei jährlich  $m$ -maligem Zinszuschlag

$$8) \quad k = c \left(1 + \frac{\%}{100m}\right)^{mn}.$$

Beispiele zur Zinseszinsrechnung finden sich in den Aufgabensammlungen. Sie beziehen sich auch auf die Zunahme der Bevölkerung von Städten und Staaten, auf die Entwicklung der Verkehrsverhältnisse, z. B. auf die Zunahme der jährlichen Frachtmengen unserer Eisenbahnen, des Holzbestandes von Waldungen u. dgl.

Wird der Prozentsatz als negativ angenommen, geht also die Grundformel über in

$$k = c \left(1 - \frac{\%}{100}\right)^n = cq_1^n,$$

so handelt es sich z. B. um eine allmähliche Abnahme des Anfangskapitals, die jedoch niemals ganz zu Ende geht. Man kann  $q_1 = \left(1 - \frac{\%}{100}\right)$  als den Verminderungsfaktor bezeichnen.

Die praktisch wichtigste Anwendung der Logarithmenlehre findet für die Schule in dem Gebiete der Trigonometrie statt.



## IV. Zusammenstellung der wichtigsten Ergebnisse.

## Gleichungen.

Aus  $x^2 - ax + b = 0$  folgt

$$x_{1,2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

Dabei ist  $x_1 + x_2 = a$ ,  $x_1 \cdot x_2 = b$ . Die Gleichung kann also geschrieben werden:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0,$$

oder

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0.$$

## Potenzen.

Es ist  $a^0 = 1$ ,  $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ ,  $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ .

Für negative und gebrochene Exponenten gelten dieselben Gesetze, wie für positive und ganze.

## Logarithmen.

Ist  $10^a = a$ , so ist  $a = \lg a$ .

$$\lg(ab) = \lg a + \lg b; \quad \lg \frac{a}{b} = \lg a - \lg b.$$

$$\lg(a^n) = n \lg a; \quad \lg \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \lg a.$$

## Zinsezins-Rechnung.

$$k = c \left(1 + \frac{\%}{100}\right)^n = cq^n,$$

$$\lg k = \lg c + n \lg \left(1 + \frac{\%}{100}\right) = \lg k + n \lg q,$$

$$\lg c = \lg k - n \lg \left(1 + \frac{\%}{100}\right) = \lg k - n \lg q,$$

$$\lg q = \left(1 + \frac{\%}{100}\right) = \frac{1}{n} (\lg k - \lg c),$$

$$\% = 100 \left[ N \left( \frac{\lg k - \lg c}{n} \right) - 1 \right] = 100 [N - 1],$$

$$n = \frac{\lg k - \lg c}{\lg \left(1 + \frac{\%}{100}\right)} = \frac{\lg k - \lg c}{\lg q},$$

$$\lg n = \lg [\lg k - \lg c] - \lg \lg \left(1 + \frac{\%}{100}\right) = \lg [\lg k - \lg c] - \lg \lg q.$$

$$\left[ k = c \left(1 + \frac{\%}{200}\right)^{2n}, \quad k = c \left(1 + \frac{\%}{1200}\right)^{12n}, \quad k = c \left(1 + \frac{\%}{100m}\right)^{mn}, \right.$$

$$\left. k = c \left(1 - \frac{\%}{100}\right)^n = cq_1^n \right].$$



## Dritte Abtheilung. Trigonometrie.

### Lehraufgabe der Untersekunda.

#### I. Die trigonometrischen Funktionen am rechtwinkligen Dreieck.

1) Unter Trigonometrie (Dreiecksmesskunst) versteht man die Berechnung von Dreiecken aus drei zur Berechnung geeigneten Stücken. Solche Berechnungen fanden schon in der Geometrie statt. Sie beschränkten sich aber auf die Bestimmung von Seiten und Flächen, während Winkel nur insoweit zur Berechnung kamen, als sie, wie die Winkel  $60^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $36^\circ$  u. s. w. geometrisch konstruiert werden konnten. Auch waren die gegebenen Stücke in der Regel nur Seiten und Flächen, nur ausnahmsweise konstruierbare Winkel. Schon die Landmesskunst beansprucht volle Befreiung von jenen Einschränkungen. Sie verlangt die Berechnung des Dreiecks mit Hilfe beliebiger Winkel und die Berechnung beliebiger Winkel aus gegebenen Stücken. Das Ziel der Trigonometrie besteht zunächst darin, jene Schranken aufzuheben. Zu diesem Zwecke ist es nötig, zwischen den Seiten und Winkeln bestimmte Beziehungen aufzustellen.

2) Nach der Ähnlichkeitslehre haben rechtwinklige Dreiecke dieselben Winkel, sobald sie in einem Seitenverhältnis übereinstimmen. Aus dem Seitenverhältnis also müssen sich die spitzen Winkel bestimmen lassen; umgekehrt folgen aus den Winkeln die Seitenverhältnisse. Ist z. B. in Fig. 131  $\frac{a}{b} = 1$ , so ist  $\alpha = \beta = 45^\circ$ . Ist  $\frac{b}{c} = \frac{1}{2}$ ,



so ist  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 30^\circ$ , denn es handelt sich um die Hälfte eines gleichseitigen Dreiecks, u. s. w.

Solcher Seitenverhältnisse sind sechs möglich,  $\frac{a}{c}$ ,  $\frac{b}{c}$ ,  $\frac{a}{b}$  und ihre Umkehrungen  $\frac{c}{a}$ ,  $\frac{c}{b}$ ,  $\frac{b}{a}$ . Nur mit den drei erstgenannten braucht man sich zu beschäftigen, die Einrichtung der Logarithmentafeln macht es aber zweckmäßig, auch  $\frac{b}{a}$  heranzuziehen.

Die vier bezeichneten Seitenverhältnisse hat man mit dem Winkel  $\alpha$  folgendermaßen in Beziehung gesetzt:

Man bezeichnet  $\frac{a}{c}$  als den Sinus des Winkels  $\alpha$ ,  $\frac{b}{c}$  als den Kosinus desselben,  $\frac{a}{b}$  als die Tangente desselben,  $\frac{b}{a}$  als seine Kotangente.\*)

Man schreibt abgekürzt:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}, \quad \tan \alpha = \frac{a}{b}, \quad \cot \alpha = \frac{b}{a}.$$

In Worten: Im rechtwinkligen Dreieck ist

der Sinus eines Winkels das Verhältnis der Gegenkathete zur Hypotenuse,

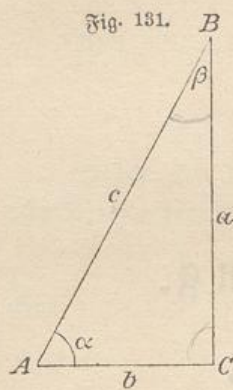
der Kosinus eines Winkels das Verhältnis der anliegenden Kathete zur Hypotenuse,

die Tangente eines Winkels das Verhältnis der Gegenkathete zur anliegenden Kathete,

die Kotangente eines Winkels das Verhältnis der anliegenden Kathete zur Gegenkathete.

Weil diese vier Verhältnisse von der Größe der Winkel abhängig sind, bezeichnet man sie als Funktionen der Dreieckswinkel oder als die trigonometrischen oder goniometrischen Funktionen.

\*) Die Indier hatten für die halbe Sehne das Wort dschyâ oder dschiva. Die Araber übernahmen es als dschiba. Wurden die Vokale nicht geschrieben, so konnte man lesen dschaib, was Busen, Herz, Tasche bedeutet. Die falsche Lesart bürgerte sich ein, und so wurde die Übersetzung sinus (durch Gerhard von Cremona) herbeigeführt. — Die übrigen Worte werden später gelegentlich erläutert. Die Verhältnisse  $\frac{c}{b} = \text{Sekante von } \alpha$ , und  $\frac{c}{a} = \text{Kosekante von } \alpha$  sind für die Schulzwecke überflüssig.





3) **Beispiele.** Für  $a = b$  ist  $\angle \alpha = 45^\circ$ , und dabei ist  $c^2 = a^2 + b^2 = 2a^2$ , also  $c = a\sqrt{2} = b\sqrt{2}$ , also:

$$\sin 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{0,5} = \cos 45^\circ;$$

$$\tan 45^\circ = \frac{a}{a} = 1, \quad \cot 45^\circ = \frac{a}{a} = 1.$$

Im gleichseitigen Dreieck mit Seite  $a$  ist die Höhe  $h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ . Demnach ist in dem durch diese Höhe abgeschnittenen rechtwinkligen Dreieck:

$$\sin 60^\circ = \frac{h}{a} = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{a} = \frac{1}{2}\sqrt{3} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{0,75} = \cos 30^\circ,$$

$$\cos 60^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ,$$

$$\tan 60^\circ = \frac{h}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3} = \cot 30^\circ,$$

$$\cot 60^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \tan 30^\circ.$$

Fällt man ferner bei einem konstruierbaren Zentrwinkel vom Zentrum aus das Lot auf die Sehne, so entstehen rechtwinklige Dreiecke, deren Winkelfunktionen man berechnen kann. Ist z. B.  $r$  der Radius des Kreises, so ist die Seite des regelmäßigen Fehneckes  $\frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$ , die halbe Seite also  $\frac{r}{4}(\sqrt{5} - 1)$ , folglich:

$$\cos 72^\circ = \frac{\frac{r}{4}(\sqrt{5} - 1)}{r} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} = \sin 18^\circ \text{ usw.}$$

Nach Art von Abschnitt 308 der Geometrie kann man stets rechnend zu den halben Winkeln übergehen.

So erkennt man die Möglichkeit von Tabellen für die Funktionen der Winkel von  $0^\circ$  bis  $90^\circ$  und von Tabellen der Logarithmen der trigonometrischen Funktionen. Das Aufschlagen der Funktionen (bzw. ihrer Logarithmen) zu gegebenen Winkeln ist zu üben, ebenso das Aufschlagen der Winkel zu gegebenen Funktionswerten (bzw. ihren Logarithmen).



4) **Aufgabe a)** Ein rechtwinkliges Dreieck habe die Hypotenuse  $c = 12$  und die Kathete  $a = 7$ . Wie groß sind seine Winkel?

**Auflösung.**  $\sin \alpha = \frac{7}{12}$ , also  $\lg \sin \alpha = \lg \frac{7}{12} = \lg 7 - \lg 12$ .

$$\lg 7 = 0,84510$$

$$\lg 12 = 1,07918$$

$$\lg \sin \alpha = \lg 7 - \lg 12 = 9,76592 - 10^*)$$

folglich

$$\sphericalangle \alpha = 35^\circ 41' 10''$$

$$\sphericalangle \beta = 54^\circ 18' 50''.$$

**Aufgabe b)** Ein rechtwinkliges Dreieck habe die Katheten  $a = 15$  und  $b = 8$ . Wie groß sind die Winkel?

**Auflösung.**  $\tan \alpha = \frac{15}{8}$ ,  $\lg \tan \alpha = \lg 15 - \lg 8$ .

$$\lg 15 = 1,17609$$

$$\lg 8 = 0,90309$$

$$\lg \tan \alpha = \lg 15 - \lg 8 = 0,27300$$

folglich

$$\sphericalangle \alpha = 61^\circ 55' 40''$$

$$\sphericalangle \beta = 28^\circ 4' 20''.$$

**Aufgabe c)** Ein rechtwinkliges Dreieck habe die Hypotenuse 13 und den Winkel  $\alpha = 35^\circ 20' 10''$ . Wie groß sind die Seiten  $a$  und  $b$  und der Inhalt  $F$ ?

**Auflösung.**  $\frac{a}{c} = \sin \alpha$ , folglich  $a = c \cdot \sin \alpha$ ,  $\frac{b}{c} = \cos \alpha$ , also  $b = c \cos \alpha$  (auch  $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(c + a)(c - a)}$  kann angewandt werden).  $F = \frac{ab}{2}$ . Also:

$$\lg a = \lg c + \lg \sin \alpha, \quad \lg b = \lg c + \lg \cos \alpha, \quad \lg F = \lg a + \lg b - \lg 2.$$

$$\lg c = 1,11394$$

$$\lg c = 1,11394$$

$$\lg \sin \alpha = 9,76221 - 10$$

$$\lg \cos \alpha = 9,91157 - 10$$

$$\lg a = 0,87615$$

$$\lg b = 1,02551$$

$$a = 7,5188$$

$$b = 10,605$$

$$\lg a = 0,87615$$

$$\lg b = 1,02551$$

$$\lg a + \lg b = 1,90166$$

$$\lg 2 = 0,30103$$

$$\lg F = 1,60063$$

$$F = 39,869.$$

\*) In den Tabellen ist statt 0,.... — 1 stets gesetzt 9,.... — 10, statt 0,.... — 2 stets 8,... — 10, statt 0,... — 3 stets 7,... — 10 u. s. w.



**Aufgabe d)** In einer Stadt, die unter  $51^{\circ} 30'$  nördlicher Breite liegt, sucht jemand bei Nacht eine Stellung auf, bei der ihm die Spitze eines Domturms genau den Polarstern verdeckt. Wie hoch ist die Spitze über dem Auge des Beobachters, wenn seine horizontale Entfernung von der Mitte des Turmes 120 m beträgt?

**Auflösung.** Unter der genannten Breite steht der Polarstern  $51^{\circ} 30'$  über dem Horizonte. Es ist also  $\frac{h}{120} = \tan 51^{\circ} 30'$ , d. h.  $h = 120 \tan 51^{\circ} 30'$ .

$$\begin{aligned} \lg e &= 2,07918 \\ \lg \tan \alpha &= 0,09939 \\ \lg h &= 2,17857 \\ h &= 150,86 \text{ m.} \end{aligned}$$

**Aufgabe e)** Wie viele Meilen (bezw. Kilometer) beträgt der Umfang des 50. Parallels der Erdoberfläche, wenn der Radius der Erde zu 860 Meilen angenommen wird? (Geogr. Meile = 7420,44 km.)

**Auflösung.** Zieht man von einem Punkte des Parallels aus einen Erdradius  $r$  und ein Lot  $q$  nach der Erdoberfläche, so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck mit dem Winkel  $(90^{\circ} - 50^{\circ})$  bei dem Erdzentrum. Also wird  $q = r \sin 40^{\circ} = r \cos 50^{\circ}$ . Der gesuchte Umfang ist  $u = 2q\pi = 2r\pi \cos 50^{\circ}$ . Also  $\lg u = \lg 2 + \lg r + \lg \pi + \lg \cos 50^{\circ}$ ;

$$\begin{aligned} \lg 2 &= 0,30103 \\ \lg r &= 2,93450 \\ \lg \pi &= 0,49715 \\ \lg \cos 50^{\circ} &= 9,80807 - 10 \\ \lg u &= 3,54075 \\ u &= 3473,4 \text{ Meilen.} \end{aligned}$$

5) Zwischen den Funktionen bestehen einfache Beziehungen, die sogenannten goniometrischen (der Winkelmessung entspringenden) Beziehungen.

Bildet man die Funktionen der spitzen Winkel  $\alpha$  und  $\beta = 90^{\circ} - \alpha$  eines rechtwinkligen Dreiecks, so ergibt sich folgendes:

$$1) \quad \sin(90^{\circ} - \alpha) = \cos \alpha, \quad \tan(90^{\circ} - \alpha) = \cot \alpha,$$

in Worten: Der Kosinus eines Winkels ist gleich dem Sinus seines Komplementwinkels; die Kotangente eines Winkels ist gleich der Tangente seines Komplementwinkels. Zusammengefaßt: Die Kosfunktionen eines Winkels sind gleich den Funktionen des Komplementwinkels. (Kosinus heißt also des Komplementes Sinus, sodaß es sich um eine abgekürzte Schreibweise handelt.)



Deshalb haben die Logarithmentafeln nur die Winkel von  $0^\circ$  bis  $45^\circ$  nötig. —

6) Ferner ist

$$2) \quad \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha},$$

$$\text{denn} \quad \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} = \tan \alpha,$$

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{b}{a} = \cot \alpha,$$

woraus noch folgt

$$3) \quad \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}.$$

(Folglich ist  $\lg \cot \alpha = \lg 1 - \lg \tan \alpha = 0 - \lg \tan \alpha = -\lg \tan \alpha$ , was in den Tafeln zu vergleichen ist. So ist z. B.  $\lg \tan 18^\circ = 9,51178 - 10 = -0,48822 = -\lg \cot 18^\circ$ . Die Tabelle der Kotangenten ist also leicht aus der der Tangenten abzuleiten, welche ihrerseits aus  $\lg \tan \alpha = \lg \sin \alpha - \lg \cos \alpha$  hervorgeht.)

7) Eine weitere Formel ist:

$$4) \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

$$\text{Beweis.} \quad \sin \alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c},$$

$$\text{folglich} \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1.$$

Folgerungen daraus sind

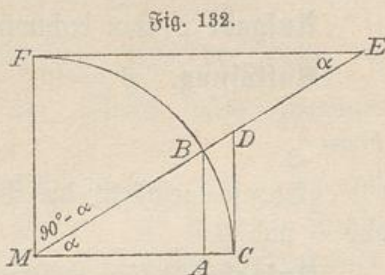
$$5) \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}, \quad \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}.$$

(Aus  $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$  ergibt sich, wie man aus der logarithmischen Sinustabelle die der Kosinus berechnen kann. Man kennt hiernach und nach obigem sämtliche Funktionen aller Winkel zwischen  $0^\circ$  und  $90^\circ$ , wenn man nur die Sinus von  $0^\circ$  bis  $45^\circ$  kennt.)

8) Ist im rechtwinkligen Dreieck die Kathete  $a$  von der Länge Null, so ist auch  $\sphericalangle \alpha = 0$ , und es ergibt sich  $\sin 0^\circ = \frac{a}{c} = 0$ , und, da  $b$  und  $c$  aufeinander fallen,  $\cos 0^\circ = \frac{b}{c} = \frac{b}{b} = 1$ ,  $\tan 0^\circ = \frac{0}{b} = 0$ ,  $\cot 0^\circ = \frac{b}{0} = \infty$  (unendlich groß). Für den Komplementwinkel  $90^\circ$  folgt:  $\sin 90^\circ = 1$ ,  $\cos 90^\circ = 0$ ,  $\tan 90^\circ = \infty$ ,  $\cot 90^\circ = 0$ .



9) In Figur 132 sei der Radius  $MB = 1$ , dann ist  $\sin \alpha = \frac{AB}{MB} = \frac{AB}{1} = AB$ . Deshalb heißt  $AB$  die Sinuslinie für den Winkel  $\alpha$ . (Die Maßzahl ihrer Länge stimmt überein mit dem Zahlenwerte des Sinus.) Ebenso ist  $\cos \alpha = \frac{MA}{MB} = \frac{MA}{1} = MA$ , und  $MA$  heißt die Kosinuslinie. Diese ist also die Projektion des Schenkels  $MB = 1$  auf den Schenkel  $MC$ . Ferner ist  $\tan \alpha = \frac{AB}{MA} = \frac{CD}{MC} = \frac{CD}{1} = CD$ , daher heißt  $CD$  die Tangentenlinie. (Eigentlich stammt umgekehrt der Name der Funktion  $\tan \alpha$  daher, daß  $CD$  eine Kreistangente ist.) Endlich ist noch  $\cot \alpha = \frac{MA}{AB} = \frac{FE}{MF} = \frac{FE}{1} = FE$ ;  $FE$  heißt die Kotangentenlinie, und ist zugleich die Tangentenlinie für den Komplementwinkel.



10) An der Figur erkennt man folgendes:  
 Wächst der Winkel von  $0^\circ$  bis  $90^\circ$ , so wächst der Sinus von 0 bis 1 und die Tangente von 0 bis  $\infty$ , dagegen nimmt der Kosinus ab von 1 bis 0, die Kotangente nimmt ab von  $\infty$  bis 0.  
 [Weil hier die Funktionen Sinus und Tangente mit dem Winkel wachsen, werden beim Aufschlagen ihrer Logarithmen die sogenannten logarithmischen Differenzen addiert; dagegen werden sie subtrahiert, sobald es sich um Kosunktionen handelt, denn die letzteren nehmen ab, wenn der Winkel wächst.]

## II. Berechnung rechtwinkliger und gleichschenkliger Dreiecke und regelmäßiger Vielecke.

11) **Aufgabe a)** Ein rechtwinkliges Dreieck zu berechnen aus  $a$  und  $c$ .

**Auflösung.**  $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ ,  $\beta = 90^\circ - \alpha$ ,  $b = c \cos \alpha$  (oder  $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(c + a)(c - a)}$ ),  $F = \frac{ab}{2}$ . Entsprechend geschieht die Berechnung des Dreiecks aus  $b$  und  $c$ .

**Aufgabe b)** Ein rechtwinkliges Dreieck zu berechnen aus  $a$  und  $b$ .



**Auflösung.**  $\tan \alpha = \frac{a}{b}$ ,  $\beta = 90^\circ - \alpha$ ,  $c = \frac{a}{\sin \alpha}$  (oder  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ ),  $F = \frac{ab}{2}$ .

**Aufgabe c)** Ein rechtwinkliges Dreieck aus  $a$  und  $\alpha$  zu berechnen.

**Auflösung.**  $\beta = 90^\circ - \alpha$ ,  $c = \frac{a}{\sin \alpha}$ ,  $b = \frac{a}{\tan \alpha} = a \cot \alpha$ ,  $F = \frac{ab}{2}$ .

(Ebenso geschieht die Berechnung aus  $a$  und  $\beta$ , aus  $b$  und  $\alpha$ , aus  $b$  und  $\beta$ .)

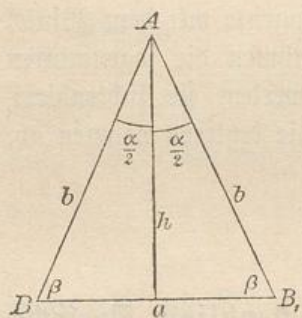
**Aufgabe d)** Ein rechtwinkliges Dreieck aus  $c$  und  $\alpha$  zu berechnen.

**Auflösung.**  $a = c \sin \alpha$ ,  $b = c \cos \alpha$ ,  $\beta = 90^\circ - \alpha$ ,  $F = \frac{ab}{2}$ .

(Ebenso geschieht die Berechnung aus  $c$  und  $\beta$ .)

12) Versuche Aufgaben wie folgende zu lösen: Ein rechtwinkliges Dreieck zu berechnen aus  $a$  und  $r$ , oder  $\alpha$  und  $r$ , aus  $F$  und  $\alpha$ ,  $F$  und  $a$ ,  $F$  und  $c$ ,  $F$  und  $\varphi$ ; aus Umfang  $u$  und  $\alpha$ , aus  $u$  und  $\varphi$ ; aus  $h$  und  $\alpha$ , wo  $h$  die Höhe auf der Hypotenuse ist, aus  $u$  und  $h$ ,  $r$  und  $h$ ,  $a$  und  $\varphi$ ,  $c$  und  $\varphi$ ,  $c$  und  $\varphi_1$ ,  $c$  und  $\varphi_2$ . Stelle selbst noch andere Aufgaben auf.

Fig. 133.



13) Das gleichschenklige Dreieck besteht aus zwei kongruenten rechtwinkligen Dreiecken, bietet also nichts neues.

**Aufgabe a)** Gegeben Basis  $a$  und Seite  $b$ .

**Auflösung.**  $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2b}$ ,

$$\beta = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}, \quad h = b \cos \frac{\alpha}{2}, \quad F = \frac{ah}{2}.$$

**Aufgabe b)** Gegeben  $a$  und  $h$ .

**Auflösung.**

$$\frac{h}{\left(\frac{a}{2}\right)} = \frac{2h}{a} = \tan \beta, \quad \frac{\alpha}{2} = 90^\circ - \beta, \quad b = \frac{h}{\sin \beta}, \quad F = \frac{ah}{2}.$$

**Aufgabe c)** Gegeben  $b$  und  $\angle \alpha$ .

**Auflösung.**  $\frac{a}{2} = b \sin \frac{\alpha}{2}$ ,  $h = b \cos \frac{\alpha}{2}$ ,  $\beta = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ .

Versuche, wie bei dem rechtwinkligen Dreieck, Aufgaben aufzustellen, bei denen nicht nur Seiten oder Winkel oder  $h_1$ , sondern auch andere Stücke, wie  $h_2$ ,  $F$ ,  $u$ ,  $\varphi$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $r$  u. s. w. gegeben sind.

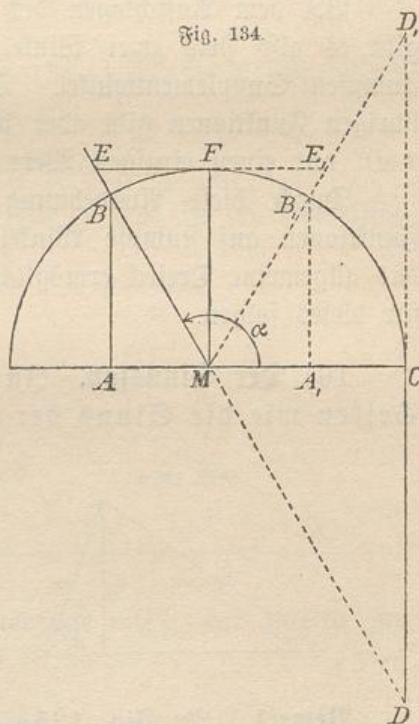


14) Das regelmäßige Vieleck. Sind  $r$  und die Seitenzahl  $n$  gegeben, so ist der Zentriwinkel für jede Seite  $\alpha = \frac{360^\circ}{n}$ ; der Winkel an der Basis jedes Einzeldreiecks ist  $\beta = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$  oder  $\beta = 90^\circ - \frac{180^\circ}{n}$ . Aus  $r$  und  $\frac{\alpha}{2}$  oder  $\beta$  läßt sich die Basis, die Höhe, die Fläche des Einzeldreiecks berechnen, sodaß auch am Vieleck alles berechnet werden kann.

Führe dies durch am 5-Eck, 10-Eck, 15-Eck, am 8-Eck und 16-Eck usw. Neben  $n$  kann statt  $r$  auch gegeben sein  $\rho$ ,  $a$ ,  $u$ ,  $F$  usw. Auch die übrig bleibenden Segmente des Um-Kreises lassen sich berechnen.

### III. Die Funktionen des stumpfen Winkels und das allgemeine Dreieck.

15) In Fig. 134 sei  $\alpha$  ein stumpfer Winkel. Fällt man ebenso wie in Fig. 132 von  $B$  aus auf den Schenkel  $MC$  ein Lot, und ist  $MB = 1$ , so nennt man naturgemäß die Projektion  $MA$  von  $MB$  wie vorher die Kosinuslinie. Da diese aber auf die Rückverlängerung des wiederum als positiv aufzufassenden Schenkels  $MC$  fällt, so muß man  $MA$  als negativ auffassen.\*) Aus  $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$  würde, wenn man das Fortbestehen dieser Formel verlangt,  $AB$  als Sinuslinie folgen, denn es ist  $AB = \sqrt{1 - MA^2}$ , wobei  $MA$  auch negativ sein kann. Da aber jetzt die Sinuslinie dieselbe Richtung wie vorher hat, so ist sie wiederum als positiv aufzufassen. — Vergleicht man die Kosinus- und die Sinuslinie des stumpfen Winkels  $\alpha$  mit der seines Supplementwinkels  $\beta = 180^\circ - \alpha$ , so erkennt man,



\*) Vergleiche die geometrische Darstellung positiver und negativer Größen in Figur 129.



daß die entsprechenden Linien für beide Winkel absolut genommen einander gleich sind, also auch die Sinus selbst, und zwar ist

$$1) \quad \sin \alpha = \sin (180^\circ - \alpha), \quad \cos \alpha = -\cos (180^\circ - \alpha).$$

Folglich muß sein:

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin (180^\circ - \alpha)}{-\cos (180^\circ - \alpha)} \quad \text{und} \quad \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{-\cos (180^\circ - \alpha)}{\sin (180^\circ - \alpha)},$$

d. h.

$$2) \quad \tan \alpha = -\tan (180^\circ - \alpha), \quad \cot \alpha = -\cot (180^\circ - \alpha).$$

Letzteres erkennt man auch an der Figur, denn erstens schneidet die in  $C$  berührende Tangente den rückwärts verlängerten Schenkel  $MB$  in  $D$ , sodaß die Tangentenlinie  $CD$  jetzt nach unten gerichtet, d. h. negativ ist, ferner ist  $CD = -CD_1$ . Ebenso ist die nach links gehende, in  $F$  berührende Kotangentenlinie  $FE$  jetzt negativ und absolut gleich  $FE_1$ . Man hat also den Satz:

Die Funktionen von Supplementwinkeln sind absolut genommen einander gleich, und es unterscheiden sich nur Kosinus, Tangente und Kotangente solcher Winkel durch das Vorzeichen. (Deshalb sind Tafeln für die stumpfen Winkel überflüssig.)

Bei dem Aufschlagen des Winkels für einen gegebenen Sinus gibt es also stets zwei Winkel, den betreffenden spitzen und seinen stumpfen Supplementwinkel. Das Aufschlagen des Winkels für die übrigen Funktionen gibt aber bei positiven Winkeln zwischen  $0^\circ$  und  $180^\circ$  nur einen einzigen Wert.

Durch diese Ausdehnung des Begriffs der trigonometrischen Funktionen auf stumpfe Winkel wird der Beweis einiger Sätze für das allgemeine Dreieck ermöglicht, aus denen leichte Berechnungsarten für dieses folgen.

16) **Der Sinussatz.** In jedem Dreieck verhalten sich die Seiten wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel.

Fig. 135 a.

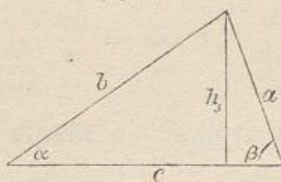
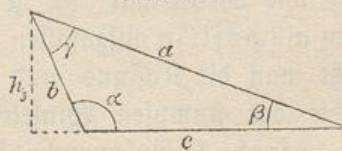


Fig. 135 b.



**Beweis.** In Fig. 135 a ist  $\sin \alpha = \frac{h_s}{b}$ ,  $\sin \beta = \frac{h_s}{a}$ , folglich

$$\sin \alpha : \sin \beta = \frac{h_s}{b} : \frac{h_s}{a} = \frac{1}{b} : \frac{1}{a} = a : b.$$



Allgemein ist also

$$3) \quad a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma.$$

[Beim stumpfwinkligen Dreieck in Fig. 135 b ist

$$\sin \alpha = \sin (180^\circ - \alpha) = \frac{h_s}{b},$$

sonst alles, wie vorher.]

17) **Der Kosinussatz.** Das Quadrat einer Dreiecksseite ist gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten, vermindert um das doppelte Produkt aus diesen beiden Seiten und dem Kosinus des eingeschlossenen Winkels.

**Beweis.** In der Geometrie ist in Abschnitt 258 a und b gezeigt worden, daß in jedem Dreieck

$$c^2 = a^2 + b^2 \mp 2bp$$

ist, je nachdem der Seite  $c$  ein spitzer oder stumpfer Winkel gegenüberliegt.

Im Falle des spitzen Winkels (Fig. 136 a) ist nun die Projektion  $p = a \cos \gamma$ . Einsetzung dieses Wertes gibt

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Im Falle des stumpfen Winkels (Fig. 136 b) ist die Projektion  $p = a \cos (180^\circ - \gamma) = -a \cos \gamma$ , was, oben eingesetzt, ebenfalls  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$  gibt.

Während also die Geometrie zwei Sätze zu unterscheiden hat, kennt die Trigonometrie nur den einen Satz:

$$4) \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Der Unterschied liegt jetzt in dem Ausdrucke  $\cos \gamma$ , der positiv für spitze, aber negativ für stumpfe Winkel ist.

18) **Der Inhaltssatz.** Der Inhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkte aus zwei Seiten und dem Sinus des eingeschlossenen Winkels.

Fig. 136 a.

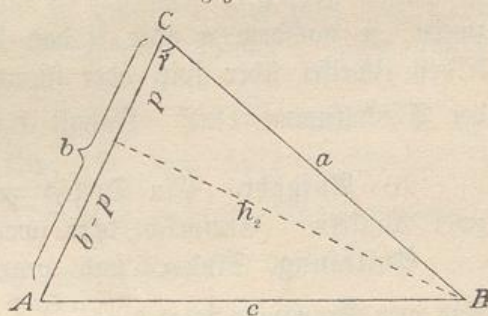
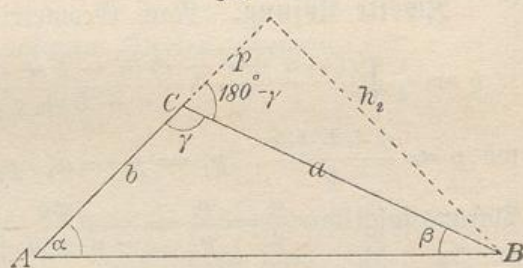


Fig. 136 b.





**Beweis.** In Fig. 135 a und 135 b ist  $F = \frac{c \cdot h_3}{2}$ , also, da  $h_3 = b \sin \alpha$  ist,  $F = \frac{1}{2} bc \sin \alpha$ .

Allgemein ist:

$$F = \frac{1}{2} ab \sin \gamma = \frac{1}{2} bc \sin \alpha = \frac{1}{2} ca \sin \beta.$$

19) **Aufgabe.** Ein Dreieck zu berechnen aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel. (Dem ersten Kongruenzsatz entsprechend.)

**Auflösung.** Sind  $a, b$  und  $\gamma$  gegeben, so gibt der Kosinussatz  $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}$ . Aus dem Sinussatz folgt  $\sin \alpha = \frac{a \sin \gamma}{c}$  und  $\sin \beta = \frac{b \sin \gamma}{c}$ . Man wählt zum Rechnen das erste oder das zweite, je nachdem  $a$  oder  $b$  das kleinere ist, denn dann hat man keinen Zweifel über spitz oder stumpf. Der dritte Winkel folgt aus der Winkelsumme  $180^\circ$ . Inhalt  $F = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$ .

20) **Aufgabe.** Ein Dreieck zu berechnen aus einer Seite und zwei Winkeln. (Entspricht dem zweiten Kongruenzsatz.)

**Auflösung.** Sind  $a, \beta$  und  $\gamma$  gegeben, so folgt  $\alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma)$ . Aus dem Sinussatz folgt  $b = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}$  und  $c = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}$ ;  $F = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$ .

21) **Aufgabe.** Ein Dreieck aus den drei Seiten zu berechnen. (Dem dritten Kongruenzsatz entsprechend.)

**Erste Lösung.** Aus dem Kosinussatz folgt  $\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ . ( $\gamma$  ist spitz, wenn der Zähler positiv, stumpf, wenn der Zähler negativ ist.) Man fahre wie bei 19) mit dem Sinussatz fort.

**Zweite Lösung.** Nach Geometrie Nr. 262 ist

$$q = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{a+b+c}} = \sqrt{\frac{p_1 p_2 p_3}{p}},$$

wo  $p = \frac{a+b+c}{2}$ ,  $p_1 = p - a$ ,  $p_2 = p - b$ ,  $p_3 = p - c$  ist.

Daraus folgt  $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{q}{p_1} = \frac{2q}{-a+b+c}$ ,  $\tan \frac{\beta}{2} = \frac{q}{p_2} = \frac{2q}{a-b+c}$ . ( $\tan \frac{\gamma}{2} = \frac{q}{p_3} = \frac{2q}{a+b-c}$  kann zur Probe mit der Winkelsumme benutzt werden.)  $F = qp = q \frac{a+b+c}{2}$ .

**Dritte Lösung.** Aus Geometrie Nr. 262 folgt  $F = \sqrt{p \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot p_3}$ , ferner ist  $\frac{ah_1}{2} = F$ , folglich  $h_1 = \frac{2F}{a}$ , wobei  $a$  als größte Seite angenommen werden mag. Aus den rechtwinkligen Dreiecken folgt dann



$\sin \gamma = \frac{h_1}{b}$  und  $\sin \beta = \frac{h_1}{c}$ . ( $h_1$  liegt innerhalb des Dreiecks, weil  $a$  die größte Seite war.)

22) **Aufgabe.** Ein Dreieck zu berechnen aus zwei Seiten und dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel. (Dem vierten Kongruenzsatz entsprechend.)

**Auflösung.** Gegeben  $a, b, \alpha$  und  $a > b$ ; dann gibt der Sinussatz den spitzen Winkel  $\beta$  aus  $\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a}$ ,  $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$ ,  
 $c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}$ ,  $F = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$ .

23) **Aufgabe.** Ein Dreieck zu berechnen aus zwei Seiten und dem der kleineren Seite gegenüberliegenden Winkel. (Dem fünften Kongruenzsatz entsprechend.)

**Auflösung.** Gegeben  $a, b, \alpha$  und  $a < b$ . Man hat zwei Lösungen zu berechnen, die eine mit dem spitzen Winkel aus  $\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a}$ , die andere mit dessen stumpfem Supplementwinkel. Die Werte für  $\gamma, c$  und  $F$  bzw.  $\gamma_1, c_1$  und  $F_1$  werden wie vorher gefunden.

24) **Aufgabe.** Welche Beziehung besteht beim Dreieck zwischen der Seite  $a$ , dem gegenüberliegenden  $\sphericalangle \alpha$  und dem Radius  $r$  des Um-Kreises?

**Auflösung.** Ist  $ABC$  das Dreieck mit  $a, \alpha$  und  $r$ , so ziehe man von  $B$  aus den Durchmesser  $BA_1$  des Um-Kreises und verbinde  $A_1$  mit  $C$ , dann ist  $\sphericalangle BA_1C = \alpha_1 = \alpha$  (Peripheriewinkel), und  $\triangle BCA_1$  ist ein rechtwinkliges Dreieck. In diesem ist  $\sin \alpha_1 = \frac{a}{2r}$ , folglich ist in dem ursprünglichen Dreieck ebenfalls  $\sin \alpha = \frac{a}{2r}$ . Ebenso ist  $\sin \beta = \frac{b}{2r}$ ,  $\sin \gamma = \frac{c}{2r}$ .

**Bemerkung.** Sämtliche Aufgaben, die man als Dreieckskonstruktionen mit Zirkel und Lineal durchführen kann, lassen sich auch als trigonometrische Rechenaufgaben ausführen, wobei jedesmal drei voneinander unabhängige Stücke gegeben sein müssen. Ist z. B.  $a$  und  $r$  gegeben, so kann  $\alpha$  nicht gegeben werden, sondern man hat es aus  $\sin \alpha = \frac{a}{2r}$  zu berechnen; ein drittes Stück, z. B.  $h_1$ , muß noch als gegebene Größe herangezogen werden.



25) **Aufgabe.** Ein Berggipfel  $C$  erscheine von einem Punkte  $A$  der Meeresfläche aus unter dem Elevationswinkel (Erhöhungswinkel)  $\alpha$ . Um die Höhe und Lage des Berges zu bestimmen, segelt man um eine meßbare Entfernung  $c$  in der Richtung auf den Gipfel vorwärts, worauf er von  $B$  aus unter dem größeren Elevationswinkel  $\beta$  erscheint. Wie hoch ist der Berg und in welcher Entfernung von  $A$  ist sein Gipfel auf der Landkarte festzulegen?

**Auflösung.** Berechne Seite  $AC$  im Dreieck  $ABC$ , sodann die Seiten  $C_1C$  und  $AC_1$  im rechtwinkligen Dreieck  $CC_1A$ , wo  $C_1$  der Projektionspunkt von  $C$  ist. (Die Krümmung der Erde soll vernachlässigt werden.)

26) **Aufgabe.** Ein Berg auf einer Insel sei 3000 m hoch. Wie weit kann man von ihm aus über den Ozean sehen, wenn der Radius des Erdkörpers zu 860 Meilen ( $860 \cdot 7420$  m) angenommen wird, und wie groß ist der Winkel zwischen der berechneten Tangente und der Horizontalen? (Depressionswinkel.)

**Auflösung.** Nach Satz 299 und Aufgabe 300b der Geometrie ist  $t^2 = h(h + 2r)$ , wo  $t$  die zu berechnende Tangente an den Erdkörper,  $h$  die Höhe des Berges und  $r$  der in demselben Maße gemessene Erdradius ist. Nach Berechnung der Tangente  $t$  ist ihr Berührungspunkt auf den senkrechten Radius zu projizieren und der geforderte Winkel zu berechnen.

27) **Aufgabe.** Feldmesser haben eine horizontale Standlinie  $AB$  diesseits eines Stromes gemessen und wollen die Entfernungen  $AC$  und  $BC$  nach einer Marke jenseits derselben bestimmen. Wie groß sind diese, wenn sich beim Visieren die Winkel  $CAB = \alpha$  und  $CBA = \beta$  ergeben? Darauf soll die Höhe der Marke, z. B. eines Berggipfels, bestimmt werden, wenn  $\alpha_1$  der zu  $A$  gehörige Elevationswinkel ist.

[28) **Aufgabe.** Die geographischen Breiten des Raps der guten Hoffnung und der Stadt Berlin sind  $33^\circ 55'$  (südlich) und  $52^\circ 31'$  (nördlich). Beide Orte liegen nahezu auf demselben Meridiane. Lalande bestimmte am 6. Dezember 1751 zu Berlin den Zenitabstand des südlichen Mondrandes im Momente des Meridiandurchgangs zu  $41^\circ 16'$ , Lacaille fand am Rap gleichzeitig  $46^\circ 34'$ . Es sei nun  $A$  das Rap,  $B$  Berlin,  $C$  die beobachtete Stelle des Mondes. Der Erdradius werde zu 860 Meilen angenommen. Wie berechnet man die Sehne  $AB$ ? Wie groß sind die Winkel des Dreiecks  $ABC$ ? Wie groß sind die Entfernungen  $AC$  und  $BC$ ? Wie groß ist der



Durchmesser des Mondes, wenn er von  $B$  aus unter einem Winkel von  $32'$  erscheint?]

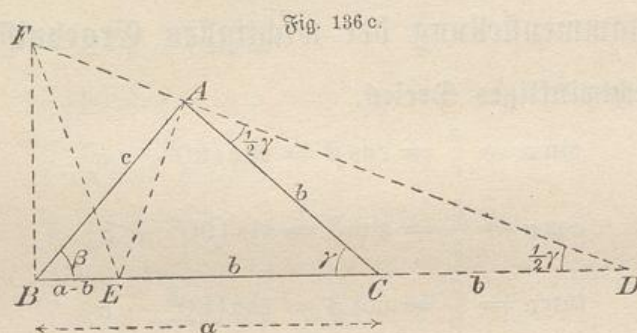
29) **Nachtrag.** In Nr. 19 ist die Aufgabe gelöst worden, das Dreieck aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel zu berechnen. Werden dabei alle Stücke verlangt, so wendet man besser den Tangentensatz an. Dieser lautet:

In jedem Dreieck findet für je zwei Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  und für die gegenüberliegenden Seiten folgende Beziehung statt:

$$\frac{\tan \frac{\alpha + \beta}{2}}{\tan \frac{\alpha - \beta}{2}} = \frac{a + b}{a - b}.$$

(Suche dies in Worten auszudrücken.)

**Beweis.** Am Dreieck  $ABC$  in Fig. 136 c sei  $CE = b$  und die Verlängerung  $CD = b$ , also  $BE = a - b$  und  $BD = a + b$ .



Die Verbindungslinie  $DA$  ist bis zum Schnitte mit dem Lote  $BF$  verlängert. Dabei ist  $\sphericalangle CDA = \frac{\gamma}{2}$ , folglich, da  $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90^\circ$  ist,  $\sphericalangle BFD = 90^\circ - \frac{\gamma}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2}$ . Ferner ist  $BEAF$  ein Sehnenviereck, denn seine Winkel bei  $A$  und  $B$  sind rechte ( $\sphericalangle EAD = (90^\circ - \frac{\gamma}{2}) + \frac{\gamma}{2} = 90^\circ$ ), also ist  $\sphericalangle AFE = \sphericalangle \beta$  als Peripheriewinkel über  $AE$ , folglich  $\sphericalangle BFE = \frac{\alpha + \beta}{2} - \beta = \frac{\alpha - \beta}{2}$ . Nun ist  $\tan \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{BD}{BF} = \frac{a + b}{BF}$ , und  $\tan \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{BE}{BF} = \frac{a - b}{BF}$ . Durch beiderseitige Division folgt aus den letzten Gleichungen

$$\frac{\tan \frac{\alpha + \beta}{2}}{\tan \frac{\alpha - \beta}{2}} = \frac{a + b}{a - b}.$$



**Anwendung.** Um ein Dreieck aus  $a$ ,  $b$  und  $\gamma$  zu berechnen, bildet man  $\alpha + \beta = 180^\circ - \gamma$ , so daß  $\frac{\alpha + \beta}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$  bekannt ist. Der Tangentensatz giebt

$$\tan \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{a - b}{a + b} \tan \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Hat man  $\tan \frac{\alpha - \beta}{2}$  berechnet, so ergeben die Logarithmentafeln den Wert von  $\frac{\alpha - \beta}{2}$ . Aus  $\frac{\alpha + \beta}{2}$  und  $\frac{\alpha - \beta}{2}$  folgen durch Addition und Subtraktion die Werte für  $\alpha$  und  $\beta$ . (Eine Probe für die Richtigkeit der Rechnung ergibt sich daraus, daß  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$  sein muß.)

Der Wert von  $c$  folgt aus dem Sinussatze als  $c = a \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha}$ .

### Busammenstellung der wichtigsten Ergebnisse.

#### 1) Rechtwinkliges Dreieck.

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \cos \beta = \cos (90^\circ - \alpha).$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \sin \beta = \sin (90^\circ - \alpha).$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} = \cot \beta = \cot (90^\circ - \alpha).$$

$$\cot \alpha = \frac{b}{a} = \tan \beta = \tan (90^\circ - \alpha).$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cot \alpha}; \quad \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\tan \alpha}.$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}, \quad \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

$$\sin \alpha = \sin (180^\circ - \alpha), \quad \cos \alpha = -\cos (180^\circ - \alpha),$$

$$\tan \alpha = -\cot (180^\circ - \alpha), \quad \cot \alpha = -\tan (180^\circ - \alpha).$$

#### 2) Für das allgemeine Dreieck ist

$$a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma,$$

$$F = \frac{1}{2} ab \sin \gamma = \sqrt{p p_1 p_2 p_3}$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{(a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)} = p q,$$



$$q = \sqrt{\frac{p_1 p_2 p_3}{p}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{a+b+c}}.$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{q}{p_1}, \quad \tan \frac{\beta}{2} = \frac{q}{p_2}, \quad \tan \frac{\gamma}{2} = \frac{q}{p_3}.$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{2r}, \quad \sin \beta = \frac{b}{2r}, \quad \sin \gamma = \frac{c}{2r}.$$

$$\tan \frac{\alpha + \beta}{2} : \tan \frac{\alpha - \beta}{2} = (a + b) : (a - b).$$



## Vierte Abtheilung. Stereometrie.

### Lehraufgabe der Untersekunda.

#### Vorbemerkungen.

1) Aus dem Vorkursus und der Lehraufgabe der Quinta und Quarta werden folgende Begriffe der räumlichen Geometrie als bekannt vorausgesetzt:\*)

Dreidimensionaler Raum (mathematischer Raum im Gegensatz zum Weltraum). Körper (mathematischer Körper im Gegensatz zum physischen Körper). Ebene Fläche. Krumme Fläche. Ebene Kurve. Raumkurve. Ebene Punktgruppen. Nichtebene Punktgruppen. Das Strahlenbündel eines Punktes (Gesamtheit der Richtungen). Senkrechte, wagerechte und schiefe Geraden. Parallele Geraden im Raume. Senkrechte, wagerechte und schiefe Ebenen. Parallele Ebenen. Ihr gegenseitiger Abstand. Lot auf einer Ebene. Normalebene auf einer Geraden. Abstand eines Punktes von einer Ebene. Gerade, die zu einer Ebene parallel ist. Ihr Abstand von der Ebene. Gerade als Schnitt zweier oder mehrerer Ebenen. Das Ebenenbüschel einer Geraden. Schnittwinkel zweier Ebenen. Schnittwinkel einer Geraden und einer Ebene. Bestimmung einer Ebene durch drei Punkte, die nicht in einer Ebene liegen; oder durch zwei einander schneidende Geraden; oder durch zwei parallele Geraden, oder durch eine Gerade und einen Punkt außerhalb der Geraden. Vier Punkte in nicht ebener oder windschiefer Lage. Windschiefe oder einander kreuzende Geraden. Kürzester Abstand oder gemeinschaftliches Lot zweier Geraden.

\*) Hier wird zweckmäßig eine vollständige Wiederholung vorgenommen, die zu weiterer Klärung der Grundbegriffe dienen kann.



Die rechtwinklige Ecke. Der Würfel mit seinen Kanten, Flächen, Diagonalen, Diagonalebene. Sein Rauminhalt, seine Oberfläche, seine Kantenlänge. Seine einbeschriebene Kugel. Die Kubikzahlen und die Raumgröße. Der Rechteckkörper, seine Kanten, Flächen, Diagonalen und Diagonalebene. Sein Inhalt, seine Oberfläche, seine Kantenlänge. Dreikantige Säulen, die mit dem Würfel und dem Rechteckkörper zusammenhängen. Ihre Inhaltsformel. Pyramiden, die mit dem Würfel und dem Rechteckkörper zusammenhängen. Das dem Würfel einbeschriebene regelmäßige Achteck. Die beiden dem Würfel einbeschriebenen regelmäßigen Vierflache. — Die Symmetrie im Raume. — Die Kugel als Ort konstanten Abstandes von einem Punkte. Halbmesser, Sehne, Durchmesser, Gegenpunkte der Kugel. Die Kugel als regelmäßiger Körper. Schnitt einer Ebene mit der Kugel. Haupt- oder größte Kreise, kleinere Kreise der Kugel. Meridiane und Parallelkreise. Kugelabschnitt (Segment). Halbkugelförper. Kugelhaube (Kalotte). Halbkugelfläche. Kugelausschnitt (Sektor). Meridiankeil und Meridiankeil. Kreisbüschel auf der Kugelfläche. Krümmung. Länge, Breite und Gradeinteilung am Globus. Senkrechter Kreiszylinder (Walze). Sein Inhalt, seine Mantelfläche und Oberfläche. Der konzentrische Hohlzylinder. Der senkrechte Kreiskegel, seine Mantelfläche und Oberfläche. Reihe einiger Körper. Körpermodelle verschiedener Art.

## I. Übungen am Würfel und an den aus ihm abgeleiteten Körpern.

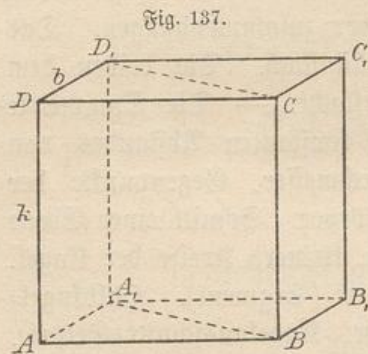
2) Das Zeichnen des Würfels. Die Kunst, dreidimensionale Körper und sonstige Raumgebilde in der nur zweidimensionalen Ebene durch eine korrekte Zeichnung wiederzugeben, heißt die darstellende Geometrie. Jede besondere Art der Darstellung eines Körpers in der Ebene bezeichnet man als eine Projektion des Körpers. Die Berechtigung dieses Namens wird sich aus den folgenden Erläuterungen über die Darstellung des Würfels durch entsprechende Zeichnungen ergeben.

a) Man denke sich das Drahtmodell des Würfels auf einem horizontalen Reißbrett stehend und die Sonne so darauf scheinend, daß der Schatten des Modells auf das Reißbrett geworfen (projiziert) wird. Bei schrägem Einfall der Sonnenstrahlen, die man wegen der sehr großen Entfernung der Sonne als parallel betrachten darf,



nennt man das entstehende Schattengebilde eine schräge Parallelprojektion des Würfels. (Vergl. Fig. 137.)

Dabei decken sich für das in die Sonne versetzt gedachte Auge die unendlich dünn zu denkenden Drähte der Grundfläche  $A_1B_1C_1D_1$  des Modells mit ihren eigenen Schattenlinien, die also ein Quadrat bilden. Die senkrechten Würfelkanten aber werfen parallele Schatten-

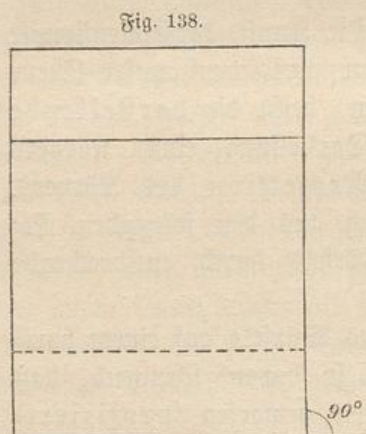


linien, denn steht z. B. die Sonne im Südosten, so gehen diese Schattenlinien sämtlich nach Nordwesten. Außerdem sind diese gleichlang. Steht nämlich die Sonne z. B.  $50^\circ$  über dem Horizonte, und ist  $k$  die Länge der Würfelkante, so ist die Schattenlänge der senkrechten Kanten  $b = k \cot 50^\circ$ . Allgemeiner ist  $b = k \cot \alpha$ , sobald die Sonne  $\alpha^\circ$  über dem Horizonte steht.

Die Drähte der oberen Würfeloberfläche endlich geben Schattenlinien, welche die Endpunkte der eben besprochenen verbinden, sodaß sie ein Quadrat bilden, welches dem zuerst besprochenen kongruent und gegen dieses um die Strecke  $b$  verschoben ist.

In Fig. 137 bedeutet bei dieser Auffassung  $A_1B_1C_1D_1$  die Grundfläche,  $ABCD$  die obere Fläche,  $A_1A$ ,  $B_1B$ ,  $C_1C$  und  $D_1D$  sind die Schatten der senkrechten Kanten. Die Sonne ist wo zu denken? (Man errichte in  $D_1$  auf der Ebene der Zeichnung ein Lot  $D_1X = k$ . Zieht man  $DX$ , so zeigt diese Linie nach der unendlich fern zu denkenden Sonne hin.)

**Aufgabe.** Versuche Fig. 137 so zu deuten, daß das Würfelmodell mit der Fläche  $A_1B_1C_1D_1$  an die senkrechte Wandtafel gehalten und das Schattengebilde durch die Sonne auf diese geworfen wird. Welches ist dann die horizontale Grundfläche des Würfels, wo sind die senkrechten Seitenkanten, und wie hat man sich den Stand der Sonne zu denken?



b) Man kann sich die Sonne auch so stehend denken, daß das Schattengebilde so wie in Fig. 138 erscheint. Die vorher sichtbaren Seitenflächen sind jetzt unsichtbar geworden. An Stelle des

Winkels  $A_1AB$ , der vorher  $30^\circ$  betrug, ist ein Winkel von  $90^\circ$  getreten.



c) Je nach der Höhe des Sonnenstandes können die Kanten  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ ,  $DD_1$  des Würfels verkürzt, verlängert oder auch in richtiger Länge erscheinen. Im letzteren Falle kann man die Zeichnung als eine isometrische bezeichnen. In der Regel wird man aber irgend eine Verkürzung wählen. Ebenso willkürlich kann man mit dem Winkel  $A_1AB$  verfahren.

Man wird jetzt verstehen, was es heißen soll, in Fig. 137 sei der Würfel in der Parallelperspektive\*) zu  $30^\circ$  mit  $\frac{1}{3}$  Verkürzung gezeichnet. Ebenso kann man die Parallelperspektive  $45^\circ$  und  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$  usw. Verkürzung nehmen; ebenso die Parallelperspektive zu  $90^\circ$  und  $\frac{1}{4}$  Verkürzung usw. Statt Parallelperspektive im allgemeinen möge man abgekürzt sagen „Schrägbild“.

Die gewöhnliche Stellung des Würfels ist dabei die sog. Frontstellung. (Durch die in Fig. 137 eingezeichnete Diagonalebene ist zugleich dargestellt, wie die dreiseitigen Säulen, in die durch jene der Würfel zerlegt ist, erscheinen würden.)

d) **Aufgabe.** Den Würfel in der Parallelperspektive zu  $30^\circ$  und  $\frac{1}{3}$  Verkürzung in „Übereckstellung“ zu zeichnen.\*\*)

(Man kann die Figur aus Fig. 137 ableiten. Setzt man in dieser  $AB = 1$ , so zeichne man einen Würfel von der Kante  $\sqrt{2}$ , so daß seine Höhe leicht zu bestimmen ist. Die Grundlinien erscheinen dann von derselben Länge und Richtung, wie in Fig. 137  $A_1B$  und  $AB_1$ .)

e) Zwei Sonderfälle der Parallelperspektive sind von besonderer Wichtigkeit, bei denen es sich um die Verkürzung  $\frac{1}{\infty} = 0$  handelt.

Steht die Sonne senkrecht über dem Reißbrett, bezw. der Fläche der Wandtafel, so fällt  $ABCD$  auf  $A_1B_1C_1D_1$  und es wird  $AA_1 = 0$ ,  $BB_1 = 0$  usw. In dem einen Falle entsteht dann die Grundriß-Zeichnung, in dem anderen die Aufriß-Zeichnung des Würfels, in beiden Fällen zunächst ein Quadrat. Im Gegensatz zu den Schrägbildern bezeichnet man diese Zeichnungen als senkrechte Projektionen (orthogonale oder orthographische Projektionen) des Würfels. Die Zeichnungen der Bau- und Maschinentechnik werden in der Regel durch Grundriß und Aufriß zugleich dargestellt. So ist in

\*) Der Name Perspektive kommt daher, daß man das unendlich scharfe Auge des Beobachters an die Stelle der Sonne versetzt denkt. Diesem Auge decken sich die Drahtkanten des Modells mit ihren Schattenlinien. Ihm erscheint der Würfel so, wie das gezeichnete Bild.

\*\*) Näheres über diese Darstellung findet man in des Verfassers „Einführung in das stereometrische Zeichnen“. Leipzig bei B. G. Teubner, 1886.

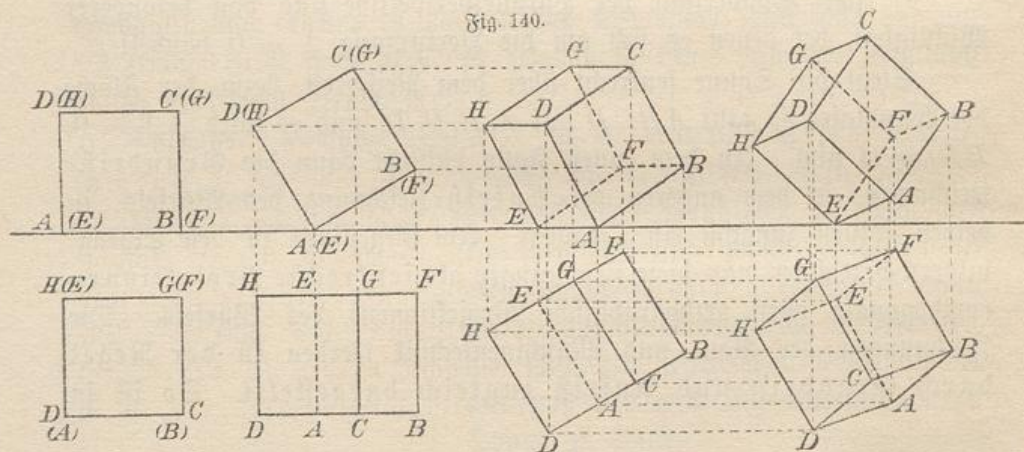


Fig. 139 der Würfel im Grundriß und Aufriß zugleich gezeichnet. Für die mathematischen Zwecke der Schule ist die Schrägprojektion im all-

gemeinen die geeignetere, da sie nur eine Zeichnung erfordert. Nur für die Zeichnung der Kugel ist die senkrechte Projektion vorzuziehen, weil sie in dieser als Kreis, bei der schrägen dagegen im allgemeinen als Ellipse erscheint.

f) Die Grund- und Aufrißzeichnung ist sehr geeignet, den Würfel in den verschiedensten Stellungen zur Darstellung zu bringen. Wie dies geschehen kann, ergibt sich aus Fig. 140.

In dieser ist zunächst die gewöhnliche Frontstellung gewählt, wobei die verdeckten Punkte mit eingeklammerten Buchstaben bezeichnet sind. Denkt man sich dann den Würfel im Aufriß um irgend einen Winkel unter Festhaltung der Kante  $AE$  gedreht, wobei das Aufrißbild sonst ungeändert bleibt, so wandern die Grundrißpunkte in horizontaler Bahn. Wie sie im



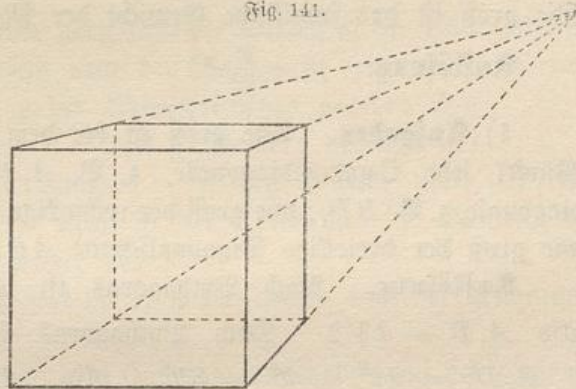
zweiten Bilde liegen, ergibt sich aus dem Herabprojizieren der Aufrißpunkte in den Grundriß. Dann drehe man das Grundrißbild, wobei die Punkte des Aufrißes horizontal wandern. Ihre Lage ergibt sich aus dem Hinausprojizieren. Im Aufriß kann man schließlich noch eine andere Drehung vornehmen, was eine ganz allgemeine Lage ergibt.



g) Denkt man sich die Kante des Würfels als 1, so hat die einbeschriebene Kugel den Radius  $\rho = \frac{1}{2}$ , die umbeschriebene aber hat den Radius  $r = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ , (warum?) kann also ebenfalls leicht konstruiert werden.\*) Den Mittelpunkt beider Kugeln findet man durch den Schnitt je zweier Hauptdiagonalen. Die Kugeln sind also für alle vier Lagen im Grund- und Aufriß als je zwei gleich große Kreise leicht zu zeichnen.

h) Macht man den ersten Beleuchtungsversuch statt mit den Sonnenstrahlen mit einem Kerzenlichte, so erhalten die Quadrate verschiedene Größe, und die Schatten der senkrechten Drähte laufen so auseinander, als ob sie von einem Punkte ausgingen, dem äußeren Ähnlichkeitspunkte der beiden Quadrate. Fig. 141 stellt eine solche Projektion dar, die man als Zentralprojektion (Zentralperspektive, Malerperspektive) des

Fig. 141.



Würfels bezeichnet. Sie stellt den Würfel so dar, wie er dem in endlicher Entfernung befindlichen Auge erscheint. Räumlich ist das Kerzenlicht wo zu denken? Man errichte in einem Eckpunkte  $D_1$  des kleineren Quadrates auf der Ebene der Zeichnung ein Lot  $D_1X$  gleich der Seite dieses Quadrates. Ist nun  $D$  der Endpunkt der zugehörigen Schräglinie, so zeigt die Gerade  $DX$  nach dem leuchtenden „Punkte“ hin. Macht man dieselbe Konstruktion an einer anderen Ecke, so schneiden sich die beiden Raumlinien im leuchtenden Punkte. — Das Auge befindet sich an derselben Stelle.

Auf diese Zeichnungsart kann hier noch nicht näher eingegangen werden.\*\*)

3) **Aufgaben.** a) Der Würfel habe die Kante  $k$ ; wie groß ist seine Oberfläche, sein Inhalt und, wenn  $p'$  das spezifische Gewicht ist, sein Gewicht? (Bei Eisen z. B. ist  $p' = 7,5$  zu nehmen.)

**Auflösung.**  $O = 6k^2$ ,  $I = k^3$ ,  $p = k^3 p'$ .

b) Wie groß sind  $k$ ,  $I$  und  $p$  bei gegebener Oberfläche  $O$ ?

\*) Letzterer Kreis geht nicht durch die Ecken der zuerst gezeichneten Quadrate.

\*\*) Die Einführung in das stereometrische Zeichnen teilt das Wichtigste darüber mit.



**Auflösung.**  $k = \sqrt[3]{\frac{O}{6}}, \quad I = k^3 = \left(\sqrt[3]{\frac{O}{6}}\right)^3, \quad p = \left(\sqrt[3]{\frac{O}{6}}\right)^3 p',$

wobei auch  $p'$  gegeben sein muß.

c) Wie groß sind  $k$ ,  $O$  und  $p$  bei gegebenem  $I$ ?

**Auflösung.**  $k = \sqrt[3]{I} = I^{\frac{1}{3}}, \quad O = 6k^2 = 6I^{\frac{2}{3}}, \quad p = I \cdot p'.$

d) Wie lang müssen die Kanten eines würfelförmigen Hektolitergefäßes genommen werden?

**Auflösung.**  $x^3 = 100$  ebdem, folglich  $x = \sqrt[3]{100} = ?$

e) Wie lang müssen die Kanten eines Eisenwürfels sein, der 1000 kg wiegen soll?

**Auflösung.** Aus  $p = I \cdot 7,5 = x^3 \cdot 7,5$  folgt  $x = \sqrt[3]{\frac{p}{7,5}} = \sqrt[3]{\frac{1000}{7,5}} = ?$

f) Ein Würfel von der Kantenlänge  $k$  habe das Gewicht  $p$ . Wie groß ist das spezifische Gewicht der Masse?

**Auflösung.**  $p' = \frac{p}{k^3} \cdot *)$

4) **Aufgaben.** Wie groß ist bei dem in Fig. 137 dargestellten Würfel jede Quadratdiagonale, z. B.  $A_1B$ ; wie groß jede Hauptdiagonale, z. B.  $BD_1$ ; wie groß der rechteckige Diagonalschnitt  $A_1BCD_1$ ; wie groß der dreieckige Diagonalschnitt  $ACD_1$ ?

**Auflösung.** Nach Pythagoras ist  $A_1B^2 = k^2 + k^2 = 2k^2$ , also  $A_1B = k\sqrt{2}$ . Nach Pythagoras ist ferner  $BD_1^2 = A_1B^2 + A_1D_1^2 = 2k^2 + k^2 = 3k^2$ , also  $BD_1 = k\sqrt{3}$ . Fläche  $A_1BCD_1 = A_1B \cdot A_1D_1 = k\sqrt{2}k = k^2\sqrt{2}$ . Fläche  $ACD_1 = \frac{AC^2}{4}\sqrt{3} = \frac{2k^2}{4}\sqrt{3} = \frac{k^2}{2}\sqrt{3}$ .

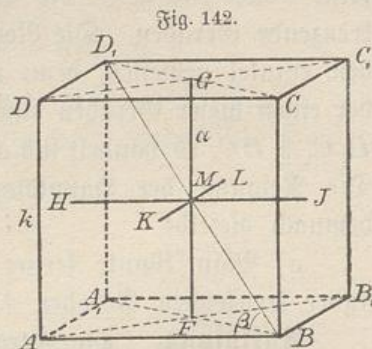
5) Die Hauptdiagonalschnitte  $A_1BCD_1$  und  $AB_1C_1D$  (Fig. 142) schneiden sich in der Mittellinie  $FG$  des Würfels. Die beiden anderen Paare von Schnittflächen geben die Mittellinien  $HJ$  und  $KL$ .

Je zwei der Geraden  $FG$ ,  $HJ$  und  $KL$  bestimmen eine Ebene, die den Würfel in kongruente Teile zerlegt. Diese Ebenen heißen die Mittelschnitte des Würfels. Der Punkt  $M$ , der diesen drei Ebenen gemeinschaftlich ist, ist zugleich sämtlichen Hauptdiagonalschnitten gemein, in ihm schneiden sich sowohl die Mittellinien  $FG$ ,  $HJ$ ,  $KL$ , als auch die vier Hauptdiagonalen  $AC_1$ ,  $BD_1$ ,  $B_1D$  und  $A_1C$ .  $M$

\*) Über den Würfel, die Kubikzahlen, die Raum- und Gewichtsmaße, die Flüssigkeitsmaße, das spezifische Gewicht, über die Urmaße und über numerische Aufgaben vgl. Vorkursus § 75 bis § 79. Man beachte besonders die dort unter 78e) gegebene Rechenregel.



heißt der Mittelpunkt des Würfels. Es ist gleichweit von allen Ecken, gleichweit von allen Kanten, gleichweit von allen Flächen des Würfels entfernt. Er ist also der Mittelpunkt der eingeschriebenen Kugel, deren Radius  $\varrho = \frac{k}{2}$  ist, und zugleich der Mittelpunkt der umschriebenen Kugel, deren Radius  $\frac{1}{2}BD_1$  oder  $r = \frac{k}{2}\sqrt{3}$  ist. Er ist auch der Mittelpunkt einer Kugel, die jede Würfelkante in ihrer Mitte berührt. In der Kristallographie nennt man die drei Mittellinien  $FG$ ,  $HJ$  und  $KL$  das Achsenkreuz des Würfels.



6) **Aufgaben.** a) Wie groß sind die Kanten  $k$ , die Oberfläche  $O$ , der Inhalt  $I$  eines Würfels und der Radius  $r$  der umschriebenen Kugel, wenn der Radius  $\varrho$  der eingeschriebenen gegeben ist?

b) Wie groß sind  $k$ ,  $O$ ,  $I$  und  $\varrho$ , wenn  $r$  gegeben ist?

c) Einer Kugel mit Radius  $r$  sei ein Würfel um- und ein anderer eingeschrieben. Wie groß ist der Unterschied der Kanten, der Oberflächen, der Inhalte beider Würfel?

d) Wie groß ist der Radius  $r$ , wenn irgend eine der genannten Differenzen gegeben ist?

e) Welche Neigung hat jede Hauptdiagonale des auf horizontaler Basis stehenden Würfels?

**Auflösung.** In Fig. 142 ist  $\tan \beta = \frac{A_1 D_1}{B A_1} = \frac{k}{k\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{0,5}$ ;

$\lg 0,5 = 19,698\,97 - 20$ , oder  $\lg \sqrt{0,5} = 9,849\,49 - 10$ , also  $\beta = 35^\circ 15' 50''$ . Man nennt diesen Winkel den Neigungswinkel der Hauptdiagonale gegen die Grundfläche. Der Winkel, den eine Gerade mit einer Ebene bildet, wird stets in derjenigen Ebene gemessen, die durch die Gerade geht und auf der ersteren Ebene senkrecht steht, also in der projizierenden Ebene. Es handelt sich also um den Winkel zwischen den Geraden und ihrer Projektion auf die Ebene.

Jede Hauptdiagonale des Würfels bildet mit jeder der Würfel-  
flächen den Winkel  $35^\circ 15' 50''$ .

f) Welchen Winkel bildet jede Hauptdiagonale des Würfels mit den von ihr getroffenen Kanten?

**Auflösung.** Fig. 142 zeigt, daß es sich um den Komplementwinkel des vorigen handelt, also um  $\beta_1 = 54^\circ 44' 10''$ , für den  $\tan \beta_1 = \sqrt{2}$  ist.



**Bemerkung.** Man könnte auch nach der Neigung fragen, die eine Hauptdiagonale gegen Würfelkanten hat, mit denen sie sich nicht trifft. So sind z. B. die Diagonale  $BD_1$  und die Kante  $D$  einander kreuzende Geraden. Die Neigung der beiden gegeneinander wird durch den Winkel gemessen, denn man erhält, wenn man durch einen Punkt der einen dieser Geraden eine Parallele zur anderen legt. So ist z. B.  $D_1C_1 \parallel DC$ , es handelt sich also um den Winkel  $BD_1C_1 = 54^\circ 44' 10''$ . Die Neigung der Hauptdiagonalen gegen sämtliche Würfelkanten ist demnach dieselbe.

g) Man könnte ferner nach der kleinsten Entfernung der einander kreuzenden Geraden  $D$  und  $BD_1$  voneinander fragen.

**Auflösung.** Die Gerade  $DC$  ist parallel zu jeder durch  $D_1C_1$  gelegten Ebene, also auch parallel zu der durch  $D_1C_1$  und  $BD_1$  gelegten Ebene  $BC_1D_1A$ , die unter  $45^\circ$  gegen die Horizontalebene geneigt ist. Von dieser Ebene hat  $DC$  überall die Entfernung  $CJ = DH = k\sqrt{\frac{1}{2}}$ . Verbindet man  $M$  mit dem Halbierungspunkte von  $DC$ , so erhält man den kleinsten Abstand der Geraden  $DC$  und  $BD_1$  voneinander, d. h. wiederum  $k\sqrt{\frac{1}{2}}$ . Diese Verbindungslinie steht nämlich auf beiden Geraden senkrecht, was bei keiner zweiten Verbindungslinie ihrer Punkte stattfindet. Jede andere Verbindungslinie ist also länger.

In ähnlicher Weise bestimmt man allgemein für zwei einander kreuzende Geraden das gemeinschaftliche Lot und die kürzeste Entfernung beider voneinander.

h) In Fig. 143 sind die vier Diagonalen eines Würfels gezeichnet, welche eine senkrechte Pyramide von der quadratischen Grundfläche  $ABCD$  und der Spitze  $M$  bestimmen. Der Würfel läßt sich in sechs solche Pyramiden zerlegen; ist also  $a$  seine Kante, so hat jede dieser Pyramiden den Inhalt  $\frac{a^3}{6}$ . Dafür kann man schreiben  $\frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{a}{2} = \frac{1}{3}a^2 \cdot h$ , wenn man die Pyramidenhöhe  $\frac{a}{2} = h$  setzt. Setzt man noch die Grundfläche  $a^2 = F$ , so ist der Inhalt dieser Pyramide  $J = \frac{1}{3}Fh$ , d. h. der dritte Teil des Produkts aus Grundfläche und Höhe. (Diese Formel wird sich als für alle Pyramiden und Kegel gültig herausstellen.)

i) **Aufgabe.** Das Flächennetz des Würfels zu zeichnen und sein Kartonmodell anzufertigen.

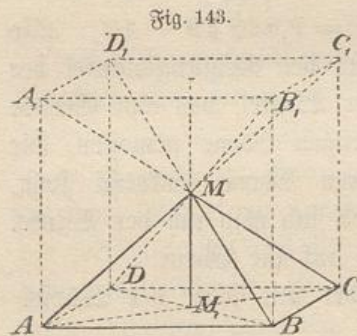


Fig. 143.



Das Netz ist in Fig. 144 dargestellt und bedarf keiner Erläuterung (Vgl. Vorkursus § 75.)

k) Den Würfel von der Kante  $c = (a + b)$  gemäß der Gleichung

$$c^3 = (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

in Würfel von den Kanten  $a$  und  $b$ , in drei quadratische Säulen von der Grundfläche  $a^2$  und der Höhe  $b$ , und in drei quadratische Säulen

Fig. 144.

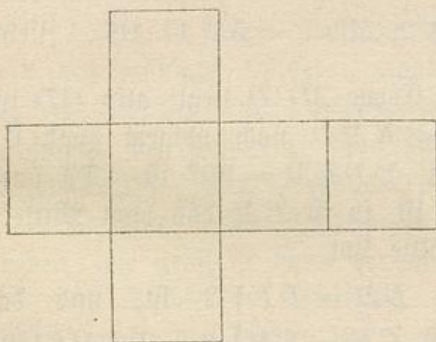
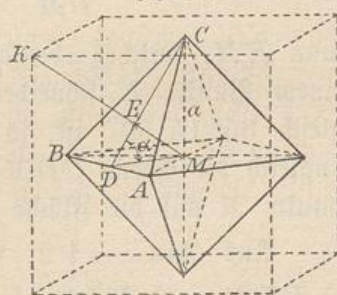


Fig. 145.



von der Grundfläche  $b^2$  und der Höhe  $a$  zu zerlegen. (Ein genaues Schrägbild wird gefordert.)

1) Die Kante eines Würfels sei  $c = a - b$ . Es soll stereometrisch gezeigt werden, daß

$$c^3 = (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

ist. (Ein genaues Schrägbild wird gefordert.)

Zu beiden Aufgaben vgl. Vorkursus § 93.

**Bemerkung.** In der Mineralogie tritt der Würfel auf als Kristallform für Steinsalz, Flußpat, Silber, Gold, Bleiglanz, Schwefelkies usw.

7) **Aufgabe.** Das regelmäßige Achteck (Oktaeder) aus dem Würfel abzuleiten.

**Auflösung.** Die Mitten der Würfelflächen sind die Ecken eines regelmäßigen Achtecks, welches ihm einbeschrieben ist. Dieses kann also leicht gezeichnet und berechnet werden. In Fig. 145 ist die Zeichnung ausgeführt. Ist  $a$  die Länge jeder Halbachse, so ist  $BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$ , also  $BC = a\sqrt{2}$ . Dies ist die Länge jeder der 12 Kanten der Körpers. Die 8 Flächen sind demnach gleichseitige Dreiecke. Es handelt sich also um das regelmäßige Oktaeder oder Achteck. Jede Fläche des Oktaeders ist, wenn man die Oktaederkante mit  $k$  bezeichnet,  $F = \frac{k^2}{4}\sqrt{3}$ , die gesamte Oberfläche also



$O = 2k^2\sqrt{3} = 4a^2\sqrt{3}$ . Der körperliche Inhalt wird erst später berechnet.

In der Stellung der Figur ist die Neigung jeder schrägen Kante gleich  $45^\circ$ . Jede Kante bildet mit den drei mit ihr zusammenstoßenden Kanten zwei Winkel von  $60^\circ$  und einen von  $90^\circ$ .

Die Neigung der Fläche  $ABC$  mißt man mit Hilfe der Mittellinie  $DC$  und der Geraden  $DM$ , da beide auf der Schnittkante  $AB$  der Fläche  $ABC$  und der Horizontalebene  $ABM$  senkrecht stehen.

Dabei ist  $\tan \alpha = \frac{MC}{DM} = \frac{a}{a\sqrt{\frac{1}{2}}} = \sqrt{2}$ , also  $\alpha = 54^\circ 44' 10''$ . Zieht

man  $KM$ , welches ebenfalls in der Ebene  $MCD$  liegt, also  $CD$  in einem Punkte  $E$  schneidet, wobei  $\angle KMD$  nach obigem (vgl. 6) gleich  $35^\circ 15' 50''$  ist, so folgt, daß  $\angle DEM = 90^\circ$  ist. Da nun zugleich die Ebene  $CDM \perp ABC$  ist, so ist  $EM$  das vom Mittelpunkt  $M$  auf die Fläche  $ABC$  gefällte Lot.

Aus  $\tan \alpha = \sqrt{2}$  folgt, daß  $EM = DE\sqrt{2}$  ist, und da  $\triangle DEM \sim \triangle MEC$ , so folgt, daß  $CE = EM\sqrt{2} = DE\sqrt{2}\sqrt{2} = 2DE$  ist. Demnach ist  $E$  der Mittelpunkt des gleichseitigen Dreiecks  $ABC$ . Da  $DC = \frac{k}{2}\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{2}}{2}\sqrt{3} = a\sqrt{\frac{3}{2}}$ , also  $DE = \frac{DC}{3} = a\sqrt{\frac{1}{6}}$  ist, so folgt  $EM = DE\sqrt{2} = a\sqrt{\frac{1}{6}}\sqrt{2} = a\sqrt{\frac{1}{3}}$ . Dies gilt für alle Flächen des Oktaeders. Folglich: Dem regelmäßigen Oktaeder läßt sich eine Kugel einbeschreiben, deren Radius  $\rho = a\sqrt{\frac{1}{3}}$  ist. Ebenso läßt sich ihm eine Kugel vom Radius  $r = a$  umbeschreiben.

Je zwei mit den Kanten aneinander stoßende Oktaederflächen bilden einen Winkel von der Größe  $2\alpha = 109^\circ 28' 20''$ , je zwei nur in einer Ecke zusammenstoßende bilden einen Winkel  $180^\circ - 2\alpha = 70^\circ 31' 40''$ . Man achte auf folgende Beziehungen:

|                                                              |  |
|--------------------------------------------------------------|--|
| Weil der Würfel 6 Flächen hat, besitzt das Oktaeder 6 Ecken, |  |
| " " " 8 Ecken " " " " 8 Flächen,                             |  |
| " " " 12 Kanten " " " " 12 Kanten,                           |  |

denn jeder dreikantigen Ecke des Würfels liegt eine dreikantige Fläche des Oktaeders gegenüber, jeder vierkantigen Ecke des Oktaeders entspricht eine vierkantige Fläche des Würfels.

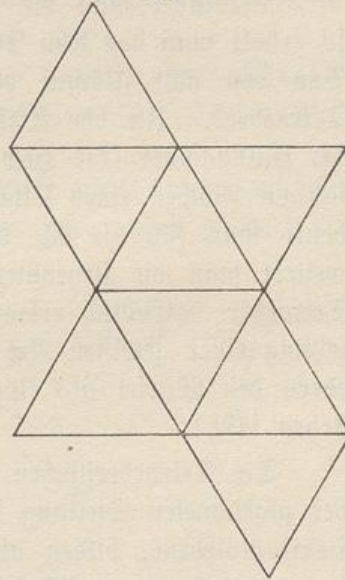
Je zwei einander gegenüberliegende Kanten bzw. Flächen der Oktaeders sind parallel.

Das Flächennetz des Oktaeders ist in Fig. 146 dargestellt. Die gleichseitigen Dreiecke sind dabei so angeordnet, daß in jeder Ecke des Körpers vier von ihnen zusammenstoßen.



**Bemerkung.** Das regelmäßige Oktaeder ist die Kristallform für Magneteisen und einige andere Eisenerze, für Rotkupfer, Schwefelkies, Bleiglanz, Silberglanz, Platin, Alaun, Gold usw.

Fig. 146.



8) **Aufgaben.** a) Bei einem regelmäßigen Oktaeder sei eine der Größen  $a, k, O, r, \varrho$  gegeben. Die anderen sollen aus ihr berechnet werden.

b) Einer Kugel vom Radius  $r$  sei ein regelmäßiges Oktaeder einbeschrieben und das entsprechende umbeschrieben. Wie groß ist die Differenz ihrer Halbachsen, ihrer Kanten, ihrer Oberflächen?

c) Eine dieser Differenzen sei gegeben, wie groß ist dann der Radius  $r$ ?

d) Suche zu beweisen, daß die Mittelpunkte der Flächen des regelmäßigen Oktaeders die Ecken des einbeschriebenen Würfels sind, zeichne die entsprechende Figur und berechne die neue Würfelkante aus der Halbachse des Oktaeders.

e) Einem Würfel sei ein Oktaeder, diesem ein Würfel eingezeichnet. Wie verhalten sich die Kanten der beiden Würfel?

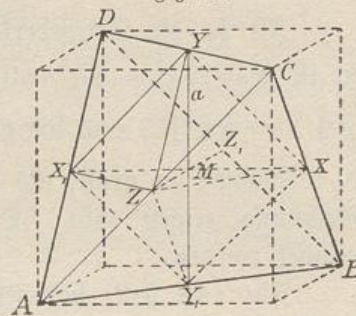
f) Zeichne den ebenflächigen Körper, dessen Ecken die Halbierungspunkte der Oktaederkanten sind, und beschreibe und berechne diesen.

g) Löse dieselbe Aufgabe für die Halbierungspunkte der Kanten des Würfels. (Zu f) und g) vgl. Fig. 172.)

9) **Aufgabe.** Das regelmäßige Vierfläch (Tetraeder) aus dem Würfel abzuleiten.

**Auflösung.** In Fig. 147 sind am Würfel vier dreiseitige Diagonalschnitte geführt, welche die gleichseitigen Dreiecke  $ABC, ACD, ADB$  und  $BCD$  gegeben haben. Diese begrenzen das gesuchte Vierfläch oder Tetraeder  $ABCD$ . Die Zeichnung des so aufgestellten Körpers macht also keine Schwierigkeit. Daß seine Flächen gleichseitige Dreiecke von derselben Größe sind, reicht schon hin, ihn als einen regelmäßigen Körper erscheinen zu lassen. Man kann ihn als die einzige wirklich regelmäßige Pyramide betrachten.

Fig. 147.





Verbindet man die Mitten der Gegenkanten dieses Vierflachs, so schneiden einander die Verbindungslinien in einem Punkte und bilden wieder das Achsenkreuz  $XX_1$ ,  $YY_1$ ,  $ZZ_1$  des Körpers.

Verbindet man die Mitten der Kanten auch in anderer Weise, so erhält man das dem Tetraeder einbeschriebene regelmäßige Achteck. Von den acht Flächen des letzteren fallen vier in die Flächen des Tetraeders. In der Kristallographie wird daher das Tetraeder als der Halbflächner (die Hemiedrie) des Oktaeders bezeichnet. Denkt man sich die Flächen eines Oktaeders abwechselnd mit  $+$  und  $-$  bezeichnet, denkt man sich die mit dem Minuszeichen versehenen weg, und erweitert man die stehenbleibenden bis zum Schließen, so entsteht ein Tetraeder. (Endlich erkennt man an der Figur noch, daß die Aufsetzung einer gewissen Art von Pyramiden auf die Flächen des Tetraeders den Würfel als einen Sonderfall des Pyramidentetraeders entstehen läßt.)

Die Tetraederflächen haben demnach, wie die Oktaederflächen, in der gezeichneten Stellung sämtlich die Neigung  $54^\circ 44' 10''$  gegen die Horizontalebene, bilden also, wie an der Kante  $CD$  gezeigt werden kann, miteinander Winkel von der Größe  $180^\circ - 2(54^\circ 44' 10'') = 70^\circ 31' 40''$ . Die einbeschriebene Kugel stimmt mit der des Oktaeders überein, ist also vom Radius  $\rho = a\sqrt{\frac{1}{3}}$ , wenn  $a$  die Länge der Halbachse  $MX$  ist. Die umbeschriebene Kugel dagegen hat den Radius  $r = MD = a\sqrt{3}$ , stimmt also mit der des Würfels überein. Da die Hauptdiagonalen des Würfels sich in einem Punkte  $M$  schneiden, und da jede von ihnen eine der Tetraederflächen senkrecht durchschneidet, so treffen sich die vier Höhen des Tetraeders in einem Punkte  $M$ , und von jeder ist durch diesen der vierte Teil abgeschnitten, weil  $r = 3\rho$  ist. Jede Tetraederfläche wird von den Kanten der übrigen Flächen unter Winkeln von der Größe  $54^\circ 44' 10''$  geschnitten.

Ist  $k_1$  die Tetraederkante,  $k$  die Würfelkante,  $a$  die Halbachse, so ist  $k_1^2 = 2k^2 = 8a^2$ , also  $k_1 = 2a\sqrt{2}$ , folglich jede Tetraederfläche  $\frac{k_1^2}{4}\sqrt{3} = 2a^2\sqrt{3}$  und die gesamte Oberfläche des Körpers  $O = 8a^2\sqrt{3}$ , d. h. doppelt so groß, als die Oktaederoberfläche, was sich auch ohne Rechnung zeigen läßt. Der körperliche Inhalt soll erst später berechnet werden.

Fig. 148 stellt das Flächennetz des Tetraeders dar.

Die Zahl der Ecken des Körpers ist 4, die der Kanten 6. Die Mittelpunkte der Flächen des regelmäßigen Tetraeders bilden wiederum ein regelmäßiges Tetraeder. Je zwei Gegenkanten des Tetraeders



kreuzen einander senkrecht. Legt man durch jede Kante eine Ebene parallel zur Gegenkante, so erhält man den umbeschriebenen Würfel (Fig. 148).

In der Mineralogie erscheint das Tetraeder mehrfach als Kristallform, z. B. beim Fahlerz, bei der Zinkblende usw.

[**Aufgabe.** Die beiden Tetraeder, die sich dem Würfel einzeichnen lassen, in ihrer gegenseitigen Durchdringung darzustellen.

**Auflösung.** In Fig. 149 ist die Aufgabe gelöst, wobei zunächst alle Quadratdiagonalen des Würfels gezogen sind. Von je zwei sich

Fig. 148.

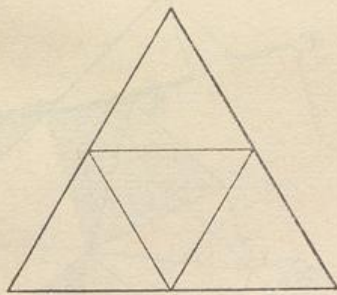
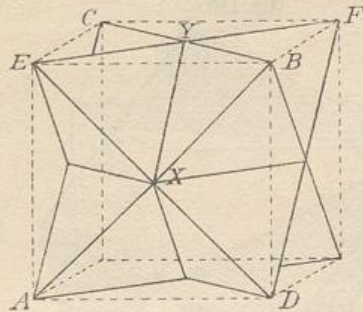


Fig. 149.



schneidenden Dreiecken, wie z. B.  $ABC$  und  $DEF$ , sind dabei je zwei Schnittpunkte, z. B.  $X$  und  $Y$ , zu suchen und durch eine Schnittlinie zu verbinden.\*)]

10) **Aufgaben.** a) Bei einem regelmäßigen Tetraeder sei eine der Größen  $a$ ,  $k$ ,  $O$ ,  $r$ ,  $q$  oder  $h$  (Höhe des Tetraeders  $= r + q$ ) gegeben. Die übrigen sollen daraus bestimmt werden.

b) Einer Kugel vom Radius  $r$  sei ein regelmäßiges Tetraeder um-, ein anderes einbeschrieben. Wie groß ist die Differenz ihrer Kanten, ihrer Halbachsen, ihrer Oberflächen?

c) Einem regelmäßigen Tetraeder von der Kante  $k_1$  sei ein anderes einbeschrieben, dessen Ecken mit den Flächenmittelpunkten des anderen zusammenfallen. Die Kante des zweiten Tetraeders soll berechnet werden.

d) Einem regelmäßigen Tetraeder von der Kante  $k_1$  sei ein Würfel umbeschrieben. Die Kante desselben soll berechnet werden.

\*) Es empfiehlt sich, die sichtbaren Flächenteile jedes Tetraeders mit leichten Farbentönen so anzulegen, daß zusammengehörige Stücke sich deutlich hervorheben. Das gegenseitige Durchdringen tritt dabei klar hervor, und der Schüler übt sich darin, die ebene Zeichnung räumlich (plastisch) zu sehen.

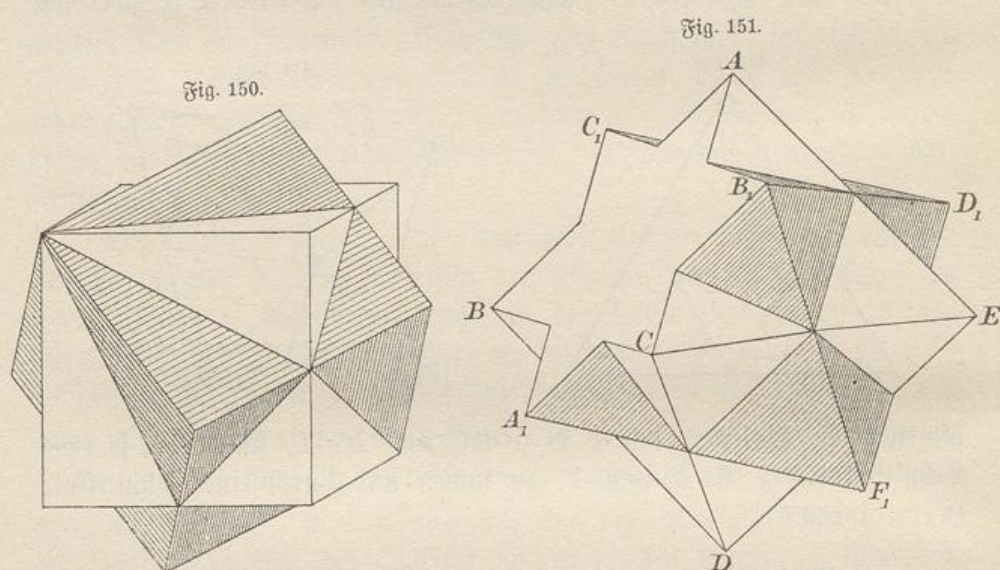


e) Unter welchem Winkel schneiden sich die Flächen der beiden sich durchdringenden regelmäßigen Tetraeder der Fig. 149?

f) Zwei gleiche Würfel sollen eine Diagonale gemein haben und unter  $60^\circ$  gegeneinander gedreht sein. Wie sieht die gegenseitige Durchdringung aus?

(Fig. 150 stellt die Zeichnung dar, in der gewisse Würfelkanten halbiert sind. Der eine Würfel ist schraffiert, der andere weiß gelassen.)

g) Bei zwei gleichen Oktaedern sollen zwei Gegenflächen in dieselben Ebenen fallen, und die Körper sollen um  $60^\circ$  gegeneinander



gedreht sein, sodaß jene beiden Flächen als regelmäßige Sechsecksterne erscheinen. Wie sieht die gegenseitige Durchdringung aus?

(Fig. 151 stellt die Zeichnung dar. Der eine Körper ist schraffiert. Nur diejenigen Dreiecke sind unschraffiert, die den Sechseckstern vollenden.)

Zu beiden Aufgaben vgl. den Vorkursus.

[11] **Aufgabe.** Auf die Flächen eines Würfels Pyramiden von gegebener Höhe so aufzusetzen, daß ein Pyramidenwürfel entsteht.

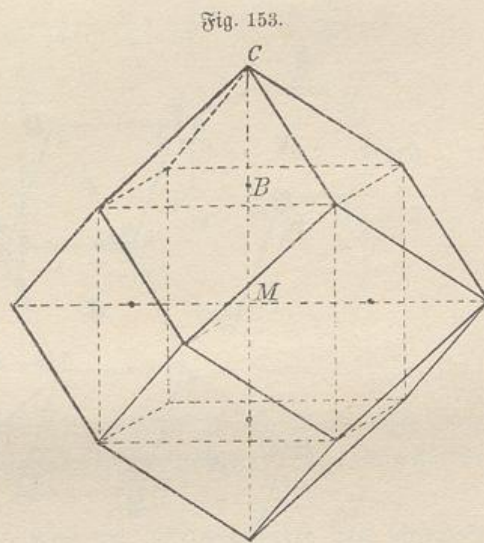
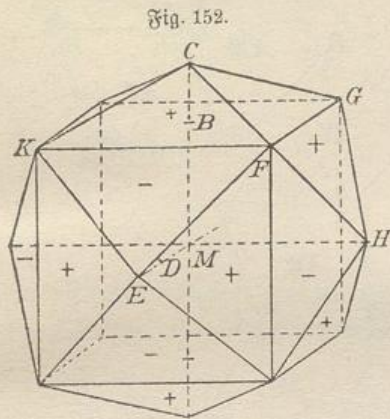
In Fig. 152 ist zunächst der gegebene Würfel gezeichnet und der Mittelpunkt jeder Fläche bestimmt. Dort sind auf jeder Fläche Lote von der gegebenen Länge  $BC$  errichtet, das nach vorn gerichtete Lot  $DE$  natürlich in der gewählten Verkürzung (z. B. in  $\frac{1}{3}$  der Länge) gezeichnet. Die Endpunkte der Lote sind mit den Würfecken verbunden. Aus der Würfelkante  $k$  und der Pyramidenhöhe  $h$  lassen sich



Kanten, Oberfläche, Winkel, Radius  $\rho$  der einbeschriebenen Kugel usw. des Körpers berechnen. (Eine umbeschriebene Kugel hat der Körper nur in einem Sonderfalle. In welchem?)

Das Netz des Körpers ist leicht zu zeichnen. Hier wird angenommen, daß der Körper überall konvex ist, daß also die Pyramiden nicht so hoch sind, daß einspringende Winkel entstehen. Der Grenzfall soll der nachstehende sein. (Fig. 153.)

**Bemerkung.** Der Pyramidenwürfel ist als Kristallform in der Mineralogie von Bedeutung. Er wird hier besprochen, weil sich aus ihm andere Körperformen leicht ableiten lassen. Macht man die



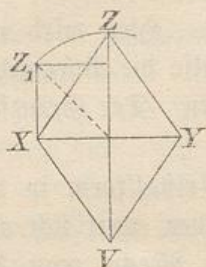
Pyramidenhöhe gleich der halben Würfelkante, so erhalten die Pyramidenflächen die Neigung  $45^\circ$  gegen die Würfelflächen, und die Kante zwischen je zwei benachbarten fällt weg, sodaß aus 24 Dreiecken 12 Rhomben entstehen. Fig. 153 stellt diesen besonderen Fall des Pyramidenwürfels, das Rhombenzwölfflach oder Rhombendodekaeder, dar. (Dies ist die häufigste Kristallform des Granats, der Körper wird daher auch als Granatoeder\*) bezeichnet.) Aus der Würfelkante  $k$  lassen sich die Kanten, die Oberfläche, die Winkel des Körpers leicht berechnen.]

Da die kleineren Diagonalen der Rhomben zugleich Würfelkanten sind, die größeren dagegen die Länge der zugehörigen Quadratdiagonalen haben, so sind die Rhomben leicht zu zeichnen. In Fig. 154 ist das

\*) Das Wort Granatoeder ist sprachlich als Mißbildung zu betrachten, läßt sich aber in der Mineralogie kaum vermeiden.

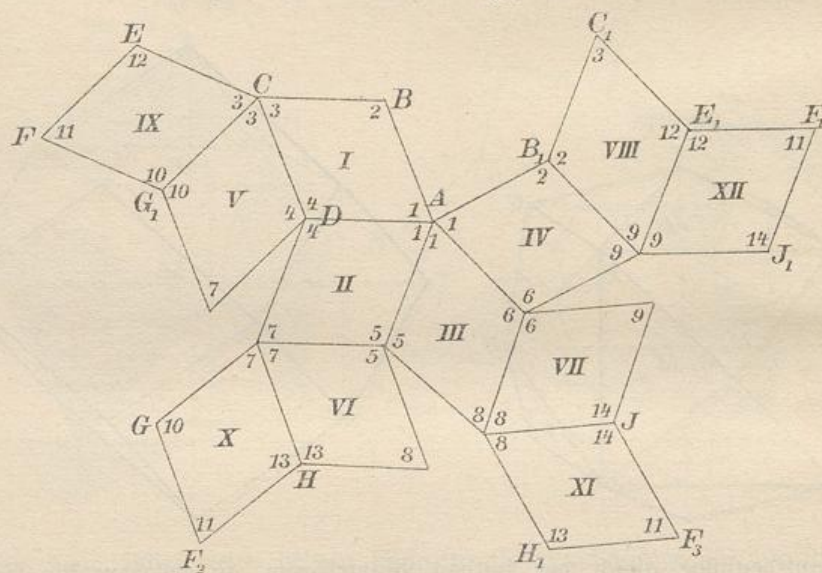


Flächennetz des Rhombenzwölfflachs konstruiert. Die Zahlen in den Winkeln der Flächen geben an, welche Ecken zusammenfallen, wenn man das Kartonmodell wirklich bildet.



12) a) Bezeichnet man die Flächen des Pyramidenwürfels abwechselnd mit + und –, wie es in Fig. 152 geschehen ist, läßt man die mit – bezeichneten Flächen wegfallen, und erweitert man die übrig bleibenden so weit, daß der Körper wieder geschlossen ist, so entsteht ein im all-

Fig. 154.



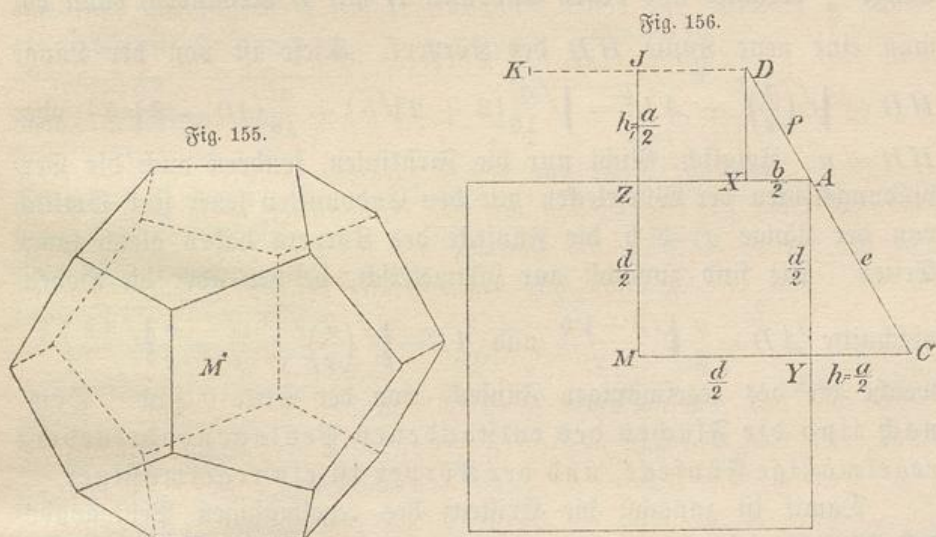
gemeinen von unregelmäßigen, aber symmetrischen Fünfecken begrenztes Zwölfflach, das Pentagondodekaeder. Dieses ist also der Halbflächner oder die Hemiedrie des Pyramidenwürfels. Aus Fig. 152 leitet sich die Konstruktion folgendermaßen ab: Je zwei stehenbleibende Pyramidenflächen bilden in ihrer Erweiterung ein Dach, dessen Firstlinie zu den Grundkanten parallel ist. Eine solche Firste ist durch C parallel zu KF zu legen. Rechts reicht sie bis zum Schnitte mit der durch H gehenden Mittellinie der Fläche FGH, wodurch die halbe Länge der Firstlinie gegeben ist. Eine solche von derselben Länge ist senkrecht durch E zu legen usw. Die Endpunkte dieser sechs Dachfirsten geben mit den Ecken des Würfels zusammen die  $12 + 8 = 20$  Ecken des gesuchten Körpers, der in einem Sonderfalle durch Fig. 155 veranschaulicht werde.

Das nicht von regelmäßigen, sondern von symmetrischen Fünf-



ecken begrenzte Pentagondodekaeder kommt in der Mineralogie als Kristallform des Schwefelkieses oder Pyrits vor und wird dort als Pyritveder bezeichnet (was als sprachliche Mißbildung zu betrachten ist.)

b) Jetzt wird folgendes behauptet: Macht man die Pyramiden des Pyramidenwürfels so hoch, daß die von der Mitte des Körpers bis zu jeder Pyramiden Spitze gehende Gerade durch



die Würfel Fläche stetig geteilt ist, dann wird das aus dem Körper hervorgehende Pentagondodekaeder ein regelmäßiger Körper.

In Fig. 156 ist dargestellt, was im Mittelschnitte des Körpers bei der vorigen Konstruktion für den Fall vor sich geht, daß  $MJ$  und  $MC$  in  $Z$  bzw. in  $Y$  stetig geteilt sind. Durch  $J$  ist die Firstlinie  $KD$  bis zum Schnitte mit  $CA$  gelegt, sodaß auch  $CD$  in  $A$  stetig geteilt ist, denn  $J, Z, M$  sind horizontal auf  $CD$  projiziert. Fällt man  $DX$  als Lot auf  $ZA$ , so verhalten sich auch  $XA$  und  $YC$  wie Teile einer stetig geteilten Linie (Ähnlichkeit der Dreiecke), und beide zusammen geben den zu  $YC$  gehörigen größeren Teil  $MY$  der stetig geteilten Geraden  $MC$ , sodaß  $ZX = YC$  ist. Demnach ist  $ZXDJ$  ein Quadrat, und die Firstlinie  $KD = a$  ist doppelt so lang als die Pyramidenhöhe  $h = \frac{a}{2}$ . (Vgl. Geometrie, 302, Bemerkung.)

Aus der stetigen Teilung von  $MJ$  folgt, wenn man  $MZ = \frac{d}{2}$  setzt,  $a:d = d:(a+d)$ , also  $d = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}$ , oder, da nur das positive Wurzelzeichen brauchbar ist,  $d = \frac{a}{2} (\sqrt{5} + 1)$  als Länge der Würfelkante.

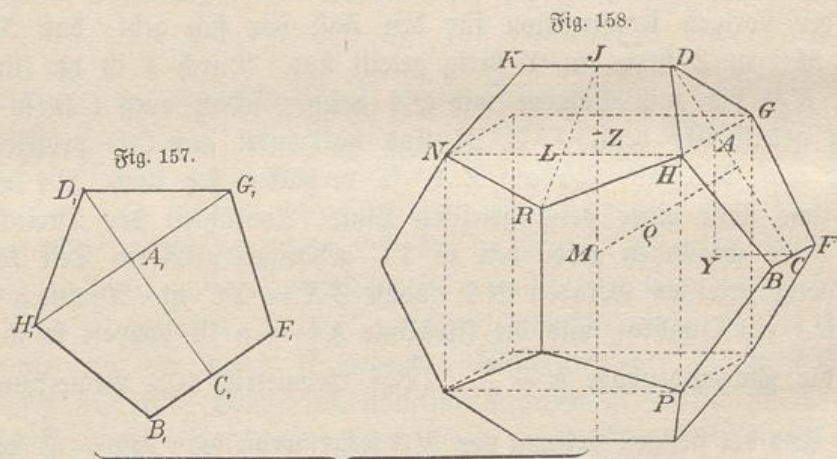


Demnach ist  $XA = \frac{d}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a}{4}(\sqrt{5} + 1) - \frac{a}{2} = \frac{a}{4}(\sqrt{5} - 1)$ , was nach dem Gesetz des goldenen Schnittes auch ohne Rechnung folgt. Demnach ist  $AD = \sqrt{DX^2 + XA^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{16}(6 - 2\sqrt{5})} = \frac{a}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$ . Man denke sich nun in  $A$  auf der Zeichnungsebene ein Lot von der Länge  $\frac{d}{2}$  errichtet und dessen Endpunkt  $H$  mit  $D$  verbunden, dann hat man eine neue Kante  $HD$  des Körpers. Diese ist von der Länge  $HD = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + AD^2} = \sqrt{\frac{a^2}{16}(6 + 2\sqrt{5}) + \frac{a^2}{16}(10 - 2\sqrt{5})}$  oder  $HD = a$ . Folglich: Nicht nur die Firstlinien, sondern auch die Verbindungslinien der Würfecken mit den Endpunkten jener sind sämtlich von der Länge  $a$ , d. h. die Fünfecke des Körpers haben gleich lange Seiten. Sie sind zunächst nur symmetrisch, besitzen aber die Höhenabschnitte  $AD = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$  und  $AC = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$ , welche die des regelmäßigen Fünfecks von der Seite  $a$  sind. Demnach sind die Flächen des entstandenen Pentagondodekaeders regelmäßige Fünfecke, und der Körper ist ein regelmäßiger.

Damit ist zunächst die Existenz des regelmäßigen Pentagondodekaeders bewiesen.

c) Nach Fig. 157 kann man es folgendermaßen herstellen:

Man nehme einen Würfel, dessen Kante gleich der Diagonale eines regelmäßigen Fünfecks ist. Das Fünfeck lege man so an eine



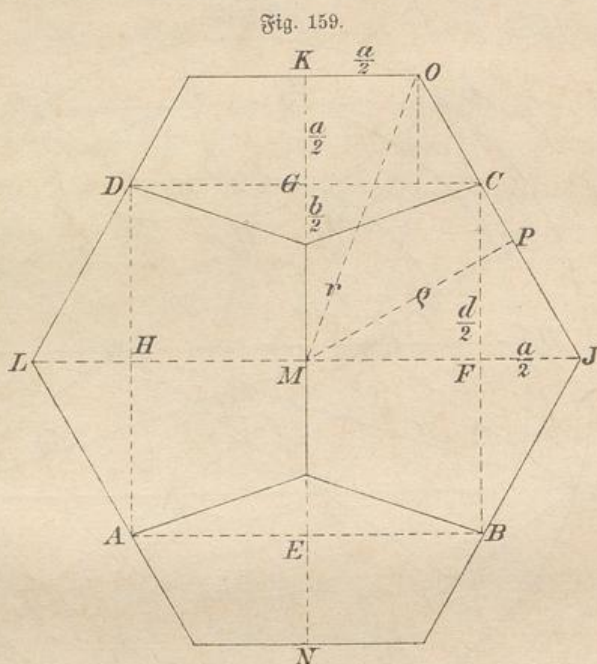
Würfelkante an, daß die Ecke  $D$  genau so weit von der zugehörigen Würfelkante entfernt ist, wie die Grundlinie  $BF$  von der zu dieser gehörigen (wobei die Entfernung gleich der halben Fünfeckskante ist).



Macht man dasselbe im ganzen mit zwölf kongruenten Fünfecken, so erhält man das regelmäßige Pentagondodekaeder.

d) Eine zweite Herstellung ist folgende. Man konstruiere ein Achsenkreuz, teile eine der Halbachsen nach dem goldenen Schnitt so, daß der größere Teil von der Mitte ausgeht, errichte im Endpunkte jeder Halbachse ein Lot, dessen Richtung den besprochenen Firstlinien entspricht und markiere die Eckpunkte des zum verkleinerten Achsenkreuzes gehörigen Würfels (z. B. durch dessen Diagonalen), dann hat man alle Ecken des Körpers, die nur noch geradlinig zu verbinden sind.

e) Die Zeichnung in Parallelperspektive zu  $30^\circ$  und  $\frac{1}{3}$  Verkürzung ist in Fig. 158 dargestellt und geht am bequemsten vom Würfel aus, dessen Achsenkreuz zu zeichnen und in angegebener Weise zu verlängern ist.



f) Eine Aufrißzeichnung ist in Fig. 159 im Anschluß an Fig. 156 dargestellt. Da der Radius der umbeschriebenen Kugel auch dem Würfel angehört, ist  $r = \frac{d}{2} \sqrt{3} = \frac{a}{4} (\sqrt{5} + 1) \sqrt{3}$ . Das Fünfeck

mit Seite  $a$  hat als Radius des umbeschriebenen Kreises  $r_1 = a \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}$ .

Demnach ist der Radius der dem Körper einbeschriebenen Kugel zu berechnen aus  $\rho^2 = MO^2 - OP^2 = r^2 - r_1^2$  als  $\rho = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{10}}$ .

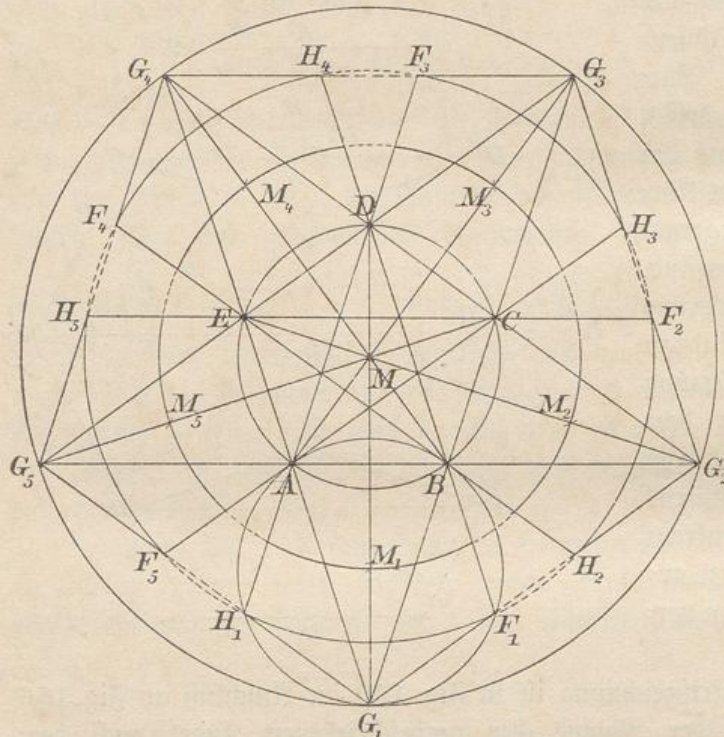
g) Die Hälfte des Flächenneßes ist in Fig. 160 gezeichnet.\*) Auch in dieser Figur spielt die Teilung nach dem goldenen Schnitte eine bedeutende Rolle. Man achte auf die Fünfecksterne (Pentagramme, d. h. Fünfecke, die erst nach zweimaligem Umgange schließen) im mittelsten Fünfeck und im großen Fünfeck.

\*) Beschreibe die Entstehung dieser Figur. (Vgl. Vorlesung § 100.)



h) Denkt man sich jedes der fünf äußeren Fünfecke der Figur so weit um die Kante geklappt, die sie mit dem innersten Fünfeck gemein haben, bis ihre Seitenkanten sich paarweise treffen, so entsteht eine Art Schüssel als Hälfte der Oberfläche des Körpers. Während der entsprechenden Bewegung wandern die einzelnen Punkte auf Kreisen, deren Projektionen auf die Grundfläche gerade Linien sind.

Fig. 160.



So wandert z. B. die Projektion von  $H_1$  auf der Geraden  $H_1E$ , die von  $F_5$  auf der Geraden  $F_5B$ . Wo  $H_1E$  und  $F_5B$  einander schneiden, da liegt die Projektion des den Punkten  $H_1$  und  $F_5$  entsprechenden Schüsselpunktes  $Z$ .\*) Ebenso geben  $F_1$  und  $H_1$  einen symmetrisch zu  $Z$  liegenden Schüsselpunkt

$Z_1$ , wobei  $ZZ_1 = H_1F_1$  und die Projektion der letzteren Linie in der neuen Lage ist.  $ZZ_1$  ist die Diagonale des zweiten regelmäßigen Fünfecks mit horizontaler Grundlinie, welches sich in den Kreis  $M_1$  legen läßt.  $AZ$  ist also die Seite des dem letzteren einbeschriebenen Zehneckes, also gleich  $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ , wenn der Radius gleich 1 gesetzt wird. Dann ist  $MZ = 1 + \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$  der Radius des zweiten der konzentrischen Kreise. Auf ihm liegen die fünf Punkte  $Z$  der Schüssel und zugleich die Punkte  $M_1$  bis  $M_5$ , denn auch  $MM_1$  ist gleich  $\frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$ . Die erste Schüssel wird nämlich

\*) Man schreibe  $Z$  in Fig. 160 ein. Es ergibt sich der eine Punkt, wo der um  $M_1$  gelegte Kreis und der mit Radius  $MM_1$  um  $M$  gelegte einander schneiden. Der zweite Schnittpunkt ist mit  $Z_1$  zu bezeichnen.



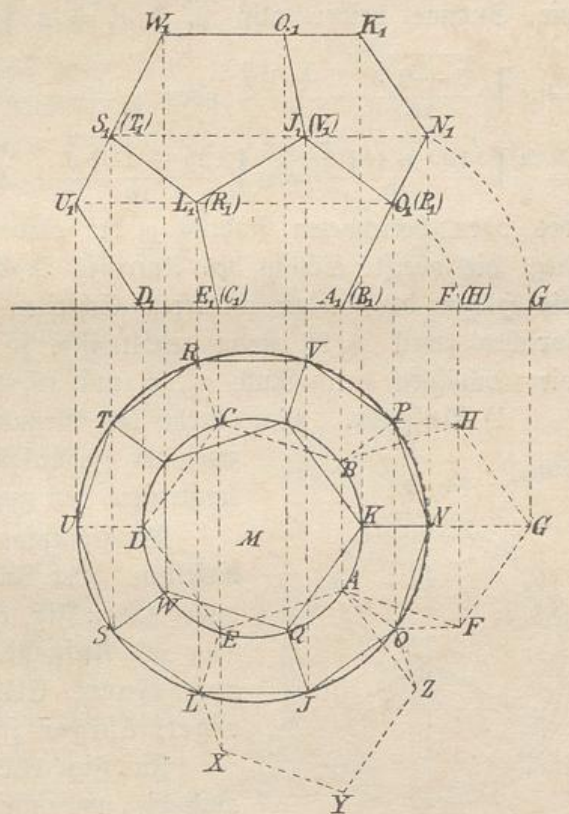
von der zweiten noch fehlenden Schüssel so bedeckt, daß die Spitzen von deren seitlichen Fünfecken mit den Punkten  $Z$  zusammenfallen, während die sonstigen Randpunkte nach den Punkten  $M_1$  bis  $M_5$  fallen, denn die Projektionen beider Teile sind kongruent. Folglich bilden die Projektionen der Randpunkte jeder der beiden Schüsseln im Grundriß das regelmäßige Zehneck der Punkte  $M_1$  bis  $M_5$  und der zwischenliegenden Punkte  $Z$  auf dem Kreise mit Radius  $MM_1$ . Dies läßt sich auch durch Rechnung nachweisen.

i) Somit ist die Grundrißzeichnung der Fig. 161 bequem herzustellen. Man denke sich konzentrische Kreise mit den Radien  $\rho = 1$  und  $r = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$ , deren Radien sich also verhalten wie die Teile einer nach dem goldenen Schnitte geteilten Geraden, gezeichnet. In den inneren Kreis lege man zwei regelmäßige Fünfecke mit je einer senkrechten Seite so, daß ihre Ecken ein regelmäßiges Zehneck bilden. Durch die Ecken lege man die Fortsetzungen von Radien, die bis zum äußeren Kreise reichen und zeichne das dadurch bestimmte Zehneck fertig.

Man ziehe die Geraden, die sichtbar oben liegen sollen, kräftig aus und deute die anderen gestrichelt an.

k) Für die gezeichnete Lage ergibt sich die Aufsrißzeichnung dadurch, daß man die Punkte des unteren Fünfecks nach der oberen Grundlinie projiziert, was dort Punkte  $A_1, (B_1), (C_1), D_1, E_1$  gibt. Das Nachbarfünfeck gibt außerdem im Aufsriß die Punkte  $F, G$  und  $(H)$ . Beim Aufklappen bewegen sich  $F$  und  $(H)$ , auch  $G$  auf Kreisen um  $A_1$  so weit, bis die Punkte in die senkrechten Geraden  $OPO_1$  bzw.  $NN_1$

Fig. 161.





fallen. In die durch  $O_1$  und  $N_1$  gelegten Horizontalen fallen dann die übrigen Punkte der Wände beider Schüsseln, die also leicht nach oben zu projizieren sind. Die obere Schüssel erscheint als der unteren kongruent, der Abstand der beiden obersten Höhenschichten ist also gleich dem der beiden untersten. Auch die Punkte des oberen Fünfecks sind nun leicht noch oben zu projizieren.

Die Aufrißzeichnung ist dieselbe, die in Fig. 159 gegeben war, nur ist die dortige Linie  $OJ$  jetzt horizontal gestellt worden.

[Denkt man sich den inneren Kreis einem Fünfeck von der Seite  $a$  umbeschrieben, dann ist der Radius  $\varrho_1 = a \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{16}}$ , der des äußeren

Kreises ist das  $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ -fache oder  $r_1 = \frac{a(\sqrt{5}+1)}{2} \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$ ,

die Summe beider also  $\varrho_1 + r_1 = a \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \left[ 1 + \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right]$

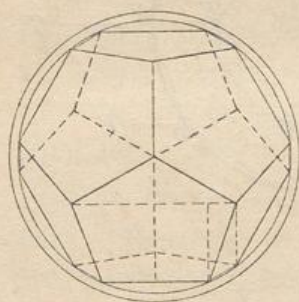
$= a \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{2}$  oder  $\varrho_1 + r_1 = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} (14+6\sqrt{5})$

$= \frac{a}{2} \sqrt{\frac{100+44\sqrt{5}}{10}} = a \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}$ . Dies ist aber das doppelte

des oben berechneten Radius  $\varrho$  der einbeschriebenen Kugel, folglich liegt die oberste Schicht des Aufrißes in der Höhe  $r_1 + \varrho_1$ , und da die Höhen der beiden mittleren Schichten der stetigen Teilung entsprechen (weil  $A_1N_1$  stetig geteilt ist), so sind die Höhenlagen aller vier Schichten durch Null,  $\varrho_1$ ,  $r_1$  und  $(r_1 + \varrho_1)$  gegeben.]

1) **Aufgabe.** Man drehe den Grundriß der Fig. 161 so, daß zwei der Zehneckseiten senkrecht werden und konstruiere den zugehörigen Aufriß.

Fig. 162.



Die Höhenlagen der Aufrißpunkte bleiben dieselben. Der Aufriß selbst fällt symmetrisch aus. (Vgl. Fig. 171 a.)

m) **Aufgabe.** Den Grundriß des auf einem Eckpunkte balancierenden regelmäßigen Zwölfflachs zu zeichnen.

In Fig. 162 ist die Aufgabe gelöst, auch die umbeschriebene Kugel mitgezeichnet.

13) **Aufgabe.** Man bestimme die Mittelpunkte der Flächen des regelmäßigen Zwölfflachs und untersuche das durch diese Eckpunkte bestimmte Polygon.

a) Je drei aneinander stoßende Flächen geben drei Mittelpunkte, die gleichweit von  $M$  entfernt sind und miteinander verbunden ein



gleichseitiges Dreieck geben. Der entstehende Körper ist ein dem Zwölfflach einbeschriebener von zwanzig regelmäßigen Dreiecken begrenzter regelmäßiger Körper, bei dem je fünf Flächen zu einer Ecke gehören. Während das Zwölfflach 12 Flächen, 20 Ecken und 30 Kanten hat, hat der neue Körper 12 Ecken, 20 Flächen und 30 Kanten. Er heißt das regelmäßige Zwanzigfläch oder Icosaeder.

Die Mitteln seiner Dreiecksflächen bilden ein ihm einbeschriebenes regelmäßiges Zwölfflach. In Fig. 163 ist es in der der Fig. 158 entsprechenden Lage gezeichnet.

b) Das Netz des regelmäßigen Zwanzigflachs zu zeichnen.

In Fig. 164 ist das Netz gezeichnet, wobei vom Dreiecke  $ABC$  ausgegangen ist. In die Winkel sind stets die Zahlen eingeschrieben, welche angeben, welche Ecken bei der Bildung des Modells zusammenfallen. (Im Vorkursus § 90 ist diese Angelegenheit eingehender erörtert worden.)

c) Die Ecken, die Flächen und die Kanten des Zwölfflachs hängen mit den Flächen bezw. Ecken und Kanten des Zwanzigflachs ebenso eng zusammen, wie die des Würfels und Oktaeders. Man nennt jedesmal den einen Körper den reziproken des anderen. Zwei Flächen des einen entsprechen zwei Eckpunkten des anderen, der Schnittlinie der ersteren entspricht die Verbindungslinie der letzteren. Denkt man sich den einen Körper als den einbeschriebenen des anderen, so entspricht jeder Geraden an dem einen eine sie rechtwinkelig kreuzende Gerade des anderen. (Dem Achsenkreuz des einen entsprechen Geraden, die in unendlicher Entfernung liegen und jene Achsen rechtwinkelig

Fig. 163.

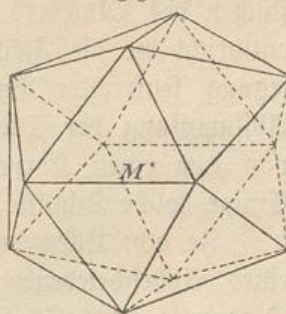
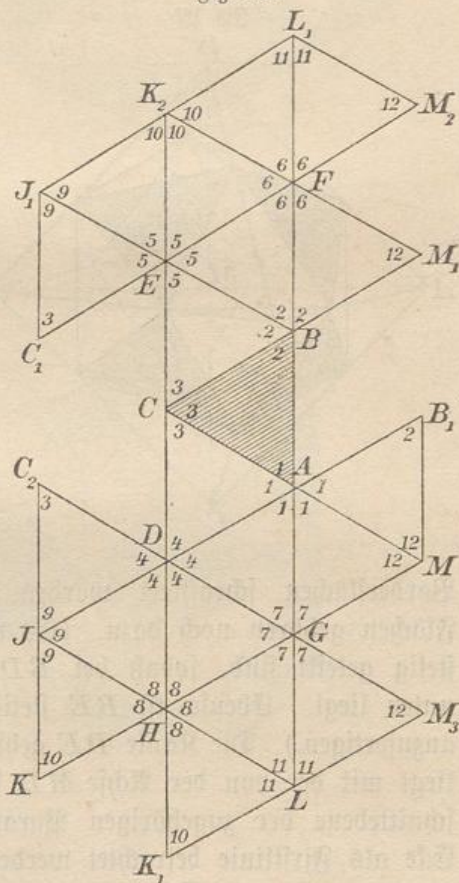


Fig. 164.

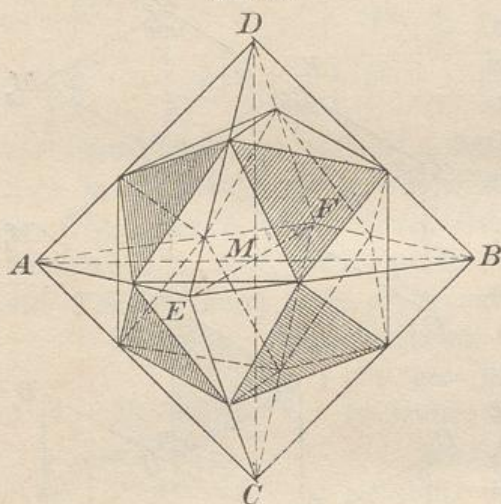




kreuzen. Dies gilt von jeder durch den Mittelpunkt gehenden Geraden.) Der Verbindungslinie zweier Gegenecken des Oktaeders z. B. entspricht die Schnittlinie der zugehörigen parallelen Gegenflächen des Würfels. Der Verbindungslinie der Mitten zweier Gegenseiten des Würfels entspricht die Schnittlinie der zugehörigen parallelen Grenzflächen des Oktaeders. Der durch die Ecken gehenden Kugel des einen entspricht die die Flächen berührende Kugel des anderen. Der Aufsetzung senkrechter Pyramiden auf den einen entspricht regelmäßige Abstumpfung der Ecken des anderen usw. So kommt es, daß man von dem einen Körper unmittelbar auf den anderen schließen kann. Einige solche Schlüsse sollen gezogen und nachträglich bewiesen werden.

Je acht Ecken des regelmäßigen Zwölfflachs ließen sich als Ecken eines einbeschriebenen Würfels betrachten. Da jedesmal nur eine Diagonale jedes Fünfecks als Würfelkante zur Geltung kam, so ließen

Fig. 165.



sich dem Körper fünf Würfel einbeschreiben. Jedem Würfel aber ließen sich zwei Zwölfflache umbeschreiben, das der mit + bezeichneten Flächen des betreffenden Pyramidenwürfels und das der mit — bezeichneten Flächen. Beide Zwölfflache sind um  $90^\circ$  gegen einander gedreht. Folglich: Je acht Flächen des regelmäßigen Zwanzigflachs lassen sich als Flächen eines umbeschriebenen Achtlachs betrachten. In Fig. 165 sind die betreffenden

Vorderflächen schraffiert worden, die vier entsprechenden hinteren Flächen gehören noch dazu. (Es wird sich zeigen, daß  $BD$  und  $ED$  stetig geteilt sind, sodaß bei  $BD$  der größere Teil oben, bei  $ED$  unten liegt. Ebenso ist  $BE$  stetig geteilt, die Zeichnung also leicht anzufertigen.) Die Kante  $DE$  geht durch eine Ecke des Ikosaeders und liegt mit der von der Achse  $MD$  halbierten Firstlinie in einer Hauptschnittebene der zugehörigen Pyramide. Da aber jede Kante dieser Ecke als Firstlinie betrachtet werden kann, sind fünf solcher Oktaederkanten durch jede Ecke möglich. Folglich lassen sich dem Zwanzigflach fünf Oktaeder umbeschreiben. Jedem Oktaeder lassen sich zwei Zwanzigflache einbeschreiben, die um  $90^\circ$  gegeneinander gedreht sind,



z. B. um die Achse  $CD$ . Unten sind die beiden Körper dargestellt. (Fig. 167).

Die beiden demselben Würfel umbeschriebenen Zwölffläche haben einen Pyramidenwürfel gemein, bei dem die Verlängerung der Halbachsen einer stetigen Teilung entsprach. Folglich: Die beiden demselben Oktaeder angehörigen Ikosaeder sind demselben abgestumpften Oktaeder einbeschrieben, bei dem die Abstumpfung einer stetigen Teilung der Halbachse entspricht. Der Würfel und die beiden ihm umbeschriebenen Zwölffläche haben dieselbe umbeschriebene Kugel, der Pyramidenwürfel und die beiden Zwölffläche haben dieselbe einbeschriebene Kugel. Folglich:

Das Oktaeder und die beiden ihm einbeschriebenen Zwanzigflache haben dieselbe einbeschriebene Kugel; das abgestumpfte Oktaeder und die beiden Zwanzigflache haben dieselbe umbeschriebene Kugel.

In Fig. 166 sind die beiden demselben Würfel umbeschriebenen Zwölffläche in ihrer Durchdringung dargestellt. Das eine von beiden ist schraffiert worden. Der Würfel und ebenso der gemeinschaftliche Pyramidenwürfel sind leicht zu erkennen.

Fig. 166.

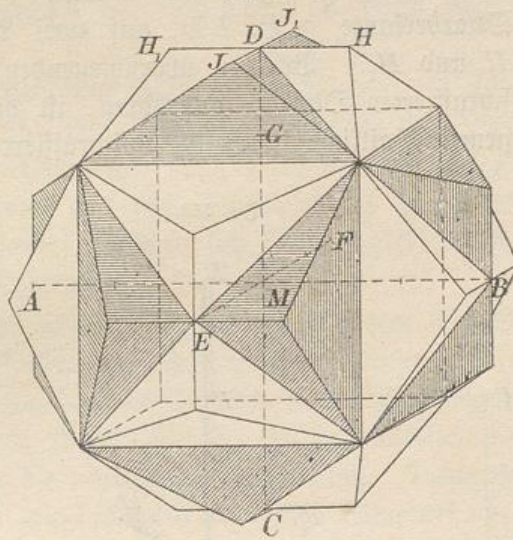


Fig. 167.

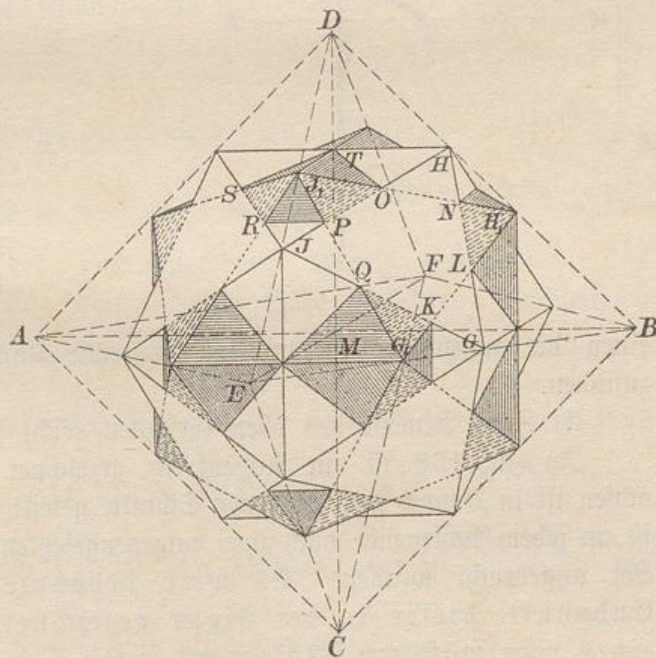
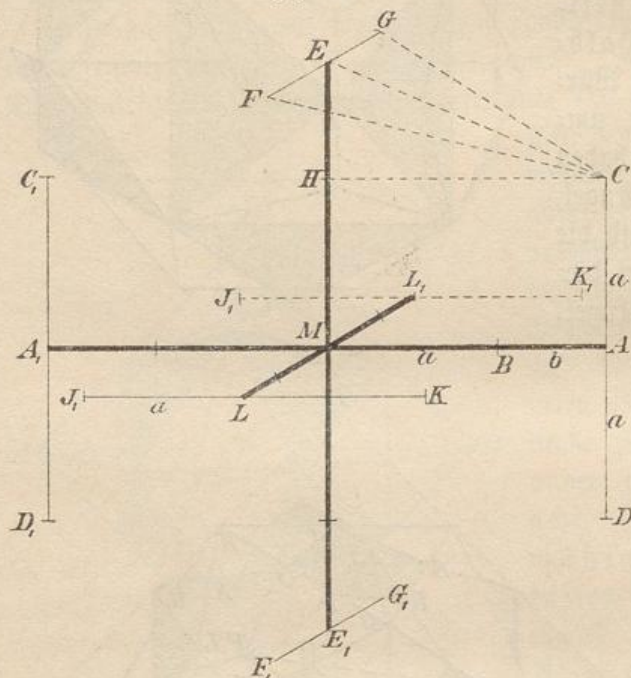




Fig. 167 stellt die beiden demselben Oktaeder einbeschriebenen Ikosaeder in ihrer Durchdringung dar. Das eine von beiden ist schraffiert worden, nur war bei der Schraffierung folgendes zu beachten: In der Oktaederfläche  $EBD$  liegen zwei gleichseitige Dreiecke  $JGH$  und  $J_1G_1H_1$  der beiden Zwanzigfläche aufeinander und bilden einen unregelmäßigen Sechseckstern. (Es wird sich zeigen, daß jede Oktaederkante, z. B.  $BD$ , auf zwei Arten stetig geteilt ist, z. B. in  $H$  und  $H_1$ .) Bei den überschießenden Dreiecken des Sterns, die dem schraffierten Oktaeder angehören, ist die Schraffierung angedeutet, die gemeinschaftliche Fläche ist unschraffiert gelassen. Diesem Sechseckstern entspricht in Fig. 166

Fig. 168.



die an der entsprechenden Würfecke befindliche „Sterncke“ mit einspringenden Winkeln.

Das Oktaeder ist durch quadratische Flächen abgestumpft (entdeckt), von denen nur die Diagonalen gezeichnet sind.

Man versuche zu jedem Punkte oder jeder Fläche der einen Figur die zugehörige Fläche bzw. den zugehörigen Punkt der anderen zu bestimmen, zu jeder Kante der

einen die zugehörige rechtwinklig kreuzende Kante der anderen aufzufinden.

d) Zum Beweise des oben Gesagten reicht folgendes hin.

In Fig. 168 ist ein Achsenkreuz gezeichnet. Eine seiner Halbachsen ist in  $B$  nach dem goldenen Schnitte geteilt. Der größere Teil  $a$  ist an jedem Achsenende nach zwei entgegengesetzten Achsenrichtungen als Lot angebracht worden. Es wird behauptet, daß die zwölf Endpunkte dieser in der Figur gezeichneten Lote die Ecken eines regelmäßigen Ikosaeders sind.

**Beweis.**  $FC^2 = FE^2 + EC^2 = FE^2 + HC^2 + HE^2$ . Setzt man  $MB = a$ ,  $BA = b$ , also  $MA = a + b$ , so erhält man  $FE = a$ ,



$HC = \frac{a}{2} (\sqrt{5} + 1)$ ,  $BA = \frac{a}{2} (\sqrt{5} - 1)$ . Daher wird  $FC^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} (5 + 1 + 2\sqrt{5}) + \frac{a^2}{4} (5 + 1 - 2\sqrt{5}) = 4a^2 = (2a)^2$ . Da  $FG = 2a$ ,  $FC = 2a$  und ebenso  $GC = 2a$  ist, so ist  $FGC$  ein gleichseitiges Dreieck. Solcher gleichseitigen Dreiecke lassen sich an dem Gebilde zwanzig nachweisen, folglich sind die Ecken die eines regelmäßigen Zwanzigflachs.

**Bemerkung.** Verlängert man jede Halbachse noch um  $a$ , so sind die neuen Achsen stetig geteilt und man erhält die Eckpunkte des einen dem Ikosaeder umbeschriebenen Oktaeders. Daß z. B. die Kante  $DE$  in Fig. 165 stetig geteilt ist, folgt aus dem Parallelismus von  $EM$  und der „Firstlinie“. Im Ikosaeder befinden sich  $\frac{30}{6} = 5$  gleichberechtigte Achsenkreuze, ebenso im Dodekaeder.

Die Verbindungslinie jedes Flächenmittelpunktes mit dem Mittelpunkt des Körpers gibt den Radius der einbeschriebenen Kugel. Die Fläche  $FKC$  liegt so in dem zugehörigen Oktaeder des Achsenkreuzes, daß  $\varrho$  mit allen Achsen denselben Winkel bildet. Es hat nämlich die Lage einer Würfel-diagonale für die normale Würfelstellung. Demnach ist die zugehörige Normalfläche, wie behauptet war, eine Oktaederfläche.

[e] Der Radius der umbeschriebenen Kugel des Ikosaeders ergibt sich bei der gewählten Bezeichnung aus  $FM^2 = ME^2 + EF^2 = (a+b)^2 + a^2 = \left[\frac{a}{2} (\sqrt{5} + 1)\right]^2 + a^2 = \frac{a^2}{4} [5 + 1 + 2\sqrt{5} + 4] = \frac{a^2}{2} (5 + \sqrt{5})$ ,

sodass unter Voraussetzung der Kante  $k = 2a$  der Radius  $r = a \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}$

ist. Für die Kante  $k$  ist demnach  $r = \frac{k}{2} \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} = k \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}}$ .

Der Radius der einbeschriebenen Kugel ergibt sich aus  $\varrho^2 = ME^2 - \left(\frac{1}{3}EC\right)^2$ . Hier ist die Höhe  $EC$  des gleichseitigen Dreiecks von Seite  $2a$  gleich  $\frac{2a}{2} \sqrt{3} = a\sqrt{3}$ , also  $\frac{1}{3}EC = \frac{1}{3}a\sqrt{3} = a\sqrt{\frac{1}{3}}$ .

So folgt  $\varrho^2 = \left[\frac{a}{2} (\sqrt{5} + 1)\right]^2 - (a\sqrt{\frac{1}{3}})^2 = \frac{a^2}{4} (6 + 2\sqrt{5}) - \frac{a^2}{3} = \frac{a^2}{2} (3 + \sqrt{5}) - \frac{a^2}{3} = \frac{a^2}{6} [9 + 3\sqrt{5} - 2] = \frac{a^2}{6} (7 + 3\sqrt{5})$ . Demnach ist bei der Kante  $k = 2a$  der Radius  $\varrho = a \sqrt{\frac{7 + 3\sqrt{5}}{6}}$ , für

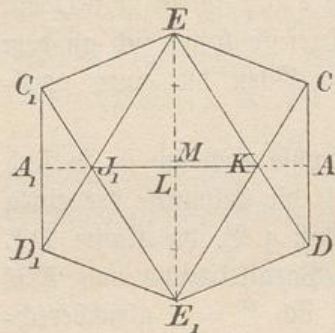
die Kante  $k$  also ist  $\varrho = \frac{k}{2} \sqrt{\frac{7 + 3\sqrt{5}}{6}} = k \sqrt{\frac{7 + 3\sqrt{5}}{24}}$ .

f) **Aufgabe.** Das Ikosaeder im Anschluß an Fig. 168 im Aufriß zu zeichnen.



**Auflösung.** Die in Fig. 169 gegebene Darstellung unterscheidet sich von der in Fig. 163 und 168 gegebenen nur dadurch, daß die dritte Achse in der Länge Null erscheint, ebenso die beiden zu ihr parallelen Firstlinien.

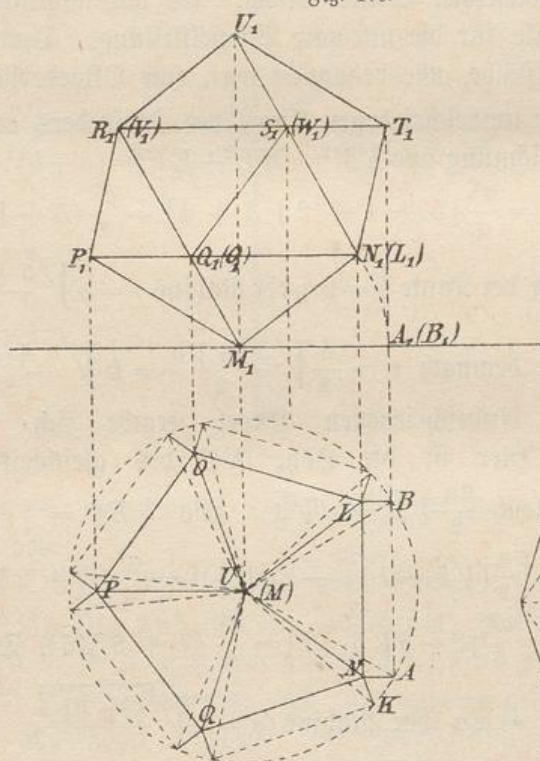
Fig. 169.



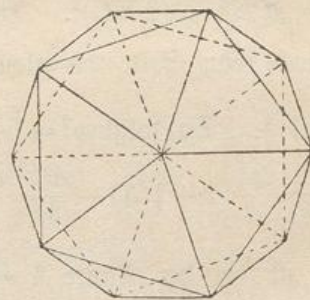
Der Grundriß ist leicht dazu zu konstruieren. Er sieht ebenso aus und ist nur um  $90^\circ$  gedreht zu zeichnen.

g) Die Grund- und Aufrißzeichnung des Ikosaeders nach der Aufklappmethode herzustellen. In Fig. 170 sind im Grundriß zunächst fünf gleichseitige Dreiecke regelmäßig um einen Punkt gruppiert worden, wobei das eine eine senkrechte Seite haben soll. Jedes Dreieck soll um eine Achse gedreht werden, die durch den gemeinschaftlichen Eckpunkt  $M$  geht und zur betreffenden Gegenseite parallel ist. Die Drehung soll so weit gehen, bis die Kanten gleichmäßig aneinander stoßen, sodaß eine Art Trichter entsteht, d. h. eine auf der Spitze balancierende fünfseitige Pyramide. Dabei bewegen sich z. B. die Projektionen von  $A$  und  $B$  normal gegen

Fig. 170.



mäßig aneinander stoßen, sodaß eine Art Trichter entsteht, d. h. eine auf der Spitze balancierende fünfseitige Pyramide. Dabei bewegen sich z. B. die Projektionen von  $A$  und  $B$  normal gegen



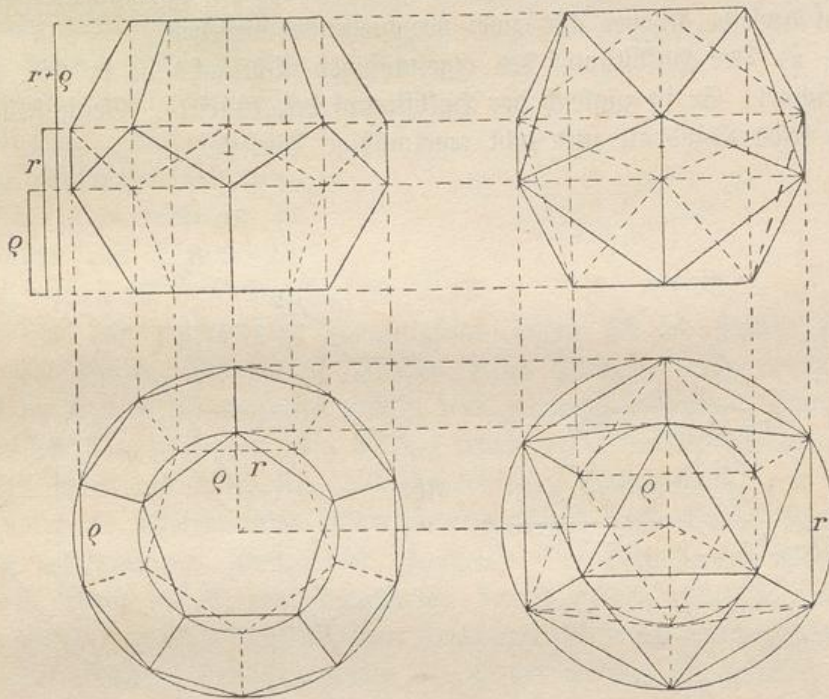
$AB$ . Ebenso machen es die übrigen Außenpunkte, und so entsteht in der Figur das Grundrißfünfeck  $NLOPQ$ , dessen Ecken mit  $M$  zu verbinden sind.



Der Aufriß dieses Trichters entsteht folgendermaßen:  $M$ ,  $A$  und  $B$  geben, auf die Grundlinie des Aufrißes projiziert,  $M_1$ ,  $A_1$  und  $(B_1)$ . Man schlage mit  $M_1 A_1$  einen Kreisbogen um  $M$  so weit, bis  $N_1$  und  $(L_1)$  senkrecht über  $NL$  liegen. Damit ist die Höhenlage für das Fünfeck  $N_1 L_1 O_1 P_1 Q_1$  gefunden. Zugleich zeigt sich, daß durch die Gerade  $M_1 Q_1$  bzw.  $M_1 O_1$  die Ebene des Fünfecks  $M_1 Q_1 R_1 V_1 O_1$  dargestellt ist. Dieses Fünfeck erscheint in derselben Projektionszeichnung wie das vorige, also ist  $M_1 Q_1 = P_1 Q_1$  und  $Q_1 R_1 = Q_1 N_1$ , also  $\triangle P_1 M_1 Q_1$  gleichschenkelig und, wenn man noch  $P_1 R_1$  zieht,  $\triangle Q_1 M_1 N_1 \cong \triangle Q_1 P_1 R_1$ . Mit  $R_1$  ist die Höhenlage für das obere Fünfeck  $R_1 V_1 S_1 W_1 T_1$  gefunden. Der oberste Trichter (Pyramide) ist

Fig. 171 a.

Fig. 171 b.



zum untersten kongruent zu zeichnen, jedoch entsprechend zu drehen. Die Figur ist leicht zu vollenden. Der Aufriß stimmt mit dem in Fig. 169 gegebenen überein, nur sind zwei der schrägen Parallelen horizontal gestellt worden, die Achse  $AB$  dagegen senkrecht. Gegen  $Q_1 S_1$  findet Symmetrie statt. In der nebenstehenden Figur ist der Grundriß vollendet, der sich als ein regelmäßiges Zehneck mit zwei einbeschriebenen Fünfecken und den zugehörigen Radien darstellt.

h) **Aufgabe.** Den Grundriß Fig. 170 so zu drehen, daß zwei Zehneckseiten senkrecht werden. Im Aufriß findet dann nur Hori-

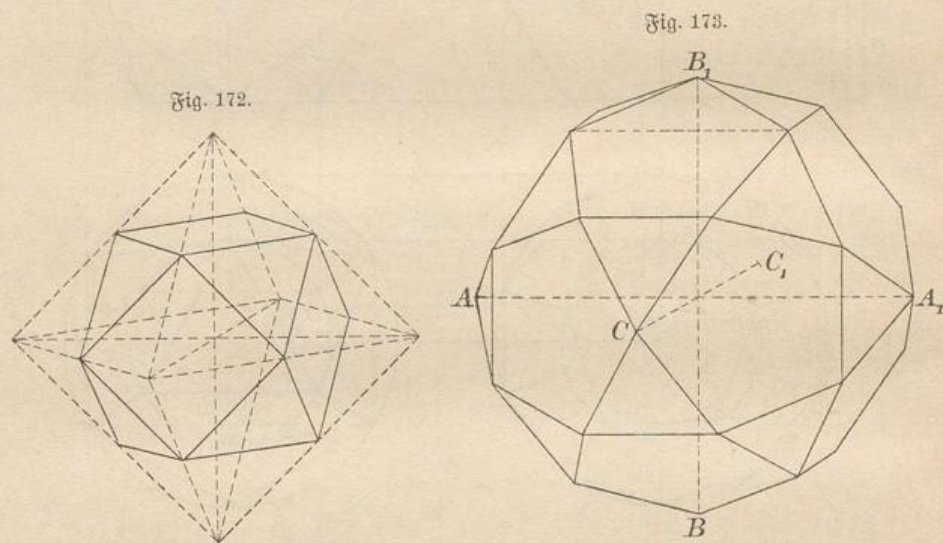


zontalverschiebung statt, und die Figur wird symmetrisch gegen eine vertikale Achse.

i) **Aufgabe.** Das auf einer Fläche stehende Ikosaeder im Grund- und Aufriß darzustellen. (In Fig. 171 b ist die Aufgabe gelöst. Dabei ist gezeigt, daß, wenn man im Grundriß dieselben Hilfskreise wählt wie beim Pentagondodekaeder, die vier Punktschichten des Aufrisses in dieselben Höhen fallen wie bei diesem. Der Schüler führe die Konstruktion und die Beweise selbst aus.)

14) Einige Halbstumpfe und ihre reziproken Körper. Unter Halbstumpf soll ein Körper verstanden werden, der dadurch aus einem anderen entsteht, daß man die Kanten des letzteren halbiert und die Abstumpfung der Ecken (Enteckung) bis dorthin durchführt. Dabei kann derselbe Körper aus zwei verschiedenen entstehen.

a) Der Halbstumpf des regelmäßigen Achtecks ist in Fig. 172 gezeichnet. Er ist zugleich der Halbstumpf des Würfels. Seine Flächen sind sechs Quadrate und acht regelmäßige Dreiecke.



Die Flächenmitten dieses Körpers bilden ein Rhombenzwölfflach, welches demnach der reziproke Körper ist. Der Abstumpfung des Würfels oder Oktaeders bis zur Kantenmitte entspricht also ein Aufsetzen so hoher Pyramiden auf die Würfelflächen oder Oktaederflächen, daß je zwei benachbarte Pyramidenflächen in dieselbe Ebene fallen und nur die halbe Anzahl von Flächen bestehen bleibt.

b) Der Halbstumpf des regelmäßigen Zwanzigflachs ist in Fig. 173 dargestellt. Er ist zugleich der des regelmäßigen Zwölfflachs. Er



zeigt als Flächen zwölf regelmäßige Fünfecke und zwanzig gleichseitige Dreiecke. Dem Achsenkreuz entspricht ein einbeschriebenes Oktaeder.

Die Flächenmitten dieses Körpers liegen auf einem Rhombendreißigfläch. Dieses ist in Fig. 174 dargestellt. Beide Körper sind reziprok zueinander. Die unterste und oberste Fläche des Rhombendreißigflächs, die vorderste und hinterste, die linke und rechte sind Flächen eines umbeschriebenen Würfels.

In das regelmäßige Zwölfflach lassen sich im ganzen fünf Würfel einstellen. Die dreißig Würfel Flächen umhüllen ein Rhombendreißigfläch, während die Ecken der Würfel (von denen je zwei zusammenfallen, so daß ihre Zahl  $\frac{40}{2} = 20$  beträgt) die Ecken des Dodekaeders bilden.

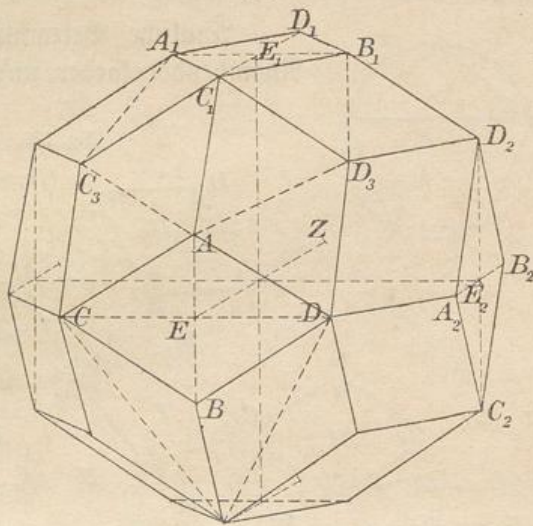
Um das regelmäßige Zwanzigfläch lassen sich im ganzen fünf Oktaeder legen. Die vierzig Flächen dieser Oktaeder, von denen je zwei in dieselbe Ebene fallen, so daß nur zwanzig selbständig bestehen, umhüllen das Ikosaeder, die dreißig Ecken der Oktaeder liegen aber in den Ecken des durch Fig. 173 dargestellten Halbstumpfs.

Auf die Flächen eines Rhombendreißigflächs lassen sich die Kanten eines regelmäßigen Zwölfflachs zeichnen. Die betreffenden Fünfecke werden durch die kleinen Diagonalen der Rhomben gebildet. Aber auch die Kanten eines regelmäßigen Zwanzigflächs lassen sich aufzeichnen. Die betreffenden Dreiecke werden durch die großen Diagonalen der Rhomben gebildet.

Da  $C_3D_3$  Diagonale des Fünfecks und gleich  $CD$  ist,  $A_1B_1$  dagegen als Fünfecksseite auftritt, so verhalten sich die kleineren und die größeren Diagonalen jedes Rhombus wie die Teile einer stetig getheilten Geraden. Das Netz des Körpers ist daher mit Hilfe eines regelmäßigen Fünfecks oder der stetigen Teilung leicht herzustellen. In Fig. 175 ist die Hälfte des Netzes gezeichnet und dabei angedeutet, welche Ecken beim Bilden des Modelles zusammenfallen.

Die genannten Eigenschaften des Rhombendreißigflächs hängen damit zusammen, daß es der Zwischenfall für das Pyramidenzwölfflach

Fig. 174.





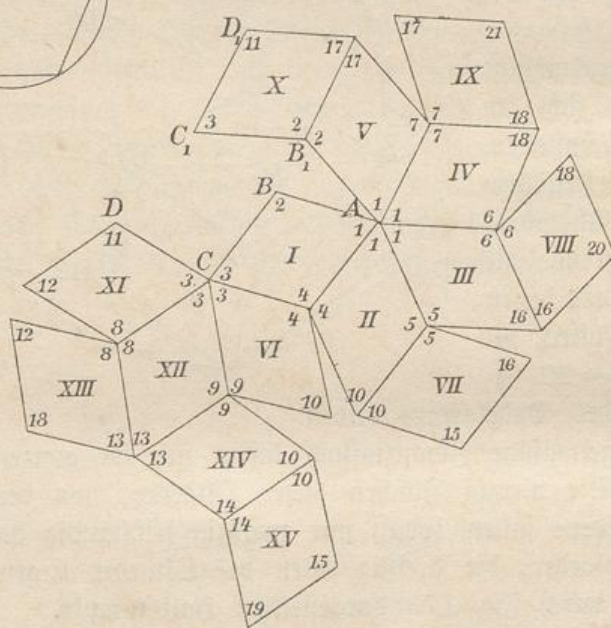
bezw. das Pyramidenzwanzigfläch ist, bei dem je zwei Pyramidenflächen zu einer zusammenfallen, sodaß nur  $\frac{5 \cdot 12}{2}$  bezw.  $\frac{3 \cdot 20}{2}$  oder 30 Flächen bestehen bleiben.

Diesen Eigenschaften stehen reziproke des zugehörigen Halbstumpfs gegenüber, welche aufzusuchen dem Schüler überlassen bleiben soll. —

Ähnliche Betrachtungen versuche man für das Rhombendodekaeder und den Halbstumpf des Würfels auszuführen.



Fig. 175.



Der Halbstumpf des Tetraeders ist ein Iktaeder.

15) Wie sich dem Rhombendodekaeder fünf Würfel einbeschreiben lassen, lassen sich ihm auch zehn Tetraeder einbeschreiben, denn in jedem Würfel können zwei eingezeichnet werden.

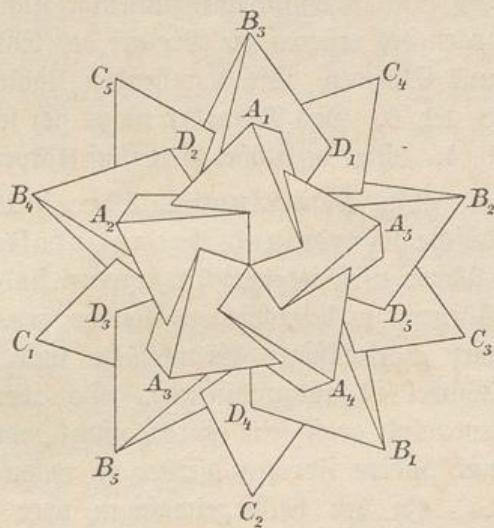
Von diesen Tetraedern kann man je fünf aussuchen, die keine Ecke miteinander gemein haben.

Denkt man sich also die zwanzig Ecken eines regelmäßigen Zwölfflachs gezeichnet, so kann man stets je vier als Ecken eines Tetraeders betrachten. Diese Tetraeder bilden den sogenannten Stern der fünf Tetraeder. Dieser ist durch Fig. 176 dargestellt. So sind z. B.  $A_1, B_1, C_1, D_1$  Ecken eines Tetraeders, davon  $D_1$  die auf der Rückseite zu denkende. (Der Punkt hat noch eine andere Bedeutung. Jede Tetraederkante ist an zwei Stellen stetig geteilt, z. B.  $B_3 C_3$  in  $D_1$  und in dem durch  $A_5$  verdeckten Punkte, auch ist sie halbiert an der Stelle, wo sie zwischen zwei Tetraederflächen wieder sichtbar werden möchte, ohne jedoch ins Freie zu gelangen. Jede der auftretenden Schnittlinien geht verlängert durch eine der Tetraederecken. Die zwanzig Flächen umhüllen ein Ikosaeder.)



Um das Ikosaeder ließen sich fünf Oktaeder legen, von denen jedes zwei umbeschriebene Tetraeder als Halbflächner hat. Wählt man von den zehn Tetraedern ebenfalls fünf voneinander freie aus, so entsteht wieder ein Stern von fünf Tetraedern. Der reziproke Körper zu einem solchen Tetraederstern ist also wieder ein solcher. —

Fig. 176.



16) Bemerkungen über die regelmäßigen oder Platonischen Körper. Von den regelmäßigen Körpern sind drei von gleichseitigen Dreiecken begrenzt. Beim Tetraeder stoßen in jeder Ecke drei Dreiecke zusammen, beim Oktaeder vier, beim Ikosaeder fünf. Ein weiterer von Dreiecken begrenzter Körper ist nicht möglich, denn sechs gleichseitige Dreiecke bilden keine Ecke, sondern fallen, da  $6 \cdot 60^\circ = 360^\circ$  ist, in dieselbe Ebene. Ein Winkel von mehr als  $360^\circ$  ist ferner unmöglich, da die Summe der Winkel um einen Punkt bei einer konvergen Ecke  $360^\circ$  nicht übersteigen kann.

Ein regelmäßiger Körper, der Würfel, ist von Quadraten begrenzt, von denen je drei in jeder Ecke zusammenstoßen. Ein weiterer von Quadraten begrenzter Körper ist unmöglich, denn vier Quadrate bilden keine Ecke, sie fallen in dieselbe Ebene, da  $4 \cdot 90^\circ = 360^\circ$  ist. Noch mehr Quadrate können erst recht keine Ecke bilden.

Ein regelmäßiger Körper, das Zwölfflach, war von regelmäßigen Fünfecken begrenzt. Ein weiterer von solchen begrenzter Körper ist unmöglich, da  $4 \cdot 108^\circ = 432^\circ$  den Winkel von  $360^\circ$  schon überschreitet.

Ein von regelmäßigen Sechsecken begrenzter Körper ist unmöglich, denn drei solcher Flächen können keine Ecke bilden, sondern sie fallen, da  $3 \cdot 120^\circ = 360^\circ$  ist, in dieselbe Ebene.

Bei drei Siebenecken würde der Winkel von  $360^\circ$  schon weit überschritten werden. Folglich gibt es nicht mehr als die genannten fünf regelmäßigen Vielfläche. Als Grenzfall, d. h. als regelmäßiges Unendlichfläch, können nur die Kugel oder etwa die unbegrenzte Ebene gelten, denn auf der letzteren lassen sich unendlich viele gleichseitige Dreiecke oder Quadrate oder regelmäßige Sechsecke lückenlos aneinander schließen.



Von den fünf regelmäßigen Polyedern sind das Zwölfflach und das Zwanzigflach reziproke. Die Zahl der Flächen, Kanten, Ecken ist beim ersteren 12, 30, 20, beim letzteren 20, 30, 12. Den Fünfecken des ersteren entsprechen fünfeckige Kanten des letzteren, den dreikantigen Ecken des ersteren die Dreiecke des letzteren. Reziprok sind auch Würfel und Oktaeder. Die betreffenden Zahlen sind bei beiden 6, 12, 8 bezw. 8, 12, 6. Das Tetraeder ist zu sich selbst reziprok. Die Zahlen sind 4, 6, 4. Man bezeichnet diese fünf Körper als die Platonischen Körper.

17) Bemerkungen über halbbregelmäßige oder Archimedische Körper und ihre reziproken. Körper, die von regelmäßigen Flächen verschiedener Art begrenzt sind, pflegt man als halbbregelmäßige Körper zu bezeichnen. Hierher gehören eigentlich auch alle Säulen von regelmäßiger Grundfläche und quadratischen Seitenflächen (der Würfel ist auszuschließen). Da aber dann die Anzahl der Formen unendlich groß sein würde, pflegt man die Säulen auszuschließen und nur andere Formen hierher zu rechnen.

Zu den halbbregelmäßigen oder Archimedischen Körpern gehören die beiden oben betrachteten Halbstumpfe des Würfels (oder Achtecks) und des Zwölfflachs (oder Zwanzigflachs). Es gibt solche Körper mit zwei Arten von Flächen, die Dreiecke und Quadrate, Dreiecke und Sechsecke, Quadrate und Sechsecke, Dreiecke und Achtecke, Dreiecke und Fünfecke, Sechsecke und Fünfecke, Zehnecke und Dreiecke sein können. Andere haben drei Arten regelmäßiger Flächen, z. B. Achtecke, Sechsecke und Quadrate, oder Fünfecke, Dreiecke und Quadrate, oder Zehnecke, Sechsecke und Quadrate. Damit ist die Anzahl der Möglichkeiten beschloffen.

Auch die Archimedischen Körper haben ihre reziproken. So gehörte zum Halbstumpf des Würfels das Rhombendodekaeder, zum Halbstumpf des Zwölfflachs das Rhombendreißigflach. Das erstere hatte regelmäßige Dreikanteken und regelmäßige Vierkanteken, welche die reziproken Gebilde der Dreiecke und Quadrate sind. Beim Rhombendreißigflach dagegen gab es regelmäßige Dreikanteken und Fünfkanteken als Bilder der regelmäßigen Dreiecke und Fünfecke. Die reziproken Körper der Archimedischen werden auch als antarchimedische bezeichnet.

Näher auf diese Gebilde einzugehen, würde zu weit führen. \*) (Auf die Kepler-Poinsotschen Körper und auf die verschiedenen Kristallformen sei besonders aufmerksam gemacht.)

\*) Weiteres Material findet man im Anhang des Vorkurses, in des Verfassers „Einführung in das stereometrische Zeichnen“, Leipzig bei W. G. Teubner, und in seinem vierbändigen Werke „Elemente der Stereometrie“, Leipzig bei G. J. Göschen.



## II. Senkrechte Prismen und Zylinder.

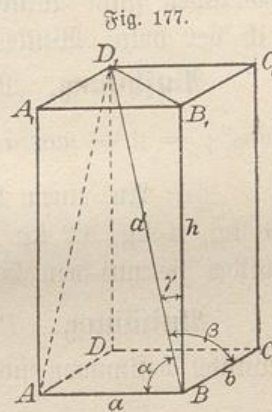
18) In Fig. 177 stelle  $ABCD$  ein horizontales Rechteck dar, auf dessen Ebene in den Eckpunkten Lotte von gleicher Höhe errichtet sind, deren Endpunkte also der horizontalen Schnittebene  $A_1B_1C_1D_1$  angehören. Der so bestimmte ebenflächige Körper heißt Rechteckskörper (oder auch Rechtecker) oder senkrechtcs Vierkantprisma (Säule).

Stehen die Grundkanten  $a$  und  $b$  unter sich und zur Höhe  $h$  in rationalem Verhältnis  $a:b:h$ , welches durch die kleinsten möglichen ganzen Zahlen ausgedrückt sein mag, so läßt sich der Körper ebenso in Würfel zerlegen, wie früher das Rechteck in Quadrate zerlegt wurde. Die Anzahl dieser Würfel ist  $abh$ . Betrachtet man jeden dieser Würfel als Raumeinheit, so ist der Inhalt des Körpers  $I = abh$ , oder, wenn man die Grundfläche  $ab$  mit  $G$  bezeichnet:  $I = G \cdot h$ , d. h. abgekürzt gesprochen: Inhalt gleich Grundfläche mal Höhe.

Der Fall des irrationalen Verhältnisses wird ebenso, wie bei dem Rechteck, dadurch erledigt, daß man mit beliebiger Genauigkeit rechnet, indem man für den endlosen Dezimalbruch ohne Periode den nächstliegenden endlichen Dezimalbruch von der gewählten Stellenzahl nimmt. Der Beweis für die Richtigkeit der Formel

$$I = Gh$$

wird also dann nur angenähert geliefert, jedoch mit beliebiger Genauigkeit.



19) **Aufgaben.** a) Berechne aus  $a$ ,  $b$  und  $h$  den Inhalt und die Oberfläche des Rechteckskörpers.

b) Berechne die Diagonale  $BD_1 = d$  des Körpers.

**Auflösung.** Nach Pythagoras ist  $BD_1^2 = h^2 + B_1D_1^2 = h^2 + (B_1C_1^2 + C_1D_1^2) = h^2 + a^2 + b^2$ , also  $d = \sqrt{a^2 + b^2 + h^2}$ .

c) Welche Winkel bildet diese Diagonale mit den Kanten?

**Auflösung.** Dreieck  $BAD_1$  hat den rechten Winkel bei  $A$ , also ist  $\cos \alpha = \frac{a}{d}$ , woraus sich  $\alpha$  berechnen läßt. Ebenso bestimmen sich die andern Winkel aus  $\cos \beta = \frac{b}{d}$  und  $\cos \gamma = \frac{h}{d}$ .



**Bemerkungen.** Die Formel  $d^2 = a^2 + b^2 + h^2$  wird als der Pythagoreische Lehrsatz für den Raum bezeichnet und lautet in Worten: Das Quadrat über der Hauptdiagonale des Rechteckkörpers ist gleich der Summe der Quadrate über den drei in einer Ecke zusammenstoßenden Kanten dieses Körpers.

Aus der Formel folgt

$$1 = \frac{d^2}{d^2} = \frac{a^2 + b^2 + h^2}{d^2} = \frac{a^2}{d^2} + \frac{b^2}{d^2} + \frac{h^2}{d^2} = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma.$$

Bildet also eine Gerade mit drei aufeinander Senkrechten die Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$ , so ist die Summe der Kosinusquadrate dieser Winkel gleich Eins.

d) Eine Gerade gehe von einer Ecke aus, in der drei aufeinander senkrechte Gerade zusammenstoßen. Sie bilde mit sämtlichen Geraden spitze Winkel, von denen  $\alpha$  und  $\beta$  gegeben sind. Wie groß ist der dritte Winkel  $\gamma$ ?

**Auflösung.** Nach obigem ist

$$\cos^2 \gamma = 1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta, \text{ also } \cos \gamma = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta}.$$

[e) An einem Punkte wirken senkrecht gegeneinander die Kräfte 3 kg, 4 kg, 12 kg. Wie groß ist ihre Resultante, und welchen Winkel bildet sie mit den Einzelkräften?

**Auflösung.**  $R = \sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$  kg. Die Winkel bestimmen sich aus  $\cos \alpha = \frac{3}{13}$ ,  $\cos \beta = \frac{4}{13}$ ,  $\cos \gamma = \frac{12}{13}$ .]

20) Werden mehrere Rechteckkörper von gleicher Höhe  $h$ , aber von verschiedenen Grundkanten, so auf dieselbe Ebene gestellt, daß je zwei von ihnen mit einer senkrechten Fläche zusammenstoßen, so bildet die Grundfläche eine aus Rechtecken bestehende Figur nach Art von Fig. 178. Der Inhalt des Gesamtkörpers ist dann

$$I = G_1 h + G_2 h + G_3 h + \dots = (G_1 + G_2 + G_3 + \dots) h = G h,$$

wenn man die gesamte Grundfläche mit  $G$  bezeichnet.

Nun läßt sich aber jede beliebig begrenzte ebene Fläche nach Art der Fig. 178 mit Rechtecken ausfüllen, wobei, wenn man in geeigneter Weise kleinere und kleinere Rechtecke anwendet, die übrig bleibenden „dreieckigen“ Flächen am Rande schließlich verschwindend klein werden, sodaß man sie vernachlässigen kann. Demnach gilt von jedem senkrechten Prisma oder Zylinder von beliebiger Grundfläche,



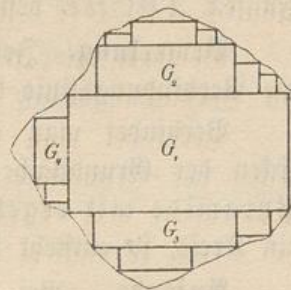
die dadurch entstehen, daß die Grundfläche senkrecht gegen ihre Ebene bewegt wird, die Formel

$$I = (G_1 + G_2 + G_3 + \dots)h = G \cdot h.$$

Daher gilt der Satz:

Senkrechte Prismen und Zylinder von beliebiger Grundfläche gehorchen der Inhaltsformel  $I = Gh$ , d. h. abgekürzt gesprochen: Inhalt gleich Grundfläche mal Höhe.

Fig. 178.



21) **Aufgaben.** a) Ein senkrechtcs Dreikantprisma habe die Grundkanten  $a$ ,  $b$  und  $c$  und die Höhe  $h$ . Wie groß ist die gesamte Oberfläche? (Benutze für das Dreieck die Heronische Formel.) Wie groß ist der Inhalt? Welche Winkel bilden die Seitenflächen des Körpers miteinander? (Trigonometrisch zu berechnen.)

b) Dieselbe Aufgabe für das regelmäßige Dreikantprisma\*) von Grundkante  $a$  und Höhe  $h$ .

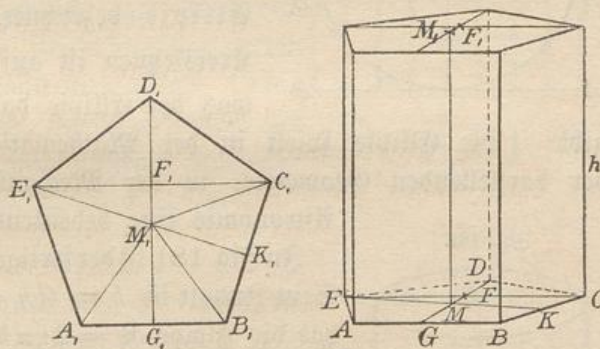
c) Dieselbe Aufgabe für das regelmäßige Dreikantprisma von Grundkante  $a$  und quadratischen Seitenflächen.

d) Dieselbe Aufgabe für regelmäßige Prismen, deren Grundflächen 4-, 5-, 6-seitig sind. Auch besondere Bestimmungen für die Höhen können dabei vorgenommen werden. (Bei dem Fünfeck ist z. B. Trigonometrie anzuwenden.)

e) Regelmäßige Prismen von verschiedener Seitenzahl in unserer Parallelperspektive korrekt zu zeichnen.

In Fig. 179 ist die Aufgabe am regelmäßigen fünfseitigen Prisma gelöst.  $A_1B_1$  ist horizontal als  $AB$  hingelegt,  $G_1D_1$  auf  $\frac{1}{3}$  reduziert und als  $GD$  unter  $30^\circ$  angelegt, was der von uns gewählten Parallelperspektive entspricht.  $GF$  ist als

Fig. 179.



\*) Ein regelmäßiges Prisma ist ein senkrechtcs Prisma, dessen Grundfläche ein regelmäßiges Polygon ist.



$\frac{1}{3} G_1 F_1$  abgetragen. Durch  $F$  ist die Horizontale  $EC = E_1 C_1$  so gelegt, daß  $F$  Halbpunkt bleibt. Dadurch ist das perspektivische Fünfeck  $ABCDE$  bestimmt. Das Übrige ergibt sich von selbst.

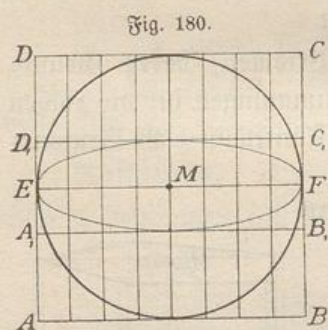
**Bemerkung.** Jedes regelmäßige Prisma hat eine Mittellinie, die Verbindungslinie der Mittelpunkte der beiden Grundflächen.

Verbindet man den oberen Endpunkt der Mittellinie mit den Ecken der Grundfläche, so erhält man die Kanten der zugehörigen Pyramide mit regelmäßiger Grundfläche. Ist die Grundfläche ein Kreis, so entsteht der Keg.

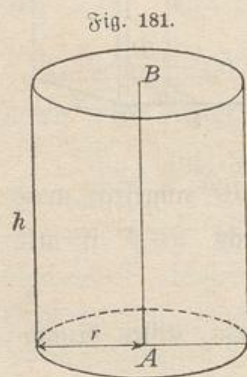
**Aufgabe.** Bei gegebener Grundkante  $a$  und Höhe  $h$  die Seitenkanten einer „regelmäßigen“ Pyramide und ihre Neigung, die Seitenflächen und ihre Neigung zu berechnen, je nachdem die Grundfläche 3-, 4-, 5-, 6-seitig ist.

22) Zeichnung und Berechnung des senkrechten Kreiszylinders.

Die Zeichnung des Kreiszylinders ergibt sich am bequemsten folgendermaßen: Man wähle statt der Perspektive mit Neigung  $30^\circ$  die mit Neigung  $90^\circ$ . Die Verkürzung auf



$\frac{1}{3}$  kann man beibehalten. In Fig. 180 ist gezeigt, wie dadurch das Quadrat  $ABCD$  mit dem eingeschriebenen Kreise in ein Rechteck  $A_1 B_1 C_1 D_1$  verwandelt wird, dem eine Kurve eingeschrieben ist, die man als Ellipse bezeichnet. Jede der senkrechten Kreisbogen ist auf  $\frac{1}{3}$  der Länge reduziert, was der Ellipse das Achsenverhältnis  $1 : 3$  gibt. [Die Ellipse spielt in der Mathematik, im Zeichnen und in der darstellenden Geometrie, in der Mechanik, Technik, Physik und Astronomie eine bedeutende Rolle.]



In Fig. 181 ist der fertige Kreiszylinder dargestellt. Sein Inhalt ist  $I = Gh = r^2 \pi h$ . Sein Mantel hat die Fläche  $M = 2r\pi h$ . Denkt man sich diesen nämlich längs einer der Geraden aufgeschnitten und in die Ebene ausgebreitet, so hat man ein Rechteck mit der Grundlinie  $u = 2r\pi$  und der Höhe  $h$ . Nimmt man den Durchmesser  $d$  statt  $r$ , so ist

$$I = \frac{d^2}{4} \pi h, \quad M = d\pi h.$$



23) **Aufgaben.** a) Ein zylindrisches Litergefäß soll doppelt so hoch, als breit sein. Wie sind die inneren Abmessungen zu nehmen?

**Auflösung.**  $I = r^2 \pi h = r^2 \pi \cdot (4r)$  soll gleich 1 cbdm sein, also  $4r^3 \pi = 1$ , folglich  $r = \sqrt[3]{\frac{1}{4\pi}} = ?$  dcm. Die Höhe wird  $h = 4r$ .

b) Ein zylindrisches Hektolitergefäß soll viermal so breit als hoch sein. Wie sind die Maße zu nehmen?

**Auflösung.**  $I = r^2 \pi h = r^2 \pi \cdot \frac{r}{2} = \frac{r^3 \pi}{2}$  soll gleich 100 cbdm sein. Daraus folgt  $r = \sqrt[3]{\frac{200}{\pi}} = ?$  dcm.

Andere Aufgaben verlangen die Berechnung des Gewichtes  $p$  mit Hilfe des spezifischen Gewichtes  $p'$ .

Jedes gerade Prisma mit regelmäßiger Grundfläche hat einen einbeschriebenen und einen umbeschriebenen Zylinder, jede solche Pyramide einen umbeschriebenen und einen einbeschriebenen Kegel.

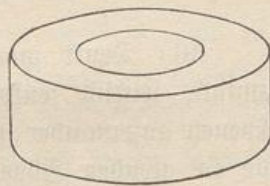
**Aufgabe.** Wie verhalten sich die Inhalte des Würfels und des ein- und umbeschriebenen Zylinders? Wie verhalten sich die Oberflächen dieser drei Körper?

[Die Triebwellen und Transmissionswellen der Technik, zahlreiche Maschinen und Bauteile, Fabrikshornsteine, Brunnen- und Bergwerksschachte und viele Werkzeuge und Geräte, besonders Gefäße, haben den Zylinder als Grundform.]

24) **Aufgabe.** Einen konzentrischen Hohlzylinder mit den Radien  $r$  und  $r_1$  und der Höhe  $h$  zu zeichnen und seinen Inhalt und seine gesamte Oberfläche zu berechnen.

Fig. 182 stellt die Zeichnung dar, deren Ellipsen wie vorher zu konstruieren sind. (Man achte auf die scheinbare Veränderlichkeit des Abstandes der inneren und äußeren Kurve.)

Fig. 182.



$$I = (r^2 \pi - r_1^2 \pi) h = \pi (r^2 - r_1^2) h \\ = \pi (r + r_1)(r - r_1) h.$$

(Letztere Zerlegung eignet sich für die logarithmische Berechnung.)

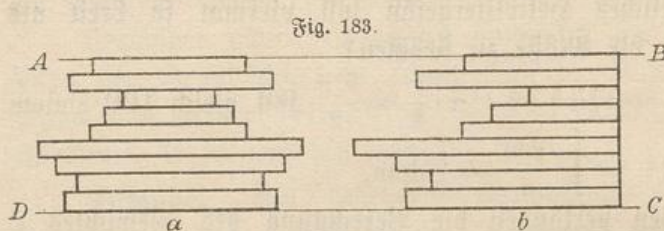
$$O = 2(r^2 \pi - r_1^2 \pi) + 2r \pi h + 2r_1 \pi h = 2\pi [r^2 - r_1^2 + h(r + r_1)] \\ = 2\pi [(r + r_1)(r - r_1) + h(r + r_1)] = 2\pi (r + r_1)[r - r_1 + h].$$

**Beispiel.** Ein gußeisernes Schwungrad habe einen Schwungradring von folgenden Abmessungen:  $r = 2,8$  m,  $r_1 = 2,5$  m, Dicke  $h = 0,3$  m. Wieviel Tonnen wiegt er, wenn das spezifische Gewicht  $p' = 7,5$  gesetzt wird?



### III. Der Satz des Cavalieri und seine wichtigsten Anwendungen.

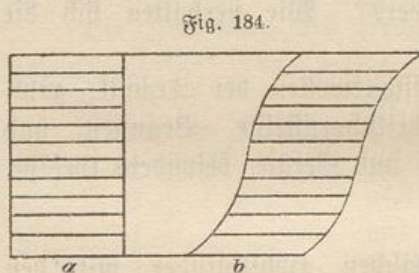
25) Der Inhalt des Satzes werde zunächst planimetrisch erläutert:



Zwischen zwei Parallelen  $AB$  und  $DC$  mögen sich endliche Rechteckstreifen von Millimeterhöhe befinden, die zwei Figuren  $a$  und  $b$

geben. Die in gleicher Höhe befindlichen Streifen sollen gleiche Breite haben. Dann sind beide Figuren inhaltsgleich. Die eine ist durch bloße Verschiebung der Streifen aus der anderen entstanden. Dasselbe gilt, wenn die Streifen nicht Millimeterhöhe, sondern nur den 1000sten,

1 000 000sten usw. Teil dieser Höhe haben. Die Figuren haben gleichen Inhalt, sobald sie in gleichen Höhen gleiche Querschnittslinien haben.



Dies ist z. B. auch in Fig. 184 der Fall, wo die einzelnen Streifen von so verschwindend kleiner Höhe zu denken sind, daß man in Fig.  $b$

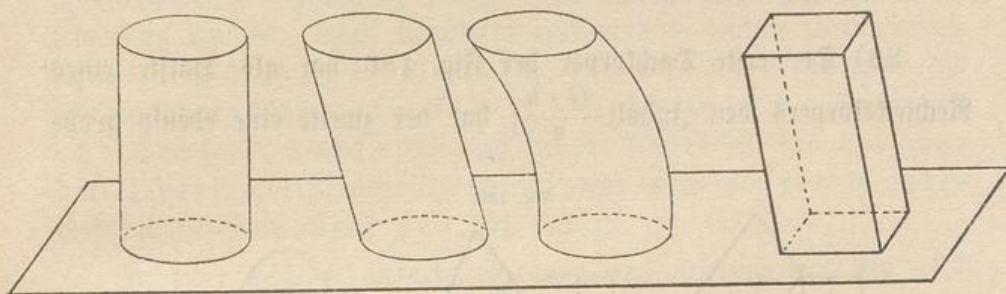
nicht einmal die „Treppenstufen“ der vorigen Figur wahrnimmt, sondern krumme Linien als seitliche Begrenzung sieht.

26) Denkt man sich nun an Stelle der Streifen dünne horizontale, seitlich senkrecht begrenzte Platten, die zwischen parallelen Ebenen aufeinander geschichtet sind, so hat man Entsprechendes. Sind die in gleicher Höhe liegenden Platten von gleicher Grundfläche, so sind sie, wenn gleiche Dicke angenommen wird, inhaltsgleich, mag auch die Gestalt der verglichenen Platten noch so verschieden sein. Sind die Platten von verschwindend kleiner Dicke, so nimmt man seitlich keine Treppenstufen wahr, so daß die Konturen als krummlinig, die Seitenflächen als krumme Flächen gelten können. Die Inhaltsgleichheit aber bleibt bestehen. So gilt unter der Voraussetzung endlicher Querschnitte der Satz:



Haben zwei Körper in gleichen Höhen flächengleiche Querschnitte, so sind sie inhaltsgleich.\*)

Fig. 185.



27) Die in Fig. 185\*\*) dargestellten Körper sollen von oben bis unten denselben Querschnitt  $G$  haben und in der Höhe übereinstimmen. Da nun der erste der Körper den Inhalt  $G \cdot h$  hat, so sind sie sämtlich vom Inhalte  $Gh$ . Die Formel  $I = Gh$  gilt also für senk-

\*) Bei der planimetrischen Veranschaulichung des Satzes kann man einen strengerem Beweis geben, indem man zeigt, daß die „Treppenräume“ der Gestalt unendlich kleiner Dreiecke zustreben. Hat ein solches die Grundlinie  $\frac{b}{m}$  und die Höhe  $\frac{h}{n}$ , wobei  $m$  und  $n$  unendlich große Zahlen sind, so ist seine Fläche gleich  $\frac{bh}{2mn}$ , sodaß im Nenner unendlich großes „zweiter Ordnung“ steht, was man durch das Symbol  $\infty^2$  darstellen kann. Die Anzahl der Dreiecke ist aber nur unendlich groß erster Ordnung. Ist das berechnete das größte von allen, so ist die Summe aller kleiner als  $\frac{bh}{2} \frac{\infty^1}{\infty^2}$ . Dieser Ausdruck kann als  $\frac{bh}{2} \cdot \frac{1}{\infty}$  aufgefaßt werden, d. h. er strebt der Größe Null zu. Ähnlich ist es bei den körperlichen Betrachtungen. Die Anzahl der Treppenräume ist unendlich groß erster Ordnung, der Inhalt des größten aber unendlich klein zweiter Ordnung, z. B.  $\frac{k}{\infty^2}$ , also handelt es sich bei der Summe aller wieder um einen Ausdruck, der kleiner als  $\infty \cdot \frac{k}{\infty^2}$  oder  $\frac{k}{\infty}$  ist, was aber der Null zustrebt. Also auch hier darf man den Inhalt der Treppenräume schließlich vernachlässigen. Ein näheres Eingehen auf solche Infinitesimalbetrachtungen ist erst auf einem höheren Standpunkte möglich. Der von Cavalieri ausgesprochene aber im Hinblick auf gewisse Ausnahmen nicht streng genug bewiesene Satz wird nach ihm benannt.

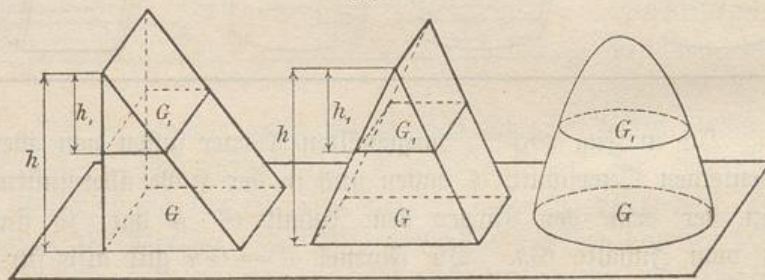
\*\*) Diese Figur ist nur schematisch aufzufassen. Bei genauer Konstruktion würden die großen Ellipsenachsen etwas geneigt gegen die Horizontale liegen. Die genaue Konstruktion geht über den Standpunkt der Klasse hinaus. Dasselbe gilt von Fig. 186 und 187.



rechte und schräge Prismen, für senkrechte und schräge Zylinder und von Körpern beliebigen Profils, die von oben bis unten flächengleiche Querschnitte haben. Die Gestalt dieser Querschnitte darf sich dabei von unten nach oben ändern.

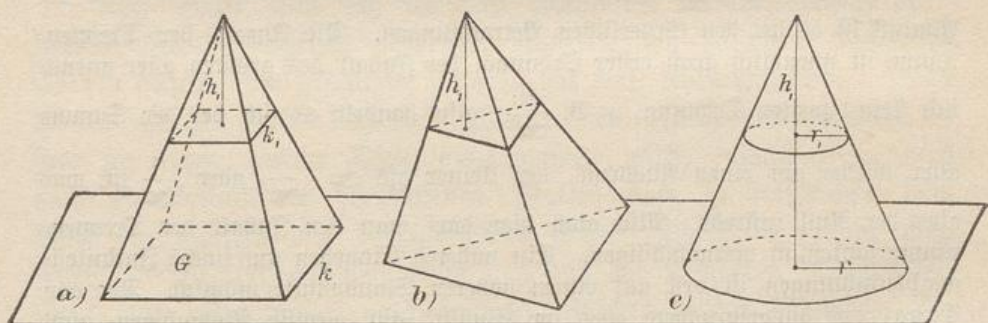
28) Der erste Dachkörper der Fig. 186 hat als Hälfte eines Rechteckskörpers den Inhalt  $\frac{G \cdot h}{2}$ ; hat der zweite eine ebenso große

Fig. 186.



Grundfläche und dieselbe Höhe, so hat er denselben Inhalt. Im ersten nämlich ist für die Querschnittsflächen  $G_1 : G = h_1 : h$  (warum?), also  $G_1 = G \frac{h_1}{h}$ . Im zweiten ist ebenfalls  $G_1 = G \frac{h_1}{h}$ , also sind die Querschnitte beider Körper in gleichen Höhen flächengleich. Angenommen, das Profil des dritten Körpers sei so gewählt, daß auch bei ihm für jedes  $h_1$  der Querschnitt  $G_1 = G \frac{h_1}{h}$  ist, so ist auch für ihn die Inhaltsformel  $I = \frac{G \cdot h}{2}$ .

Fig. 187.



29) In Fig. 187 sind Pyramiden und ein Kegel dargestellt. Alle sollen Grundflächen von derselben Größe  $G$  haben und auch in der Höhe  $h$  übereinstimmen. Will man beweisen, daß für alle dieselbe



Inhaltsformel gilt, so muß gezeigt werden, daß sie in gleichen Höhen gleiche Querschnitte haben. Zunächst ist bei jedem dieser Körper der Parallelschnitt ähnlich der Grundfläche, denn die Spitze ist als Ähnlichkeitspunkt zu betrachten, sodaß es sich um eine gesetzmäßige Verkleinerung handelt. Sind  $k$  und  $k_1$  entsprechende Linien in der ersten Figur, so ist  $k_1 : k = h_1 : h$ , also  $k_1^2 : k^2 = h_1^2 : h^2$ ; es ist aber für die ähnlichen Flächen  $G_1 : G = k_1^2 : k^2$ , folglich  $G_1 : G = h_1^2 : h^2$ , d. h.: Bei jeder Pyramide und jedem Kegel ist die horizontale Querschnittsfläche proportional dem Quadrate ihres senkrechten Abstandes von der Spitze.

In jeder Höhe  $h_1$  ist also bei allen drei Körpern der Fig. 187  $G_1 = G \frac{h_1^2}{h^2}$ , alle haben in gleichen Höhen flächengleiche Querschnitte. Folglich: Pyramiden und Kegel von gleichen Grundflächen und gleichen Höhen sind inhaltsgleich.

An dem dreiseitigen Prisma in Fig. 188 läßt sich nun folgendes zeigen: Zieht man in den Seitenflächen Diagonalen in einem Zuge (ohne abzusetzen), so ist durch die entsprechenden Flächenschnitte das Prisma in drei Pyramiden zerlegt:

- I.  $(ABC) A_1^*)$ ,
- II.  $(A_1 B_1 C_1) B$  oder  $(BC_1 B_1) A_1$ ,
- III.  $(BCC_1) A_1$ .

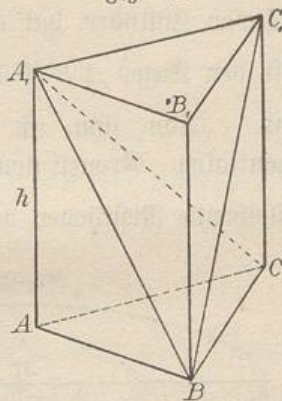
Die beiden ersten Pyramiden haben gleiche Grundflächen  $ABC = A_1 B_1 C_1$  und gleiche Höhen (Abstand der oberen von der unteren Fläche), sie sind also inhaltsgleich. Die zweite Pyramide in der anderen Schreibweise und die dritte haben gleiche Grundflächen  $BC_1 B_1$  und  $BCC_1$  in derselben Ebene, und da sie dieselbe Spitze  $A_1$  haben, stimmen auch die Höhen überein, folglich auch die Inhalte. Da somit alle drei Pyramiden inhaltsgleich sind, so ist jede der dritte Teil des Prismas. Für dieses war aber  $I = Gh$ , folglich ist für die Pyramide  $(ABC) A_1$  die Inhaltsformel  $I = \frac{Gh}{3}$ . Alle Pyramiden und Kegel von derselben Grundfläche und derselben Höhe  $h$  sind aber inhaltsgleich, folglich:

$$\text{Für jede Pyramide und jeden Kegel ist } I = \frac{G \cdot h}{3}.$$

$$\text{Für den Kegel ist } G = r^2 \pi, \text{ also } I = \frac{r^2 \pi h}{3}.$$

\*) Die Spitze ist jedesmal außerhalb der Klammer geschrieben.

Fig. 188.



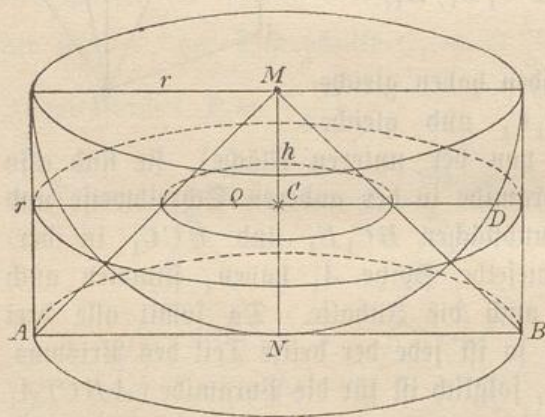


**Bemerkung.** Das Resultat für die Pyramide stimmt mit dem auf Seite 278 angegebenen überein.

**[Aufgaben.]** Berechne den Inhalt des regelmäßigen Tetraeders aus der Kante  $k$ , den des regelmäßigen Oktaeders aus der Halbachse  $a$ , den des Pyramidenwürfels aus der Würfelkante  $k$  und der Pyramidenhöhe  $h$ , ebenso den des Rhombendodekaeders. — Versuche\*) die Kanten, die Winkel, die Flächen und den Inhalt des Pentagondodekaeders aus der Halbachse  $a$  des zugehörigen Würfels, oder aus der Würfelkante  $b$ , oder aus der Dodekaederkante  $k$  zu berechnen. Ein Teil der Rechnungen ist oben vorbereitet. Der Inhalt wird  $J = \frac{O \varrho}{3}$ . Dieselbe Aufgabe soll für das Ikosaeder gelöst werden, wobei das Oktaeder an Stelle des Würfels tritt.\*)

30) Fig. 189 stellt einen Zylinder dar, der durch Drehung eines Quadrates von der Seite  $r$  um die Linie  $MN$  entstanden ist. Dieser Zylinder hat den Inhalt  $(r^2\pi)r = r^3\pi$ . Aus dem Zylinder ist der Kegel  $ABM$  ausgeschnitten, dessen Inhalt  $= r^2\pi \cdot \frac{r}{3} = \frac{r^3\pi}{3}$  ist. (Von ihm ist nur der Hauptschnitt gezeichnet. Die tangentialen Grenzlinsen sind absichtlich weggelassen.) Der übrig bleibende Restkörper hat den Inhalt  $r^3\pi - \frac{r^3\pi}{3}$  oder  $\frac{2}{3}r^3\pi$ . In den

Fig. 189.



Zylinder ist außerdem eine Halbkugel einbeschrieben, von der sich zeigen läßt, daß sie in gleichen Höhen mit dem Restkörper flächengleichen Querschnitt hat. (Von ihr ist ebenfalls nicht der richtige Umriß, sondern nur der Hauptschnitt gezeichnet.) Im Abstände  $MC = h$  ist nämlich für den Kegelquerschnitt  $q = h$ , also hat dort der Restkörper die Schnittfläche  $r^2\pi - q^2\pi = \pi(r^2 - q^2) = \pi(r^2 - h^2)$ ; die Halbkugel hat in derselben Höhe den nicht gezeichneten Querschnitt  $CD^2\pi = \pi(MD^2 - MC^2) = \pi(r^2 - h^2)$ .

\*) Diese beiden Aufgaben waren gewissermaßen das Endziel der Geometrie und Stereometrie des Euklid.



Beide Schnitte stimmen also im Flächeninhalte überein, und weil dies für jede Höhe gilt, so hat die Halbkugel mit dem Restkörper gleichen Inhalt. Für die Halbkugel ist also  $I = \frac{2}{3} r^3 \pi$ , folglich für die ganze Kugel  $I = \frac{4}{3} r^3 \pi$ .

31) Denkt man sich die Oberfläche der Kugel in sehr kleine z. B. rechteckige Stücke zerlegt, die man bei ihrer Kleinheit als Ebenen betrachten darf (z. B. durch benachbarte Meridiane und Parallelkreise), und verbindet man die Ecken mit dem Kugelmittelpunkt  $M$ , so entstehen zahlreiche kleine Pyramiden. Sind ihre Grundflächen  $G_1, G_2, G_3, \dots$ , so sind, weil  $r$  die Höhe ist, die Inhalte zusammengekommen

$$\begin{aligned} \frac{G_1 r}{3} + \frac{G_2 r}{3} + \frac{G_3 r}{3} + \dots \\ = \frac{r}{3} (G_1 + G_2 + G_3 + \dots). \end{aligned}$$

Die Pyramiden geben zusammen den Kugelinhalt  $I = \frac{4}{3} r^3 \pi$ , die Grundflächen zusammen die Kugeloberfläche  $O$ . Daher ist nach obiger Gleichung

$$I = \frac{r}{3} O \quad \text{oder} \quad O = \frac{3}{r} I = \frac{3}{r} \frac{4}{3} r^3 \pi = 4 r^2 \pi.$$

Also: Die Kugeloberfläche ist gleich  $4 r^2 \pi$  oder gleich dem Vierfachen von der Fläche des größten Kreises. Die Halbkugelwölbung hat also die doppelte Fläche, wie ihre Basis.

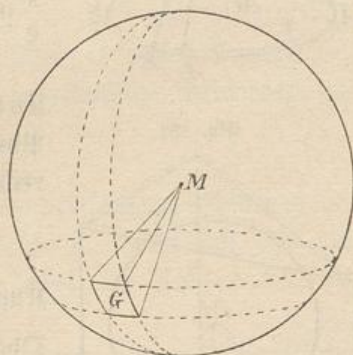
32) **Bemerkungen.** In Fig. 189 sind die Inhalte des Kegels, der Halbkugel und des Zylinders der Reihe nach  $\frac{r^3 \pi}{3}$ ,  $\frac{2 r^3 \pi}{3}$ ,  $r^3 \pi = \frac{3 r^3 \pi}{3}$ , sie verhalten sich also wie 1:2:3. Dieser Satz wird dem Archimedes zugeschrieben.

Der Inhalt einer Hohlkugel mit den Radien  $r$  und  $r_1$  ist

$$I = \frac{4}{3} r^3 \pi - \frac{4}{3} r_1^3 \pi = \frac{4}{3} \pi (r^3 - r_1^3).$$

33) Die Linie  $AC$  am senkrechten Kreiskegel (Fig. 191) bezeichnet man als seine Seite. Diese berechnet sich als  $s = \sqrt{r^2 + h^2}$ . Die Mantelfläche des Kegels läßt sich durch aufeinanderfolgende Gerade in sehr schmale Dreiecke wie  $DEC$  zerlegen, die man als eben betrachten

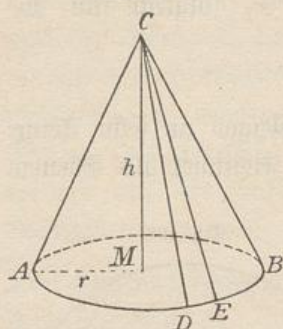
Fig. 190.





darf. Sind  $g_1, g_2, g_3, \dots$  die aufeinanderfolgenden Grundlinien der Dreiecke, so ist die Summe ihrer Flächen

Fig. 191.

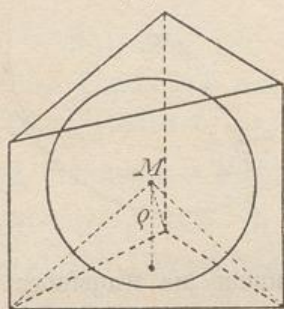


$$\frac{g_1 s}{2} + \frac{g_2 s}{2} + \frac{g_3 s}{2} + \dots$$

$$= \frac{s}{2} (g_1 + g_2 + g_3 + \dots).$$

Die Summe der  $g$  ist aber der Kreisumfang  $2r\pi$ , also hat der Kegelmantel die Fläche  $\frac{s}{2} 2r\pi = r\pi s$ .

Fig. 192.



Jeder Kegeltumpf oder Pyramidentumpf ist die Differenz zweier Regel bzw. Pyramiden. Später werden besondere Berechnungsmethoden gelehrt.

34) Ist ein ebenflächiger Körper einer Kugel mit Radius  $\rho$  umbeschrieben, und ist seine Oberfläche  $O$ , so ist sein Inhalt  $I = O \cdot \frac{\rho}{3}$ .

**Beweis.** Verbindet man das Kugelmittelpunkt mit den Ecken jeder Fläche, so erhält man Pyramiden von der Höhe  $\rho$ , deren Grundflächen  $G_1, G_2, G_3, \dots$  sein mögen. Die Summe der Inhalte ist

$$G_1 \frac{\rho}{3} + G_2 \frac{\rho}{3} + G_3 \frac{\rho}{3} + \dots = \frac{\rho}{3} (G_1 + G_2 + G_3 + \dots) = \frac{\rho}{3} \cdot O.$$

Diese Formel findet z. B. Anwendung bei der Berechnung des Inhalts regelmäßiger Polyeder.

#### IV. Vermischte Übungsaufgaben.

35) a) Die Erdkugel habe einen Radius 860 Meilen ( $860 \times 7420$  m) Länge. Wie viele Quadratmeilen hat ihre Oberfläche? Wie viele Kubikmeilen beträgt der Inhalt? Geib das Resultat auch in Quadrat- bzw. Kubikkilometern an.

b) Angenommen der Erdradius habe 860 Meilen, der Sonnenradius 100 000 Meilen Länge. Wieviel mal so groß ist der Sonneninhalt im Verhältnis zum Erdinhalt?

**Auflösung.**  $\frac{4}{3} r^3 \pi : \frac{4}{3} r_1^3 \pi = r^3 : r_1^3$  u. f. w.



[c) Die Astronomen geben aber die Sonnenmasse als das 355 000-fache der Erdmasse an, das mittlere spezifische Gewicht der Erde als 5,6. Wie groß ist danach das mittlere spezifische Gewicht der Sonne?]

d) Eine Eisenkugel soll 1000 kg wiegen. Wie groß ist der Radius zu wählen, wenn das spezifische Gewicht  $\rho' = 7,5$  ist?

e) Die einem Würfel einbeschriebene Kugel habe den Inhalt  $I$ . Wie groß ist die Kante des Würfels?

f) Die einem Würfel umbeschriebene Kugel habe den Inhalt  $I$ . Wie groß ist die Kante des Würfels?

g) Dieselben Aufgaben für die Oberfläche  $O$  dieser Kugeln.

h) Entsprechende Aufgaben für das regelmäßige Tetraeder und Oktaeder.

36) a) Wie groß ist der Inhalt eines dreiseitigen Prismas von regelmäßiger Grundfläche und der Grundkante  $k$ , wenn sich ihm eine Kugel einbeschreiben läßt? Wie groß ist dabei der Radius der umbeschriebenen Kugel?

b) Entsprechende Aufgaben für Prismen, deren Grundflächen regelmäßige Sechsecke, Achtecke u. sind.

c) Einer Kugel soll ein regelmäßiges Prisma von quadratischen Seitenflächen einbeschrieben werden. Wie groß sind die Kanten, wenn die Grundfläche 3-, 4-, 5-, 6-seitig gewählt wird?

d) Einer Kugel soll ein regelmäßiges Prisma umbeschrieben werden. Wie groß werden die Kanten, je nachdem die Grundfläche 3-, 4-, 5-, 6-seitig gewählt wird?

e) Einem Kegel vom Grundradius  $r$  und der Höhe  $h$  soll eine Kugel ein-, bzw. umbeschrieben werden. Wie groß werden die Radien?

f) Einem Kegel von denselben Dimensionen soll ein regelmäßiges Prisma mit quadratischen Seitenflächen eingezeichnet werden. Wie groß sind die Kanten, je nachdem das Prisma 3-, 4-, 5-, 6-seitig ist?

Zahlreiche Übungsaufgaben zum Konstruieren und Berechnen findet man in des Verfassers „Einführung in das stereometrische Zeichnen“, besonders auch solche kristallographischer Art. [Man vergleiche auch die beiden ersten Teile seiner vierbändigen Stereometrie (Leipzig bei J. J. Göschen).]



### Zusammenstellung der wichtigsten Ergebnisse.

Es giebt fünf regelmäßige Polyeder.

Von regelmäßigen Dreiecken sind begrenzt: Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder. Von Quadraten begrenzt: Würfel. Von regelmäßigen Fünfecken begrenzt: Pentagondodekaeder. — Pyramidentwürfel und Rhombendodekaeder sind wichtigere Kristallformen. — Bei reziproken Körpern hat der eine ebensoviel Ecken, wie der andere Flächen und ebensoviel Flächen wie der andere Ecken, die Anzahl der Kanten aber ist bei beiden dieselbe. Würfel und regelmäßiges Achteck sind reziproke Körper, ebenso regelmäßiges Zwölfeck und Zwanzigseck. Das regelmäßige Viereck ist zu sich selbst reziprok. Dem Würfel lassen sich zwei regelmäßige Tetraeder einbeschreiben, zwei regelmäßige Dodekaeder umbeschreiben. Dem Oktaeder lassen sich zwei regelmäßige Tetraeder umbeschreiben, zwei regelmäßige Ikosaeder einbeschreiben. Dem regelmäßigen Dodekaeder lassen sich fünf Würfel einbeschreiben, dem regelmäßigen Ikosaeder lassen sich fünf regelmäßige Oktaeder umbeschreiben. Dem regelmäßigen Dodekaeder lassen sich fünf regelmäßige Tetraeder einbeschreiben, die keine Ecke gemein haben. Dem regelmäßigen Ikosaeder lassen sich fünf regelmäßige Tetraeder umbeschreiben, die keine Fläche gemein haben. Dies giebt den Stern der fünf regelmäßigen Tetraeder. Oktaeder und Würfel haben denselben Halbstumpf, der reziprok zum Rhombendodekaeder ist. Ikosaeder und Dodekaeder haben denselben Halbstumpf, der reziprok zu einem Rhombendreieckseck ist.

Senkrechte und schiefe Prismen und Zylinder:  $I = Gh$ .

Diagonale des Rechteckkörpers:  $d = \sqrt{a^2 + b^2 + h^2}$ .

Für ihre Winkel mit den Kanten ist:  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ .

Dabei ist  $\cos \alpha = \frac{a}{d}$ ,  $\cos \beta = \frac{b}{d}$ ,  $\cos \gamma = \frac{c}{d}$ .

Zylinder:  $I = r^2 \pi h$ ,  $M = 2r \pi h = d \pi h$ .

Satz des Cavalieri: Haben zwei Körper in gleichen Höhen flächengleiche endliche Querschnitte, so sind sie inhaltsgleich.



$$\text{Dachkörper: } I = \frac{Gh}{2}.$$

$$\text{Pyramide und Kegel: } I = \frac{Gh}{3}.$$

$$\text{Kreiskegel: } I = \frac{r^2 \pi h}{3}.$$

$$\text{Senkrechter Kreiskegel: } M = r\pi s.$$

$$\text{Kugel: } I = \frac{4}{3} r^3 \pi, \quad O = 4r^2 \pi, \quad I = \frac{Or}{3}.$$

$$\text{Umbeschriebenes Polyeder: } I = \frac{O\rho}{3}$$

Sind einem senkrechten Kreiszylinder von der Höhe  $h = 2r$  eine Kugel und ein Kegel einbeschrieben, so verhalten sich die Inhalte der drei Körper wie 3 : 2 : 1.





### Das griechische Alphabet.

| Groß | Klein      | Benennung in<br>lateinischer Umschrift | Groß | Klein      | Benennung in<br>lateinischer Umschrift |
|------|------------|----------------------------------------|------|------------|----------------------------------------|
| A    | $\alpha$   | alpha                                  | N    | $\nu$      | ny                                     |
| B    | $\beta$    | bēta                                   | Ξ    | $\xi$      | ksi                                    |
| Γ    | $\gamma$   | gamma                                  | O    | $\omicron$ | ōmikron                                |
| Δ    | $\delta$   | delta                                  | Π    | $\pi$      | pī                                     |
| E    | $\epsilon$ | ěpsilon                                | P    | $\rho$     | rhō                                    |
| Z    | $\zeta$    | dsēta (zēta)                           | Σ    | $\sigma$   | sīgma                                  |
| H    | $\eta$     | ēta                                    | T    | $\tau$     | tau                                    |
| Θ    | $\theta$   | thēta                                  | Υ    | $\upsilon$ | ypsilon                                |
| I    | $\iota$    | iōta                                   | Φ    | $\phi$     | phī                                    |
| K    | $\kappa$   | kappa                                  | X    | $\chi$     | chī                                    |
| Λ    | $\lambda$  | lam(b)da                               | Ψ    | $\psi$     | psī                                    |
| M    | $\mu$      | mŷ                                     | Ω    | $\omega$   | ōmega                                  |

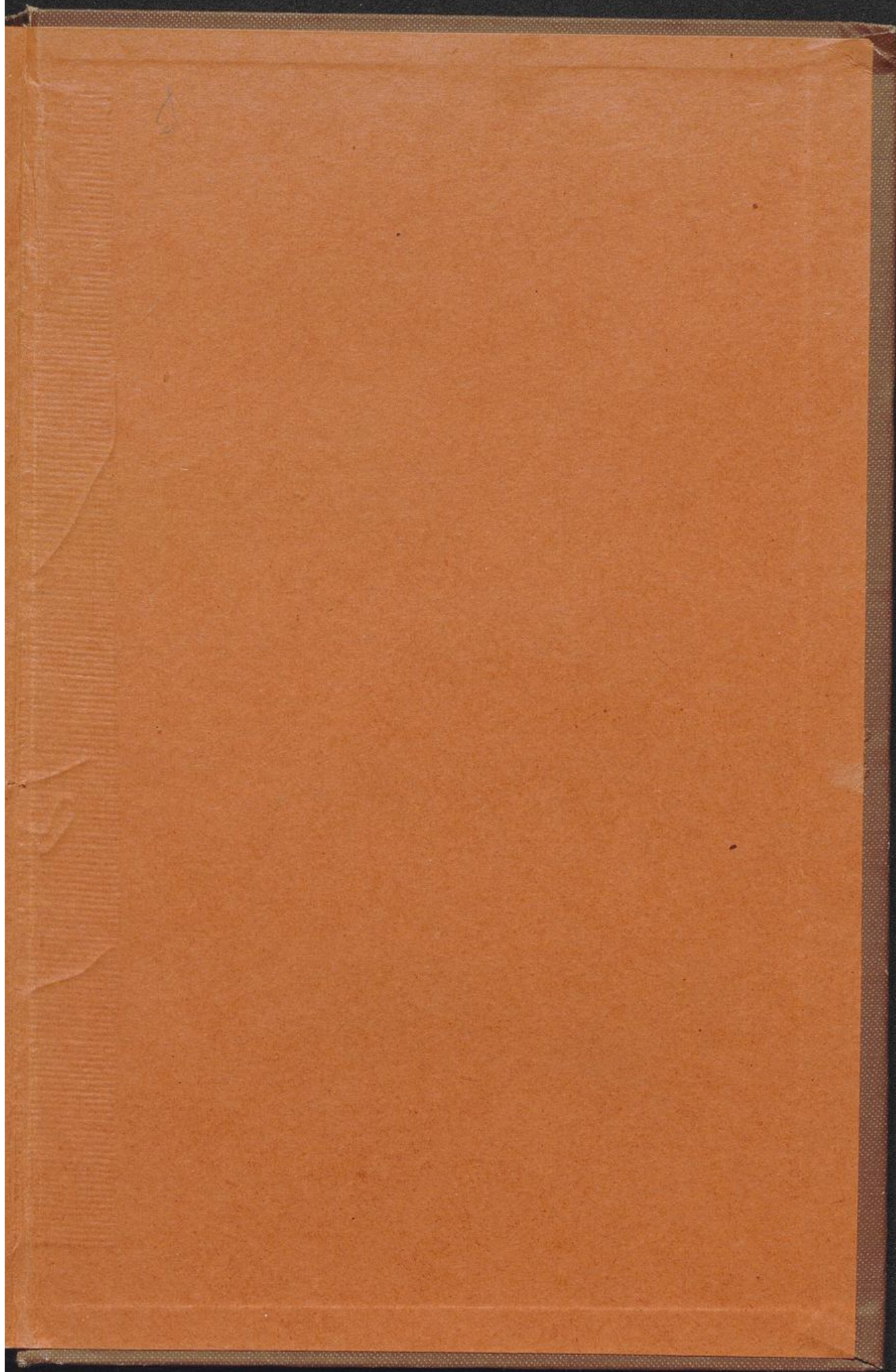
















**03M70790**

Mediennr.: 2579463



P  
03

Hofmüller: Elementar-Geometrie I

M  
70790